d. i. mit Rücksicht auf die beiden erstern der Gleichungen (1), wenn man sogleich mit R abkürzt:

$$Z = aX + bY + \alpha$$

zum Beweis, dass auch der Mittelpunct X, Y, Z ein Punct der angenommenen Ebene ist.

18. Liegen dagegen die sämmtlichen Puncte M, M_1... in einer geraden Linie und nimmt man diese zur Achse der x, so erhält man aus den beiden letzten der Relationen (1) in **16.** wegen

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = 0 \text{ und } z = z_1 = z_2 \ldots = 0,$$

wenn das Gleichgewicht nicht statt hat, also R nicht Null ist (da für das Gleichgewicht dieser Punct X, Y, Z ohnehin nicht besteht), sofort $Y = 0$, $Z = 0$, zum Zeichen, dass in diesem Falle (wie es ohnehin bekannt) der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der nämlichen Geraden liegt.

Anmerkung. Besteht das Gleichgewicht, so folgt aus den obigen Relationen (1) und (2) wegen $R = 0$ sofort:

$$\Sigma(P) = 0, \quad \Sigma(Px) = 0, \quad \Sigma(Py) = 0, \quad \Sigma(Pz) = 0.$$

Besteht dieses nicht, so muss man dem Systeme der parallelen Kräfte noch jene $-R$ hinzufügen, dann ist $-R + \Sigma(P) = 0$,

$$-RX + \Sigma(Px) = 0, \quad -RY + \Sigma(Py) = 0, \quad -RZ + \Sigma(Pz) = 0,$$

d. i. $\quad R = \Sigma(P), \quad RX = \Sigma(Px), \quad RY = \Sigma(Py), \quad RZ = \Sigma(Pz).$

Wäre $R = \Sigma(P) = 0$, ohne dass zugleich auch die durch die Gleichungen $\Sigma(Px) = 0$, $\Sigma(Py) = 0$ und $\Sigma(Pz) = 0$ ausgedrückten Bedingungen stattfänden, so würden die Coordinaten X, Y, Z Unendlich, zum Zeichen, dass sich die Kräfte auf ein sogenanntes Kräftepaar reduciren.

Satz der statischen Momente.

(§. 32.)

19. Wirken auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 8) beliebig viele in ein und derselben Ebene liegende Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen, und fällt man aus irgend einem, in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte oder deren Verlängerungen die Perpendikel Oa, $Oa_1 \ldots$ und bezeichnet ihre Grösse oder Länge beziehungsweise durch $p, p_1, p_2 \ldots$ so sind Pp, $P_1 p_1$ u. s. w. die statischen Momente dieser Kräfte in Beziehung auf den Punct O.

Nimmt man die durch diesen Punct O und den Angriffspunct A gezogene Gerade XX' zur Abscissen- und die durch A darauf perpendikuläre Gerade YY' zur Ordinatenachse, bezeichnet die Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit XX' einschliessen, wie in Nr. **10** durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ zerlegt wieder, wie dort, jede dieser Kräfte in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte, nämlich nach AX und AY, und bezeichnet gerade so wie dort die Mittelkraft aus allen nach der Achse XX' wirksamen Seitenkräfte mit P', sowie jene nach YY' wirkenden Kräfte mit Q', so dass also (wie in **11**) $P' = P\, Cos\, \alpha + P_1\, Cos\, \alpha_1 + \ldots$ und $Q' = P\, Sin\, \alpha + P_1\, Sin\, \alpha_1 + \ldots$ wird; so hat man aus dieser letzteren Relation, wenn man den willkürlichen Abstand $AO = u$ setzt, wodurch

$$Sin\, \alpha = \frac{p}{u},\ Sin\, \alpha_1 = \frac{p_1}{u},\ Sin\, \alpha_2 = \frac{p_2}{u} \ldots$$

wird, sofort:

$$Q' = P\frac{p}{u} + P_1\frac{p_1}{u} + \ldots,$$

oder wenn man durchaus mit u multiplicirt:

