P mit der Resultirenden R bildet, durch φ; so hat man ganz einfach durch die Auflösung des Dreieckes ABD, in welchem $AB = P$, $BD = Q$, $AD = R$, Winkel $DAB = \varphi$, Winkel $ADB = \alpha - \varphi$ und W. $ABD = 180^0 - \alpha$ ist, nach bekannten Regeln:

$$(1)\ R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ \, Cos\, \alpha)},\quad (2)\ P = \frac{R\, Sin\,(\alpha - \varphi)}{Sin\, \alpha},$$

$$(3)\ Q = \frac{R\, Sin\, \varphi}{Sin\, \alpha},\quad (4)\ Cos\, \varphi = \frac{P + Q\, Cos\, \alpha}{R},$$

$$(5)\ Cos\,(\alpha - \varphi) = \frac{Q + P\, Cos\, \alpha}{R}\ \text{und}\ (6)\ Tang\, \varphi = \frac{Q\, Sin\, \alpha}{P + Q\, Cos\, \alpha}.$$

Alle diese Formeln lassen sich auch auf die bekannte Weise (*Burg's* Compend. der höhern Mathem. Cap. IV.; dessen „Sammlung trigonom. Formeln," S. 41; oder dessen Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie) für die Anwendung der Logarithmen einrichten.

9. Für den besondern Fall, als die Seitenkräfte einen rechten Winkel einschliessen, gehen diese Formeln, wegen $\alpha = 90^0$, in die folgenden einfachern über:

$$(1)\ R = \sqrt{(P^2 + Q^2)},\quad (2)\ P = R\, Cos\, \varphi,\quad (3)\ Q = R\, Sin\, \varphi$$

$$\text{und}\ (4)\ Tang\, \varphi = \frac{Q}{P},$$

was sofort auch mit den in **3.** und **5.** entwickelten Relationen, wie es sein soll, übereinstimmt.

Beispiel. Wirken auf einen Punct A (Fig. 2) die zwei Kräfte $P = 48{\cdot}34$ und $Q = 26{\cdot}52$ Pfund unter einem Winkel von $\alpha = 99^0, 24', 13''$; so erhält man nach den Formeln (1) und (6) in **8.** $R = 51{\cdot}197$ Pf. und $\varphi = 30^0, 44', 0''$, wodurch sofort die Grösse und Lage der Mittelkraft gegeben ist.

Bestimmung der Resultirenden aus einer *beliebigen* Anzahl von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Punct wirken und in *ein und derselben* Ebene liegen.

(§. 16.)

10. Wirken auf den Punct A (Fig. 4) die Kräfte $P, P_1, P_2, P_3 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen in einerlei Ebene, so lege man zur Bestimmung ihrer Resultirenden in derselben Ebene durch den Punct A ein beliebiges rechtwinkeliges Achsensystem XX', YY', bezeichne die als bekannt anzusehenden oder gegebenen Winkel, welche die Kräfte P, $P_1 \ldots$ mit der Achse der x bilden, der Reihe nach und nach einerlei Richtung (von den positiven x gegen die positiven y) gezählt, durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$*) und zerlege endlich die Kraft P in zwei (auf einander senkrechte) Seitenkräfte p, q, wovon die erstere nach AX, die letztere nach AY wirkt, ebenso P_1 in zwei Kräfte p_1, q_1 nach AX' und AY die Kraft P_2 in p_2 und q_2 nach AX' und AY' u. s. w., so hat man nach Nr. **5**: $p = P \, Cos \, \alpha$, $q = P \, Sin \, \alpha$, $p_1 = P_1 \, Cos \, \alpha_1$, $q_1 = P_1 \, Sin \, \alpha_1$, $p_2 = P_2 \, Cos \, \alpha_2$, $q_2 = P_2 \, Sin \, \alpha_2$ u. s. w., wobei die Kräfte p positiv oder negativ ausfallen, d. h. von A gegen X oder von A gegen X' hin wirken, je nachdem der entsprechende Winkel α im 1ten oder 4ten, oder im 2ten oder 3ten Quadranten liegt; eben so fallen die nach der Achse YY' wirksamen Seitenkräfte q positiv oder negativ aus, wirken nämlich von A gegen Y oder von A gegen Y', je nachdem der betreffende Winkel α im 1ten oder 2ten, oder im 3ten oder 4ten Quadranten liegt.

