

Achse der  $z$  gerichtet sei, d. h. dass sie durch den Ursprung der Coordinaten gehe; dadurch wird die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung  $\Sigma(P[y \text{ Cos } \alpha - x \text{ Cos } \beta]) = 0$  reducirt, so dass also in diesem Falle nur die Summe der stat. Momente in Beziehung auf diese feste Achse  $= 0$  zu sein braucht.

Nimmt man an, dass die sämtlichen Kräfte  $P$  unter einander parallel sind, so darf man nur  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$ ,  $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \dots$  und  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \dots$  setzen, um für das Gleichgewicht aus den Relationen (s) die Bedingungsgleichungen zu erhalten:

$$\begin{aligned} & \text{Cos } \alpha \Sigma(P) = 0, \quad \text{Cos } \beta \Sigma(P) = 0, \quad \text{Cos } \gamma \Sigma(P) = 0, \quad \text{d. i. } \Sigma(P) = 0, \\ \text{und} \quad & \text{Cos } \alpha \Sigma(Py) - \text{Cos } \beta \Sigma(Px) = 0, \quad \text{Cos } \alpha \Sigma(Pz) - \text{Cos } \gamma \Sigma(Px) = 0, \\ & \text{Cos } \beta \Sigma(Pz) - \text{Cos } \gamma \Sigma(Py) = 0, \end{aligned}$$

welchen letzteren Gleichungen genügt wird, wenn

$$\Sigma(Px) = 0, \quad \Sigma(Py) = 0, \quad \Sigma(Pz) = 0 \text{ ist.}$$

Findet das Gleichgewicht nicht statt und haben die Kräfte die Resultirende  $R$ , welche mit den Achsen der  $x, y, z$  beziehungsweise die Winkel  $a, b, c$  bildet, so darf man zur Herstellung des Gleichgewichtes offenbar zu den Kräften  $P, P_1, \dots$  nur noch eine der  $R$  gleiche und gerade entgegengesetzt wirkende Kraft hinzufügen; dadurch gehen die vorigen Bedingungsgleichungen über in folgende:

$$\begin{aligned} & \text{Cos } \alpha \Sigma(P) - R \text{ Cos } a = 0, \quad \text{Cos } \beta \Sigma(P) - R \text{ Cos } b = 0, \quad \text{und} \\ & \text{Cos } \gamma \Sigma(P) - R \text{ Cos } c = 0, \end{aligned}$$

woraus zuerst  $R = \Sigma(P)$  und  $a = \alpha, b = \beta, c = \gamma$  folgt, und, wenn  $x', y', z'$  die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Resultirenden  $R$  sind, ferner:

$$\begin{aligned} & \text{Cos } \alpha [\Sigma(Py) - y' \Sigma(P)] = \text{Cos } \beta [\Sigma(Px) - x' \Sigma(P)], \\ & \text{Cos } \alpha [\Sigma(Pz) - z' \Sigma(P)] = \text{Cos } \gamma [\Sigma(Px) - x' \Sigma(P)], \\ & \text{Cos } \beta [\Sigma(Pz) - z' \Sigma(P)] = \text{Cos } \gamma [\Sigma(Py) - y' \Sigma(P)], \end{aligned}$$

welchen letzteren 3 Gleichungen offenbar für

$$x' = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)}, \quad y' = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)}, \quad z' = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)}$$

Genüge geleistet wird, und welches sofort (Nr. 16, Relat. 3) die Coordinaten des Mittelpunctes der parallelen Kräfte sind.

Auf gleiche Weise hätte man schon in dem allgemeinen, durch die Relationen (s) gegebenen Falle die Resultirende bestimmen können, wenn kein Gleichgewicht vorausgesetzt worden wäre.

## Schwerpunkt der Linien.

(§. 44.)

21. Soll allgemein für irgend eine Curve im Raume  $BB'$  (Fig. 10) der Schwerpunkt bestimmt werden, so beziehe man diese auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem  $AX, AY, AZ$ , bezeichne die Coordinaten irgend eines Punctes  $M$  dieser Curve mit

