Erster Abschnitt.

Statik.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

(§§. 13, 14.)

1. Wirken zuerst zwei Kräfte P und Q auf einen Punct A (Fig. 1) unter einem rechten Winkel nach den Richtungen AB und AC, und nimmt man an, dass ihre Mittelkraft R, welche nothwendig mit den beiden erstern in derselben Ebene liegen muss, die Richtung AD hat, wofür W. $BAD = x$, folglich W. $CAD = \frac{\pi}{2} - x = x'$ sein soll; so zeigt eine ganz einfache Betrachtung, dass jede der beiden Seitenkräfte P und Q auf irgend eine Weise von ihrer Mittelkraft R und dem entsprechenden Winkel x oder x' abhängen muss, so dass, wenn F irgend ein Functionszeichen vorstellt, sofort $P = F(R, x)$ und eben so $Q = F(R, x')$ gesetzt werden kann. Da sich jedoch das Gesetz der Abhängigkeit zwischen P, R, x offenbar nicht ändern darf, wie gross oder klein man auch die beliebig zu wählende oder zum Grunde zu legende Kräfteeinheit (ob man das Loth, Pfund u. s. w. zur Einheit nimmt) annehmen mag, so folgt als nähere Bestimmung der Form:

$$P = R\varphi(x) \,..(1) \text{ und } Q = R\varphi(x') \,..(2),$$

wobei φ ein zwar noch unbestimmtes, jedoch in beiden Relationen (1) und (2) einerlei Bedeutung habendes Functionszeichen ist.

Unter dieser Form bleibt die Abhängigkeit jeder Seitenkraft von der Mittelkraft und dem eingeschlossenen Winkel in der That ungeändert, wie sich auch die Kräfteeinheit ändern mag, d. h. die Relationen (1) und (2) bleiben dieselben, wenn man auch diese Einheit n Mal grösser oder kleiner nimmt, weil in diesen beiden Fällen P, Q und R beziehungsweise in $\frac{P}{n}$, $\frac{Q}{n}$, $\frac{R}{n}$ oder nP, nQ, nR übergehen, wodurch in diesen Relationen der Factor $\frac{1}{n}$ oder n wieder wegfällt.

2. Zieht man durch den Punct A unter einem beliebigen Winkel z mit AD die Gerade AG und darauf perpendikulär jene EF, setzt W. $EAB = y$, wodurch W. $FAC = \frac{\pi}{2} - y = y'$ und $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$ wird, und zerlegt die Kraft P in zwei nach den (ebenfalls wieder einen rechten Winkel einschliessenden) Richtungen AG und AE wirkende Seitenkräfte p und p', so wie die Kraft Q in q und q' nach den Richtungen AG und AF; so hat man nach dem nämlichen Gesetze, welches durch die vorigen Relationen (1) und (2) ausgedrückt ist, wegen W. $BAG = y'$ und W. $CAG = y$, sofort:

$$\left.\begin{array}{l} p' = P\varphi(y),\ \ p = P\varphi(y') \\ q' = Q\varphi(y'),\ \ q = Q\varphi(y) \end{array}\right\} (3),$$

wobei φ durchaus dieselbe Bedeutung wie in den Relationen (1) und (2) hat.

3. Lässt man AG mit AD zusammenfallen, wodurch $z = o$ $y = \frac{\pi}{2} - x = x'$ und $y' = \frac{\pi}{2} - y = x$ wird, so erhält man aus diesen Relationen (3), wenn unter einem die aus (1) und (2) folgenden Werthe für $\varphi(x)$ und $\varphi(x')$, d. i. $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ gesetzt werden:

$$p' = P\varphi(x') = \frac{PQ}{R},\quad q' = Q\varphi(x) = \frac{PQ}{R}$$

$$p = P\varphi(x) = \frac{P^2}{R},\quad q = Q\varphi(x') = \frac{Q^2}{R}.$$

Nun wirken aber von den vier Kräften p, q, p', q', welche jene beiden P und Q ersetzen und mit diesen also auch dieselbe Resultirende R besitzen müssen, die beiden erstern nach einerlei Richtung AG oder AD, und die letztern nach gerad entgegengesetzten Richtungen AE und AF, so dass sich diese letzteren, weil sie, wie die vorigen Relationen oder Werthe von p' und q' zeigen, gleich gross sind, aufheben und die Summe $p + q$ sofort die Resultirende R bildet, wodurch

$$R = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R},\ \text{oder}\ R^2 = P^2 + Q^2 \,.\, (\text{I})$$

wird. Es kann daher die aus den beiden Seitenkräften P und Q hervorgehende Mittelkraft R ihrer Grösse nach durch die Diagonale AD des Rechteckes BC vorgestellt werden, in welchem die Seiten AB und AC den Kräften P und Q proportional abgeschnitten sind oder geradezu diese Kräfte vorstellen.

4. Um ferner auch die Richtung dieser Mittelkraft R zu bestimmen, welche, wie bereits bemerkt, in der Ebene der Seitenkräfte liegen muss, so gehen wir auf die aus der Zerlegung von P und Q erhaltenen vier Seitenkräfte p, q, p', q' zurück, wovon die beiden erstern die nach AG wirkende Mittelkraft $p+q$ und die beiden letztern, je nachdem p' oder q' die grössere ist, die nach AE oder AF wirksame Mittelkraft $p'-q'$ oder $q'-p'$ geben, so, dass wenn man (was ganz gleichgiltig ist) den ersten dieser beiden Fälle annimmt, auf den Punct A die zwei Kräfte $p+q$ und $p'-q'$ nach den auf einander perpendikulären Richtungen AG und AE wirken, welche sofort mit den ursprünglichen beiden Kräften P und Q die nämliche Resultirende R besitzen müssen, und, wie wir vorläufig angenommen haben, in die Richtung AD fallen soll.

Nun folgt aber wieder nach den ersten Relationen (1) oder (2):

$$p'-q'=R\varphi(x+y) \quad \text{und} \quad p+q=R\varphi(z),$$

oder wenn man für p, q, p', q' die Werthe aus den vorigen Gleichungen (3), dabei die Werthe von P und Q aus (1) und (2) substituirt, ferner Kürze halber $\varphi(x')=\varphi(90^0-x)=\varphi'(x)$ und eben so $\varphi(y')=\varphi(90^0-y)=\varphi'(y)$, $\varphi(z)=\varphi[90^0-(x+y)]=\varphi'(x+y)$ setzt, und dann durchaus mit dem Factor R abkürzt, auch:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)-\varphi'(x)\varphi'(y)\ldots(4)$$

$$\varphi'(x+y)=\varphi(x)\varphi'(y)+\varphi(y)\varphi'(x)\ldots(5).$$

5. Nun muss für jeden reellen Werth von x der Quotient $\frac{Q}{x}<R$ und $>P$ sein. Denn könnte erstens $\frac{Q}{x}\gtreqless R$, d. i. $Q\gtreqless Rx$ sein, so müsste ebenso $P\gtreqless Rx'$, also $P+Q\gtreqless R(x+x')$, nämlich $P+Q\gtreqless R\frac{\pi}{2}$, folglich $P^2+Q^2+2PQ\gtreqless R^2\frac{\pi^2}{4}$ oder wegen $P^2+Q^2=R^2$ (I in **3.**) auch:

$$2PQ\gtreqless R^2\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right) \quad \text{oder} \quad \frac{2PQ}{R^2}\gtreqless\frac{(3\cdot14)^2}{4}-1,$$

d. i. $\frac{2PQ}{P^2+Q^2}\gtreqless 1\cdot46\ldots$ stattfinden, was jedoch nicht möglich ist, indem bekanntlich für was immer für zwei reelle Grössen P und Q stets $P^2+Q^2\ 2\gtreqless PQ$, also $\frac{2PQ}{P^2+Q^2}\lesseqgtr 1$ sein muss.

Könnte aber zweitens $\frac{Q}{x}\lesseqgtr P$, d. i. $Q\lesseqgtr Px$ sein, so müsste auf gleiche Weise auch $P\lesseqgtr Qx'$ oder, wenn man zusammen multiplicirt, $PQ \gtreqless PQxx'$, d. i. $xx' \lesseqgtr 1 \ldots (a)$ sein. Da nun aber die Summe der beiden Grössen x, x' constant, d. i. $x + x' = \frac{\pi}{2}$ ist, so wird, wie bekannt, ihr Product am grössten für $x' = x$, also hier für $x = x' = \frac{\pi}{4}$, so dass dieses grösste Product sofort $xx' = \frac{\pi^2}{16} = \cdot 61$ ist, womit die vorige Relation (a) im Widerspruche steht, diese daher ebenfalls nicht bestehen kann.

Da also der genannte Quotient $\frac{Q}{x}$ stets zwischen den Grenzen R und P liegt, diese Grenzen aber einander um so näher rücken, je kleiner x (folglich auch Q) wird und diese endlich für $x = 0$ (wofür auch $Q = 0$ wird) zusammenfallen und dann $P = R$ ist, so wird dafür auch dieser Quotient $\frac{Q}{x} = \frac{0}{0} = R$, oder wegen $Q = R\varphi'(x)$ sofort $\frac{\varphi'(x_0)}{x_0} = 1$ und aus der Relation (1) ebenfalls für $x = 0$, $\varphi(x_0) = 1$, d. h. die gesuchte Function φ muss die Eigenschaft besitzen, dass sowohl $\varphi(x)$ als auch der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{\varphi(90^0 - x)}{x}$ für $x = 0$ gleich 1 wird, so wie auch überdiess aus der vorigen Relation $Q = R\varphi'(x)$, wegen $Q = 0$, noch $\varphi'(x_0) = 0$ folgt.

Diese Eigenschaften, verbunden mit den Relationen (4) und (5) geben (*Burg's* Lehrbuch der höhern Mathematik. Bd. I. S. 329) $\varphi(x) = Cos\, x$, folglich $\varphi'(x) = Sin\, x$, so dass also dadurch die Natur und Bedeutung des oben angenommenen Functionszeichens φ vollkommen bestimmt ist und sonach die Seitenkräfte P und Q nach den obigen Relationen (1) und (2) durch

$$P = R\, Cos\, x \text{ und } Q = R\, Cos\, x' = R\, Sin\, x$$

ausgedrückt werden, oder die in **3.** erwähnte Diagonale AD des Rechteckes BC zugleich auch die Richtung der Resultirenden R darstellt*).

6. Sieht man umgekehrt die beiden Kräfte P und Q als die Componenten oder Seitenkräfte der Kraft R an, so folgt also, dass wenn man irgend eine Kraft R in zwei aufein-

*) Wir haben diese Art der Entwickelung und Beweisführung zum ersten Male im XIX. Bde. der Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes bekannt gemacht.

ander senkrecht wirkende Seitenkräfte P und Q zerlegt, sofort jede derselben durch das Product aus der zerlegten Kraft R in den Cosinus des Winkels ausgedrückt wird, welchen die betreffende Seitenkraft mit dieser Kraft R einschliesst.

Schneidet man auf den Richtungen AN, AM der beiden gegebenen Kräfte P und Q die Stücke AB, AC diesen Kräften proportional ab, construirt aus diesen Puncten B, C das Rechteck BC und zieht darin die Diagonale AD, so stellt diese die Resultirende R sowohl der Grösse als Lage nach vor.

7. Schliessen die Richtungen der Kräfte P, Q keinen rechten, sondern einen beliebigen Winkel BAC (Fig. 2) ein, so schneide man zur Bestimmung ihrer Mittelkraft darauf die Stücke AB und AC diesen Kräften proportional ab, ergänze aus diesen Puncten B, C das Parallelogramm $ABDC$, ziehe die Diagonale AD, darauf perpendikulär die Geraden FAE, CG und BH, so wie noch mit dieser Diagonale parallel die Geraden CF und BE; so erhält man dadurch die beiden Rechtecke FG und EH, in welchen, wie man sogleich sieht, $AE = AF \ldots (m)$ und $AG = HD \ldots (n)$ ist. Da man sich aber zufolge des vorigen Satzes in Nr. **6** die Kraft P in die zwei auf einander senkrecht wirkenden Seitenkräfte AE und AH, sowie die Kraft Q in die beiden Seitenkräfte AF und AG zerlegt denken kann, wodurch statt der beiden Kräfte P und Q die vier gleich geltenden, dieselbe Resultirende R besitzenden Kräfte AE, AF, AG, AH entstehen, und da sich davon die beiden ersteren als gleich und entgegengesetzt wirkend aufheben, dagegen die beiden letztern nach einerlei, und zwar nach der Richtung AD wirken, deren Mittelkraft daher $= AH + AG$ oder wegen $AG = HD$ auch $= AH + HD = AD$ ist; so stellt diese Diagonale AD zugleich auch die Resultirende R aus den beiden Kräften P und Q vor.

Bestimmung der Mittelkraft oder der Seitenkräfte durch Rechnung.

8. Schliessen die Richtungen der auf den Punct A (Fig. 2) wirkenden beiden Kräfte P und Q den Winkel $CAB = \alpha$ ein, und bezeichnet man den Winkel BAD, welchen die Seitenkraft

P mit der Resultirenden R bildet, durch φ; so hat man ganz einfach durch die Auflösung des Dreieckes ABD, in welchem $AB = P$, $BD = Q$, $AD = R$, Winkel $DAB = \varphi$, Winkel $ADB = \alpha - \varphi$ und W. $ABD = 180^0 - \alpha$ ist, nach bekannten Regeln:

$$(1)\ R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\ Cos\ \alpha)},\quad (2)\ P = \frac{R\ Sin\ (\alpha - \varphi)}{Sin\ \alpha},$$

$$(3)\ Q = \frac{R\ Sin\ \varphi}{Sin\ \alpha},\quad (4)\ Cos\ \varphi = \frac{P + Q\ Cos\ \alpha}{R},$$

$$(5)\ Cos\ (\alpha - \varphi) = \frac{Q + P\ Cos\ \alpha}{R} \text{ und } (6)\ Tang\ \varphi = \frac{Q\ Sin\ \alpha}{P + Q\ Cos\ \alpha}.$$

Alle diese Formeln lassen sich auch auf die bekannte Weise (*Burg's* Compend. der höhern Mathem. Cap. IV.; dessen „Sammlung trigonom. Formeln," S. 41; oder dessen Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie) für die Anwendung der Logarithmen einrichten.

9. Für den besondern Fall, als die Seitenkräfte einen rechten Winkel einschliessen, gehen diese Formeln, wegen $\alpha = 90^0$, in die folgenden einfachern über:

$$(1)\ R = \sqrt{(P^2 + Q^2)},\quad (2)\ P = R\ Cos\ \varphi,\quad (3)\ Q = R\ Sin\ \varphi$$

$$\text{und } (4)\ Tang\ \varphi = \frac{Q}{P},$$

was sofort auch mit den in **3.** und **5.** entwickelten Relationen, wie es sein soll, übereinstimmt.

Beispiel. Wirken auf einen Punct A (Fig. 2) die zwei Kräfte $P = 48{\cdot}34$ und $Q = 26{\cdot}52$ Pfund unter einem Winkel von $\alpha = 99^0, 24', 13''$; so erhält man nach den Formeln (1) und (6) in **8.** $R = 51{\cdot}197$ Pf. und $\varphi = 30^0, 44', 0''$, wodurch sofort die Grösse und Lage der Mittelkraft gegeben ist.

Bestimmung der Resultirenden aus einer *beliebigen* Anzahl von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Punct wirken und in *ein und derselben* Ebene liegen.

