Erster Abschnitt.

Statik.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

(§§. 13, 14.)

1. Wirken zuerst zwei Kräfte P und Q auf einen Punct A (Fig. 1) unter einem rechten Winkel nach den Richtungen AB und AC, und nimmt man an, dass ihre Mittelkraft R, welche nothwendig mit den beiden erstern in derselben Ebene liegen muss, die Richtung AD hat, wofür W. $BAD = x$, folglich W. $CAD = \frac{\pi}{2} - x = x'$ sein soll; so zeigt eine ganz einfache Betrachtung, dass jede der beiden Seitenkräfte P und Q auf irgend eine Weise von ihrer Mittelkraft R und dem entsprechenden Winkel x oder x' abhängen muss, so dass, wenn F irgend ein Functionszeichen vorstellt, sofort $P = F(R, x)$ und eben so $Q = F(R, x')$ gesetzt werden kann. Da sich jedoch das Gesetz der Abhängigkeit zwischen P, R, x offenbar nicht ändern darf, wie gross oder klein man auch die beliebig zu wählende oder zum Grunde zu legende Kräfteeinheit (ob man das Loth, Pfund u. s. w. zur Einheit nimmt) annehmen mag, so folgt als nähere Bestimmung der Form:

$$P = R\varphi(x) \,..(1) \text{ und } Q = R\varphi(x') \,..(2),$$

wobei φ ein zwar noch unbestimmtes, jedoch in beiden Relationen (1) und (2) einerlei Bedeutung habendes Functionszeichen ist.

Unter dieser Form bleibt die Abhängigkeit jeder Seitenkraft von der Mittelkraft und dem eingeschlossenen Winkel in der That ungeändert, wie sich auch die Kräfteeinheit ändern mag, d. h. die Relationen (1) und (2) bleiben dieselben, wenn man auch diese Einheit n Mal grösser oder kleiner nimmt, weil in diesen beiden Fällen P, Q und R beziehungsweise in $\frac{P}{n}$, $\frac{Q}{n}$, $\frac{R}{n}$ oder nP, nQ, nR übergehen, wodurch in diesen Relationen der Factor $\frac{1}{n}$ oder n wieder wegfällt.

2. Zieht man durch den Punct A unter einem beliebigen Winkel z mit AD die Gerade AG und darauf perpendikulär jene EF, setzt W. $EAB = y$, wodurch W. $FAC = \frac{\pi}{2} - y = y'$ und $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$ wird, und zerlegt die Kraft P in zwei nach den (ebenfalls wieder einen rechten Winkel einschliessenden) Richtungen AG und AE wirkende Seitenkräfte p und p', so wie die Kraft Q in q und q' nach den Richtungen AG und AF; so hat man nach dem nämlichen Gesetze, welches durch die vorigen Relationen (1) und (2) ausgedrückt ist, wegen W. $BAG = y'$ und W. $CAG = y$, sofort:

$$\left.\begin{array}{l} p' = P\varphi(y),\ \ p = P\varphi(y') \\ q' = Q\varphi(y'),\ \ q = Q\varphi(y) \end{array}\right\} (3),$$

wobei φ durchaus dieselbe Bedeutung wie in den Relationen (1) und (2) hat.

3. Lässt man AG mit AD zusammenfallen, wodurch $z = o$ $y = \frac{\pi}{2} - x = x'$ und $y' = \frac{\pi}{2} - y = x$ wird, so erhält man aus diesen Relationen (3), wenn unter einem die aus (1) und (2) folgenden Werthe für $\varphi(x)$ und $\varphi(x')$, d. i. $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ gesetzt werden:

$$p' = P\varphi(x') = \frac{PQ}{R},\quad q' = Q\varphi(x) = \frac{PQ}{R}$$

$$p = P\varphi(x) = \frac{P^2}{R},\quad q = Q\varphi(x') = \frac{Q^2}{R}.$$

Nun wirken aber von den vier Kräften p, q, p', q', welche jene beiden P und Q ersetzen und mit diesen also auch dieselbe Resultirende R besitzen müssen, die beiden erstern nach einerlei Richtung AG oder AD, und die letztern nach gerad entgegengesetzten Richtungen AE und AF, so dass sich diese letzteren, weil sie, wie die vorigen Relationen oder Werthe von p' und q' zeigen, gleich gross sind, aufheben und die Summe $p + q$ sofort die Resultirende R bildet, wodurch

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R},\ \text{ oder }\ R^2 = P^2 + Q^2 \ldots \text{(I)}$$

wird. Es kann daher die aus den beiden Seitenkräften P und Q hervorgehende Mittelkraft R ihrer Grösse nach durch die Diagonale AD des Rechteckes BC vorgestellt werden, in welchem die Seiten AB und AC den Kräften P und Q proportional abgeschnitten sind oder geradezu diese Kräfte vorstellen.

