

suchten Schwerpunkt O sofort die Abscisse $AE = \frac{3}{8}AQ$ und die Ordinate $EO = \frac{3}{8}NQ$.

Für die ganze Fläche $NAN'N$ liegt der Schwerpunkt offenbar in E .

Anmerkung. Setzt man in Fig. 12 für einen beliebigen Punkt μ der Ordinate PM das Stück $P\mu = y$, dagegen $PM = y'$; so wird, wenn man y um dy zunehmen lässt, das Flächenelement μn , wie es eigentlich sein soll, durch $df = dx dy$ ausgedrückt und es nehmen die obigen Gleichungen (II) in 25. die allgemeinere Form an:

$$F = \iint dx dy, \quad FX = \iint x dx dy \quad \text{und} \quad FY = \iint y dx dy,$$

oder wenn die Gleichung der Curve AND durch $y' = f(x)$, und für die Fläche BN' die Grenzen AB und AB' wie vorhin durch x' und x'' bezeichnet werden, auch:

$$F = \int_{x'}^{x''} dx \int_0^{f(x)} dy, \quad FX = \int_{x'}^{x''} x dx \int_0^{f(x)} dy, \quad FY = \int_{x'}^{x''} dx \int_0^{f(x)} y dy,$$

Relationen, welche auch für ein schiefwinkeliges Achsensystem gelten.

So wäre für das vorige Beispiel der parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14), wenn man $AQ = a$ und $QN = \sqrt{pa} = b$ setzt, wegen $f(x) = \sqrt{px}$, sofort:

$$F = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{px}} dy = \int_0^a dx \cdot \sqrt{px} = \frac{2}{3} a \sqrt{pa} = \frac{2}{3} ab,$$

$$\frac{2}{3} ab X = \int_0^a x dx \int_0^{\sqrt{px}} dy = \sqrt{p} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} a^2 b, \quad \text{daher} \quad X = \frac{3}{5} a,$$

$$\text{und} \quad \frac{2}{3} ab Y = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{px}} y dy = \int_0^a dx \cdot \frac{px}{2} = \frac{a^2 p}{4} = \frac{ab^2}{4}, \quad \text{daher} \quad Y = \frac{3}{8} b,$$

wie oben.

Schwerpunkt krummer Flächen.

(§. 53.)

28. Um den Schwerpunkt einer Rotationsfläche zu finden, sei NN' (Fig. 12) der Bogen von bestimmter Länge einer ebenen Curve AD , welche sich um die Abscissenachse AX umdreht und dadurch eine sogenannte Rotationsfläche erzeugt, deren Schwerpunkt in der Umdrehungsachse AX liegt und sofort bestimmt werden soll.

Bezeichnet man zu diesem Ende die rechth. Coordinaten der Endpunkte N, N' dieses Bogens mit $x'y'$ und $x''y''$, so wie jene eines beliebigen Punktes M desselben mit xy , setzt $Pp = dx$, Bog. $AM = s$ und $Mm = ds$; so erzeugt dieses Bogenelement ds bei der Umdrehung der Curve AD um die Achse AX die Oberfläche eines abgestutzten Kegels, welche (Comp. §. 886) durch $d\omega = 2y\pi ds = 2\pi y dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ ausgedrückt wird.

Die obigen Relationen (II) in 25. gehen daher für den vorliegenden Fall in die folgenden über:

$$\omega X = 2\pi \int_{x'}^{x''} xy \, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \text{ und}$$

$$\omega = 2\pi \int_{x'}^{x''} y \, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

in welchen Relationen man in bestimmten Fällen aus der Gleichung der gegebenen Curve $y = f(x)$ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmen, ferner dessen Werth sammt jenen von y substituiren, und dann die Integrationen innerhalb der betreffenden Grenzen ausführen muss, um die Abscisse X oder den Abstand AO des gesuchten Schwerpunktes O zu erhalten.