(§. 16.)

10. Wirken auf den Punct A (Fig. 4) die Kräfte $P, P_1, P_2, P_3 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen in einerlei Ebene, so lege man zur Bestimmung ihrer Resultirenden in derselben Ebene durch den Punct A ein beliebiges rechtwinkeliges Achsensystem XX', YY', bezeichne die als bekannt anzusehenden oder gegebenen Winkel, welche die Kräfte P, P_1 ... mit der Achse der x bilden, der Reihe nach und nach einerlei Richtung (von den positiven x gegen die positiven y) gezählt, durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$*) und zerlege endlich die Kraft P in zwei (auf einander senkrechte) Seitenkräfte p, q, wovon die erstere nach AX, die letztere nach AY wirkt, ebenso P_1 in zwei Kräfte p_1, q_1 nach AX' und AY die Kraft P_2 in p_2 und q_2 nach AX' und AY' u. s. w., so hat man nach Nr. **5**: $p = P\,Cos\,\alpha$, $q = P\,Sin\,\alpha$, $p_1 = P_1\,Cos\,\alpha_1$, $q_1 = P_1\,Sin\,\alpha_1$, $p_2 = P_2\,Cos\,\alpha_2$, $q_2 = P_2\,Sin\,\alpha_2$ u. s. w., wobei die Kräfte p positiv oder negativ ausfallen, d. h. von A gegen X oder von A gegen X' hin wirken, je nachdem der entsprechende Winkel α im 1ten oder 4ten, oder im 2ten oder 3ten Quadranten liegt; eben so fallen die nach der Achse YY' wirksamen Seitenkräfte q positiv oder negativ aus, wirken nämlich von A gegen Y oder von A gegen Y', je nachdem der betreffende Winkel α im 1ten oder 2ten, oder im 3ten oder 4ten Quadranten liegt.

11. Bezeichnet man die algebraische Summe der Kräfte p, d. i. die Resultirende aus allen auf der Achse der x wirksamen Seitenkräfte durch P' und ebenso die Resultirende aus allen nach der Achse der y wirkenden Seitenkräfte q durch Q'; so wird

$$P' = p + p_1 + p_2 + \ldots \text{ und } Q' = q + q_1 + q_2 + \ldots \text{ d. i.}$$

$$(1) \quad P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha)$$

$$(2) \quad Q' = P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Sin\,\alpha),$$

wobei sich die richtigen Zeichen der einzelnen Glieder je nach den Werthen der Winkel α, α_1 ... von selbst ergeben. Dadurch fallen die Kräfte P' und Q' positiv oder negativ aus, wodurch dann auch die Richtung bekannt ist, nach welcher diese beiden Kräfte (ob von A gegen X oder X', oder von A gegen Y oder Y') wirksam sind.

Legt man den Fall zum Grunde, in welchem P' und Q' positiv ausfallen, diese Kräfte also nach AX und AY wirken, folglich ihre Resultirende in den 1ten Quadranten XAY und in dieselbe Ebene fällt, (für $-P'$, $+Q'$ fällt diese in den 2ten, für

---

*) Sind nämlich ω, ω_1 .. die Winkel, welche die Kräfte PP_1, P_1P_2 u. s. w. einschliessen, ist nämlich $\widehat{PP_1} = \omega$, $\widehat{P_1P_2} = \omega_1 \ldots$ und zieht man die Achse XX' gegen die Kraft P unter den beliebigen Winkel α (wobei auch $\alpha = o$ sein kann); so sind offenbar auch die Winkel $\alpha + \omega = \alpha_1$, $\alpha + \omega + \omega_1 = \alpha_2$ u. s. w. bekannt oder als gegeben anzusehen.

$-P'$, $-Q'$ in den 3ten, sowie für $+P'$, $-Q'$ in den 4ten Quadranten) bezeichnet die Grösse dieser Resultirenden mit R, sowie ihren Neigungswinkel mit der Achse der x durch φ; so erhält man nach den Relationen in **9.**:

$$(3)\quad R = \sqrt{(P'^2 + Q'^2)} \quad \text{und} \quad (4)\quad Tang\,\varphi = \frac{Q'}{P'}.$$

Beispiel. Wirken z. B. auf den Punct A vier Kräfte, $P = 12$, $P_1 = 40$, $P_2 = 15$ und $P_3 = 10$, unter den Winkeln mit der Achse XX' von $\alpha = 30^0\,12'$, $\alpha_1 = 112^0\,25'\,16''$, $\alpha_2 = 234^0\,48'\,24''$ und $\alpha_3 = 342^0\,12'\,8''$ so findet man nach den vorigen Relationen (1) und (2):

$$P' = 10{\cdot}3713 - 15{\cdot}2564 - 8{\cdot}6451 + 9{\cdot}5214 = -\ 4{\cdot}0088$$

und $$Q' = 6{\cdot}0362 + 36{\cdot}9762 - 12{\cdot}2582 - 3{\cdot}0566 = +\ 27{\cdot}6976,$$

so dass also die Mittelkraft aus den Seitenkräften p von A gegen X', und jene aus den Seitenkräften q von A nach Y wirksam ist, daher die gesuchte Resultirende R im 2ten Quadranten $X'AY$ liegt.

Nach den weitern Relationen (3) und (4) findet man ferner mit diesen Werthen von P' und Q' sofort:

$$R = \sqrt{783{\cdot}227523} = 27{\cdot}986 \text{ und } \varphi = 98^0\,14'\,8''.$$

12. Bedingungen des Gleichgewichtes. Da für das Gleichgewicht der Kräfte ihre Resultirende $R = 0$ sein muss, so erhält man als Bedingungsgleichungen für diesen Fall aus der vorigen Relation (3) sofort $P' = 0$ und $Q' = 0$, d. i. (Relat. 1 und 2)

$$P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + P_2\,Cos\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0,$$
$$P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + P_2\,Sin\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Sin\,\alpha) = 0.$$

Findet das Gleichgewicht nicht statt, so lässt sich dieses ganz einfach durch Hinzufügung einer neuen Kraft, welche der Resultirenden der vorhandenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, herstellen.

Anmerkung. Man kann auch (analog mit der Bezeichnung, die wir für Kräfte wählen, welche im Raume nach beliebigen Richtungen wirken, Nr. **14**) die Richtungen der Kräfte durch die Winkel bezeichnen, welche die Kräfte mit dem positiven Theil der Axen bilden und dabei, was für die wirkliche Berechnung einfacher, voraussetzen, dass kein Winkel über 180^0 hinaus gezählt werden soll.

Sind nämlich $\alpha, \alpha_1 \ldots$ die in diesem Sinne genommenen Winkel der Kräfte P, $P_1 \ldots$ mit der Axe der x, sowie $\beta, \beta_1 \ldots$ jene mit der Axe der y; so erhält man für die beiden obigen Relationen (1) und (2) in Nr. **11**:

$$\left.\begin{aligned} P' &= P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha) \\ Q' &= P\,Cos\,\beta + P_1\,Cos\,\beta_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\beta) \end{aligned}\right\}\ (m)$$

wobei, wie bekannt, $Cos\,\alpha^2 + Cos\,\beta^2 = 1$, $Cos\,\alpha_1^2 + Cos\,\beta_1^2 = 1$ u. s. w. ist.

Da die Cosinus der spitzen Winkel positiv, die der stumpfen aber negativ sind, so erhalten auch hier bei dieser Art die Winkel zu nehmen, die einzelnen Glieder die gehörigen Vorzeichen. So ist z. B. für die im 4ten Quadranten liegende Kraft P_3 sofort $\alpha_3 = P_3 AX$ spitz und $\beta_3 = P_3 AY$ stumpf, folglich sind von den Componenten $p_3 = P_3 \, Cos\, \alpha_3$ und $q_3 = P_3 \, Cos\, \beta_3$ die erstere positiv und letztere negativ, wie es sein soll.

In dem vorigen Beispiele (Nr. **11**) erhalten nach dieser Bezeichnung die Winkel der Kräfte P, P_1, P_2, P_3 der Reihe nach die Werthe: $\alpha = 30^0 12'$, $\alpha_1 = 112^0 25' 16''$, $\alpha_2 = 125^0 11' 36''$, $\alpha_3 = 17^0 47' 52''$, und $\beta = 59^0 48'$, $\beta_1 = 22^0 25' 16''$, $\beta_2 = 144^0 48' 24''$, $\beta_3 = 107^0 47' 52''$.

Natürlich erhält man mit diesen Werthen aus den vorigen Relationen (m) für P', Q', R und φ wieder die obigen Werthe.

Zusammensetzung von Kräften, welche auf *einen* Punct wirken, jedoch in *verschiedenen* Ebenen liegen.

(§. 17.)

13. Wirken drei Kräfte P, Q, S auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 5) nach den wechselweise auf einander perpendikulären Richtungen AB, AC, AD, und schneidet man diese eben genannten Linien den Kräften proportional ab; so stellt die Diagonale AG des aus den Puncten B, C, D ergänzten rechtwinkeligen Parallelopipedes die Resultirende R aus diesen Kräften vor, und zwar ist wegen $AG^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2$ sofort

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2 + S^2)} \ldots (1),$$

und wenn man die Winkel, welche die Diagonale AG mit den drei Seiten AB, AC, AD bildet, der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, auch:

$$Cos\, a = \frac{P}{R},\quad Cos\, b = \frac{Q}{R},\quad Cos\, c = \frac{S}{R} \ldots (2),$$

wobei noch überdiess die Relation [*Burg's* Compendium §. 580, oder auch aus der Verbindung von (1) und (2)]:

$$Cos\, a^2 + Cos\, b^2 + Cos\, c^2 = 1$$

stattfindet, welche als Rechnungscontrole benützt werden kann.

14. Wirken die Kräfte, deren Anzahl eine beliebige sein soll, unter schiefen Winkeln auf den freien Punct A (Fig. 6), so lege man (analog mit dem Verfahren in Nr. **10**) durch diesen Angriffspunct drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ rechtwinkelig auf einander und bezeichne die Winkel, welche die Kraft P mit diesen Achsen bildet, der Reihe nach durch α, β, γ, ebenso jene der Kraft P_1 durch α_1, β_1, γ_1 u. s. w., wobei wir (analog mit der Bemerkung in Nr. **11**) der leichtern Uebersicht wegen diese

Winkel von der betreffenden Kraftrichtung immer gegen den positiven Theil der Achsen rechnen und annehmen, dass keiner dieser Winkel 180^0 übersteige, wornach also z. B. die in den triëdrischen Winkel $YX'Z'$ fallende Kraft P_n mit der Achse der x einen stumpfen, mit jener der y einen spitzen und mit jener der z wieder einen stumpfen Winkel bildet, oder $\alpha_n > 90^0$, $\beta_n < 90^0$, $\gamma_n > 90^0$ und dabei jeder stumpfe Winkel kleiner als 180^0 ist.

Diess vorausgesetzt zerlege man die Kraft P in 3 auf einander senkrechte Componenten p, q, r, und zwar nach den Achsen XX', YY', ZZ', ebenso die Kraft P_1 in die auf die genannten Achsen fallenden Seitenkräfte p_1, q_1, r_1 u. s. w.; so erhält man nach den Relationen (2) der vorigen Nummer:

$$p = P \operatorname{Cos} \alpha, \quad q = P \operatorname{Cos} \beta, \quad r = P \operatorname{Cos} \gamma,$$
$$p_1 = P_1 \operatorname{Cos} \alpha_1, \quad q_1 = P_1 \operatorname{Cos} \beta_1, \quad r_1 = P_1 \operatorname{Cos} \gamma_1$$

u. s. w. fort.

Durch diese Zerlegung erhält man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, P_1, $P_2 \ldots$ drei Gruppen von Kräften, welche nach den auf einander perpendikulär stehenden Achsen XX', YY' und ZZ' auf den Punct A wirken, so dass, wenn man ihre Resultirenden beziehungsweise durch P', Q', R' bezeichnet, sofort

$$(m) \quad P' = p + p_1 + p_2 + \cdots, \quad Q' = q + q_1 + q_2 + \cdots,$$
$$R' = r + r_1 + r_2 + \cdots \text{ wird.}$$

Bezeichnet man aber die Resultirende aus den ursprünglichen Kräften P, P_1, $P_2 \ldots$, welche zugleich auch jene dieser drei Kräfte P', Q', R' ist, mit R, und die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Achsen XX', YY', ZZ' bildet, durch a, b, c; so hat man unmittelbar nach **13.** (Relat. 1 und 2):

$$R = \sqrt{(P'^2 + Q'^2 + R'^2)} \text{ und}$$
$$\operatorname{Cos} a = \frac{P'}{R}, \quad \operatorname{Cos} b = \frac{Q'}{R}, \quad \operatorname{Cos} c = \frac{R'}{R},$$

wodurch die Grösse und Lage der Resultirenden gegeben ist.

Substituirt man für P', Q', R' und darin für p, q, $r \ldots$ die vorigen Werthe, so wird:

$$P' = P \operatorname{Cos} \alpha + P_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 + \cdots = \Sigma (P \operatorname{Cos} \alpha),$$
$$Q' = P \operatorname{Cos} \beta + P_1 \operatorname{Cos} \beta_1 + \cdots = \Sigma (P \operatorname{Cos} \beta),$$
$$R' = P \operatorname{Cos} \gamma + P_1 \operatorname{Cos} \gamma_1 + \cdots = \Sigma (P \operatorname{Cos} \gamma).$$

Beispiel. Um eine Anwendung von diesem Verfahren zu zeigen, wollen wir annehmen, dass auf einen Punct A im Raume 8 Kräfte wirken, deren Grösse und Richtungen gegen ein beliebig gewähltes Coordinatensystem durch folgende Angaben bestimmt sein sollen:

$$
\begin{array}{llll}
P = 42 \text{ Pfund}, & \alpha = 82^0\,18', & \beta = 36^0\,42', & \gamma < 90^0 \\
P_1 = 78 \;\;\text{„} & \alpha_1 = 148^0\,25', & \beta_1 = 63^0\,36', & \gamma_1 > 90^0 \\
P_2 = 85 \;\;\text{„} & \alpha_2 = 75^0\;\;8', & \beta_2 = 120^0\,50', & \gamma_2 > 90^0 \\
P_3 = 124 \;\;\text{„} & \alpha_3 = 112^0\,30', & \beta_3 = 144^0\;\;6', & \gamma_3 > 90^0 \\
P_4 = 130 \;\;\text{„} & \alpha_4 = 62^0\,25', & \beta_4 = 32^0\,52', & \gamma_4 < 90^0 \\
P_5 = 28 \;\;\text{„} & \alpha_5 = 140^0\,10', & \beta_5 = 82^0\,42', & \gamma_5 < 90^0 \\
P_6 = 85 \;\;\text{„} & \alpha_6 = 61^0\,32', & \beta_6 = 148^0\,12', & \gamma_6 < 90^0 \\
P_7 = 92 \;\;\text{„} & \alpha_7 = 162^0\;\;4', & \beta_7 = 104^0\,35', & \gamma_7 < 90^0.
\end{array}
$$

Man findet mit diesen Werthen aus den obigen Relationen:

$$P' = -94{\cdot}7851, \quad Q' = -58{\cdot}3109, \quad R' = 32{\cdot}0919$$

$$R = 115{\cdot}82 \text{ Pfund}, \quad a = 144^0\,55'\,26'', \quad b = 120^0\,13'\,47'', \quad c = 106^0\,5'\,12''.$$

Die Resultirende liegt sonach im 7ten dreiflächigen Winkel, und eine Kraft, welche mit den gegebenen 8 Kräften das Gleichgewicht herstellt, würde mithin in den 1ten dieser 8 körperlichen Winkel fallen, dabei mit den positiven Richtungen der Coordinatenachsen die Winkel $a' = 180 - a$, $b' = 180 - b$, $c' = 180 - c$ bilden und der Resultirenden R gleich sein.