4. Um ferner auch die Richtung dieser Mittelkraft R zu bestimmen, welche, wie bereits bemerkt, in der Ebene der Seitenkräfte liegen muss, so gehen wir auf die aus der Zerlegung von P und Q erhaltenen vier Seitenkräfte p, q, p', q' zurück, wovon die beiden erstern die nach AG wirkende Mittelkraft $p + q$ und die beiden letztern, je nachdem p' oder q' die grössere ist, die nach AE oder AF wirksame Mittelkraft $p' - q'$ oder $q' - p'$ geben, so, dass wenn man (was ganz gleichgiltig ist) den ersten dieser beiden Fälle annimmt, auf den Punct A die zwei Kräfte $p + q$ und $p' - q'$ nach den auf einander perpendikulären Richtungen AG und AE wirken, welche sofort mit den ursprünglichen beiden Kräften P und Q die nämliche Resultirende R besitzen müssen, und, wie wir vorläufig angenommen haben, in die Richtung AD fallen soll.

Nun folgt aber wieder nach den ersten Relationen (1) oder (2):

$$p' - q' = R\varphi(x + y) \quad \text{und} \quad p + q = R\varphi(z),$$

oder wenn man für p, q, p', q' die Werthe aus den vorigen Gleichungen (3), dabei die Werthe von P und Q aus (1) und (2) substituirt, ferner Kürze halber $\varphi(x') = \varphi(90^0 - x) = \varphi'(x)$ und eben so $\varphi(y') = \varphi(90^0 - y) = \varphi'(y)$, $\varphi(z) = \varphi[90^0 - (x + y)] = \varphi'(x + y)$ setzt, und dann durchaus mit dem Factor R abkürzt, auch:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi'(x)\varphi'(y) \ldots (4)$$

$$\varphi'(x + y) = \varphi(x)\varphi'(y) + \varphi(y)\varphi'(x) \ldots (5).$$

5. Nun muss für jeden reellen Werth von x der Quotient $\frac{Q}{x} < R$ und $> P$ sein. Denn könnte erstens $\frac{Q}{x} \geqq R$, d. i. $Q \geqq Rx$ sein, so müsste ebenso $P \geqq Rx'$, also $P + Q \geqq R(x + x')$, nämlich $P + Q \geqq R\frac{\pi}{2}$, folglich $P^2 + Q^2 + 2PQ \geqq R^2 \frac{\pi^2}{4}$ oder wegen $P^2 + Q^2 = R^2$ (I in 3.) auch:

$$2PQ \geqq R^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \text{ oder } \frac{2PQ}{R^2} \geqq \frac{(3{\cdot}14)^2}{4} - 1,$$

d. i. $\frac{2PQ}{P^2 + Q^2} \geqq 1{\cdot}46\ldots$ stattfinden, was jedoch nicht möglich ist, indem bekanntlich für was immer für zwei reelle Grössen P und Q stets $P^2 + Q^2 \; 2 \geqq PQ$, also $\frac{2PQ}{P^2 + Q^2} \leqq 1$ sein muss.

Könnte aber zweitens $\frac{Q}{x} \leqq P$, d. i. $Q \leqq Px$ sein, so müsste auf gleiche Weise auch $P \leqq Qx'$ oder, wenn man zusammen multiplicirt, $PQ \gtreqless PQxx'$, d. i. $xx' \lesseqgtr 1 \,..(a)$ sein. Da nun aber die Summe der beiden Grössen x, x' constant, d. i. $x + x' = \frac{\pi}{2}$ ist, so wird, wie bekannt, ihr Product am grössten für $x' = x$, also hier für $x = x' = \frac{\pi}{4}$, so dass dieses grösste Product sofort $xx' = \frac{\pi^2}{16} = \cdot 61$ ist, womit die vorige Relation (a) im Widerspruche steht, diese daher ebenfalls nicht bestehen kann.

