zelnen Glieder die gehörigen Vorzeichen. So ist z. B. für die im 4ten Quadranten liegende Kraft P_3 sofort $\alpha_3 = P_3 A X$ spitz und $\beta_3 = P_3 A Y$ stumpf, folglich sind von den Componenten $p_3 = P_3 \, Cos \, \alpha_3$ und $q_3 = P_3 \, Cos \, \beta_3$ die erstere positiv und letztere negativ, wie es sein soll.

In dem vorigen Beispiele (Nr. **11**) erhalten nach dieser Bezeichnung die Winkel der Kräfte P, P_1, P_2, P_3 der Reihe nach die Werthe: $\alpha = 30^0 12'$, $\alpha_1 = 112^0 25' 16''$, $\alpha_2 = 125^0 11' 36''$, $\alpha_3 = 17^0 47' 52''$, und $\beta = 59^0 48'$, $\beta_1 = 22^0 25' 16''$, $\beta_2 = 144^0 48' 24''$, $\beta_3 = 107^0 47' 52''$.

Natürlich erhält man mit diesen Werthen aus den vorigen Relationen (m) für P', Q', R und φ wieder die obigen Werthe.

Zusammensetzung von Kräften, welche auf *einen* Punct wirken, jedoch in *verschiedenen* Ebenen liegen.

(§. 17.)

13. Wirken drei Kräfte P, Q, S auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 5) nach den wechselweise auf einander perpendikulären Richtungen AB, AC, AD, und schneidet man diese eben genannten Linien den Kräften proportional ab; so stellt die Diagonale AG des aus den Puncten B, C, D ergänzten rechtwinkeligen Parallelopipedes die Resultirende R aus diesen Kräften vor, und zwar ist wegen $AG^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2$ sofort

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + S^2)} \ldots (1),$$

und wenn man die Winkel, welche die Diagonale AG mit den drei Seiten AB, AC, AD bildet, der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, auch:

$$Cos \, a = \frac{P}{R}, \quad Cos \, b = \frac{Q}{R}, \quad Cos \, c = \frac{S}{R} \ldots (2),$$

wobei noch überdiess die Relation [*Burg's* Compendium §. 580, oder auch aus der Verbindung von (1) und (2)]:

$$Cos \, a^2 + Cos \, b^2 + Cos \, c^2 = 1$$

stattfindet, welche als Rechnungscontrole benützt werden kann.

14. Wirken die Kräfte, deren Anzahl eine beliebige sein soll, unter schiefen Winkeln auf den freien Punct A (Fig. 6), so lege man (analog mit dem Verfahren in Nr. **10**) durch diesen Angriffspunct drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ rechtwinkelig auf einander und bezeichne die Winkel, welche die Kraft P mit diesen Achsen bildet, der Reihe nach durch α, β, γ, ebenso jene der Kraft P_1 durch α_1, β_1, γ_1 u. s. w., wobei wir (analog mit der Bemerkung in Nr. **11**) der leichtern Uebersicht wegen diese

Winkel von der betreffenden Kraftrichtung immer gegen den positiven Theil der Achsen rechnen und annehmen, dass keiner dieser Winkel 180° übersteige, wornach also z. B. die in den triëdrischen Winkel $YX'Z'$ fallende Kraft P_n mit der Achse der x einen stumpfen, mit jener der y einen spitzen und mit jener der z wieder einen stumpfen Winkel bildet, oder $\alpha_n > 90^0$, $\beta_n < 90^0$, $\gamma_n > 90^0$ und dabei jeder stumpfe Winkel kleiner als 180° ist.

Diess vorausgesetzt zerlege man die Kraft P in 3 auf einander senkrechte Componenten p, q, r, und zwar nach den Achsen XX', YY', ZZ', ebenso die Kraft P_1 in die auf die genannten Achsen fallenden Seitenkräfte p_1, q_1, r_1 u. s. w.; so erhält man nach den Relationen (2) der vorigen Nummer:

$$p = P\, Cos\, \alpha, \quad q = P\, Cos\, \beta, \quad r = P\, Cos\, \gamma,$$
$$p_1 = P_1\, Cos\, \alpha_1, \quad q_1 = P_1\, Cos\, \beta_1, \quad r_1 = P_1\, Cos\, \gamma_1$$

u. s. w. fort.