Anmerkung 1. Für das Gleichgewicht der angenommenen Kräfte müssen (wegen $R = 0$) die drei Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ bestehen. Wäre z. B. bloss $R' = 0$, so wäre nach der vorhergehenden Relation $Cos\, c = \frac{0}{R} = 0$ oder $c = 90^0$, zum Beweis, dass in diesem Falle die Resultirende in die Ebene der Achsen XX', YY' fällt. Wäre ausserdem auch $Q' = 0$, so würde auch noch $b = 90^0$, zum Zeichen, dass jetzt die Resultirende R mit der Achse XX' zusammenfällt.

Anmerkung 2. Ist der Angriffspunct der Kräfte nicht vollkommen frei, sondern z. B. gezwungen, auf einer gegebenen krummen Fläche oder Linie zu bleiben, auf welcher er sich übrigens wieder ganz frei (ohne Reibung) soll bewegen können, so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dass die Resultirende aus allen diesen Kräften gleich Null sei, sondern es reicht hin, dass diese auf der Fläche oder Linie im betreffenden Puncte normal stehe, indem sie dann von dem Widerstande der Fläche oder Curve aufgehoben wird. Diese Betrachtung führt im erstern dieser beiden Fälle zu zwei, im letztern zu einer Bedingungsgleichung, und zwar, wenn $F = \varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche ist; so sind diese für den erstern Fall:

$$P'\left(\frac{dF}{dy}\right) - Q'\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad P'\left(\frac{dF}{dz}\right) - R'\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

und für den letztern:

$$P'dx + Q'dy + R'dz = 0.$$

Noch anschaulicher lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen für diese beiden Fälle auf folgende Weise darstellen:

Liegt der Angriffspunct der Kräfte auf einer krummen Oberfläche oder Curve, so lasse man eine der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen, z. B. jene der z, mit der durch diesen Punct gehenden Normale zusammenfallen und zerlege jede der Kräfte wie vorhin in 3 auf die Coordinatenachsen fallende Componenten, so werden davon jene, welche in die Achse der z fallen, durch den Widerstand der festen Oberfläche oder Curve aufgehoben und es bleiben für das Gleichgewicht nur noch die beiden Gleichungen zu erfüllen:

$$\Sigma (P \, Cos \, \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (P \, Cos \, \beta) = 0.$$

Ersetzt man den genannten Widerstand durch eine in der Richtung der Normale fallende Kraft N, so kann man den Angriffspunct sämmtlicher Kräfte wieder als einen ganz freien ansehen und man hat, wenn a, b, c die Winkel dieser Kraft N mit den Coordinatenachsen sind, nach den obigen Relationen für das Gleichgewicht:

$$\Sigma(P \, Cos \, \alpha) + N \, Cos \, a = 0, \quad \Sigma(P \, Cos \, \beta) + N \, Cos \, b = 0, \quad \Sigma(P \, Cos \, \gamma) + N \, Cos \, c = 0,$$

woraus man noch ganz einfach findet:

$$N = \sqrt{(\Sigma P \, Cos \, \alpha)^2 + (\Sigma P \, Cos \, \beta)^2 + (\Sigma P \, Cos \, \gamma)^2},$$

d. h. die Grösse oder Intensität dieser Kraft oder dieses Widerstandes N ist gleich der Resultante der auf den genannten Punct wirkenden Kräfte.

Anmerkung 3. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$R^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2 = \overline{\Sigma(P \, Cos \, \alpha)}^2 + \overline{\Sigma(P \, Cos \, \beta)}^2 + \overline{\Sigma(P \, Cos \, \gamma)}^2,$$

und wenn man substituirt, entwickelt und ordnet:

$$\begin{aligned} R^2 = {} & P^2 (Cos \, \alpha^2 + Cos \, \beta^2 + Cos \, \gamma^2) + P_1^2 (Cos \, \alpha_1^2 + Cos \, \beta_1^2 + Cos \, \gamma_1^2) + \ldots \\ & + 2 P P_1 (Cos \, \alpha \, Cos \, \alpha_1 + Cos \, \beta \, Cos \, \beta_1 + Cos \, \gamma \, Cos \, \gamma_1) \\ & + 2 P P_2 (Cos \, \alpha \, Cos \, \alpha_2 + Cos \, \beta \, Cos \, \beta_2 + Cos \, \gamma \, Cos \, \gamma_2) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

oder wegen $Cos \, \alpha^2 + Cos \, \beta^2 + Cos \, \gamma^2 = Cos \, \alpha_1^2 + Cos \, \beta_1^2 + Cos \, \gamma_1^2 = \ldots = 1$

und $Cos \, \alpha \, Cos \, \alpha_1 + Cos \, \beta \, Cos \, \beta_1 + Cos \, \gamma \, Cos \, \gamma_1 = Cos \, \widehat{PP_1}$

$Cos \, \alpha \, Cos \, \alpha_2 + Cos \, \beta \, Cos \, \beta_2 + Cos \, \gamma \, Cos \, \gamma_2 = Cos \, \widehat{PP_2}$

u. s. w.

auch

$$\begin{aligned} R^2 = {} & (P^2 + P_1^2 + \ldots) + 2 P P_1 \, Cos \, \widehat{PP_1} + 2 P P_2 \, Cos \, \widehat{PP_2} + \ldots \\ & + 2 P_1 P_2 \, Cos \, \widehat{P_1 P_2} + 2 P_1 P_3 \, Cos \, \widehat{P_1 P_3} + \ldots \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

d. i. endlich:

$$R^2 = \Sigma(P^2) + 2 \Sigma (P P_1 \, Cos \, \widehat{PP_1}).$$

Allgemeine Bestimmung des Mittelpunctes paralleler Kräfte.

(§. 23.)

15. Wirken auf ein System von beliebigen, fest mit einander verbundenen Puncten M, M_1, $M_2 \ldots$ (Fig. 7) nach parallelen, sonst aber beliebigen Richtungen die Kräfte P, P_1, $P_2 \ldots$, so beziehe man, zur Bestimmung ihrer Resultirenden, dieses System auf irgend drei rechtwinkelige Coordinatenachsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Coordinaten des Angriffspunctes M durch x, y, z, jene des

Punctes M_1 durch x_1, y_1, z_1 u. s. w., sowie endlich jene des Angriffspunctes der Resultirenden R, d. i. des Mittelpunctes der parallelen Kräfte durch X, Y, Z; fälle ferner aus diesen Puncten $M, M_1 \ldots$ auf die Ebene der xy die Perpendikel $Mm = z$, $M_1 m_1 = z_1$, $M_2 m_2 = z_2$ u. s. w. und ziehe in der durch $z z_1$ gedachten Ebene $M_1 m$ durch M die Gerade MB parallel zu mm_1 (als Durchschnittslinie der beiden Ebenen $M_1 m$ und xy). Diess vorausgesetzt, liegt der Angriffspunct N der Mittelkraft aus den beiden Kräften P, P_1, je nachdem diese nach einerlei oder nach entgegengesetzten Richtungen wirken (§§. 20 und 21), entweder in der bestimmten Geraden MM_1 oder in ihrer Verlängerung; nimmt man hier den ersten Fall an (da der letztere ohnehin aus dem erstern folgt), so hat man (§. 20), indem diese Mittelkraft $= P + P_1$ ist:

$$P_1 : (P + P_1) = MN : MM_1 = NC : M_1 B \quad \text{(§. 20, Relat. [4])}$$

(wenn man auch noch aus N auf die Ebene der xy das in der Ebene $M_1 m$ liegende Perpendikel Nn fällt), nämlich $(P + P_1) NC = P_1 . M_1 B$, oder wenn man beiderseits die identische Gleichung

$$(P + P_1)\, Cn = P . Mm + P_1 . Bm_1$$

(wegen $Cn = Mm = Bm_1$) addirt und reducirt, auch:

$$(P + P_1)\, Nn = P . Mm + P_1 . M_1 m_1 = Pz + P_1 z_1 \,;$$

es ist nämlich, wenn man das Product aus der Kraft in das aus ihrem Angriffspunct auf die Ebene der xy gefällte Perpendikel Moment dieser Kraft in Bezug auf diese Ebene nennt, sofort das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

Ist ferner N_1 der Angriffspunct der Resultirenden $P + P_1 + P_2$ aus dieser Mittelkraft $P + P_1$ und der dritten in M_2 wirkenden parallelen Kraft P_2, und zieht man wieder $N_1 n_1$ perpendikulär auf die Ebene xy; so hat man ebenso nach diesem Satze:

$$(P + P_1 + P_2) N_1 n_1 = (P + P_1) Nn + P_2 . M_2 m_2,$$

oder wenn man für $(P + P_1) Nn$ den vorigen Werth setzt:

$$(P + P_1 + P_2) N_1 n_1 = Pz + P_1 z_1 + P_2 z_2,$$

wobei diese Summen immer nur im algebraischen Sinne zu verstehen sind.

Fährt man nun auf diese Weise fort, bis auch die letzte parallele Kraft verbunden ist, so erhält man endlich die Relation:

$$RZ = Pz + P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots = \Sigma(Pz) \quad (k),$$

wobei $R = P + P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma(P)$ ist.

16. Fällt man nun auch auf die beiden übrigen coordinirten Ebenen der xz und yz aus den oben genannten Angriffspuncten M, $M_1 \ldots$ die Perpendikel, so sind diese nichts anders als beziehungsweise die Ordinaten $y, y_1 \ldots$ und $x, x_1 \ldots$ der Puncte $M, M_1 \ldots$ und man erhält analog mit der vorigen Relation (k) ebenso $RY = \Sigma(Py)$ und $RX = \Sigma(Px)$, so, dass man also zur Bestimmung des Mittelpunctes der parallelen Kräfte die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} RX &= Px + P_1 x_1 + \ldots = \Sigma(Px) \\ RY &= Py + P_1 y_1 + \ldots = \Sigma(Py) \\ RZ &= Pz + P_1 z_1 + \ldots = \Sigma(Pz) \end{aligned}\right\} (1)$$

und
$$R = P + P_1 + \ldots = \Sigma(P) \ldots . (2),$$

aus welchen sich für diesen Punct die Coordinaten ergeben:

$$X = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\ Y = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\ Z = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)} \ldots (3)$$

und wobei die sämmtlichen Summen im algebraischen Sinne zu nehmen sind.

17. Liegen alle Angriffspuncte $M, M_1 \ldots$ in ein und derselben Ebene, und nimmt man diese zur Vereinfachung der Rechnung als eine der drei coordinirten Ebenen, z. B. zur Ebene der xy; so werden die sämmtlichen durch $z, z_1, z_2 \ldots$ bezeichneten Ordinaten Null, und man erhält aus der 3ten der vorigen Relationen (1) $RZ = 0$, also, wenn R nicht Null ist (d. h. das Gleichgewicht nicht besteht), $Z = 0$, zum Beweis, dass in diesem Falle der Mittelpunct der parallelen Kräfte in derselben Ebene der Angriffspuncte $M, M_1 \ldots$ liegt.

Zur Bestimmung dieses Punctes genügen daher (die Puncte $M, M_1 \ldots$ auf zwei in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen bezogen) die beiden Gleichungen: $RX = \Sigma(Px)$ und $RY = \Sigma(Py)$, wobei $R = \Sigma(P)$ ist.

Anmerkung. Nimmt man (zur Uebung) an, dass die sämmtlichen Angriffspuncte in einer Ebene liegen, deren Gleichung auf das bereits angenommene Coordinatensystem $z = ax + by + \alpha$ ist; so hat man für den Punct M die eben angeführte, für den Punct M_1 die Gleichung $z_1 = ax_1 + by_1 + \alpha$, für den Punct M_2 jene $z_2 = ax_2 + by_2 + \alpha$ u. s. w.

Diese Werthe von $z, z_1 \ldots$ in der 3ten der obigen Gleichungen (1) substituirt und geordnet erhält man:

$$RZ = a(Px + P_1 x_1 + \ldots) + b(Py + P_1 y_1 + \ldots) + \alpha(P + P_1 + \ldots)$$

d. i. mit Rücksicht auf die beiden erstern der Gleichungen (1), wenn man sogleich mit R abkürzt:

$$Z = aX + bY + \alpha$$

zum Beweis, dass auch der Mittelpunct X, Y, Z ein Punct der angenommenen Ebene ist.

18. Liegen dagegen die sämmtlichen Puncte $M, M_1 \ldots$ in einer geraden Linie und nimmt man diese zur Achse der x, so erhält man aus den beiden letzten der Relationen (1) in **16.** wegen

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = 0 \text{ und } z = z_1 = z_2 \ldots = 0,$$

wenn das Gleichgewicht nicht statt hat, also R nicht Null ist (da für das Gleichgewicht dieser Punct X, Y, Z ohnehin nicht besteht), sofort $Y = 0$, $Z = 0$, zum Zeichen, dass in diesem Falle (wie es ohnehin bekannt) der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der nämlichen Geraden liegt.

Anmerkung. Besteht das Gleichgewicht, so folgt aus den obigen Relationen (1) und (2) wegen $R = 0$ sofort:

$$\Sigma(P) = 0, \quad \Sigma(Px) = 0, \quad \Sigma(Py) = 0, \quad \Sigma(Pz) = 0.$$

Besteht dieses nicht, so muss man dem Systeme der parallelen Kräfte noch jene $-R$ hinzufügen, dann ist $-R + \Sigma(P) = 0$,

$$-RX + \Sigma(Px) = 0, \quad -RY + \Sigma(Py) = 0, \quad -RZ + \Sigma(Pz) = 0,$$

d. i. $\quad R = \Sigma(P), \quad RX = \Sigma(Px), \quad RY = \Sigma(Py), \quad RZ = \Sigma(Pz).$

Wäre $R = \Sigma(P) = 0$, ohne dass zugleich auch die durch die Gleichungen $\Sigma(Px) = 0$, $\Sigma(Py) = 0$ und $\Sigma(Pz) = 0$ ausgedrückten Bedingungen stattfänden, so würden die Coordinaten X, Y, Z Unendlich, zum Zeichen, dass sich die Kräfte auf ein sogenanntes Kräftepaar reduciren.

Satz der statischen Momente.

(§. 32.)

19. Wirken auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 8) beliebig viele in ein und derselben Ebene liegende Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen, und fällt man aus irgend einem, in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte oder deren Verlängerungen die Perpendikel Oa, $Oa_1 \ldots$ und bezeichnet ihre Grösse oder Länge beziehungsweise durch $p, p_1, p_2 \ldots$ so sind Pp, $P_1 p_1$ u. s. w. die statischen Momente dieser Kräfte in Beziehung auf den Punct O.

