und nehme diesen, weil er eine Linie der Schwere ist (indem der Bogen BAB' durch CA in zwei gleiche symmetrische Theile getheilt wird) zur Abscissenachse, sowie den Punct C zum Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten. Setzt man ferner den Halbmesser $CA = r$, Sehne $BB' = a$, Bogen $BAB' = l$, W. $ACB =$ W. $ACB' = i$ und endlich für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens, Bog. $AM = s$, $CP = x$, $PM = y$ und W. $ACM = \alpha$; so ist wegen $\alpha = \frac{s}{r}$, sofort $x = r \, Cos \frac{s}{r}$ und nach der ersten der Relationen (I) in Nr. **21.**:

$$Xl = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} r \, Cos \frac{s}{r} \, \mathrm{d}s \; (= 2\int_0^{\frac{1}{2}l} r \, Cos \frac{s}{r} \, \mathrm{d}s) = 2r^2 \, Sin \frac{l}{2r}$$

oder wegen $a = 2r \, Sin \, i = 2r \, Sin \frac{\frac{1}{2}l}{r} = 2r \, Sin \frac{l}{2r}$, auch:

$$Xl = ra, \text{ woraus auch } l : a = r : X \text{ oder } X = \frac{ra}{l} \,.\,. \text{(I)}$$

folgt, wobei, wenn O den gesuchten Schwerpunct bezeichnet, sofort $X = CO$ ist.

Schwerpunct ebener Flächen.

(§. 47.)

25. Um den Schwerpunct der von der Abscissenachse AX, (Fig. 12), den beiden Ordinaten BN, $B'N'$ und dem entsprechenden Bogen NN' der Curve AD eingeschlossenen ebenen Fläche BN' zu bestimmen, ziehe man zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + \mathrm{d}x$ die rechtwinkeligen Ordinaten $PM = y$ und $pm = y + \mathrm{d}y$, setze $AB = x'$, $AB' = x''$, Fläche $BM = f$, also Fläche $Pm = \mathrm{d}f$, ferner Fläche $BN = F$, und bemerke, dass der Abstand des Schwerpunctes o des Flächenelementes Pm, welches als ein Rechteck anzusehen ist, von der Achse AX gleich $\frac{1}{2}y$ ist; so erhält man mit (I) und (m) in **21.** für den gegenwärtigen Fall die analogen Gleichungen:

$$XF = \int_{x'}^{x''} x \, \mathrm{d}f, \quad YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2} y \, \mathrm{d}f \text{ und } F = \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}f. \quad \text{(II)}$$

(weil nämlich die 3te Relation in z hier wegfällt), wobei y und $\mathrm{d}f$ als Functionen von x auszudrücken sind, also die Gleichung der Curve AD, nämlich $y = f(x)$ gegeben sein muss.

Anmerkung. Die zweite dieser drei Gleichungen fällt wieder weg, wenn die Achse der x zugleich eine Linie der Schwere ist.

26. Um auf diesem Wege den Schwerpunct O eines geradlinigen Dreieckes ABC (Fig. 13) zu bestimmen, lege man dessen Spitze A in den Ursprung der rechtwinkeligen Coordinatenachsen und dessen Basis BC parallel mit der Ordinatenachse AY, halbire ferner BC in D und ziehe die Gerade AD; so ist diese Gerade (weil sie jedes mit BC parallele Flächenelement wie Nm in zwei gleiche Theile theilt, also durch dessen Schwerpunct geht) eine Linie der Schwere, in welcher sofort der Schwerpunct O des Dreieckes liegt. Setzt man daher die Abscisse dieses Punctes $AE = X$, ferner $AP = x$, $Pp = \mathrm{d}x$, $AF = h$, $NM = y$ und $BC = b$; so ist $\mathrm{d}f = y\,\mathrm{d}x$ oder wegen $y : b = x : h$, nämlich $y = \frac{b}{h}x$, auch $\mathrm{d}f = \frac{b}{h}x\,\mathrm{d}x$ und daher

$$F = \int_0^h \frac{b}{h} x\,\mathrm{d}x = \frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \tfrac{1}{2}bh,$$

endlich damit nach der ersten der vorigen Relationen (II):

$$\tfrac{1}{2}bhX = \int_0^h \frac{b}{h}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3}bh^2,$$

woraus endlich folgt:

$$X = \tfrac{2}{3}h.$$

Da aber $AE = \frac{2}{3}AF$ ist, so folgt auch (wie in §. 48) $AO = \frac{2}{3}AD$.