Durch diese Zerlegung erhält man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, P_1, $P_2 \ldots$ drei Gruppen von Kräften, welche nach den auf einander perpendikulär stehenden Achsen XX', YY' und ZZ' auf den Punct A wirken, so dass, wenn man ihre Resultirenden beziehungsweise durch P', Q', R' bezeichnet, sofort

$$(m) \quad P' = p + p_1 + p_2 + \cdots, \quad Q' = q + q_1 + q_2 + \cdots,$$
$$R' = r + r_1 + r_2 + \cdots \quad \text{wird.}$$

Bezeichnet man aber die Resultirende aus den ursprünglichen Kräften P, P_1, $P_2 \ldots$, welche zugleich auch jene dieser drei Kräfte P', Q', R' ist, mit R, und die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Achsen XX', YY', ZZ' bildet, durch a, b, c; so hat man unmittelbar nach **13.** (Relat. 1 und 2):

$$R = \sqrt{(P'^2 + Q'^2 + R'^2)} \text{ und}$$
$$Cos\, a = \frac{P'}{R}, \quad Cos\, b = \frac{Q'}{R}, \quad Cos\, c = \frac{R'}{R},$$

wodurch die Grösse und Lage der Resultirenden gegeben ist.

Substituirt man für P', Q', R' und darin für p, q, $r \ldots$ die vorigen Werthe, so wird:

$$P' = P\, Cos\, \alpha + P_1\, Cos\, \alpha_1 + \ldots = \Sigma (P\, Cos\, \alpha),$$
$$Q' = P\, Cos\, \beta + P_1\, Cos\, \beta_1 + \ldots = \Sigma (P\, Cos\, \beta),$$
$$R' = P\, Cos\, \gamma + P_1\, Cos\, \gamma_1 + \ldots = \Sigma (P\, Cos\, \gamma).$$

Beispiel. Um eine Anwendung von diesem Verfahren zu zeigen, wollen wir annehmen, dass auf einen Punct A im Raume 8 Kräfte wirken, deren Grösse und Richtungen gegen ein beliebig gewähltes Coordinatensystem durch folgende Angaben bestimmt sein sollen:

$$
\begin{array}{llll}
P = 42 \text{ Pfund}, & \alpha = 82^0\,18', & \beta = 36^0\,42', & \gamma < 90^0 \\
P_1 = 78 \;\;\text{„} & \alpha_1 = 148^0\,25', & \beta_1 = 63^0\,36', & \gamma_1 > 90^0 \\
P_2 = 85 \;\;\text{„} & \alpha_2 = 75^0\;\;8', & \beta_2 = 120^0\,50', & \gamma_2 > 90^0 \\
P_3 = 124 \;\;\text{„} & \alpha_3 = 112^0\,30', & \beta_3 = 144^0\;\;6', & \gamma_3 > 90^0 \\
P_4 = 130 \;\;\text{„} & \alpha_4 = 62^0\,25', & \beta_4 = 32^0\,52', & \gamma_4 < 90^0 \\
P_5 = 28 \;\;\text{„} & \alpha_5 = 140^0\,10', & \beta_5 = 82^0\,42', & \gamma_5 < 90^0 \\
P_6 = 85 \;\;\text{„} & \alpha_6 = 61^0\,32', & \beta_6 = 148^0\,12', & \gamma_6 < 90^0 \\
P_7 = 92 \;\;\text{„} & \alpha_7 = 162^0\;\;4', & \beta_7 = 104^0\,35', & \gamma_7 < 90^0.
\end{array}
$$

Man findet mit diesen Werthen aus den obigen Relationen:

$$P' = -94{\cdot}7851, \quad Q' = -58{\cdot}3109, \quad R' = 32{\cdot}0919$$

$$R = 115{\cdot}82 \text{ Pfund}, \quad a = 144^0\,55'\,26'', \quad b = 120^0\,13'\,47'', \quad c = 106^0\,5'\,12''.$$

Die Resultirende liegt sonach im 7ten dreiflächigen Winkel, und eine Kraft, welche mit den gegebenen 8 Kräften das Gleichgewicht herstellt, würde mithin in den 1ten dieser 8 körperlichen Winkel fallen, dabei mit den positiven Richtungen der Coordinatenachsen die Winkel $a' = 180 - a$, $b' = 180 - b$, $c' = 180 - c$ bilden und der Resultirenden R gleich sein.

Anmerkung 1. Für das Gleichgewicht der angenommenen Kräfte müssen (wegen $R = 0$) die drei Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ bestehen. Wäre z. B. bloss $R' = 0$, so wäre nach der vorhergehenden Relation $Cos\, c = \frac{0}{R} = 0$ oder $c = 90^0$, zum Beweis, dass in diesem Falle die Resultirende in die Ebene der Achsen XX', YY' fällt. Wäre ausserdem auch $Q' = 0$, so würde auch noch $b = 90^0$, zum Zeichen, dass jetzt die Resultirende R mit der Achse XX' zusammenfällt.