Nimmt man die durch diesen Punct O und den Angriffspunct A gezogene Gerade XX' zur Abscissen- und die durch A darauf perpendikuläre Gerade YY' zur Ordinatenachse, bezeichnet die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 . . . mit XX' einschliessen, wie in Nr. **10** durch α, α_1, α_2 . . zerlegt wieder, wie dort, jede dieser Kräfte in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte, nämlich nach AX und AY, und bezeichnet gerade so wie dort die Mittelkraft aus allen nach der Achse XX' wirksamen Seitenkräfte mit P', sowie jene nach YY' wirkenden Kräfte mit Q', so dass also (wie in **11**) $P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots$ und $Q' = P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + \ldots$ wird; so hat man aus dieser letzteren Relation, wenn man den willkürlichen Abstand $AO = u$ setzt, wodurch

$$Sin\,\alpha = \frac{p}{u},\ Sin\,\alpha_1 = \frac{p_1}{u},\ Sin\,\alpha_2 = \frac{p_2}{u} \ldots$$

wird, sofort:

$$Q' = P\frac{p}{u} + P_1\frac{p_1}{u} + \ldots,$$

oder wenn man durchaus mit u multiplicirt:

$$Q'u = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots (m).$$

Ist nun R die Resultirende aus diesen Kräften P, P_1 . . . also auch der beiden Mittelkräfte P', Q', und fällt man auf diese Kraft ebenfalls aus O das Perpendikel Ob, dessen Länge r heissen soll, so ist nach dem Satze (1) in §. 29 $Rr = Q'q' + P'p'$, oder da hier $q' = u$ und $p' = 0$ ist, auch $Rr = Q'u$ (was auch unmittelbar aus dem Satze in §. 29 folgt, nach welchem $Rr = Q_1 q_1$ ist), und wenn man für $Q'u$ den Werth aus der vorigen Relation (m) setzt:

$$Rr = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots (1).$$

Anmerkung 1. Die in dieser algebraischen Summe vorkommenden Glieder werden positiv oder negativ, je nachdem (da man die sämmtlichen Kräfte P als positiv anzusehen hat) die Perpendikel $p = u\,Sin\,\alpha$, $p_1 = u\,Sin\,\alpha_1 \ldots$ positiv oder negativ ausfallen, d. h. je nachdem die entsprechenden Winkel α im 1ten und 2ten oder 3ten und 4ten Quadranten liegen.

Auch lässt sich dieser Gegensatz in den Zeichen der Glieder Pp leicht dadurch finden, dass man sich die sämmtlichen Perpendikel p, p_1 . . . im Puncte O fest mit einander verbunden, zugleich aber um diesen Punct drehbar denkt und sich vorstellt, dass die Kräfte P, P_1 . . . an ihren Endpuncten a, a_1 . . . wirksam sind; dann bilden die Kräfte, wie hier P und P_1, welche das System von Oa, Oa_1 . . . nach der einen Richtung drehen wollen, den Gegensatz zu jenen, wie hier P_2, welche dieses System nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben. Die Resultirende sucht das System im positiven oder negativen Sinne zu drehen, je nachdem die algebraische Summe der Glieder Pp (wobei man willkürlich die eine oder die andere Richtung als die positive annehmen kann) positiv oder negativ ausfällt.

Anmerkung 2. Da für den Fall des Gleichgewichtes, wegen $R = 0$, sofort $Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0 \ldots (u)$ wird, so folgt, dass in diesem Falle die Summe der statischen Momente jener Kräfte, welche das genannte System nach einer Richtung zu drehen suchen, gleich sein muss der Summe der statischen Momente der übrigen, d. h. jener Kräfte, welche das System nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben. Ausserdem müssen auch noch, wenn O ein freier Punct ist, die beiden Bedingungsgleichungen (**12.**) $P' = 0$ und $Q' = 0$ bestehen. (Diese letztere Gleichung $Q' = 0$ ist übrigens schon eine Folge von jener $R = 0$, indem $Rr = Q'q' = Q'u$, und u von Null verschieden ist.)

Ist dagegen O ein fester Drehungspunct, so ist das Gleichgewicht von der Bedingungsgleichung $P' = 0$ unabhängig, d. h. diese Gleichung braucht nicht stattzufinden.

Anmerkung 3. Lässt man, ohne die Grösse der Perpendikel $p, p_1, p_2 \ldots$ zu ändern, die ganz willkürliche Distanz $AO = u$ allmählich zunehmen und setzt endlich $u = \infty$, so laufen zuletzt die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ unter einander parallel, ohne dass dadurch die obige Relation (1), in welcher diese Grösse u nicht mehr vorkommt oder hinausgefallen ist, ihre Giltigkeit verliert (§. 33).

20. Die vorige Relation (1) gilt aber nicht bloss für den Fall, in welchem die Kräfte $P, P_1 \ldots$ auf einen einzigen Punct, sondern auch wenn diese auf verschiedene, mit den Kräften in derselben Ebene liegende, jedoch fest mit einander verbundene Puncte $A, A_1, A_2 \ldots$ (Fig. 9) wirken. Denn sucht man zuerst zu den beiden Kräften P und P_1, welche sich in M schneiden, die Mittelkraft R, ferner zu dieser und der 3ten Kraft P_2, welche sich in N schneiden sollen, die Mittelkraft R_1 u. s. w. fort, fällt dann aus irgend einem in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte $P, P_1 \ldots R, R_1 \ldots$ die Perpendikel $Oa = p$, $Oa_1 = p_1 \ldots$ $Ob = r$, $Ob_1 = r_1 \ldots$; so folgt nach der genannten Relation (1) der vorigen Nummer: $Rr = Pp + P_1 p_1$, ferner ebenso:

$$R_1 r_1 = Rr + P_2 p_2 = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt und die letzte Resultirende aus sämmtlichen Kräften wieder durch R, das aus O darauf gefällte Perpendikel durch r bezeichnet, endlich wie zuvor:

$$Rr = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = \Sigma(Pp) \ldots (2).$$

Anmerkung 1. Bezieht man die Angriffspuncte $A, A_1 \ldots$ auf zwei willkürliche in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen, und zerlegt jede der gegebenen Kräfte $P, P_1 \ldots$ in zwei mit diesen Achsen parallele Kräfte, deren Angriffspuncte man sich in diese Achsen verlegt denken kann; so erhält man genau so wie in **10.**, wenn man die dortige Bezeichnung der Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit der Achse XX' bilden, beibehält, zwei Gruppen von parallelen Kräften, von denen die mit der Achse XX' parallele Gruppe die Resultirende $P' = \Sigma(P \, Cos \, \alpha)$ und die mit YY' parallele die Mittelkraft $Q' = \Sigma(P \, Sin \, \alpha)$ besitzt.

Soll also hier das Gleichgewicht stattfinden, so müssen gleichzeitig die drei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\Sigma(P \, Cos \, \alpha) = 0, \quad \Sigma(P \, Sin \, \alpha) = 0, \quad \Sigma(Pp) = 0 \quad (l).$$

Auch lassen sich die in der vorigen allgemeinen Gleichung (2) vorkommenden Producte oder stat. Momente so ausdrücken, dass dadurch zugleich die Zeichen der Perpendikel $r, p, p_1 \ldots$ in die Augen fallen.

Nimmt man nämlich zuerst nur zwei Kräfte P, P_1 an und bezieht diese auf ein durch den Punct O gehendes rechtwinkeliges Achsensystem, bezeichnet die Coordinaten der Angriffspuncte A, A_1 dieser Kräfte beziehungsweise mit x, y und x_1, y_1, die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 und ihre Resultirende R mit der Abscissenachse bilden, mit α, α_1 und a; so erhält man für die aus dem Anfangspunct O auf die Richtungen der Kräfte P, P_1, R gefällten Perpendikel p, p_1, r, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke

$$p = y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha, \quad p_1 = y_1 \, Cos \, \alpha_1 - x_1 \, Sin \, \alpha_1$$

und wenn X, Y die Coordinaten irgend eines Punctes der Resultirenden R sind,

$$r = Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a.$$

Dadurch erhält also die obige Gleichung $Rr = Pp + P_1 p_1$ die Form:

$$R(Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a) = P(y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha) + P_1(y_1 \, Cos \, \alpha_1 - x_1 \, Sin \, \alpha_1).$$

Verbindet man jetzt gerade so, wie es vorhin geschehen, diese Resultirende R mit der dritten Kraft P_2 und setzt für R, P_2 und ihre Resultirende R' die der vorigen analoge Gleichung an, verbindet ferner R' mit P_3 u. s. w. fort, bis man auf diese Weise zur letzten Kraft gekommen ist, und bezeichnet die letzte Resultirende wieder mit R, die Coordinaten eines ihrer Puncte durch X, Y, sowie den Winkel, welchen sie mit der Abscissenachse bildet, durch a; so ist die der vorigen analoge Gleichung:

$$R(Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a) = \Sigma[P(y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha)] \quad (m),$$

welche den Abstand $r = Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a$ angibt, in welchem die Resultante R vom Anfangspuncte der Coordinaten durchgeht, während die beiden obigen Gleichungen $P' = R \, Cos \, a$ und $Q' = R \, Sin \, a$, d. i.

$$R \, Cos \, a = \Sigma(P \, Cos \, \alpha) \text{ und } R \, Sin \, a = \Sigma(P \, Sin \, \alpha) \ldots (n),$$

die Grösse und Richtung derselben angeben.

Nach den vorhin aufgestellten Bedingungsgleichungen (l) folgt, dass eine beliebige Anzahl von in derselben Ebene liegenden Kräften im Gleichgewichte steht, wenn 1. die Summe der Seitenkräfte derselben nach den Richtungen zweier beliebiger in dieser Ebene angenommenen rechtwinkeligen Achsen jede für sich gleich Null, und 2. die Summe der statischen Momente der Kräfte in Beziehung auf irgend einen in der Ebene angenommenen Punct ebenfalls gleich Null ist.

Hätte die Ebene, in welcher die Kräfte liegen, einen festen Punct, so wäre es nicht mehr nothwendig, dass ihre Resultirende $= 0$ sei, sondern es würde für das Gleichgewicht hinreichen, dass diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so reducirt sich in diesem Falle die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(Pp) = 0$, während der Werth der Resultante

$$R = \sqrt{\{[\Sigma(P\, Cos\, \alpha)]^2 + [\Sigma(P\, Sin\, \alpha)]^2\}}$$

den Druck gegen diesen festen Punct angibt.

Wären die sämmtlichen Kräfte parallel, so wäre $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, folglich hätte man $R\, Cos\, a = Cos\, \alpha\, \Sigma(P)$, $R\, Sin\, a = Sin\, \alpha\, \Sigma(P)$ und $Rr = \Sigma(Pp)$, woraus sofort

$tang\, a = tang\, \alpha$, also auch $Cos\, a = Cos\, \alpha$, $Sin\, a = Sin\, \alpha$ und $R = \Sigma(P)$ folgt; es ist also die Resultante in diesem Falle (wie bekannt) den Seitenkräften parallel und ihrer Summe gleich.

Für das Gleichgewicht ist $R = 0$, also $\Sigma(P) = 0$ und $\Sigma(Pp) = 0$.

Anmerkung 2. Wir können jetzt auch auf den allgemeinen Fall übergehen und die Gleichgewichtsbedingungen für ein System von fest mit einander verbundenen Puncten bestimmen, auf welche Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raume wirken.

Es seien nämlich P, P_1, $P_2 \ldots$ diese Kräfte; x, y, z, x_1, y_1, z_1 u. s. w. die auf irgend ein rechtwinkeliges Achsensystem bezogenen Coordinaten ihrer Angriffspuncte; α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 u. s. w. die Winkel, welche die Kräfte beziehungsweise mit den Achsen der x, y, z bilden. Diess vorausgesetzt, zerlege man jede Kraft P in drei mit den Coordinatenachsen parallele Kräfte, so sind diese (Nr. **14**) für die Kraft P beziehungsweise $P\, Cos\, \alpha$, $P\, Cos\, \beta$, $P\, Cos\, \gamma$; für jene P_1: $P_1\, Cos\, \alpha_1$, $P_1\, Cos\, \beta_1$, $P_1\, Cos\, \gamma_1$ u. s. w. Man verlängere ferner die (mit der Achse der x parallele) Kraft $P\, Cos\, \alpha$ bis zu ihrem Durchschnitt N (Fig. 9, a) mit der Ebene der yz; so hat dieser Punct N die Coordinaten $An = y$ und $Am = z$. Zerlegt man diese Kraft $P\, Cos\, \alpha$ in zwei gleiche mit ihr parallele Kräfte, welche in derselben, und zwar in der durch pq gehenden Ebene liegen (wofür $Np = Nq$ ist), so fällt von diesen beiden, mit der Achse der x parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P\, Cos\, \alpha$, eine in die Ebene der xy und hat von der Achse der x den Abstand $Ap = 2An = 2y$, und die andere in die Ebene der xz in den Abstand $Aq = 2Am = 2z$ von dieser Achse.

Zerlegt man auf gleiche Weise auch die übrigen mit der Achse der x parallelen Kräfte $P_1\, Cos\, \alpha_1 \ldots$ jede in zwei gleiche dieser Achse parallele Kräfte, so erhält man für das System der mit der Achse der x parallelen Seitenkräfte zwei Gruppen solcher mit dieser Achse paralleler Kräfte $\frac{1}{2} P\, Cos\, \alpha$, $\frac{1}{2} P_1\, Cos\, \alpha_1 \ldots$, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xy in den Entfernungen beziehungsweise $2y$, $2y_1 \ldots$ und die zweite in der Ebene der xz in den Entfernungen $2z$, $2z_1 \ldots$ wirksam ist.

Ebenso kann man das der Achse der y parallele System der Seitenkräfte $P\, Cos\, \beta$, $P_1\, Cos\, \beta_1 \ldots$ durch zwei Gruppen dieser Achse parallele Kräfte ersetzen, von denen die eine in der Ebene der xy in den Entfernungen

$2x$, $2x_1 \ldots$ und die andere Gruppe in der Ebene der yz in den Entfernungen $2z$, $2z_1 \ldots$ wirksam ist.

Endlich kann man auch für das dritte System der mit der Achse der z parallelen Seitenkräfte $P\ Cos\ \gamma$, $P_1\ Cos\ \gamma_1 \ldots$ zwei Gruppen von mit derselben Achse der z parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P\ Cos\ \gamma$, $\frac{1}{2} P_1\ Cos\ \gamma_1 \ldots$ substituiren, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xz liegt und deren einzelnen Kräfte die Abstände $2x$, $2x_1 \ldots$, die andere in der Ebene der yz wirksam ist, und die Abstände $2y$, $2y_1 \ldots$ von dieser Achse der z haben.

Durch dieses Verfahren hat man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, $P_1 \ldots$ welche ganz willkürliche Richtungen im Raume haben können, durchaus Kräfte erhalten, welche lediglich in den 3 coordinirten Ebenen wirksam, und darin in je zwei, beziehungsweise mit den in diesen Ebenen liegenden Achsen parallelen Gruppen vertheilt sind; es ist klar, dass wenn in jeder dieser 3 coordinirten Ebenen Gleichgewicht besteht, auch das ganze System im Gleichgewichte sein muss.