27. Um den Schwerpunct der sogenannten parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14) zu finden, seien für einen beliebigen Punct M der Parabel die rechtw. Ordinaten $AP = x$, $PM = y$, so ist die Gleichung dieser Curve (Comp. §. 482) $y^2 = px$.

Ist ferner $Pp = \mathrm{d}x$, so ist das Flächenelement $Pm = \mathrm{d}f = y\,\mathrm{d}x$ und die ganze Fläche $AMP = F = \int_0^x y\,\mathrm{d}x = \int_0^x \mathrm{d}x\sqrt{px} = \frac{2}{3}xy$. Nach der ersten der Relationen in (II) **25.** erhält man daher $\frac{2}{3}xy \,.\, X = \int_0^x xy\,\mathrm{d}x = \int_0^x x\,\mathrm{d}x\sqrt{px} = \sqrt{p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^2\sqrt{px} = \frac{2}{5}x^2 y$ und daraus: $X = \frac{3}{5}x$.

Aus der zweiten dieser genannten Relationen folgt:

$$\tfrac{2}{3}xy \,.\, Y = \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^x px\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}px^2 = \tfrac{1}{4}xy^2$$

und daraus:

$$Y = \tfrac{3}{8}y.$$

Da nun für die bestimmte Fläche AQN die Abscisse x in AQ und die Ordinate y in NQ übergeht, so ist für den gesuchten Schwerpunct O sofort die Abscisse $AE = \frac{3}{5} AQ$ und die Ordinate $EO = \frac{3}{8} NQ$.

Für die ganze Fläche $NAN'N$ liegt der Schwerpunct offenbar in E.

Anmerkung. Setzt man in Fig. 12 für einen beliebigen Punct μ der Ordinate PM das Stück $P\mu = y$, dagegen $PM = y'$; so wird, wenn man y um dy zunehmen lässt, das Flächenelement μn, wie es eigentlich sein soll, durch $df = dx\,dy$ ausgedrückt und es nehmen die obigen Gleichungen (II) in **25.** die allgemeinere Form an:

$$F = \iint dx\,dy, \quad FX = \iint x\,dx\,dy \quad \text{und} \quad FY = \iint y\,dx\,dy,$$

oder wenn die Gleichung der Curve AND durch $y' = f(x)$, und für die Fläche BN' die Grenzen AB und AB' wie vorhin durch x' und x'' bezeichnet werden, auch:

$$F = \int_{x'}^{x''} dx \int_0^{f(x)} dy, \quad FX = \int_{x'}^{x''} x\,dx \int_0^{f(x)} dy, \quad FY = \int_{x'}^{x''} dx \int_0^{f(x)} y\,dy,$$

Relationen, welche auch für ein schiefwinkeliges Achsensystem gelten.

So wäre für das vorige Beispiel der parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14), wenn man $AQ = a$ und $QN = \sqrt{pa} = b$ setzt, wegen $f(x) = \sqrt{px}$, sofort:

$$F = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{px}} dy = \int_0^a dx . \sqrt{px} = \tfrac{2}{3} a \sqrt{pa} = \tfrac{2}{3} ab,$$

$$\tfrac{2}{3} ab X = \int_0^a x\,dx \int_0^{\sqrt{px}} dy = \sqrt{p} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \tfrac{2}{5} a^2 b, \text{ daher } X = \tfrac{3}{5} a,$$

$$\text{und } \tfrac{2}{3} ab Y = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{px}} y\,dy = \int_0^a dx . \frac{px}{2} = \frac{a^2 p}{4} = \frac{ab^2}{4}, \text{ daher } Y = \tfrac{3}{8} b,$$

wie oben.

Schwerpunct krummer Flächen.

(§. 53.)

28. Um den Schwerpunct einer Rotationsfläche zu finden, sei NN' (Fig. 12) der Bogen von bestimmter Länge einer ebenen Curve AD, welche sich um die Abscissenachse AX umdreht und dadurch eine sogenannte Rotationsfläche erzeugt, deren Schwerpunct in der Umdrehungsachse AX liegt und sofort bestimmt werden soll.

Bezeichnet man zu diesem Ende die rechtw. Coordinaten der Endpuncte N, N' dieses Bogens mit $x'y'$ und $x''y''$, so wie jene eines beliebigen Punctes M desselben mit xy, setzt $Pp = dx$, Bog. $AM = s$ und $Mm = ds$; so erzeugt dieses Bogenelement ds bei der Umdrehung der Curve AD um die Achse AX die Oberfläche eines abgestutzten Kegels, welche (Comp. §. 886) durch $d\omega = 2y\pi\,ds = 2\pi y\,dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ ausgedrückt wird.