11. Bezeichnet man die algebraische Summe der Kräfte p, d. i. die Resultirende aus allen auf der Achse der x wirksamen Seitenkräfte durch P' und ebenso die Resultirende aus allen nach der Achse der y wirkenden Seitenkräfte q durch Q'; so wird

$$P' = p + p_1 + p_2 + \ldots \text{ und } Q' = q + q_1 + q_2 + \ldots \text{ d. i.}$$

$$(1) \quad P' = P \, Cos \, \alpha + P_1 \, Cos \, \alpha_1 + \ldots = \Sigma (P \, Cos \, \alpha)$$

$$(2) \quad Q' = P \, Sin \, \alpha + P_1 \, Sin \, \alpha_1 + \ldots = \Sigma (P \, Sin \, \alpha),$$

wobei sich die richtigen Zeichen der einzelnen Glieder je nach den Werthen der Winkel α, $\alpha_1 \ldots$ von selbst ergeben. Dadurch fallen die Kräfte P' und Q' positiv oder negativ aus, wodurch dann auch die Richtung bekannt ist, nach welcher diese beiden Kräfte (ob von A gegen X oder X', oder von A gegen Y oder Y') wirksam sind.

Legt man den Fall zum Grunde, in welchem P' und Q' positiv ausfallen, diese Kräfte also nach AX und AY wirken, folglich ihre Resultirende in den 1ten Quadranten XAY und in dieselbe Ebene fällt, (für $- P'$, $+ Q'$ fällt diese in den 2ten, für

*) Sind nämlich ω, $\omega_1 \ldots$ die Winkel, welche die Kräfte PP_1, $P_1 P_2$ u. s. w. einschliessen, ist nämlich $\widehat{PP_1} = \omega$, $\widehat{P_1 P_2} = \omega_1 \ldots$ und zieht man die Achse XX' gegen die Kraft P unter den beliebigen Winkel α (wobei auch $\alpha = o$ sein kann); so sind offenbar auch die Winkel $\alpha + \omega = \alpha_1$, $\alpha + \omega + \omega_1 = \alpha_2$ u. s. w. bekannt oder als gegeben anzusehen.

$-P'$, $-Q'$ in den 3ten, sowie für $+P'$, $-Q'$ in den 4ten Quadranten) bezeichnet die Grösse dieser Resultirenden mit R, sowie ihren Neigungswinkel mit der Achse der x durch φ; so erhält man nach den Relationen in **9.**:

$$(3)\quad R = \sqrt{(P'^2 + Q'^2)} \quad \text{und} \quad (4)\quad Tang\,\varphi = \frac{Q'}{P'}.$$

Beispiel. Wirken z. B. auf den Punct A vier Kräfte, $P = 12$, $P_1 = 40$, $P_2 = 15$ und $P_3 = 10$, unter den Winkeln mit der Achse XX' von $\alpha = 30^0\,12'$, $\alpha_1 = 112^0\,25'\,16''$, $\alpha_2 = 234^0\,48'\,24''$ und $\alpha_3 = 342^0\,12'\,8''$ so findet man nach den vorigen Relationen (1) und (2):

$$P' = 10{\cdot}3713 - 15{\cdot}2564 - 8{\cdot}6451 + 9{\cdot}5214 = -\ 4{\cdot}0088$$

und $$Q' = 6{\cdot}0362 + 36{\cdot}9762 - 12{\cdot}2582 - 3{\cdot}0566 = +\ 27{\cdot}6976,$$

so dass also die Mittelkraft aus den Seitenkräften p von A gegen X', und jene aus den Seitenkräften q von A nach Y wirksam ist, daher die gesuchte Resultirende R im 2ten Quadranten $X'AY$ liegt.

Nach den weitern Relationen (3) und (4) findet man ferner mit diesen Werthen von P' und Q' sofort:

$$R = \sqrt{783{\cdot}227523} = 27{\cdot}986 \text{ und } \varphi = 98^0\,14'\,8''.$$

12. Bedingungen des Gleichgewichtes. Da für das Gleichgewicht der Kräfte ihre Resultirende $R = 0$ sein muss, so erhält man als Bedingungsgleichungen für diesen Fall aus der vorigen Relation (3) sofort $P' = 0$ und $Q' = 0$, d. i. (Relat. 1 und 2)

$$P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + P_2\,Cos\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0,$$
$$P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + P_2\,Sin\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Sin\,\alpha) = 0.$$

Findet das Gleichgewicht nicht statt, so lässt sich dieses ganz einfach durch Hinzufügung einer neuen Kraft, welche der Resultirenden der vorhandenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, herstellen.

