fallende Componenten, so werden davon jene, welche in die Achse der z fallen, durch den Widerstand der festen Oberfläche oder Curve aufgehoben und es bleiben für das Gleichgewicht nur noch die beiden Gleichungen zu erfüllen:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) = 0.$$

Ersetzt man den genannten Widerstand durch eine in der Richtung der Normale fallende Kraft N, so kann man den Angriffspunct sämmtlicher Kräfte wieder als einen ganz freien ansehen und man hat, wenn a, b, c die Winkel dieser Kraft N mit den Coordinatenachsen sind, nach den obigen Relationen für das Gleichgewicht:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) + N \operatorname{Cos} a = 0,\ \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) + N \operatorname{Cos} b = 0,\ \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma) + N \operatorname{Cos} c = 0,$$

woraus man noch ganz einfach findet:

$$N = \sqrt{(\Sigma P \operatorname{Cos} \alpha)^2 + (\Sigma P \operatorname{Cos} \beta)^2 + (\Sigma P \operatorname{Cos} \gamma)^2},$$

d. h. die Grösse oder Intensität dieser Kraft oder dieses Widerstandes N ist gleich der Resultante der auf den genannten Punct wirkenden Kräfte.

Anmerkung 3. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$R^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 = \overline{\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha)}^2 + \overline{\Sigma(P \operatorname{Cos} \beta)}^2 + \overline{\Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma)}^2,$$

und wenn man substituirt, entwickelt und ordnet:

$$\begin{aligned} R^2 = {} & P^2(\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2) + P_1^2(\operatorname{Cos} \alpha_1^2 + \operatorname{Cos} \beta_1^2 + \operatorname{Cos} \gamma_1^2) + \ldots \\ & + 2PP_1(\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_1 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_1 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_1) \\ & + 2PP_2(\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_2 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_2 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_2) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

oder wegen $\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2 = \operatorname{Cos} \alpha_1^2 + \operatorname{Cos} \beta_1^2 + \operatorname{Cos} \gamma_1^2 = \ldots = 1$

und $\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_1 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_1 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_1 = \operatorname{Cos} \widehat{PP_1}$

$\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_2 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_2 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_2 = \operatorname{Cos} \widehat{PP_2}$

u. s. w.

auch

$$\begin{aligned} R^2 = {} & (P^2 + P_1^2 + \ldots) + 2PP_1 \operatorname{Cos} \widehat{PP_1} + 2PP_2 \operatorname{Cos} \widehat{PP_2} + \ldots \\ & + 2P_1P_2 \operatorname{Cos} \widehat{P_1P_2} + 2P_1P_3 \operatorname{Cos} \widehat{P_1P_3} + \ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

d. i. endlich:

$$R^2 = \Sigma(P^2) + 2\Sigma(PP_1 \operatorname{Cos} \widehat{PP_1}).$$

Allgemeine Bestimmung des Mittelpunctes paralleler Kräfte.

(§. 23.)

15. Wirken auf ein System von beliebigen, fest mit einander verbundenen Puncten $M, M_1, M_2 \ldots$ (Fig. 7) nach parallelen, sonst aber beliebigen Richtungen die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$, so beziehe man, zur Bestimmung ihrer Resultirenden, dieses System auf irgend drei rechtwinkelige Coordinatenachsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Coordinaten des Angriffspunctes M durch x, y, z, jene des

Punctes M_1 durch x_1, y_1, z_1 u. s. w., sowie endlich jene des Angriffspunctes der Resultirenden R, d. i. des Mittelpunctes der parallelen Kräfte durch X, Y, Z; fälle ferner aus diesen Puncten $M, M_1 \ldots$ auf die Ebene der xy die Perpendikel $Mm = z$, $M_1 m_1 = z_1$, $M_2 m_2 = z_2$ u. s. w. und ziehe in der durch zz_1 gedachten Ebene $M_1 m$ durch M die Gerade MB parallel zu mm_1 (als Durchschnittslinie der beiden Ebenen $M_1 m$ und xy). Diess vorausgesetzt, liegt der Angriffspunct N der Mittelkraft aus den beiden Kräften P, P_1, je nachdem diese nach einerlei oder nach entgegengesetzten Richtungen wirken (§§. 20 und 21), entweder in der bestimmten Geraden MM_1 oder in ihrer Verlängerung; nimmt man hier den ersten Fall an (da der letztere ohnehin aus dem erstern folgt), so hat man (§. 20), indem diese Mittelkraft $= P + P_1$ ist:

$$P_1 : (P + P_1) = MN : MM_1 = NC : M_1 B \quad \text{(§. 20, Relat. [4])}$$

(wenn man auch noch aus N auf die Ebene der xy das in der Ebene $M_1 m$ liegende Perpendikel Nn fällt), nämlich $(P + P_1)\, NC = P_1 . M_1 B$, oder wenn man beiderseits die identische Gleichung

$$(P + P_1)\, Cn = P . Mm + P_1 . Bm_1$$

(wegen $Cn = Mm = Bm_1$) addirt und reducirt, auch:

$$(P + P_1)\, Nn = P . Mm + P_1 . M_1 m_1 = Pz + P_1 z_1;$$

es ist nämlich, wenn man das Product aus der Kraft in das aus ihrem Angriffspunct auf die Ebene der xy gefällte Perpendikel Moment dieser Kraft in Bezug auf diese Ebene nennt, sofort das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

Ist ferner N_1 der Angriffspunct der Resultirenden $P + P_1 + P_2$ aus dieser Mittelkraft $P + P_1$ und der dritten in M_2 wirkenden parallelen Kraft P_2, und zieht man wieder $N_1 n_1$ perpendikulär auf die Ebene xy; so hat man ebenso nach diesem Satze:

$$(P + P_1 + P_2)\, N_1 n_1 = (P + P_1)\, Nn + P_2 . M_2 m_2,$$

oder wenn man für $(P + P_1)\, Nn$ den vorigen Werth setzt:

$$(P + P_1 + P_2)\, N_1 n_1 = Pz + P_1 z_1 + P_2 z_2,$$

wobei diese Summen immer nur im algebraischen Sinne zu verstehen sind.

Fährt man nun auf diese Weise fort, bis auch die letzte parallele Kraft verbunden ist, so erhält man endlich die Relation:

$$RZ = Pz + P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots = \Sigma (Pz) \quad (k),$$

wobei $R = P + P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma (P)$ ist.

16. Fällt man nun auch auf die beiden übrigen coordinirten Ebenen der xz und yz aus den oben genannten Angriffspuncten $M, M_1 \ldots$ die Perpendikel, so sind diese nichts anders als beziehungsweise die Ordinaten $y, y_1 \ldots$ und $x, x_1 \ldots$ der Puncte $M, M_1 \ldots$ und man erhält analog mit der vorigen Relation (k) ebenso $RY = \Sigma(Py)$ und $RX = \Sigma(Px)$, so, dass man also zur Bestimmung des Mittelpunctes der parallelen Kräfte die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} RX &= Px + P_1 x_1 + \ldots = \Sigma(Px) \\ RY &= Py + P_1 y_1 + \ldots = \Sigma(Py) \\ RZ &= Pz + P_1 z_1 + \ldots = \Sigma(Pz) \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

und
$$R = P + P_1 + \ldots = \Sigma(P) \ldots . (2),$$
aus welchen sich für diesen Punct die Coordinaten ergeben:

$$X = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\ Y = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\ Z = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)} \ldots (3)$$

und wobei die sämmtlichen Summen im algebraischen Sinne zu nehmen sind.

17. Liegen alle Angriffspuncte $M, M_1 \ldots$ in ein und derselben Ebene, und nimmt man diese zur Vereinfachung der Rechnung als eine der drei coordinirten Ebenen, z. B. zur Ebene der xy; so werden die sämmtlichen durch $z, z_1, z_2 \ldots$ bezeichneten Ordinaten Null, und man erhält aus der 3ten der vorigen Relationen (1) $RZ = 0$, also, wenn R nicht Null ist (d. h. das Gleichgewicht nicht besteht), $Z = 0$, zum Beweis, dass in diesem Falle der Mittelpunct der parallelen Kräfte in derselben Ebene der Angriffspuncte $M, M_1 \ldots$ liegt.