$$Q'u = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots (m).$$

Ist nun R die Resultirende aus diesen Kräften $P, P_1 \ldots$ also auch der beiden Mittelkräfte P', Q', und fällt man auf diese Kraft ebenfalls aus O das Perpendikel Ob, dessen Länge r heissen soll, so ist nach dem Satze (1) in §. 29 $Rr = Q'q' + P'p'$, oder da hier $q' = u$ und $p' = 0$ ist, auch $Rr = Q'u$ (was auch unmittelbar aus dem Satze in §. 29 folgt, nach welchem $Rr = Q_1 q_1$ ist), und wenn man für $Q'u$ den Werth aus der vorigen Relation (m) setzt:

$$Rr = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots (1).$$

Anmerkung 1. Die in dieser algebraischen Summe vorkommenden Glieder werden positiv oder negativ, je nachdem (da man die sämmtlichen Kräfte P als positiv anzusehen hat) die Perpendikel $p = u\, Sin\, \alpha,\ p_1 = u\, Sin\, \alpha_1 \ldots$ positiv oder negativ ausfallen, d. h. je nachdem die entsprechenden Winkel α im 1ten und 2ten oder 3ten und 4ten Quadranten liegen.

Auch lässt sich dieser Gegensatz in den Zeichen der Glieder Pp leicht dadurch finden, dass man sich die sämmtlichen Perpendikel $p, p_1 \ldots$ im Puncte O fest mit einander verbunden, zugleich aber um diesen Punct drehbar denkt und sich vorstellt, dass die Kräfte $P, P_1 \ldots$ an ihren Endpuncten $a, a_1 \ldots$ wirksam sind; dann bilden die Kräfte, wie hier P und P_1, welche das System von $Oa, Oa_1 \ldots$ nach der einen Richtung drehen wollen, den Gegensatz zu jenen, wie hier P_2, welche dieses System nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben. Die Resultirende sucht das System im positiven oder negativen Sinne zu drehen, je nachdem die algebraische Summe der Glieder Pp (wobei man willkürlich die eine oder die andere Richtung als die positive annehmen kann) positiv oder negativ ausfällt.

Anmerkung 2. Da für den Fall des Gleichgewichtes, wegen $R = 0$, sofort $Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0 \ldots (u)$ wird, so folgt, dass in diesem Falle die Summe der statischen Momente jener Kräfte, welche das genannte System nach einer Richtung zu drehen suchen, gleich sein muss der Summe der statischen Momente der übrigen, d. h. jener Kräfte, welche das System nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben. Ausserdem müssen auch noch, wenn O ein freier Punct ist, die beiden Bedingungsgleichungen (**12.**) $P' = 0$ und $Q' = 0$ bestehen. (Diese letztere Gleichung $Q' = 0$ ist übrigens schon eine Folge von jener $R = 0$, indem $Rr = Q'q' = Q'u$, und u von Null verschieden ist.)

Ist dagegen O ein fester Drehungspunct, so ist das Gleichgewicht von der Bedingungsgleichung $P' = 0$ unabhängig, d. h. diese Gleichung braucht nicht stattzufinden.

Anmerkung 3. Lässt man, ohne die Grösse der Perpendikel $p, p_1, p_2 \ldots$ zu ändern, die ganz willkürliche Distanz $AO = u$ allmählich zunehmen und setzt endlich $u = \infty$, so laufen zuletzt die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ unter einander parallel, ohne dass dadurch die obige Relation (1), in welcher diese Grösse u nicht mehr vorkommt oder hinausgefallen ist, ihre Giltigkeit verliert (§. 33).

20. Die vorige Relation (1) gilt aber nicht bloss für den Fall, in welchem die Kräfte $P, P_1 \ldots$ auf einen einzigen Punct, sondern auch wenn diese auf verschiedene, mit den Kräften in derselben Ebene liegende, jedoch fest mit einander verbundene Puncte $A, A_1, A_2 \ldots$ (Fig. 9) wirken. Denn sucht man zuerst zu den beiden Kräften P und P_1, welche sich in M schneiden, die Mittelkraft R, ferner zu dieser und der 3ten Kraft P_2, welche sich in N schneiden sollen, die Mittelkraft R_1 u. s. w. fort, fällt dann aus irgend einem in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte $P, P_1 \ldots R, R_1 \ldots$ die Perpendikel $Oa = p$, $Oa_1 = p_1 \ldots$ $Ob = r$, $Ob_1 = r_1 \ldots$; so folgt nach der genannten Relation (1) der vorigen Nummer: $Rr = Pp + P_1 p_1$, ferner ebenso:

$$R_1 r_1 = Rr + P_2 p_2 = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt und die letzte Resultirende aus sämmtlichen Kräften wieder durch R, das aus O darauf gefällte Perpendikel durch r bezeichnet, endlich wie zuvor:

$$Rr = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = \Sigma(Pp) \ldots (2).$$

Anmerkung 1. Bezieht man die Angriffspuncte $A, A_1 \ldots$ auf zwei willkürliche in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen, und zerlegt jede der gegebenen Kräfte $P, P_1 \ldots$ in zwei mit diesen Achsen parallele Kräfte, deren Angriffspuncte man sich in diese Achsen verlegt denken kann; so erhält man genau so wie in **10.**, wenn man die dortige Bezeichnung der Winkel, welche die Kräfte P, $P_1 \ldots$ mit der Achse XX' bilden, beibehält, zwei Gruppen von parallelen Kräften, von denen die mit der Achse XX' parallele Gruppe die Resultirende $P' = \Sigma(P \, Cos \, \alpha)$ und die mit YY' parallele die Mittelkraft $Q' = \Sigma(P \, Sin \, \alpha)$ besitzt.

Soll also hier das Gleichgewicht stattfinden, so müssen gleichzeitig die drei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\Sigma(P \, Cos \, \alpha) = 0, \quad \Sigma(P \, Sin \, \alpha) = 0, \quad \Sigma(Pp) = 0 \quad (l).$$

Auch lassen sich die in der vorigen allgemeinen Gleichung (2) vorkommenden Producte oder stat. Momente so ausdrücken, dass dadurch zugleich die Zeichen der Perpendikel r, p, $p_1 \ldots$ in die Augen fallen.

Nimmt man nämlich zuerst nur zwei Kräfte P, P_1 an und bezieht diese auf ein durch den Punct O gehendes rechtwinkeliges Achsensystem, bezeichnet die Coordinaten der Angriffspuncte A, A_1 dieser Kräfte beziehungsweise mit x, y und x_1, y_1, die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 und ihre Resultirende R mit der Abscissenachse bilden, mit α, α_1 und a; so erhält man für die aus dem Anfangspunct O auf die Richtungen der Kräfte P, P_1, R gefällten Perpendikel p, p_1, r, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke

$$p = y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha, \quad p_1 = y_1 \, Cos \, \alpha_1 - x_1 \, Sin \, \alpha_1$$

und wenn X, Y die Coordinaten irgend eines Punctes der Resultirenden R sind,

$$r = Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a.$$

Dadurch erhält also die obige Gleichung $Rr = Pp + P_1 p_1$ die Form:

$$R(Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a) = P(y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha) + P_1(y_1 \, Cos \, \alpha_1 - x_1 \, Sin \, \alpha_1).$$

Verbindet man jetzt gerade so, wie es vorhin geschehen, diese Resultirende R mit der dritten Kraft P_2 und setzt für R, P_2 und ihre Resultirende R' die der vorigen analoge Gleichung an, verbindet ferner R' mit P_3 u. s. w. fort, bis man auf diese Weise zur letzten Kraft gekommen ist, und bezeichnet die letzte Resultirende wieder mit R, die Coordinaten eines ihrer Puncte durch X, Y, sowie den Winkel, welchen sie mit der Abscissenachse bildet, durch a; so ist die der vorigen analoge Gleichung:

$$R(Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a) = \Sigma[P(y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha)] \quad (m),$$

welche den Abstand $r = Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a$ angibt, in welchem die Resultante R vom Anfangspuncte der Coordinaten durchgeht, während die beiden obigen Gleichungen $P' = R \, Cos \, a$ und $Q' = R \, Sin \, a$, d. i.

$$R \, Cos \, a = \Sigma(P \, Cos \, \alpha) \text{ und } R \, Sin \, a = \Sigma(P \, Sin \, \alpha) \ldots (n),$$

die Grösse und Richtung derselben angeben.