Anmerkung. Man kann auch (analog mit der Bezeichnung, die wir für Kräfte wählen, welche im Raume nach beliebigen Richtungen wirken, Nr. **14**) die Richtungen der Kräfte durch die Winkel bezeichnen, welche die Kräfte mit dem positiven Theil der Axen bilden und dabei, was für die wirkliche Berechnung einfacher, voraussetzen, dass kein Winkel über 180^0 hinaus gezählt werden soll.

Sind nämlich $\alpha, \alpha_1 \ldots$ die in diesem Sinne genommenen Winkel der Kräfte P, $P_1 \ldots$ mit der Axe der x, sowie $\beta, \beta_1 \ldots$ jene mit der Axe der y; so erhält man für die beiden obigen Relationen (1) und (2) in Nr. **11**:

$$\left.\begin{aligned} P' &= P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha) \\ Q' &= P\,Cos\,\beta + P_1\,Cos\,\beta_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\beta) \end{aligned}\right\}(m)$$

wobei, wie bekannt, $Cos\,\alpha^2 + Cos\,\beta^2 = 1$, $Cos\,\alpha_1^2 + Cos\,\beta_1^2 = 1$ u. s. w. ist.

Da die Cosinus der spitzen Winkel positiv, die der stumpfen aber negativ sind, so erhalten auch hier bei dieser Art die Winkel zu nehmen, die einzelnen Glieder die gehörigen Vorzeichen. So ist z. B. für die im 4ten Quadranten liegende Kraft P_3 sofort $\alpha_3 = P_3AX$ spitz und $\beta_3 = P_3AY$ stumpf, folglich sind von den Componenten $p_3 = P_3 \, Cos \, \alpha_3$ und $q_3 = P_3 \, Cos \, \beta_3$ die erstere positiv und letztere negativ, wie es sein soll.

In dem vorigen Beispiele (Nr. **11**) erhalten nach dieser Bezeichnung die Winkel der Kräfte P, P_1, P_2, P_3 der Reihe nach die Werthe: $\alpha = 30^0 12'$, $\alpha_1 = 112^0 25' 16''$, $\alpha_2 = 125^0 11' 36''$, $\alpha_3 = 17^0 47' 52''$, und $\beta = 59^0 48'$, $\beta_1 = 22^0 25' 16''$, $\beta_2 = 144^0 48' 24''$, $\beta_3 = 107^0 47' 52''$.

Natürlich erhält man mit diesen Werthen aus den vorigen Relationen (m) für P', Q', R und φ wieder die obigen Werthe.

Zusammensetzung von Kräften, welche auf *einen* Punct wirken, jedoch in *verschiedenen* Ebenen liegen.

(§. 17.)

13. Wirken drei Kräfte P, Q, S auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 5) nach den wechselweise auf einander perpendikulären Richtungen AB, AC, AD, und schneidet man diese eben genannten Linien den Kräften proportional ab; so stellt die Diagonale AG des aus den Puncten B, C, D ergänzten rechtwinkeligen Parallelopipedes die Resultirende R aus diesen Kräften vor, und zwar ist wegen $AG^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2$ sofort

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + S^2)} \ldots (1),$$

und wenn man die Winkel, welche die Diagonale AG mit den drei Seiten AB, AC, AD bildet, der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, auch:

$$Cos\, a = \frac{P}{R}, \quad Cos\, b = \frac{Q}{R}, \quad Cos\, c = \frac{S}{R} \ldots (2),$$

wobei noch überdiess die Relation [*Burg's* Compendium §. 580, oder auch aus der Verbindung von (1) und (2)]:

$$Cos\, a^2 + Cos\, b^2 + Cos\, c^2 = 1$$

stattfindet, welche als Rechnungscontrole benützt werden kann.

14. Wirken die Kräfte, deren Anzahl eine beliebige sein soll, unter schiefen Winkeln auf den freien Punct A (Fig. 6), so lege man (analog mit dem Verfahren in Nr. **10**) durch diesen Angriffspunct drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ rechtwinkelig auf einander und bezeichne die Winkel, welche die Kraft P mit diesen Achsen bildet, der Reihe nach durch α, β, γ, ebenso jene der Kraft P_1 durch α_1, β_1, γ_1 u. s. w., wobei wir (analog mit der Bemerkung in Nr. **11**) der leichtern Uebersicht wegen diese