Anmerkung 2. Ist der Angriffspunct der Kräfte nicht vollkommen frei, sondern z. B. gezwungen, auf einer gegebenen krummen Fläche oder Linie zu bleiben, auf welcher er sich übrigens wieder ganz frei (ohne Reibung) soll bewegen können, so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dass die Resultirende aus allen diesen Kräften gleich Null sei, sondern es reicht hin, dass diese auf der Fläche oder Linie im betreffenden Puncte normal stehe, indem sie dann von dem Widerstande der Fläche oder Curve aufgehoben wird. Diese Betrachtung führt im erstern dieser beiden Fälle zu zwei, im letztern zu einer Bedingungsgleichung, und zwar, wenn $F = \varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche ist; so sind diese für den erstern Fall:

$$P' \left(\frac{dF}{dy}\right) - Q' \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad P' \left(\frac{dF}{dz}\right) - R' \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

und für den letztern:

$$P'dx + Q'dy + R'dz = 0.$$

Noch anschaulicher lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen für diese beiden Fälle auf folgende Weise darstellen:

Liegt der Angriffspunct der Kräfte auf einer krummen Oberfläche oder Curve, so lasse man eine der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen, z. B. jene der z, mit der durch diesen Punct gehenden Normale zusammenfallen und zerlege jede der Kräfte wie vorhin in 3 auf die Coordinatenachsen fallende Componenten, so werden davon jene, welche in die Achse der z fallen, durch den Widerstand der festen Oberfläche oder Curve aufgehoben und es bleiben für das Gleichgewicht nur noch die beiden Gleichungen zu erfüllen:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) = 0.$$

Ersetzt man den genannten Widerstand durch eine in der Richtung der Normale fallende Kraft N, so kann man den Angriffspunct sämmtlicher Kräfte wieder als einen ganz freien ansehen und man hat, wenn a, b, c die Winkel dieser Kraft N mit den Coordinatenachsen sind, nach den obigen Relationen für das Gleichgewicht:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) + N \operatorname{Cos} a = 0,\ \Sigma(P \operatorname{Cos} \beta) + N \operatorname{Cos} b = 0,\ \Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma) + N \operatorname{Cos} c = 0,$$

woraus man noch ganz einfach findet:

$$N = \sqrt{(\Sigma P \operatorname{Cos} \alpha)^2 + (\Sigma P \operatorname{Cos} \beta)^2 + (\Sigma P \operatorname{Cos} \gamma)^2},$$

d. h. die Grösse oder Intensität dieser Kraft oder dieses Widerstandes N ist gleich der Resultante der auf den genannten Punct wirkenden Kräfte.

Anmerkung 3. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$R^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 = \overline{\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha)}^2 + \overline{\Sigma(P \operatorname{Cos} \beta)}^2 + \overline{\Sigma(P \operatorname{Cos} \gamma)}^2,$$

und wenn man substituirt, entwickelt und ordnet:

$$R^2 = P^2 (\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2) + P_1^2 (\operatorname{Cos} \alpha_1^2 + \operatorname{Cos} \beta_1^2 + \operatorname{Cos} \gamma_1^2) + \ldots$$
$$+ 2PP_1 (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_1 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_1 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_1)$$
$$+ 2PP_2 (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_2 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_2 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_2)$$
$$+ \ldots\ldots$$

oder wegen $\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2 = \operatorname{Cos} \alpha_1^2 + \operatorname{Cos} \beta_1^2 + \operatorname{Cos} \gamma_1^2 = \ldots = 1$

und $\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_1 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_1 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_1 = \operatorname{Cos} \widehat{PP_1}$

$\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha_2 + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta_2 + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma_2 = \operatorname{Cos} \widehat{PP_2}$

u. s. w.

auch $R^2 = (P^2 + P_1^2 + \ldots) + 2PP_1 \operatorname{Cos} \widehat{PP_1} + 2PP_2 \operatorname{Cos} \widehat{PP_2} + \ldots$

$$+ 2P_1P_2 \operatorname{Cos} \widehat{P_1P_2} + 2P_1P_3 \operatorname{Cos} \widehat{P_1P_3} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots$$

d. i. endlich:

$$R^2 = \Sigma(P^2) + 2\Sigma(PP_1 \operatorname{Cos} \widehat{PP_1}).$$

Allgemeine Bestimmung des Mittelpunctes paralleler Kräfte.

(§. 23.)

15. Wirken auf ein System von beliebigen, fest mit einander verbundenen Puncten $M, M_1, M_2 \ldots$ (Fig. 7) nach parallelen, sonst aber beliebigen Richtungen die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$, so beziehe man, zur Bestimmung ihrer Resultirenden, dieses System auf irgend drei rechtwinkelige Coordinatenachsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Coordinaten des Angriffspunctes M durch x, y, z, jene des