Nun sind aber die Bedingungen für das Gleichgewicht in den 3 genannten Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise (nach den vorigen Relationen (n) und (m), wenn man $R = 0$ setzt):

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \alpha) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \beta) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P[2y\ Cos\ \alpha - 2x\ Cos\ \beta]) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \alpha) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \gamma) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P[2z\ Cos\ \alpha - 2x\ Cos\ \gamma]) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \beta) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \gamma) = 0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma(P[2z\ Cos\ \beta - 2y\ Cos\ \gamma]) = 0.$$

Da jedoch diese 9 Gleichungen nur 6 verschiedene ausmachen, so wird das angenommene freie System im Gleichgewichte sein, wenn die Kräfte P, $P_1 \ldots$ folgenden 6 Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$(s)\ \begin{cases} \Sigma(P\ Cos\ \alpha) = 0,\ \Sigma(P\ Cos\ \beta) = 0,\ \Sigma(P\ Cos\ \gamma) = 0, \\ \Sigma(P[y\ Cos\ \alpha - x\ Cos\ \beta]) = 0, \\ \Sigma(P[z\ Cos\ \alpha - x\ Cos\ \gamma]) = 0, \\ \Sigma(P[z\ Cos\ \beta - y\ Cos\ \gamma]) = 0. \end{cases}$$

Auch lässt sich leicht zeigen, dass ohne Erfüllung dieser 6 Gleichungen, von denen die 3 ersteren stattfinden müssen, damit keine fortschreitende, die 3 letzteren dagegen, damit keine drehende Bewegung in dem Systeme eintritt, das Gleichgewicht nicht bestehen kann.

Ist das System nicht frei, sondern z. B. durch einen festen Punct gehalten, um welchen es rotiren kann; so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dass die Resultirende Null sei, sondern es genügt, dass diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so bilden die 3 letzten Gleichungen der vorigen Relationen (s) die hier nöthigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht (weil jetzt r statt R Null ist).

Wird das System durch zwei feste Puncte oder durch eine feste Achse gehalten, so werden alle zu dieser Achse parallelen und auf diese perpendiculären Kräfte durch ihren Widerstand aufgehoben. Nimmt man daher diese Achse zu einer der Coordinatenachsen, z. B. für jene der z, so werden alle in den Ebenen der xz und yz liegenden Kräfte aufgehoben oder vernichtet und es wird also für das Gleichgewicht nur nöthig sein, dass die Resultante der in der Ebene der xy wirksamen Kräfte nach der

Achse der z gerichtet sei, d. h. dass sie durch den Ursprung der Coordinaten gehe; dadurch wird die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(P[y \, Cos\,\alpha - x \, Cos\,\beta]) = 0$ reducirt, so dass also in diesem Falle nur die Summe der stat. Momente in Beziehung auf diese feste Achse $= 0$ zu sein braucht.

Nimmt man an, dass die sämmtlichen Kräfte P unter einander parallel sind, so darf man nur $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, $\beta = \beta_1 = \beta_2 = \ldots$ und $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots$ setzen, um für das Gleichgewicht aus den Relationen (s) die Bedingungsgleichungen zu erhalten:

$$Cos\,\alpha\,\Sigma(P) = 0,\quad Cos\,\beta\,\Sigma(P) = 0,\quad Cos\,\gamma\,\Sigma(P) = 0, \text{ d. i. } \Sigma(P) = 0,$$

und

$$Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px) = 0,\quad Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Px) = 0,$$
$$Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py) = 0,$$

welchen letzteren Gleichungen genügt wird, wenn

$$\Sigma(Px) = 0,\quad \Sigma(Py) = 0,\quad \Sigma(Pz) = 0 \text{ ist.}$$

Findet das Gleichgewicht nicht statt und haben die Kräfte die Resultirende R, welche mit den Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel a, b, c bildet, so darf man zur Herstellung des Gleichgewichtes offenbar zu den Kräften P, $P_1 \ldots$ nur noch eine der R gleiche und gerade entgegengesetzt wirkende Kraft hinzufügen; dadurch gehen die vorigen Bedingungsgleichungen über in folgende:

$$Cos\,\alpha\,\Sigma(P) - R\,Cos\,a = 0,\quad Cos\,\beta\,\Sigma(P) - R\,Cos\,b = 0, \quad \text{und}$$
$$Cos\,\gamma\,\Sigma(P) - R\,Cos\,c = 0,$$

woraus zuerst $R = \Sigma(P)$ und $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ folgt, und, wenn x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Resultirenden R sind, ferner:

$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)] = Cos\,\beta\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)],$$
$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)],$$
$$Cos\,\beta\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)],$$

welchen letzteren 3 Gleichungen offenbar für

$$x' = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad y' = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad z' = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)}$$

Genüge geleistet wird, und welches sofort (Nr. **16**, Relat. 3) die Coordinaten des Mittelpunctes der parallelen Kräfte sind.

Auf gleiche Weise hätte man schon in dem allgemeinen, durch die Relationen (s) gegebenen Falle die Resultirende bestimmen können, wenn kein Gleichgewicht vorausgesetzt worden wäre.

Schwerpunct der Linien.

(§. 44.)

21. Soll allgemein für irgend eine Curve im Raume BB' (Fig. 10) der Schwerpunct bestimmt werden, so beziehe man diese auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ, bezeichne die Coordinaten irgend eines Punctes M dieser Curve mit

x, y, z $(AP = x, AQ = y, AR = z)$, setze die Länge des variablen Bogens $BM = s$, sowie die des ganzen Bogens $BB' = l$; so stellt $\mathrm{d}s$ das diesem Puncte M entsprechende Curvenelement und da man dieses (nach der in §. 44 gemachten Voraussetzung) gleich unmittelbar statt dem Gewichte des materiellen Punctes x, y, z setzen kann, $z\,\mathrm{d}s$ das Moment dieses Gewichtes auf die Ebene der xy bezogen vor. Bezeichnet man ferner die Werthe von s auf die Endpuncte B, B' des Bogens $BB' = l$ bezogen, beziehungsweise mit s_0, s_1; so stellt das bestimmte Integral $\int_{s_0}^{s_1} z\,\mathrm{d}s$ die algebraische Summe der Momente $\Sigma(Pz)$ in den Relationen (1) von **16**. vor, wobei P unendlich klein ist und statt $\mathrm{d}s$ steht. Ebenso sind die Integrale $\int_{s_0}^{s_1} y\,\mathrm{d}s$ und $\int_{s_0}^{s_1} x\,\mathrm{d}s$ die Summe der Momente dieser Gewichte auf die Ebenen xz und yz bezogen, so dass wegen $R = l$, die genannten Relationen (1) in **16**. zur Bestimmung des Schwerpunctes x, y, z (dort Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt) einer krummen Linie im Raume, hier in folgende übergehen:

$$Xl = \int_{s_0}^{s_1} x\,\mathrm{d}s, \quad Yl = \int_{s_0}^{s_1} y\,\mathrm{d}s, \quad Zl = \int_{s_0}^{s_1} z\,\mathrm{d}s \ldots (\mathrm{I}),$$

wobei noch (Relat. 2 in **16**.) $l = \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s \ldots (m)$ ist.

Anmerkung 1. Ist die Linie nicht homogen, ändert sich jedoch das specifische Gewicht ihrer aufeinanderfolgenden Puncte in stetiger Weise, so ist dasselbe irgend eine Function dieser Puncte, und es ist das Gewicht des Elementes $\mathrm{d}s$ durch $p\,\mathrm{d}s$ zu bezeichnen, wobei p eine Function der Coordinaten x, y, z (oder eigentlich bloss von x) der betreffenden Puncte der Curve ist. Ist nun P das Gewicht der Linie l (innerhalb der Grenzen s_0, s_1); so ist

$$P = \int_{s_0}^{s_1} p\,\mathrm{d}s, \quad PX = \int_{s_0}^{s_1} px\,\mathrm{d}s, \quad PY = \int_{s_0}^{s_1} py\,\mathrm{d}s, \quad PZ = \int_{s_0}^{s_1} pz\,\mathrm{d}s.$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen folgen wieder die obigen specielleren für den Fall, in welchem die Linie homogen, also p constant wird; denn in diesem Falle ist $\frac{P}{p} = \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s = l$, folglich $lX = \int_{s_0}^{s_1} x\,\mathrm{d}s$ u. s. w.

Anmerkung 2. Um in diesen Formeln nach der Variablen s integriren zu können, in welchem Falle die Grenzwerthe s_0, s_1 unmittelbar gelten, muss man x, y, z als Functionen von s darstellen. Man muss dagegen diese Grenzwerthe in die entsprechenden x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1 verwandeln, wenn man für $\mathrm{d}s$ den bekannten Werth $\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}$ setzt und nach

x, y, z integrirt. Welcher Vorgang von beiden der einfachere ist, hängt von Umständen ab, und es lassen sich hierüber keine bestimmten Regeln angeben.

22. Ist, um das Verfahren auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, die gegebene Linie eine gerade Linie von der Länge $BB' = l$, und bezeichnet man die Winkel, welche diese Gerade mit den Achsen der x, y, z bildet, beziehungsweise durch α, β, γ und die Coordinaten des Anfangspunctes B mit a, b, c; so sind jene irgend eines anderen Punctes M dieser Geraden: $x = a + s \, Cos \, \alpha$, $y = b + s \, Cos \, \beta$, $z = c + s \, Cos \, \gamma$. Substituirt man diese Werthe in die vorigen Gleichungen (I) und führt die ganz einfachen Integrationen innerhalb der Grenzen von $s = 0$ bis $s = l$ aus; so erhält man, wenn man auch gleich mit l durchaus dividirt: $X = a + \frac{1}{2} l \, Cos \, \alpha$, $Y = b + \frac{1}{2} l \, Cos \, \beta$, $Z = c + \frac{1}{2} l \, Cos \, \gamma$, woraus sofort folgt, dass der Schwerpunct dieser geraden Linie (wie es ohnehin bekannt) in ihrem Halbirungspuncte liegt.

Weniger einfach gelangt man zu diesem Resultate durch die zweite vorhin erwähnte Methode, nach welcher man die Gleichungen der Geraden BB' (d. i. $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$, Comp. §. 568) aufstellen, daraus die Differentialquotienten $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ entwickeln und in die Gleichung $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dz \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}\right)}$, sowie wieder diesen Werth in die obigen Relationen (1) substituiren und dann nach z innerhalb der Grenzen $x', x'', y', y'', z', z''$ integriren muss, wenn x', y', z' und x'', y'', z'' die Coordinaten der Endpuncte B, B' dieser Geraden bezeichnen. Auf diesem Wege erhält man, mit Berücksichtigung der Relation $l = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$ (Compendium §. 557) sofort $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $Y = \frac{1}{2}(y' + y'')$, $Z = \frac{1}{2}(z' + z'')$, welches bekanntlich die Coordinaten des Halbirungspunctes dieser Geraden BB' sind.

23. Für eine ebene Curve fällt, wenn man die Ebene, in welcher sie liegt, zur Ebene der xy nimmt, von den 3 Relationen (I) in **21.** die dritte in z weg. Ausserdem fällt von diesen Relationen auch noch die zweite, nämlich die in y weg, wenn man einen Durchmesser der Schwere (§. 43) zur Abscissenachse nimmt.

24. Soll z. B. der Schwerpunct eines Kreisbogens BAB' (Fig. 11), dessen Mittelpunct C ist, gefunden werden, so ziehe man an den Halbirungspunct A des Bogens den Halbmesser CA

und nehme diesen, weil er eine Linie der Schwere ist (indem der Bogen BAB' durch CA in zwei gleiche symmetrische Theile getheilt wird) zur Abscissenachse, sowie den Punct C zum Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten. Setzt man ferner den Halbmesser $CA = r$, Sehne $BB' = a$, Bogen $BAB' = l$, W. $ACB =$ W. $ACB' = i$ und endlich für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens, Bog. $AM = s$, $CP = x$, $PM = y$ und W. $ACM = \alpha$; so ist wegen $\alpha = \frac{s}{r}$, sofort $x = r\,Cos\frac{s}{r}$ und nach der ersten der Relationen (I) in Nr. **21.**:

$$Xl = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} r\,Cos\frac{s}{r}\,\mathrm{d}s \;(= 2\int_0^{\frac{1}{2}l} r\,Cos\frac{s}{r}\,\mathrm{d}s) = 2r^2\,Sin\frac{l}{2r}$$

oder wegen $a = 2r\,Sin\,i = 2r\,Sin\frac{\frac{1}{2}l}{r} = 2r\,Sin\frac{l}{2r}$, auch:

$$Xl = ra, \text{ woraus auch } l : a = r : X \text{ oder } X = \frac{ra}{l} \;..(\mathrm{I})$$

folgt, wobei, wenn O den gesuchten Schwerpunct bezeichnet, sofort $X = CO$ ist.

Schwerpunct ebener Flächen.

(§. 47.)

25. Um den Schwerpunct der von der Abscissenachse AX, (Fig. 12), den beiden Ordinaten BN, $B'N'$ und dem entsprechenden Bogen NN' der Curve AD eingeschlossenen ebenen Fläche BN' zu bestimmen, ziehe man zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + \mathrm{d}x$ die rechtwinkeligen Ordinaten $PM = y$ und $pm = y + \mathrm{d}y$, setze $AB = x'$, $AB' = x''$, Fläche $BM = f$, also Fläche $Pm = \mathrm{d}f$, ferner Fläche $BN = F$, und bemerke, dass der Abstand des Schwerpunctes o des Flächenelementes Pm, welches als ein Rechteck anzusehen ist, von der Achse AX gleich $\frac{1}{2}y$ ist; so erhält man mit (I) und (m) in **21.** für den gegenwärtigen Fall die analogen Gleichungen:

$$XF = \int_{x'}^{x''} x\,\mathrm{d}f,\quad YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2}y\,\mathrm{d}f \text{ und } F = \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}f. \quad (\mathrm{II})$$

(weil nämlich die 3te Relation in z hier wegfällt), wobei y und $\mathrm{d}f$ als Functionen von x auszudrücken sind, also die Gleichung der Curve AD, nämlich $y = f(x)$ gegeben sein muss.

Anmerkung. Die zweite dieser drei Gleichungen fällt wieder weg, wenn die Achse der x zugleich eine Linie der Schwere ist.

26. Um auf diesem Wege den Schwerpunct O eines geradlinigen Dreieckes ABC (Fig. 13) zu bestimmen, lege man dessen Spitze A in den Ursprung der rechtwinkeligen Coordinatenachsen und dessen Basis BC parallel mit der Ordinatenachse AY, halbire ferner BC in D und ziehe die Gerade AD; so ist diese Gerade (weil sie jedes mit BC parallele Flächenelement wie Nm in zwei gleiche Theile theilt, also durch dessen Schwerpunct geht) eine Linie der Schwere, in welcher sofort der Schwerpunct O des Dreieckes liegt. Setzt man daher die Abscisse dieses Punctes $AE = X$, ferner $AP = x$, $Pp = \mathrm{d}x$, $AF = h$, $NM = y$ und $BC = b$; so ist $\mathrm{d}f = y\,\mathrm{d}x$ oder wegen $y : b = x : h$, nämlich $y = \frac{b}{h} x$, auch $\mathrm{d}f = \frac{b}{h} x\,\mathrm{d}x$ und daher

$$F = \int_0^h \frac{b}{h} x\,\mathrm{d}x = \frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \tfrac{1}{2} b h,$$

endlich damit nach der ersten der vorigen Relationen (II):

$$\tfrac{1}{2} b h X = \int_0^h \frac{b}{h} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3} b h^2,$$

woraus endlich folgt:

$$X = \tfrac{2}{3} h.$$

Da aber $AE = \frac{2}{3} AF$ ist, so folgt auch (wie in §. 48) $AO = \frac{2}{3} AD$.

27. Um den Schwerpunct der sogenannten parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14) zu finden, seien für einen beliebigen Punct M der Parabel die rechtw. Ordinaten $AP = x$, $PM = y$, so ist die Gleichung dieser Curve (Comp. §. 482) $y^2 = px$.