Nach den vorhin aufgestellten Bedingungsgleichungen (l) folgt, dass eine beliebige Anzahl von in derselben Ebene liegenden Kräften im Gleichgewichte steht, wenn 1. die Summe der Seitenkräfte derselben nach den Richtungen zweier beliebiger in dieser Ebene angenommenen rechtwinkeligen Achsen jede für sich gleich Null, und 2. die Summe der statischen Momente der Kräfte in Beziehung auf irgend einen in der Ebene angenommenen Punct ebenfalls gleich Null ist.

Hätte die Ebene, in welcher die Kräfte liegen, einen festen Punct, so wäre es nicht mehr nothwendig, dass ihre Resultirende $= 0$ sei, sondern es würde für das Gleichgewicht hinreichen, dass diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so reducirt sich in diesem Falle die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(Pp) = 0$, während der Werth der Resultante

$$R = \sqrt{\{[\Sigma(P \, Cos\,\alpha)]^2 + [\Sigma(P \, Sin\,\alpha)]^2\}}$$

den Druck gegen diesen festen Punct angibt.

Wären die sämmtlichen Kräfte parallel, so wäre $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, folglich hätte man $R \, Cos\, a = Cos\,\alpha\, \Sigma(P)$, $R \, Sin\, a = Sin\,\alpha\, \Sigma(P)$ und $Rr = \Sigma(Pp)$, woraus sofort

$tang\, a = tang\, \alpha$, also auch $Cos\, a = Cos\,\alpha$, $Sin\, a = Sin\,\alpha$ und $R = \Sigma(P)$

folgt; es ist also die Resultante in diesem Falle (wie bekannt) den Seitenkräften parallel und ihrer Summe gleich.

Für das Gleichgewicht ist $R = 0$, also $\Sigma(P) = 0$ und $\Sigma(Pp) = 0$.

Anmerkung 2. Wir können jetzt auch auf den allgemeinen Fall übergehen und die Gleichgewichtsbedingungen für ein System von fest mit einander verbundenen Puncten bestimmen, auf welche Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raume wirken.

Es seien nämlich P, P_1, $P_2 \ldots$ diese Kräfte; x, y, z, x_1, y_1, z_1 u. s. w. die auf irgend ein rechtwinkeliges Achsensystem bezogenen Coordinaten ihrer Angriffspuncte; α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 u. s. w. die Winkel, welche die Kräfte beziehungsweise mit den Achsen der x, y, z bilden. Diess vorausgesetzt, zerlege man jede Kraft P in drei mit den Coordinatenachsen parallele Kräfte, so sind diese (Nr. **14**) für die Kraft P beziehungsweise $P \, Cos\,\alpha$, $P \, Cos\,\beta$, $P \, Cos\,\gamma$; für jene P_1: $P_1 \, Cos\,\alpha_1$, $P_1 \, Cos\,\beta_1$, $P_1 \, Cos\,\gamma_1$ u. s. w. Man verlängere ferner die (mit der Achse der x parallele) Kraft $P \, Cos\,\alpha$ bis zu ihrem Durchschnitt N (Fig. 9, a) mit der Ebene der yz; so hat dieser Punct N die Coordinaten $An = y$ und $Am = z$. Zerlegt man diese Kraft $P \, Cos\,\alpha$ in zwei gleiche mit ihr parallele Kräfte, welche in derselben, und zwar in der durch pq gehenden Ebene liegen (wofür $Np = Nq$ ist), so fällt von diesen beiden, mit der Achse der x parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P \, Cos\,\alpha$, eine in die Ebene der xy und hat von der Achse der x den Abstand $Ap = 2An = 2y$, und die andere in die Ebene der xz in den Abstand $Aq = 2Am = 2z$ von dieser Achse.