Zur Bestimmung dieses Punctes genügen daher (die Puncte $M, M_1 \ldots$ auf zwei in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen bezogen) die beiden Gleichungen: $RX = \Sigma(Px)$ und $RY = \Sigma(Py)$, wobei $R = \Sigma(P)$ ist.

Anmerkung. Nimmt man (zur Uebung) an, dass die sämmtlichen Angriffspuncte in einer Ebene liegen, deren Gleichung auf das bereits angenommene Coordinatensystem $z = ax + by + \alpha$ ist; so hat man für den Punct M die eben angeführte, für den Punct M_1 die Gleichung $z_1 = ax_1 + by_1 + \alpha$, für den Punct M_2 jene $z_2 = ax_2 + by_2 + \alpha$ u. s. w.

Diese Werthe von $z, z_1 \ldots$ in der 3ten der obigen Gleichungen (1) substituirt und geordnet erhält man:

$$RZ = a(Px + P_1 x_1 + \ldots) + b(Py + P_1 y_1 + \ldots) + \alpha(P + P_1 + \ldots)$$

d. i. mit Rücksicht auf die beiden erstern der Gleichungen (1), wenn man sogleich mit R abkürzt:

$$Z = aX + bY + \alpha$$

zum Beweis, dass auch der Mittelpunct X, Y, Z ein Punct der angenommenen Ebene ist.

18. Liegen dagegen die sämmtlichen Puncte M, M_1 . . in einer geraden Linie und nimmt man diese zur Achse der x, so erhält man aus den beiden letzten der Relationen (1) in **16.** wegen

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = 0 \text{ und } z = z_1 = z_2 \ldots = 0,$$

wenn das Gleichgewicht nicht statt hat, also R nicht Null ist (da für das Gleichgewicht dieser Punct X, Y, Z ohnehin nicht besteht), sofort $Y = 0$, $Z = 0$, zum Zeichen, dass in diesem Falle (wie es ohnehin bekannt) der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der nämlichen Geraden liegt.

Anmerkung. Besteht das Gleichgewicht, so folgt aus den obigen Relationen (1) und (2) wegen $R = 0$ sofort:

$$\Sigma(P) = 0, \quad \Sigma(Px) = 0, \quad \Sigma(Py) = 0, \quad \Sigma(Pz) = 0.$$

Besteht dieses nicht, so muss man dem Systeme der parallelen Kräfte noch jene $-R$ hinzufügen, dann ist $-R + \Sigma(P) = 0$,

$$-RX + \Sigma(Px) = 0, \quad -RY + \Sigma(Py) = 0, \quad -RZ + \Sigma(Pz) = 0,$$

d. i. $\quad R = \Sigma(P), \quad RX = \Sigma(Px), \quad RY = \Sigma(Py), \quad RZ = \Sigma(Pz).$

Wäre $R = \Sigma(P) = 0$, ohne dass zugleich auch die durch die Gleichungen $\Sigma(Px) = 0$, $\Sigma(Py) = 0$ und $\Sigma(Pz) = 0$ ausgedrückten Bedingungen stattfänden, so würden die Coordinaten X, Y, Z Unendlich, zum Zeichen, dass sich die Kräfte auf ein sogenanntes Kräftepaar reduciren.

Satz der statischen Momente.

(§. 32.)

19. Wirken auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 8) beliebig viele in ein und derselben Ebene liegende Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen, und fällt man aus irgend einem, in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte oder deren Verlängerungen die Perpendikel Oa, $Oa_1 \ldots$ und bezeichnet ihre Grösse oder Länge beziehungsweise durch $p, p_1, p_2 \ldots$ so sind Pp, $P_1 p_1$ u. s. w. die statischen Momente dieser Kräfte in Beziehung auf den Punct O.

Nimmt man die durch diesen Punct O und den Angriffspunct A gezogene Gerade XX' zur Abscissen- und die durch A darauf perpendikuläre Gerade YY' zur Ordinatenachse, bezeichnet