Da also der genannte Quotient $\frac{Q}{x}$ stets zwischen den Grenzen R und P liegt, diese Grenzen aber einander um so näher rücken, je kleiner x (folglich auch Q) wird und diese endlich für $x = 0$ (wofür auch $Q = 0$ wird) zusammenfallen und dann $P = R$ ist, so wird dafür auch dieser Quotient $\frac{Q}{x} = \frac{0}{0} = R$, oder wegen $Q = R\varphi'(x)$ sofort $\frac{\varphi'(x_0)}{x_0} = 1$ und aus der Relation (1) ebenfalls für $x = 0$, $\varphi(x_0) = 1$, d. h. die gesuchte Function φ muss die Eigenschaft besitzen, dass sowohl $\varphi(x)$ als auch der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{\varphi(90^0 - x)}{x}$ für $x = 0$ gleich 1 wird, so wie auch überdiess aus der vorigen Relation $Q = R\varphi'(x)$, wegen $Q = 0$, noch $\varphi'(x_0) = 0$ folgt.

Diese Eigenschaften, verbunden mit den Relationen (4) und (5) geben (*Burg's* Lehrbuch der höhern Mathematik. Bd. I. S. 329) $\varphi(x) = Cos\, x$, folglich $\varphi'(x) = Sin\, x$, so dass also dadurch die Natur und Bedeutung des oben angenommenen Functionszeichens φ vollkommen bestimmt ist und sonach die Seitenkräfte P und Q nach den obigen Relationen (1) und (2) durch

$$P = R\, Cos\, x \text{ und } Q = R\, Cos\, x' = R\, Sin\, x$$

ausgedrückt werden, oder die in **3.** erwähnte Diagonale AD des Rechteckes BC zugleich auch die Richtung der Resultirenden R darstellt*).

6. Sieht man umgekehrt die beiden Kräfte P und Q als die Componenten oder Seitenkräfte der Kraft R an, so folgt also, dass wenn man irgend eine Kraft R in zwei aufein-

*) Wir haben diese Art der Entwickelung und Beweisführung zum ersten Male im XIX. Bde. der Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes bekannt gemacht.

ander senkrecht wirkende Seitenkräfte P und Q zerlegt, sofort jede derselben durch das Product aus der zerlegten Kraft R in den Cosinus des Winkels ausgedrückt wird, welchen die betreffende Seitenkraft mit dieser Kraft R einschliesst.

Schneidet man auf den Richtungen AN, AM der beiden gegebenen Kräfte P und Q die Stücke AB, AC diesen Kräften proportional ab, construirt aus diesen Puncten B, C das Rechteck BC und zieht darin die Diagonale AD, so stellt diese die Resultirende R sowohl der Grösse als Lage nach vor.

7. Schliessen die Richtungen der Kräfte P, Q keinen rechten, sondern einen beliebigen Winkel BAC (Fig. 2) ein, so schneide man zur Bestimmung ihrer Mittelkraft darauf die Stücke AB und AC diesen Kräften proportional ab, ergänze aus diesen Puncten B, C das Parallelogramm $ABDC$, ziehe die Diagonale AD, darauf perpendikulär die Geraden FAE, CG und BH, so wie noch mit dieser Diagonale parallel die Geraden CF und BE; so erhält man dadurch die beiden Rechtecke FG und EH, in welchen, wie man sogleich sieht, $AE = AF \ldots (m)$ und $AG = HD \ldots (n)$ ist. Da man sich aber zufolge des vorigen Satzes in Nr. **6** die Kraft P in die zwei auf einander senkrecht wirkenden Seitenkräfte AE und AH, sowie die Kraft Q in die beiden Seitenkräfte AF und AG zerlegt denken kann, wodurch statt der beiden Kräfte P und Q die vier gleich geltenden, dieselbe Resultirende R besitzenden Kräfte AE, AF, AG, AH entstehen, und da sich davon die beiden ersteren als gleich und entgegengesetzt wirkend aufheben, dagegen die beiden letztern nach einerlei, und zwar nach der Richtung AD wirken, deren Mittelkraft daher $= AH + AG$ oder wegen $AG = HD$ auch $= AH + HD = AD$ ist; so stellt diese Diagonale AD zugleich auch die Resultirende R aus den beiden Kräften P und Q vor.

Bestimmung der Mittelkraft oder der Seitenkräfte durch Rechnung.

8. Schliessen die Richtungen der auf den Punct A (Fig. 2) wirkenden beiden Kräfte P und Q den Winkel $CAB = \alpha$ ein, und bezeichnet man den Winkel BAD, welchen die Seitenkraft