Zerlegt man auf gleiche Weise auch die übrigen mit der Achse der x parallelen Kräfte $P_1 \, Cos\,\alpha_1 \ldots$ jede in zwei gleiche dieser Achse parallele Kräfte, so erhält man für das System der mit der Achse der x parallelen Seitenkräfte zwei Gruppen solcher mit dieser Achse paralleler Kräfte $\frac{1}{2} P \, Cos\,\alpha$, $\frac{1}{2} P_1 \, Cos\,\alpha_1 \ldots$, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xy in den Entfernungen beziehungsweise $2y$, $2y_1 \ldots$ und die zweite in der Ebene der xz in den Entfernungen $2z$, $2z_1 \ldots$ wirksam ist.

Ebenso kann man das der Achse der y parallele System der Seitenkräfte $P \, Cos\,\beta$, $P_1 \, Cos\,\beta_1 \ldots$ durch zwei Gruppen dieser Achse parallele Kräfte ersetzen, von denen die eine in der Ebene der xy in den Entfernungen

$2x$, $2x_1 \ldots$ und die andere Gruppe in der Ebene der yz in den Entfernungen $2z$, $2z_1 \ldots$ wirksam ist.

Endlich kann man auch für das dritte System der mit der Achse der z parallelen Seitenkräfte $P\, Cos\, \gamma$, $P_1\, Cos\, \gamma_1 \ldots$ zwei Gruppen von mit derselben Achse der z parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P\, Cos\, \gamma$, $\frac{1}{2} P_1\, Cos\, \gamma_1 \ldots$ substituiren, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xz liegt und deren einzelnen Kräfte die Abstände $2x$, $2x_1 \ldots$, die andere in der Ebene der yz wirksam ist, und die Abstände $2y$, $2y_1 \ldots$ von dieser Achse der z haben.

Durch dieses Verfahren hat man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, $P_1 \ldots$ welche ganz willkürliche Richtungen im Raume haben können, durchaus Kräfte erhalten, welche lediglich in den 3 coordinirten Ebenen wirksam, und darin in je zwei, beziehungsweise mit den in diesen Ebenen liegenden Achsen parallelen Gruppen vertheilt sind; es ist klar, dass wenn in jeder dieser 3 coordinirten Ebenen Gleichgewicht besteht, auch das ganze System im Gleichgewichte sein muss.

Nun sind aber die Bedingungen für das Gleichgewicht in den 3 genannten Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise (nach den vorigen Relationen (n) und (m), wenn man $R = 0$ setzt):

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\, \alpha) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\, \beta) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P[2y\, Cos\, \alpha - 2x\, Cos\, \beta]) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\, \alpha) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\, \gamma) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P[2z\, Cos\, \alpha - 2x\, Cos\, \gamma]) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\, \beta) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\, \gamma) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P[2z\, Cos\, \beta - 2y\, Cos\, \gamma]) = 0.$$

Da jedoch diese 9 Gleichungen nur 6 verschiedene ausmachen, so wird das angenommene freie System im Gleichgewichte sein, wenn die Kräfte P, $P_1 \ldots$ folgenden 6 Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$(s)\ \begin{cases} \Sigma(P\, Cos\, \alpha) = 0,\ \Sigma(P\, Cos\, \beta) = 0,\ \Sigma(P\, Cos\, \gamma) = 0, \\ \Sigma(P[y\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \beta]) = 0, \\ \Sigma(P[z\, Cos\, \alpha - x\, Cos\, \gamma]) = 0, \\ \Sigma(P[z\, Cos\, \beta - y\, Cos\, \gamma]) = 0. \end{cases}$$

Auch lässt sich leicht zeigen, dass ohne Erfüllung dieser 6 Gleichungen, von denen die 3 ersteren stattfinden müssen, damit keine fortschreitende, die 3 letzteren dagegen, damit keine drehende Bewegung in dem Systeme eintritt, das Gleichgewicht nicht bestehen kann.

Ist das System nicht frei, sondern z. B. durch einen festen Punct gehalten, um welchen es rotiren kann; so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dass die Resultirende Null sei, sondern es genügt, dass diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so bilden die 3 letzten Gleichungen der vorigen Relationen (s) die hier nöthigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht (weil jetzt r statt R Null ist).