Ist ferner $Pp = \mathrm{d}x$, so ist das Flächenelement $Pm = \mathrm{d}f = y\,\mathrm{d}x$ und die ganze Fläche $AMP = F = \int_0^x y\,\mathrm{d}x = \int_0^x \mathrm{d}x \sqrt{px} = \frac{2}{3} xy$. Nach der ersten der Relationen in (II) **25.** erhält man daher $\frac{2}{3} xy \,.\, X = \int_0^x xy\,\mathrm{d}x = \int_0^x x\,\mathrm{d}x \sqrt{px} = \sqrt{p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{px} = \frac{2}{5} x^2 y$ und daraus: $X = \frac{3}{5} x$.

Aus der zweiten dieser genannten Relationen folgt:

$$\tfrac{2}{3} xy \,.\, Y = \int_0^x \tfrac{1}{2} y^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^x px\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} p x^2 = \tfrac{1}{4} x y^2$$

und daraus:

$$Y = \tfrac{3}{8} y.$$

Da nun für die bestimmte Fläche AQN die Abscisse x in AQ und die Ordinate y in NQ übergeht, so ist für den gesuchten Schwerpunct O sofort die Abscisse $AE = \frac{3}{5} AQ$ und die Ordinate $EO = \frac{3}{8} NQ$.

Für die ganze Fläche $NAN'N$ liegt der Schwerpunct offenbar in E.

Anmerkung. Setzt man in Fig. 12 für einen beliebigen Punct μ der Ordinate PM das Stück $P\mu = y$, dagegen $PM = y'$; so wird, wenn man y um $\mathrm{d}y$ zunehmen lässt, das Flächenelement μn, wie es eigentlich sein soll, durch $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ausgedrückt und es nehmen die obigen Gleichungen (II) in **25.** die allgemeinere Form an:

$$F = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad FX = \iint x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad FY = \iint y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

oder wenn die Gleichung der Curve AND durch $y' = f(x)$, und für die Fläche BN' die Grenzen AB und AB' wie vorhin durch x' und x'' bezeichnet werden, auch:

$$F = \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} \mathrm{d}y, \quad FX = \int_{x'}^{x''} x\,\mathrm{d}x \int_0^{f(x)} \mathrm{d}y, \quad FY = \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y\,\mathrm{d}y,$$

Relationen, welche auch für ein schiefwinkeliges Achsensystem gelten.

So wäre für das vorige Beispiel der parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14), wenn man $AQ = a$ und $QN = \sqrt{pa} = b$ setzt, wegen $f(x) = \sqrt{px}$, sofort:

$$F = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{px}} \mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x . \sqrt{px} = \tfrac{2}{3} a \sqrt{pa} = \tfrac{2}{3} ab,$$

$$\tfrac{2}{3} ab X = \int_0^a x\,dx \int_0^{\sqrt{px}} \mathrm{d}y = \sqrt{p} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \tfrac{2}{5} a^2 b, \text{ daher } X = \tfrac{3}{5} a,$$

$$\text{und } \tfrac{2}{3} ab Y = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{px}} y\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x . \frac{px}{2} = \frac{a^2 p}{4} = \frac{ab^2}{4}, \text{ daher } Y = \tfrac{3}{8} b,$$

wie oben.

Schwerpunct krummer Flächen.

(§. 53.)

28. Um den Schwerpunct einer Rotationsfläche zu finden, sei NN' (Fig. 12) der Bogen von bestimmter Länge einer ebenen Curve AD, welche sich um die Abscissenachse AX umdreht und dadurch eine sogenannte Rotationsfläche erzeugt, deren Schwerpunct in der Umdrehungsachse AX liegt und sofort bestimmt werden soll.

Bezeichnet man zu diesem Ende die rechtw. Coordinaten der Endpuncte N, N' dieses Bogens mit $x'y'$ und $x''y''$, so wie jene eines beliebigen Punctes M desselben mit xy, setzt $Pp = \mathrm{d}x$, Bog. $AM = s$ und $Mm = \mathrm{d}s$; so erzeugt dieses Bogenelement $\mathrm{d}s$ bei der Umdrehung der Curve AD um die Achse AX die Oberfläche eines abgestutzten Kegels, welche (Comp. §. 886) durch $\mathrm{d}\omega = 2y\pi\,\mathrm{d}s = 2\pi y\,\mathrm{d}x \sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}$ ausgedrückt wird.

Die obigen Relationen (II) in **25.** gehen daher für den vorliegenden Fall in die folgenden über:

$$\omega X = 2\pi \int_{x'}^{x''} xy\,\mathrm{d}x \sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} \text{ und}$$

$$\omega = 2\pi \int_{x'}^{x''} y\,\mathrm{d}x \sqrt{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)},$$

in welchen Relationen man in bestimmten Fällen aus der Gleichung der gegebenen Curve $y = f(x)$ den Quotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bestimmen, ferner dessen Werth sammt jenen von y substituiren, und dann die Integrationen innerhalb der betreffenden Grenzen ausführen muss, um die Abscisse X oder den Abstand AO des gesuchten Schwerpunctes O zu erhalten.

29. Ist, als einfachstes Beispiel, NN' eine mit der Achse AX parallele Gerade in dem Abstande r und von der Länge h, also die Rotationsfläche die Mantelfläche eines gemeinen Cylinders vom Halbmesser r und von der Länge h; so ist wegen $y = r$, also $\mathrm{d}y = 0$ sofort:

$$\omega = 2\pi \int_0^h r\,\mathrm{d}x = 2r\pi h \text{ und } 2r\pi h X = 2\pi \int_0^h rx\,\mathrm{d}x = 2r\pi \frac{h^2}{2},$$

folglich $X = \frac{1}{2}h$, wie sich von selbst versteht.

30. Eine durch den Ursprung A der Coordinaten gehende Gerade $AB = l$ (Fig. 15) erzeugt bei der erwähnten Rotation eine gewöhnliche Kegelfläche, wofür, wenn man die Ordinate $CB = r$ und die Abscisse $AC = h$ setzt, wegen $y = \frac{r}{h}x$, also $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r}{h}$, sofort:

$$\omega = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x\,\mathrm{d}x \sqrt{\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2r\pi\sqrt{(h^2+r^2)}}{h^2}\int_0^h x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2r\pi l}{h^2}\frac{h^2}{2} = r\pi l, \text{ und damit}$$

$$r\pi l X = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x^2\,\mathrm{d}x \sqrt{\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2r\pi l}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \tfrac{2}{3} r\pi l h,$$

folglich:

$$X = \tfrac{2}{3}h \text{ wird.}$$

31. Ist die erzeugende Curve ein Kreisbogen NN' (Fig. 16) vom Halbmesser $CA = r$, so entsteht durch die Umdrehung desselben um den Durchmesser AA' eine Kugelzone mit zwei

Grundflächen, und da $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ die Gleichung des Kreises ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpuncte C aus zählt, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ und $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ wird; so hat man nach den beiden Relationen in **28.**, wegen $CB = x'$ und $CB' = x''$ sofort:

$$\omega = 2\pi \int_{x'}^{x''} \sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}} = 2r\pi \int_{x'}^{x''} dx = 2r\pi(x'' - x'),$$

und damit

$$2r\pi(x''-x')X = 2\pi \int_{x'}^{x''} x\sqrt{(r^2-x^2)} \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$$

$$= 2r\pi \int_{x'}^{x''} x\,dx = 2r\pi\left(\frac{x''^2 - x'^2}{2}\right),$$

woraus endlich folgt: $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$, so dass also der gesuchte Schwerpunct O in der halben Höhe der Zone liegt. (§. 55.)

Dasselbe Resultat erhält man offenbar auch für eine Zone mit einer Grundfläche, d. i. für eine Kugelhaube oder Kugelschale, indem man dafür nur $x'' = CA = r$ setzen darf. Auch wird für die Oberfläche der Halbkugel, wegen $x' = 0$ und $x'' = r$, ebenfalls nach dieser Regel $X = \frac{1}{2}r$.

Schwerpunct der Körper.

(§. 56.)

32. Da bei homogenen Körpern, wie sie hier immer vorausgesetzt werden, das Gewicht dem Volumen proportional ist, das Volumen daher zur grösseren Einfachheit statt dem Gewichte gesetzt werden darf (indem der Factor, welcher das Gewicht der cubischen Einheit bezeichnet, zuletzt überall hinausfällt); so erhält man zur allgemeinen Bestimmung des Schwerpunctes eines Körpers, wenn man dessen Volumen mit V, also ein Element davon mit dV bezeichnet, die nachstehenden (mit jenen in **21.** analogen) Gleichungen:

$$VX = \int x\,dV, \quad VY = \int y\,dV, \quad VZ = \int z\,dV, \quad V = \int dV, \quad \text{(III)},$$

wobei sich die Grenzen, innerhalb welcher die Integrationen ausgeführt werden müssen, in den einzelnen speciellen Fällen immer von selbst ergeben.

33. Um z. B. den Schwerpunct einer Pyramide $ABCD$ (Fig. 17) von einer beliebigen Grundfläche (die hier der Einfachheit wegen als ein Dreieck angenommen wird) zu bestimmen, verbinde man die Spitze der Pyramide A mit dem Schwerpunct E der Grundfläche, wodurch AE eine Linie der Schwere wird, in welcher sofort der gesuchte Schwerpunct O liegt. Fällt man ferner aus demselben Puncte A auf die Grundfläche der Pyramide das Perpendikel AF, nimmt dieses zur Abscissenachse, so wie den Punct A zum Ursprung der rechtw. Coordinaten, legt durch die Puncte P und p, wofür $AP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ ist, zwei Ebenen bcd und $b'c'd'$ parallel mit der Grundfläche BCD, bezeichnet die Grösse der Grundfläche BCD mit f, so wie jene des ähnlichen Polygones bcd mit z und endlich die Höhe der Pyramide AF mit h; so ist zuerst $\mathrm{d}V = z\,\mathrm{d}x$ oder wegen $f:z = h^2 : x^2$, woraus $z = \frac{f}{h^2}x^2$ folgt, auch $\mathrm{d}V = \frac{f}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x$, und daraus

$$V = \int_0^h \frac{f}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{f}{h^2}\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3}fh \text{ (wie ohnehin bekannt).}$$

Mit diesen Werthen von V und $\mathrm{d}V$ erhält man aus der ersteren der Relationen (III) in **32.**:

$$\tfrac{1}{3}fh\,.\,X = \frac{f}{h^2}\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{f}{h^2}\frac{h^4}{4} = \tfrac{1}{4}fh^2,$$

und daraus: $$X = \tfrac{3}{4}h,$$

so, dass also, wenn AN die Abscisse des gesuchten Schwerpunctes O ist, sofort $AN = \frac{3}{4}AF$, folglich auch $AO = \frac{3}{4}AE$ wird (§. 56).

34. Zur Bestimmung des Schwerpunctes einer mit der Grundfläche parallel abgestutzten Pyramide BCd (Fig. 18), in welcher die grössere Grundfläche $BCD = F$, die kleinere $bcd = f$, ihre Höhe $fF = h$, jene der Ergänzungspyramide $Af = h'$ und die Höhe der ergänzten Pyramide $AF = h''$ ist, muss man die beiden vorigen Integrationen von $x = h'$ bis $x = h''$ ausführen. Dadurch findet man für's Erste, nach einigen einfachen Reductionen (und wie ohnehin aus der Geometrie bekannt) $V = \frac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})$, und damit weiters

$$\tfrac{1}{3}h(F + f + \sqrt{Ff})\,\mathrm{X} = \frac{F}{h''^2}\int_{h'}^{h''} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{F}{h''^2}\frac{(h''^4 - h'^4)}{4},$$

woraus $$\mathrm{X} = \tfrac{3}{4}\,\frac{F}{h''^2}\,\frac{(h''^4 - h'^4)}{h(F + f + \sqrt{Ff})} \;\ldots\; (a) \text{ folgt.}$$

Nimmt man ferner zwei ähnlich liegende Seiten der Pyramide, z. B. bc, BC und setzt $bc = a$, $BC = A$; so erhält man wegen $h' : h'' = a : A$ und $f : F = a^2 : A^2$, auch $h' : h = a : A - a$ und $h'' : h = A : A - a$, folglich $h' = \frac{a}{A - a} h$ und $h'' = \frac{A}{A - a} h$, so wie auch $f = \frac{a^2}{A^2} F$. Diese Werthe für h', h'' und f in die vorige Gleichung (a) substituirt und gehörig reducirt, erhält man auch:

$$X = \tfrac{3}{4} h \frac{A^4 - a^4}{(A-a)^2 (A^2 + Aa + a^2)},$$

und wenn man den Abstand des gesuchten Schwerpunctes anstatt von der Spitze A abwärts, von der Grundfläche, d. i. vom Puncte F aufwärts zählt und diesen Abstand mit X' bezeichnet, wodurch in der vorigen Relation $X = h'' - X'$ zu setzen ist, endlich auch nach allen Reductionen:

$$X' = \tfrac{1}{4} h \frac{A^2 + 2Aa + 3a^2}{A^2 + Aa + a^2} \quad \ldots (b) \quad (\text{§. } 58).$$

35. Zur Bestimmung des Schwerpunctes eines Rotationskörpers drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 12) den beiden rechtwinkeligen Ordinaten BN, $B'N'$ und der Abscisse BB' begrenzte ebene Fläche um die Abscissenachse AX; so entsteht ein Rotationskörper, dessen Schwerpunct O offenbar in dieser Achse selbst liegt und wofür, wenn A der Ursprung der Coordinaten ist, $AO = X$ sein soll.

Mit Beibehaltung der in Nummer **28.** gewählten Bezeichnung beschreibt bei dieser Rotation das Flächenelement Pm (welches bekanntlich als ein Rechteck anzusehen ist) einen Cylinder von kreisförmigen Grundflächen, dessen Inhalt $\mathrm{d}V = y^2 \pi \,\mathrm{d}x$ ist. Damit verwandeln sich die obigen Relationen (III) in **32.** in die folgenden:

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} y^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_{x'}^{x''} xy^2 \,\mathrm{d}x.$$

36. Dreht sich als einfachstes Beispiel das rechtwinkelige Dreieck ABC (Fig. 15) um die Cathete AC, so entsteht ein gerader Kegel von der Höhe $AC = h$ und der kreisförmigen Basis vom Halbmesser $BC = r$. Da nun $y = \frac{r}{h} x$ die Gleichung der Geraden AB ist, so folgt nach den beiden vorigen Relationen:

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3} r^2 \pi h, \text{ ferner}$$

$$\tfrac{1}{3} r^2 \pi h X = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^3 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^4}{4} = \tfrac{1}{4} r^2 \pi h^2$$

und daraus wieder: $\quad X = \tfrac{3}{4} h.$

Anmerkung. Ist in dem genannten Dreiecke ABC (Fig. 15) bc parallel mit BC, und setzt man $bc = r$, $BC = R$, $Ac = h'$, $AC = h''$ und $Cc = h'' - h' = h$; so beschreibt bei der angenommenen Rotation die Fläche Cb einen mit der Grundfläche parallel abgestutzten Kegel, dessen Höhe $= h$ ist, und deren Grundflächen die Halbmesser R und r haben.