$x, y, z$  ( $AP = x, AQ = y, AR = z$ ), setze die Länge des variablen Bogens  $BM = s$ , sowie die des ganzen Bogens  $BB' = l$ ; so stellt  $ds$  das diesem Punkte  $M$  entsprechende Curvenelement und da man dieses (nach der in §. 44 gemachten Voraussetzung) gleich unmittelbar statt dem Gewichte des materiellen Punktes  $x, y, z$  setzen kann,  $z ds$  das Moment dieses Gewichtes auf die Ebene der  $xy$  bezogen vor. Bezeichnet man ferner die Werthe von  $s$  auf die Endpunkte  $B, B'$  des Bogens  $BB' = l$  bezogen, beziehungsweise mit  $s_0, s_1$ ; so stellt das bestimmte Integral  $\int_{s_0}^{s_1} z ds$  die algebraische Summe der Momente  $\Sigma(Pz)$  in den Relationen (1) von 16. vor, wobei  $P$  unendlich klein ist und statt  $ds$  steht. Ebenso sind die Integrale  $\int_{s_0}^{s_1} y ds$  und  $\int_{s_0}^{s_1} x ds$  die Summe der Momente dieser Gewichte auf die Ebenen  $xz$  und  $yz$  bezogen, so dass wegen  $R = l$ , die genannten Relationen (1) in 16. zur Bestimmung des Schwerpunktes  $x, y, z$  (dort Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt) einer krummen Linie im Raume, hier in folgende übergehen:

$$Xl = \int_{s_0}^{s_1} x ds, \quad Yl = \int_{s_0}^{s_1} y ds, \quad Zl = \int_{s_0}^{s_1} z ds \dots (I),$$

wobei noch (Relat. 2 in 16.)  $l = \int_{s_0}^{s_1} ds \dots (m)$  ist.

Anmerkung 1. Ist die Linie nicht homogen, ändert sich jedoch das spezifische Gewicht ihrer aufeinanderfolgenden Punkte in stetiger Weise, so ist dasselbe irgend eine Function dieser Punkte, und es ist das Gewicht des Elementes  $ds$  durch  $p ds$  zu bezeichnen, wobei  $p$  eine Function der Coordinaten  $x, y, z$  (oder eigentlich bloss von  $x$ ) der betreffenden Punkte der Curve ist. Ist nun  $P$  das Gewicht der Linie  $l$  (innerhalb der Grenzen  $s_0, s_1$ ); so ist

$$P = \int_{s_0}^{s_1} p ds, \quad PX = \int_{s_0}^{s_1} p x ds, \quad PY = \int_{s_0}^{s_1} p y ds, \quad PZ = \int_{s_0}^{s_1} p z ds.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen folgen wieder die obigen specielleren für den Fall, in welchem die Linie homogen, also  $p$  constant wird;

denn in diesem Falle ist  $\frac{P}{p} = \int_{s_0}^{s_1} ds = l$ , folglich  $lX = \int_{s_0}^{s_1} x ds$  u. s. w.

Anmerkung 2. Um in diesen Formeln nach der Variablen  $s$  integriren zu können, in welchem Falle die Grenzwerte  $s_0, s_1$  unmittelbar gelten, muss man  $x, y, z$  als Functionen von  $s$  darstellen. Man muss dagegen diese Grenzwerte in die entsprechenden  $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$  verwandeln, wenn man für  $ds$  den bekannten Werth  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  setzt und nach

$x, y, z$  integrirt. Welcher Vorgang von beiden der einfachere ist, hängt von Umständen ab, und es lassen sich hierüber keine bestimmten Regeln angeben.

**22.** Ist, um das Verfahren auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, die gegebene Linie eine gerade Linie von der Länge  $BB' = l$ , und bezeichnet man die Winkel, welche diese Gerade mit den Achsen der  $x, y, z$  bildet, beziehungsweise durch  $\alpha, \beta, \gamma$  und die Coordinaten des Anfangspunctes  $B$  mit  $a, b, c$ ; so sind jene irgend eines anderen Punctes  $M$  dieser Geraden:  $x = a + s \text{Cos } \alpha$ ,  $y = b + s \text{Cos } \beta$ ,  $z = c + s \text{Cos } \gamma$ . Substituirt man diese Werthe in die vorigen Gleichungen (I) und führt die ganz einfachen Integrationen innerhalb der Grenzen von  $s = 0$  bis  $s = l$  aus; so erhält man, wenn man auch gleich mit  $l$  durchaus dividirt:  $X = a + \frac{1}{2} l \text{Cos } \alpha$ ,  $Y = b + \frac{1}{2} l \text{Cos } \beta$ ,  $Z = c + \frac{1}{2} l \text{Cos } \gamma$ , woraus sofort folgt, dass der Schwerpunkt dieser geraden Linie (wie es ohnehin bekannt) in ihrem Halbirungspuncte liegt.