Wird das System durch zwei feste Puncte oder durch eine feste Achse gehalten, so werden alle zu dieser Achse parallelen und auf diese perpendiculären Kräfte durch ihren Widerstand aufgehoben. Nimmt man daher diese Achse zu einer der Coordinatenachsen, z. B. für jene der z, so werden alle in den Ebenen der xz und yz liegenden Kräfte aufgehoben oder vernichtet und es wird also für das Gleichgewicht nur nöthig sein, dass die Resultante der in der Ebene der xy wirksamen Kräfte nach der

Achse der z gerichtet sei, d. h. dass sie durch den Ursprung der Coordinaten gehe; dadurch wird die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(P[y \, Cos\, \alpha - x \, Cos\, \beta]) = 0$ reducirt, so dass also in diesem Falle nur die Summe der stat. Momente in Beziehung auf diese feste Achse $= 0$ zu sein braucht.

Nimmt man an, dass die sämmtlichen Kräfte P unter einander parallel sind, so darf man nur $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots$ und $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots$ setzen, um für das Gleichgewicht aus den Relationen (s) die Bedingungsgleichungen zu erhalten:

$$Cos\, \alpha \, \Sigma(P) = 0,\quad Cos\, \beta \, \Sigma(P) = 0,\quad Cos\, \gamma \, \Sigma(P) = 0, \text{ d. i. } \Sigma(P) = 0,$$

und

$$Cos\, \alpha \, \Sigma(Py) - Cos\, \beta \, \Sigma(Px) = 0,\quad Cos\, \alpha \, \Sigma(Pz) - Cos\, \gamma \, \Sigma(Px) = 0,$$

$$Cos\, \beta \, \Sigma(Pz) - Cos\, \gamma \, \Sigma(Py) = 0,$$

welchen letzteren Gleichungen genügt wird, wenn

$$\Sigma(Px) = 0,\quad \Sigma(Py) = 0,\quad \Sigma(Pz) = 0 \text{ ist.}$$

Findet das Gleichgewicht nicht statt und haben die Kräfte die Resultirende R, welche mit den Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel a, b, c bildet, so darf man zur Herstellung des Gleichgewichtes offenbar zu den Kräften P, $P_1 \ldots$ nur noch eine der R gleiche und gerade entgegengesetzt wirkende Kraft hinzufügen; dadurch gehen die vorigen Bedingungsgleichungen über in folgende:

$$Cos\, \alpha \, \Sigma(P) - R \, Cos\, a = 0,\quad Cos\, \beta \, \Sigma(P) - R \, Cos\, b = 0, \text{ und}$$

$$Cos\, \gamma \, \Sigma(P) - R \, Cos\, c = 0,$$

woraus zuerst $R = \Sigma(P)$ und $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ folgt, und, wenn x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Resultirenden R sind, ferner:

$$\begin{aligned} Cos\, \alpha \, [\Sigma(Py) - y' \, \Sigma(P)] &= Cos\, \beta \, [\Sigma(Px) - x' \, \Sigma(P)], \\ Cos\, \alpha \, [\Sigma(Pz) - z' \, \Sigma(P)] &= Cos\, \gamma \, [\Sigma(Px) - x' \, \Sigma(P)], \\ Cos\, \beta \, [\Sigma(Pz) - z' \, \Sigma(P)] &= Cos\, \gamma \, [\Sigma(Py) - y' \, \Sigma(P)], \end{aligned}$$

welchen letzteren 3 Gleichungen offenbar für

$$x' = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad y' = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad z' = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)}$$

Genüge geleistet wird, und welches sofort (Nr. **16**, Relat. 3) die Coordinaten des Mittelpunctes der parallelen Kräfte sind.

Auf gleiche Weise hätte man schon in dem allgemeinen, durch die Relationen (s) gegebenen Falle die Resultirende bestimmen können, wenn kein Gleichgewicht vorausgesetzt worden wäre.

Schwerpunct der Linien.

(§. 44.)

21. Soll allgemein für irgend eine Curve im Raume BB' (Fig. 10) der Schwerpunct bestimmt werden, so beziehe man diese auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ, bezeichne die Coordinaten irgend eines Punctes M dieser Curve mit