29. Ist, als einfachstes Beispiel, NN' eine mit der Achse AX parallele Gerade in dem Abstände r und von der Länge h , also die Rotationsfläche die Mantelfläche eines gemeinen Cylinders vom Halbmesser r und von der Länge h ; so ist wegen $y = r$, also $dy = 0$ sofort:

$$\omega = 2\pi \int_0^h r \, dx = 2r\pi h \text{ und } 2r\pi h X = 2\pi \int_0^h r x \, dx = 2r\pi \frac{h^2}{2},$$

folglich $X = \frac{1}{2}h$, wie sich von selbst versteht.

30. Eine durch den Ursprung A der Coordinaten gehende Gerade $AB = l$ (Fig. 15) erzeugt bei der erwähnten Rotation eine gewöhnliche Kegelfläche, wofür, wenn man die Ordinate $CB = r$ und die Abscisse $AC = h$ setzt, wegen $y = \frac{r}{h}x$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}$, sofort:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \, dx \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2r\pi \sqrt{h^2 + r^2}}{h^2} \int_0^h x \, dx \\ &= \frac{2r\pi l h^2}{h^2} \cdot \frac{1}{2} = r\pi l, \text{ und damit} \end{aligned}$$

$$r\pi l X = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x^2 \, dx \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2r\pi l}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{2}{3} r\pi l h,$$

folglich: $X = \frac{2}{3}h$ wird.

31. Ist die erzeugende Curve ein Kreisbogen NN' (Fig. 16) vom Halbmesser $CA = r$, so entsteht durch die Umdrehung desselben um den Durchmesser AA' eine Kugelzone mit zwei

Grundflächen, und da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ die Gleichung des Kreises ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpunkte C aus zählt, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ und $\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ wird; so hat man nach den beiden Relationen in 28., wegen $CB = x'$ und $CB' = x''$ sofort:

$$\omega = 2\pi \int_{x'}^{x''} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r\pi \int_{x'}^{x''} dx = 2r\pi(x'' - x'),$$

und damit

$$\begin{aligned} 2r\pi(x'' - x') X &= 2\pi \int_{x'}^{x''} x \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= 2r\pi \int_{x'}^{x''} x dx = 2r\pi \left(\frac{x''^2 - x'^2}{2} \right), \end{aligned}$$

woraus endlich folgt: $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$,
so dass also der gesuchte Schwerpunkt O in der halben Höhe der Zone liegt. (§. 55.)

Dasselbe Resultat erhält man offenbar auch für eine Zone mit einer Grundfläche, d. i. für eine Kugelhaube oder Kugelschale, indem man dafür nur $x'' = CA = r$ setzen darf. Auch wird für die Oberfläche der Halbkugel, wegen $x' = 0$ und $x'' = r$, ebenfalls nach dieser Regel $X = \frac{1}{2}r$.

Schwerpunkt der Körper.

(§. 56.)

32. Da bei homogenen Körpern, wie sie hier immer vorausgesetzt werden, das Gewicht dem Volumen proportional ist, das Volumen daher zur grösseren Einfachheit statt dem Gewichte gesetzt werden darf (indem der Factor, welcher das Gewicht der cubischen Einheit bezeichnet, zuletzt überall hinausfällt); so erhält man zur allgemeinen Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers, wenn man dessen Volumen mit V , also ein Element davon mit dV bezeichnet, die nachstehenden (mit jenen in 21. analogen) Gleichungen:

$VX = \int x dV$, $VY = \int y dV$, $VZ = \int z dV$, $V = \int dV$, (III),
wobei sich die Grenzen, innerhalb welcher die Integrationen ausgeführt werden müssen, in den einzelnen speciellen Fällen immer von selbst ergeben.

33. Um z. B. den Schwerpunkt einer Pyramide $ABCD$ (Fig. 17) von einer beliebigen Grundfläche (die hier der Einfach-