Um nun dafür den Schwerpunct O zu bestimmen, darf man nur die beiden vorigen Relationen in die nachstehenden

$$V = \pi \int_{h'}^{h''} \frac{R^2}{h''^2} x^2 \mathrm{d}x \text{ und } VX = \pi \int_{h'}^{h''} \frac{R^2}{h''^2} x^3 \mathrm{d}x \text{ verwandeln,}$$

woraus man $V = \frac{R^2 \pi}{h''^2} \cdot \frac{1}{3}(h''^3 - h'^3)$ und $VX = \frac{R^2 \pi}{h''^2} \cdot \frac{1}{4}(h''^4 - h'^4)$

folglich $X = \frac{3}{4} \frac{h''^4 - h'^4}{h''^3 - h'^3}$ erhält.

Nun ist $h' : h'' = r : R$ oder $h' : h = r : R - r$ und $h'' : h = R : R - r$, also $h' = h \frac{r}{R-r}$ und $h'' = h \frac{R}{R-r}$, folglich auch, wenn man diese Werthe

substituirt: $$X = \frac{3}{4} h \frac{(R+r)(R^2+r^2)}{R^3 - r^3},$$

oder wenn man $CO = X'$ setzt, wodurch $X = AO = h'' - X' = h \frac{R}{R-r} - X'$ wird, nach gehöriger Substitution und Reduction, endlich:

$$X' = \frac{1}{4} h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

(analog mit der Gleichung (b) in **34**).

37. Ist die Begrenzungscurve NN' (Fig. 16) ein Kreisbogen, folglich der Rotationskörper ein Kugelabschnitt mit zwei Grundflächen, so ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpunct C zählt und den Halbmesser mit r bezeichnet, $y^2 = r^2 - x^2$ und daher (Relationen in **35.**):

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}x\,(r^2 - x^2) = \pi \left[r^2(x'' - x') - \tfrac{1}{3}(x''^3 - x'^3)\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi (x'' - x')(3r^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2)$$

und $$VX = \pi \int_{x'}^{x''} x\,\mathrm{d}x\,(r^2 - x^2) = \pi \left[\tfrac{1}{2} r^2 (x''^2 - x'^2) - \tfrac{1}{4}(x''^4 - x'^4)\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi (x''^2 - x'^2)(2r^2 - x'^2 - x''^2),$$

woraus durch Division $\frac{VX}{V}$ und gehöriger Reduction, sofort

$$X = \frac{3}{4} \frac{(x' + x'')(2r^2 - x'^2 - x''^2)}{3r^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2}$$

folgt.

Für einen Kugelabschnitt mit einer Grundfläche, folgt aus diesem Ausdrucke, wegen $x'' = r$ und wenn man die Höhe des Kugelsegmentes mit h bezeichnet, wodurch $x' = r - h$ wird, sofort:
$$X = \tfrac{3}{4}\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Endlich folgt noch aus dieser letztern Relation für den Schwerpunct der Halbkugel, wegen $h = r$, übereinstimmend mit dem Werthe CO in §. 59:
$$X = \tfrac{3}{8} r.$$

38. Ist endlich die erzeugende Fläche von einem parabolischen Bogen AN' (Fig. 12) begrenzt, folglich der Rotationskörper ein parabolisches Conoid, so erhält man, wegen $y^2 = px$ (Gleichung der Parabel AN', die Abscissen vom Scheitel A gezählt):
$$V = \pi \int_0^x px\,\mathrm{d}x = \pi p \frac{x^2}{2} \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_0^x p\,x^2\,\mathrm{d}x = \pi p \frac{x^3}{3},$$
folglich:
$$X = \tfrac{2}{3} x.$$

Guldin'sche Regeln.

39. Stellt o (Fig. 12) den Schwerpunct der ebenen Curve $NN' = l$ vor, so ist für $Po = Y$ nach der zweiten der Relationen (I) in **21.**:
$$Yl = \int_{s_0}^{s_1} y\,\mathrm{d}s \text{ oder, wenn man mit } 2\pi \text{ multiplicirt, auch}$$
$$2Y\pi l = \int_{s_0}^{s_1} 2y\pi\,\mathrm{d}s.$$

Nun entsteht aber durch Umdrehung dieser Curve NN' um die Achse AX eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch den zweiten Theil dieser Gleichung ausgedrückt wird, während der erste Theil nichts anders als das Product aus dem Weg des Schwerpunctes o in die Länge l der Curve bezeichnet: die durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugte Rotationsfläche ist also gleich dem Producte aus der Länge der Curve in den Weg, welchen der Schwerpunct derselben bei dieser Umdrehung beschreibt.

40. Bezeichnet dagegen o den Schwerpunct der von der Curve NN' (Fig. 12) begrenzten ebenen Fläche $BN' = F$ und ist wieder $Po = Y$, so entsteht durch die Umdrehung dieser Fläche um die Achse AX ein Rotationskörper, dessen Inhalt durch $\int_{x'}^{x''} y^2 \pi \, dx$ ausgedrückt wird. Es ist aber nach der zweiten Relation (II) in **25.** $YF = \int_{x'}^{x''} \frac{1}{2} y \, df$ oder wegen $df = y\,dx$, und wenn man auch gleich wieder mit 2π multiplicirt:

$$2Y\pi . F = \int_{x'}^{x''} y^2 \pi \, dx,$$

d. h. der Inhalt des durch Umdrehung der ebenen Fläche F um die Achse AX erzeugten Körpers ist gleich dem Producte aus dieser Fläche in den Weg, welchen ihr Schwerpunct bei dieser Rotation zurücklegt.

Um diese beiden Regeln, welche mehr zur Darstellung einer interessanten Eigenschaft des Schwerpunctes als des Gebrauches wegen angeführt werden, auf ein ganz einfaches Beispiel anzuwenden, drehe sich die Gerade $AB = l$ (Fig. 15) um AC, wobei das auf AC gezogene Perpendikel $BC = r$ sein soll, folglich der Abstand des Schwerpunctes o der Geraden AB von $AC = \frac{1}{2} r$ ist. Zufolge der ersteren Regel (**39.**) ist daher die durch diese Rotation erzeugte Kegelfläche $\omega = 2 . \frac{1}{2} r\pi . l = r\pi l$.

Dreht sich dagegen das rechtwinkelige Dreieck ABC um diese Gerade $AC = h$, und ist m der Schwerpunct dieser Fläche, folglich wegen $Am = \frac{2}{3} Ad$ der Abstand $mn = \frac{2}{3} Cd = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} r = \frac{1}{3} r$; so ist nach der zweiten dieser Regeln (**40.**) das Volumen des durch Rotation dieser Fläche $ABC = \frac{1}{2} rh$ erzeugten Kegels: $V = 2 . \frac{1}{3} r\pi . \frac{1}{2} rh = \frac{1}{3} r^2 \pi h$; Alles, wie es aus der Geometrie bekannt ist.

Dreht sich eine Ellipse von den Halbachsen a und b um eine mit der grossen Axe $2a$ parallelen Geraden, welche von dieser den Abstand r hat, so entsteht ein kreisförmiger Ring von elliptischem Querschnitt, dessen Inhalt V nach der 2ten dieser Regeln sofort leicht gefunden wird. Da nämlich die Erzeugungsfläche $F = \pi ab$ und $Y = r$ ist, so folgt:

$$V = 2\pi^2 rab.$$

Anmerkung 1. Es lässt sich in ähnlicher Weise die Eigenschaft des Schwerpunctes auch zur Bestimmung des Inhaltes oder Volumens eines schief abgeschnittenen Prisma und zwar wie folgt, benützen.

Es sei bei irgend einem geraden oder schiefen Prisma, welches gegen die untere Grundfläche schief abgeschnitten ist, F die Fläche der unteren, f die der oberen Grundfläche. Man denke sich nun dieses Prisma aus unendlich vielen und dünnen, mit diesem parallele Prismen zusammengesetzt, deren untere Grundflächen $a, a', a'' \ldots$ zusammen die untere Basis F und obere Grundflächen $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots$ zusammen die obere Basis f des Prisma ausmachen und deren Höhen beziehungsweise $h, h', h''\ldots$ sind. Diess vorausgesetzt ist dann $V = ah + a'h' + a''h'' + \ldots$ oder wegen $a:\alpha = F:f$, also $a = \frac{F}{f}\alpha$, und ebenso $a' = \frac{F}{f}\alpha'$, $a'' = \frac{F}{f}\alpha''$ u. s. w., auch

$$V = \frac{F}{f}(\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \ldots).$$

Fällt man nun aus dem Schwerpunct der oberen Grundfläche f des Prisma auf die untere F das Perpendikel H und nimmt diese letztere Grundfläche zur Momentenebene, so ist (Nr. **16.**) $fH = \alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \ldots$ mithin endlich auch:

$$V = FH,$$

d. h. der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prisma's ist gleich dem Inhalte eines geraden Prisma's von derselben Grundfläche F und einer Höhe, welche dem Abstand des Schwerpunctes der oberen schiefen von der unteren Grundfläche gleich ist.

Ist das Prisma ein dreiseitiges und sind h, h', h'' die 3 parallelen Seitenkanten, so ist wegen $H = \frac{1}{3}(h + h' + h'')$ (wie leicht zu finden) für das gerade oder schief abgeschnittene Prisma:

$$V = \tfrac{1}{3}F(h + h' + h'').$$

Anmerkung 2. Um schliesslich noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Schwerpunctes zu entwickeln, seien $p, p', p''\ldots$ die Gewichte und $M, M', M''\ldots$ die Schwerpuncte von Körpern, welche zusammen ein unveränderliches System bilden, dessen Schwerpunct in O liegen soll. Bezieht man das System auf drei rechtwinkelige Coordinatenachsen, deren Ursprung in A liegt, bezeichnet die Entfernung der einzelnen Schwerpuncte $M, M'\ldots$ von diesem Ursprunge A durch $r, r', r''\ldots$, den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes O von A mit R, die Winkel, welche R mit den Achsen der x, y, z bildet, beziehungsweise mit a, b, c, jene der r mit diesen Achsen mit α, β, γ, der r' mit α', β', γ' u. s. w. und setzt endlich die Summe der Gewichte (als Resultirende, deren Angriffspunct O ist) $p + p' + \ldots = \Sigma(p) = P$; so folgt nach den Relationen (1) in Nr. **16.**, indem die von $O, M, M'\ldots$ auf die Ebene der xy gefällten Perpendikel durch $R\,Cos\,c$, $r\,Cos\,\gamma$, $r'\,Cos\,\gamma'\ldots$ und ebenso die Perpendikel auf die Ebene der xz durch $R\,Cos\,b$, $r\,Cos\,\beta$, $r'\,Cos\,\beta'\ldots$ und auf die Ebene der yz durch $R\,Cos\,a$, $r\,Cos\,\alpha$, $r'\,Cos\,\alpha'\ldots$ ausgedrückt werden, sofort:

$$PR\,Cos\,a = \Sigma(pr\,Cos\,\alpha)$$
$$PR\,Cos\,b = \Sigma(pr\,Cos\,\beta)$$
$$PR\,Cos\,c = \Sigma(pr\,Cos\,\gamma)$$

die Summe der Quadrate dieser drei Gleichungen gibt, mit Berücksichtigung, dass (Comp. §. 580) $Cos^2 a + Cos^2 b + Cos^2 c = 1$, $Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$ u. s. w., ferner, wenn $(r.r')$ den Winkel bezeichnet, welchen die Geraden r und r' mit einander einschliessen, und die übrigen Winkel damit analog bezeichnet werden, wegen (Comp. §. 580) $Cos\,(r.r') = Cos\,\alpha\,Cos\,\alpha' + Cos\,\beta\,Cos\,\beta' + Cos\,\gamma\,Cos\,\gamma'$ und so auch analog für die übrigen Winkel nach gehöriger Reduction:

$$P^2R^2 = \Sigma(p^2r^2) + \Sigma(2pp'rr'\,Cos[r.r']).$$

Sind ferner $a, a', a'' \ldots$ die Abstände der Schwerpuncte $M, M' \ldots$ untereinander, so ist bekanntlich $2rr' \operatorname{Cos}(r.r') = r^2 + r'^2 - a^2$ und so auch für die übrigen, folglich geht die vorige Relation über in folgende:

$$P^2 R^2 = \Sigma(p^2 r^2) + \Sigma(pp'[r^2 + r'^2 - a^2]),$$

oder da die Summe aller r^2 enthaltenden Glieder die Form hat:

$$p r^2 (p + p' + \ldots) = P p r^2$$

und das ähnliche auch für die $r'^2, r''^2 \ldots$ enthaltenden Glieder stattfindet, ebenso $P^2 R^2 = P\Sigma(pr^2) - \Sigma(pp'a^2)$ oder endlich:

$$P\Sigma(pr^2) = P^2 R^2 + \Sigma(pp'a^2),$$

aus welcher Relation sofort der Satz folgt, dass wenn der Abstand R des Schwerpunctes eines Systemes von schweren Puncten oder Körpern von irgend einem festen Puncte (A) constant bleibt, dagegen sich die Lage des in seiner Form unveränderlichen Systemes wie immer ändert (wodurch sich sofort die Winkel α, β, γ u. s. w. ändern), die Summe der Producte aus den einzelnen Gewichten in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem festen Puncte ebenfalls eine constante Grösse ist.

Da ferner, wie dieselbe Relation zeigt, $\Sigma(pr^2)$ für $R = 0$ am kleinsten ist, so folgt noch, dass die Summe der Producte der Gewichte in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunct ein Minimum ist.

Einige weitere wichtige Eigenschaften des Schwerpunctes werden noch in Nr. **131**. angeführt werden.

Die Kettenlinie.

(§. 75.)

41. Um eine Gleichung der in den Puncten A und B (Fig. 19) aufgehängten vollkommen biegsamen Schnur oder Kette (von sehr feinen Gliedern) $AMCB$, wovon gleiche Längen auch ein gleiches Gewicht haben sollen, abzuleiten, nehme man den einen Aufhängpunct A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die durch diesen Punct gezogene Horizontale AA' zur Abscissenachse, setze also für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ und Bogen $AM = s$. Setzt man ferner die Länge der Kette $ACB = l$, die Coordinaten des zweiten Aufhängpunctes B, d. i. $AE = c$, $EB = d$ und ersetzt (wodurch nichts geändert wird) diesen festen Punct B durch eine nach der Tangente wirkenden Kraft S, welche der in diesem Puncte stattfindenden Spannung gleich ist, so kann man diese Kraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte P und Q zerlegen, wovon die erstere vertical, die letztere daher horizontal wirkt. Die im Puncte M nach der Richtung der Tangente MT stattfindende Spannung T, welche sofort dem Gewichte, also auch der Länge des Bogens MCB proportional ist, kann ebenso in zwei Seitenkräfte P', Q' nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt werden, und zwar ist, wenn man Winkel $TMP = \varphi$ setzt, dafür:

$P' = T \, Cos\, \varphi$ und $Q' = T \, Sin\, \varphi$, oder wegen $Sin\, \varphi = \frac{mn}{Mm} = \frac{dx}{ds}$ und $Cos\, \varphi = \frac{Mn}{Mm} = \frac{dy}{ds}$ (wenn nämlich Mmn das sogenannte Differenzialdreieck vorstellt) auch $P' = T\frac{dy}{ds}$ und $Q' = T\frac{dx}{ds}$.