Weniger einfach gelangt man zu diesem Resultate durch die zweite vorhin erwähnte Methode, nach welcher man die Gleichungen der Geraden  $BB'$  (d. i.  $x = az + \alpha$ ,  $y = bz + \beta$ , Comp. §. 568) aufstellen, daraus die Differentialquotienten  $\frac{dx}{dz}$ ,  $\frac{dy}{dz}$  entwickeln und in die Gleichung  $ds =$

$$V(dx^2 + dy^2 + dz^2) = dz \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}\right)}, \text{ sowie wieder diesen}$$

Werth in die obigen Relationen (1) substituiren und dann nach  $z$  innerhalb der Grenzen  $x', x'', y', y'', z', z''$  integriren muss, wenn  $x', y', z'$  und  $x'', y'', z''$  die Coordinaten der Endpuncte  $B, B'$  dieser Geraden bezeichnen. Auf diesem Wege erhält man, mit Berücksichtigung der Relation  $l = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$  (Compendium §. 557) sofort  $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$ ,  $Y = \frac{1}{2}(y' + y'')$ ,  $Z = \frac{1}{2}(z' + z'')$ , welches bekanntlich die Coordinaten des Halbirungspunctes dieser Geraden  $BB'$  sind.

**23.** Für eine ebene Curve fällt, wenn man die Ebene, in welcher sie liegt, zur Ebene der  $xy$  nimmt, von den 3 Relationen (I) in **21.** die dritte in  $z$  weg. Ausserdem fällt von diesen Relationen auch noch die zweite, nämlich die in  $y$  weg, wenn man einen Durchmesser der Schwere (§. 43) zur Abscissenachse nimmt.

**24.** Soll z. B. der Schwerpunkt eines Kreisbogens  $BAB'$  (Fig. 11), dessen Mittelpunkt  $C$  ist, gefunden werden, so ziehe man an den Halbirungspunct  $A$  des Bogens den Halbmesser  $CA$

und nehme diesen, weil er eine Linie der Schwere ist (indem der Bogen  $BAB'$  durch  $CA$  in zwei gleiche symmetrische Theile getheilt wird) zur Abscissenachse, sowie den Punct  $C$  zum Anfang der rechtwinkligen Coordinaten. Setzt man ferner den Halbmesser  $CA = r$ , Sehne  $BB' = a$ , Bogen  $BAB' = l$ , W.  $ACB =$  W.  $ACB' = i$  und endlich für einen beliebigen Punct  $M$  des Kreisbogens, Bog.  $AM = s$ ,  $CP = x$ ,  $PM = y$  und W.  $ACM = \alpha$ ; so ist wegen  $\alpha = \frac{s}{r}$ , sofort  $x = r \cos \frac{s}{r}$  und nach der ersten der Relationen (I) in Nr. 21.:

$$Xl = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r \cos \frac{s}{r} ds \quad (= 2 \int_0^{\frac{l}{2}} r \cos \frac{s}{r} ds) = 2r^2 \sin \frac{l}{2r}$$

oder wegen  $a = 2r \sin i = 2r \sin \frac{l}{r} = 2r \sin \frac{l}{2r}$ , auch:

$$Xl = ra, \text{ woraus auch } l : a = r : X \text{ oder } X = \frac{ra}{l} \dots (I)$$

folgt, wobei, wenn  $O$  den gesuchten Schwerpunkt bezeichnet, sofort  $X = CO$  ist.

### Schwerpunkt ebener Flächen.

(§. 47.)

25. Um den Schwerpunkt der von der Abscissenachse  $AX$ , (Fig. 12), den beiden Ordinaten  $BN$ ,  $B'N'$  und dem entsprechenden Bogen  $NN'$  der Curve  $AD$  eingeschlossenen ebenen Fläche  $BN'$  zu bestimmen, ziehe man zu den Abscissen  $AP = x$  und  $Ap = x + dx$  die rechtwinkligen Ordinaten  $PM = y$  und  $p m = y + dy$ , setze  $AB = x'$ ,  $AB' = x''$ , Fläche  $BM = f$ , also Fläche  $Pm = df$ , ferner Fläche  $BN = F$ , und bemerke, dass der Abstand des Schwerpunktes  $o$  des Flächenelementes  $Pm$ , welches als ein Rechteck anzusehen ist, von der Achse  $AX$  gleich  $\frac{1}{2}y$  ist; so erhält man mit (I) und (m) in 21. für den gegenwärtigen Fall die analogen Gleichungen:

$$XF = \int_{x'}^{x''} x df, \quad YF = \int_{x'}^{x''} \frac{1}{2}y df \quad \text{und} \quad F = \int_{x'}^{x''} df. \quad (II)$$

(weil nämlich die 3te Relation in  $z$  hier wegfällt), wobei  $y$  und  $df$  als Functionen von  $x$  auszudrücken sind, also die Gleichung der Curve  $AD$ , nämlich  $y = f(x)$  gegeben sein muss.

Anmerkung. Die zweite dieser drei Gleichungen fällt wieder weg, wenn die Achse der  $x$  zugleich eine Linie der Schwere ist.