Ist nun R die Resultirende aus dem Gewichte des Bogenstückes MCB, so müssen für das Gleichgewicht die beiden Gleichungen bestehen: $Q' = Q$ und $P + P' = R$, oder wenn man für Q' und P' die obigen Werthe setzt und berücksichtigt, dass wenn p das Gewicht der Längeneinheit des Bogens s bezeichnet, sofort $R = \int_x^c p\, ds = -\int_c^x p\, ds$ ist, auch (1) $T\frac{dx}{ds} = Q$ und $T\frac{dy}{ds} = -P - \int_c^x p\, ds$, oder [mit Rücksicht auf diese Gleich. (1)]

$$Q\frac{dy}{dx} = -P - \int_c^x p\, ds \;(2).$$

Differenziirt man diese letztere Gleichung, in welcher P, Q und dx constant sind, so erhält man

$$Q\frac{d^2y}{dx} = -p\, ds = -p\, dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} \text{ oder } \frac{Q\, dy\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = -p\, dy,$$

und daraus durch Integration:

$$Q\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = C - py \;(m).$$

Um die Constante C zu bestimmen, berücksichtige man, dass der Quotient $\frac{dy}{dx}$, welcher bekanntlich die trigon. Tangente des Winkels darstellt, welchen die in irgend einem Puncte (x, y) der Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet, für $y = 0$ in $tang\, \alpha$ übergeht, wenn man den Winkel der Tangente der Curve im Anfangspuncte A mit α bezeichnet, so, dass also $C = Q\sqrt{(1 + tang\, \alpha^2)} = Q\, Sec\, \alpha$ und damit in (m) $Q\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Q\, Sec\, \alpha - py$ wird. Aus dieser Gleichung folgt aber

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(Q\, Sec\, \alpha - py)^2 - Q^2}{Q^2},$$

oder wenn man den constanten Quotient $\frac{Q}{p} = b \ldots (n)$ und $b\, Sec\, \alpha = \frac{b}{Cos\, \alpha} = a \ldots (r)$ setzt, auch:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \ldots (g)$ und $dx = \frac{b\, dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}} \ldots (3)$;
durch die Integration dieser Differenzialgleichung erhält man (Compend. §. 795, wo $\alpha = a^2 - b^2$, $\beta = -2a$ und $\gamma = 1$ zu setzen ist):

$$x = b\, l \{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}\} + C;$$

um die Constante C zu bestimmen, darf man nur berücksichtigen, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss (und dass für diesen Punct A von den doppelten Zeichen bloss das obere gilt), wodurch man erhält $C = -b\, l [a - \sqrt{(a^2 - b^2)}]$ und womit endlich, wenn man diesen Werth substituirt und reducirt,

$$x = b\, l \left\{ \frac{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}} \right\} \quad \text{(I)}$$

wird, welches sofort die gesuchte Gleichung der Kettenlinie ist.

Zur Bestimmung des Bogens s hat man $ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, oder wenn man für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung (g) substituirt, auch $ds = \frac{(a-y)}{b} dx \ldots (h)$, oder wegen Gleich. (3): $ds = \frac{(a-y)\, dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}$, und daraus durch Integration:

$$s = C \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

Da nun für $y = 0$ auch $s = 0$ sein muss, so wird die Constante $C = \sqrt{(a^2 - b^2)} = b \sqrt{(Sec\, \alpha^2 - 1)} = b\, tang\, \alpha = a\, Sin\, \alpha$, folglich

$$s = a\, Sin\, \alpha \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \ldots \text{(II)}.$$

Sind $AD = x'$ und $DC = y'$ die Coordinaten des tiefsten Punctes C der Curve, so ist für diesen Punct, wie bekannt $\frac{dy}{dx} = 0$, also aus Gleich. (3) $a - y' = b$, oder $y' = a - b$; ferner folgt damit aus Gleich. (I): $(i) \ldots x' = b\, l \left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right]$, und aus jener (II): $s = AMC = l' = b\, tang\, \alpha = a\, Sin\, \alpha$, und damit auch allgemein:

$$s = l' \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

42. Wie man aus der Gleichung (I) ersieht, so ist die Form der Curve von dem zweiten Aufhängpunct B oder $x = c$, $y = d$

ganz unabhängig. Nimmt man nun diesen ebenfalls in der Horizontalen oder in der Achse AA' in A' an, so ist dafür $c = AA'$ und $d = 0$, folglich aus (I) für $y = 0$ (wozu das untere Zeichen des Wurzelausdruckes gehört):

$$c = bl\left[\frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right] = bl\left[\frac{b^2}{[a - \sqrt{(a^2 - b^2)}]^2}\right]$$

$$= 2bl\left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right] = 2x'$$

(wegen Gleich. i), so dass also die Ordinate des tiefsten Punctes C die Abscissenachse im Halbirungspuncte D von AA' schneidet.

Anmerkung 1. Zur Bestimmung der beiden constanten Grössen a und b, wodurch auch (Gleich. r) der Winkel α gegeben ist, kann man, da c, d, l als bekannt anzusehen sind, in der Gleichung (I) $x = c$, $y = d$ und in jener (II) $s = l$ und $y = d$ setzen, durch welche beide Gleichungen (in deren letzteren auch noch $Sec\,\alpha = \frac{a}{b}$ zu berücksichtigen kommt) dann, wenigstens im Principe, a und b gegeben sind.

Anmerkung 2. Die obige Gleichung (I) der Kettenlinie lässt sich durch folgende successive Transformirungen auf eine einfachere Form bringen. Zählt man zuerst die Abscissen auf der Ordinatenachse AY (Fig. 20), setzt nämlich $Ap = x$, wofür sowohl pM als auch $pM' = y$ ist; so muss man in der Gleich. (I) x mit y verwechseln, wodurch man erhält:

$$y = bl\left[\frac{a - x \mp \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right].$$

Nimmt man CD zur Abscissenachse, setzt also $DP_1 = x$, $P_1M = P_1M' = y$, so muss man in dieser letzten Gleichung statt y setzen $AD - y$, mit dem oberen und $-AD + y$ mit dem unteren Zeichen; dadurch erhält man, wegen $AD = bl\left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right]$ (Gleichung i) für beide Fälle denselben Werth:

$$\pm y = bl\left[\frac{a - x + \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{b}\right],$$

oder es ist (für's obere Zeichen) $e^{+\frac{y}{b}} = \frac{1}{b}\left[a - x + \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}\right]$ und daraus:

$$e^{-\frac{y}{b}} = 1 : e^{+\frac{y}{b}} = \frac{b}{a - x + \sqrt{(a-x)^2 - b^2}} = \frac{1}{b}\left[a - x - \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}\right]$$

(wo e die Basis der nat. Logarithmen bezeichnet),

folglich ist $e^{+\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} = \frac{2}{b}(a - x)$. (Dasselbe erhält man auch für's untere Zeichen.)

Zählt man die Abscissen vom Puncte C aus, setzt also $CP_1 = x$ und $P_1M = P_1M' = y$, so muss man in dieser letzten Gleichung statt x schreiben $CD - x = y' - x = a - b - x$, wodurch das vorige Binom $a - x$ in $b + x$ und die Gleichung der Curve in jene $b + x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$

übergeht. Zieht man ferner in der Entfernung $CA'' = b$ mit AA' eine Parallele, nimmt diese zur Ordinatenachse und den Punct A'' zum Ursprung der Coordinaten, setzt nämlich $A''P_1 = x$ und $A''Q = A''Q' = y$; so erhält man aus dieser letzten Gleichung, da man darin $x - b$ statt x setzen muss, $x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$, man erhält endlich durch Verwechslung der beiden Achsen, wodurch $A''Q = A''Q' = x$ und $QM = Q'M' = y$ wird, als einfachste Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

43. Aus der obigen Gleichung (I) folgt für die Spannung der Kette in irgend einem Puncte M (Fig. 19) $T = Q\frac{ds}{dx} = Q\frac{a-y}{b}$ (Gleich. h). Da nun im Aufhängpuncte A die Ordinate $y = o$, so folgt, dass diese Spannung in A am grössten, und zwar $T = \frac{a}{b}Q$ ist.

Für den tiefsten Punct C ist die Ordinate $y = y'$ am grössten, folglich die Spannung an diesem Puncte $T = \frac{a-y'}{b}Q = Q$ (wegen $y' = a - b$) am kleinsten.

44. Anstatt der Voraussetzung, dass gleiche Bogenlängen der Curve ACB (Fig. 19) gleiche Gewichte haben, kann man auch, wie es bei Kettenbrücken der Fall ist, bei welchen das Gewicht der Ketten gegen die Belastung der horizontalen Fahrbahn vernachlässigt werden darf, annehmen, dass gleiche Längen der Projectionen der Curve auf die horizontal gezogene Abscissenachse AA' gleiches Gewicht haben sollen, so dass also nicht mehr die Curve, sondern die Abscissenachse gleichförmig belastet erscheint.

Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich, wenn jetzt p das Gewicht der Längeneinheit der Abscisse x bezeichnet, dagegen alle übrigen Bezeichnungen die vorigen bleiben, die Gleichung (2) in Nr. **41.** in die folgende $Q\frac{dy}{dx} = -P + \int_x^c p\,dx$, während jene (1), nämlich $(\alpha)\ldots\, T\frac{dx}{ds} = Q$ ungeändert bleibt.

Die erstere dieser beiden Gleichungen gibt, wenn man integrirt und den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmt:

$$(\beta)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-P + p(c-x)}{Q}.$$

Da für $x=0$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, also $tang\,\alpha = \frac{-P+pc}{Q}$ wird, so hat man auch, diesen Werth in (β) substituirt:

$$(1)\ \frac{dy}{dx} = tang\,\alpha - \frac{px}{Q} \text{ oder } dy = tang\,\alpha\,dx - \frac{p}{Q}x\,dx.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$(2)\quad y = x\,tang\,\alpha - \frac{p}{2Q}x^2,$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x=0$ auch $y=0$ sein muss. Da ferner für $x=c$, $y=d$ sein soll, so folgt aus dieser letzten Gleichung: $d = c\,tang\,\alpha - \frac{pc^2}{2Q}$, oder

$$(3)\quad tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2Q}.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (2) substituirt, so erhält man als Gleichung der gesuchten Curve:

$$(4)\quad y = \frac{d}{c}x + \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$$

und zwar ist diese (Comp. §. 501, wo nur x mit y verwechselt werden darf) die Gleichung der gemeinen Parabel.

Anmerkung 1. Um in dieser letzteren Gleichung die Constante Q zu bestimmen, kann man für irgend einen Punct M die Abscisse $AP = x'$ und Ordinate $PM = y'$ messen und für x und y in dieser Gleichung substituiren. Am einfachsten ist es jedoch in der Curve einen Punct N anzunehmen, wofür die Abscisse $AF = \frac{c}{2}$ ist. Setzt man dann die gemessene Ordinate $FN = FO + ON = \frac{d}{2} + h$, wobei also auch h als bekannt anzusehen ist; so erhält man durch Substitution dieser Werthe für x und y in der Gleichung (4):

$$\frac{d}{2} + h = \frac{d}{c}\cdot\frac{c}{2} + \frac{p}{2Q}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right), \text{ d. i. } h = \frac{pc^2}{8Q} \text{ oder } Q = \frac{pc^2}{8h}.$$

Mit diesem letzteren Werthe lässt sich nun auch leicht die zweite Constante $tang\,\alpha$ finden; denn es folgt aus Gleichung (3):

$$tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2}\cdot\frac{8h}{pc^2} = \frac{d}{c} + \frac{4h}{c} = \frac{d+4h}{c}.$$

Auch lassen sich diese beiden Constanten Q und $tang\,\alpha$ durch die Coordinaten des tiefsten Punctes C ausdrücken.

Anmerkung 2. Liegt der zweite Befestigungspunct B mit dem ersteren A in derselben horizontalen Linie AA' in A', so ist $d=0$ und (aus Gleich. 4) $y = \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$, wobei $Q = \frac{pc^2}{8h}$, $tang\,\alpha = \frac{4h}{c}$ und $h = FN = ON = DC$ (wegen $AF = \frac{c}{2} = AD$) die grösste Ordinate ist.

Setzt man in dieser Gleichung der Curve für Q den vorigen Werth, so wird auch $y = \frac{4h}{c^2}(cx - x^2)$, oder wenn man die Abscissen von D aus zählt, also $DP = x$ setzt, wodurch man in dieser letzten Gleichung $\frac{c}{2} - x$ statt x setzen muss, nach gehöriger Reduction: $y = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - x^2\right)$.

Verwechselt man ferner x mit y, setzt nämlich (Fig. 20) $DP_1 = x$ und $P_1M = y$, so erhält man $x = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)$, und wenn man endlich die Abscissen auf der Geraden CD vom Puncte C aus zählt, also $CP_1 = x$ setzt, wodurch in dieser letzten Gleichung $h - x$ statt x zu setzen ist, auch: $x = \frac{4h}{c^2}y^2$, oder $y^2 = \frac{c^2}{4h}x$, als Gleichung der Curve ACA', und zwar als Gleichung einer gemeinen Parabel vom Parameter $\frac{c^2}{4h}$, deren Scheitel C und Achse CD ist.

45. Zur Bestimmung des Bogens s substituire man in der Gleichung $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung (1), so erhält man:

$$(\gamma) \quad ds = dx\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)},$$ oder wenn man Kürze halber $tang\,\alpha = m$ und $\frac{p}{Q} = n$ setzt, auch:

$$ds = dx\sqrt{(1 + m^2 - 2mnx + n^2x^2)} = dx\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)},$$

wenn man nämlich noch $1 + m^2 = \alpha$, $-2mn = \beta$ und $n^2 = \gamma$ setzt.

Aus dieser letzteren Gleichung erhält man durch Integration (Comp. §. 827, Beisp.), Substitution und Reduction, wenn man noch Kürze halber $1 + \left(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x\right)^2 = A$ setzt:

$$s = C - \frac{Q}{2p}\left[(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)\sqrt{A} + logn.\,(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x + \sqrt{A})\right],$$

wobei die Constante, da für $x = 0$ auch $s = 0$ sein soll, den Werth hat: $C = \frac{Q}{2p}\left[tang\,\alpha\sqrt{A'} + logn.\,(tang\,\alpha + \sqrt{A'})\right]$, wobei $\sqrt{A'} = \frac{1}{Cos\,\alpha}$ ist.

46. Aus der obigen Gleichung (α) in **44.** folgt für die Spannung der Kette im Puncte M (Fig. 19) nach der Tangente:

$$T = Q\frac{ds}{dx} = Q\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Q\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)} \ldots (\delta).$$

Da im tiefsten Puncte C der Curve $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so ist die Spannung an diesem Puncte $T = Q$ am kleinsten.

Im Aufhängepunct A ist die Spannung, wegen $x = 0$ sofort $T = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = \frac{Q}{Cos\,\alpha}$ am grössten.

Im zweiten Aufhängepunct B ist diese Tangentialspannung $T = Q\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{pc}{Q})^2\right)}$.

47. Was die Spannung der Kette nach lothrechter oder verticaler Richtung betrifft, so ist diese im Puncte M sofort $S = T\,Cos\,mMn = T\frac{dy}{ds} = Q\frac{dy}{dx}$ (wegen Gleichung (1) in Nr. **41.**) oder (wegen Gleichung (1) in **44.**):

$$S = Q\left(tang\,\alpha - \frac{px}{Q}\right).$$

Im Aufhängepunct A ist wegen $x = 0$ diese Verticalspannung $S = Q\,tang\,\alpha$ am grössten.

Im tiefsten Puncte C dagegen ist diese Spannung wegen $\frac{dy}{dx} = 0$, sofort $S = 0$ am kleinsten*).

Bedingungen für die Empfindlichkeit der Krämerwage.

(§. 91.)

48. Um die Bedingungen zu finden, unter welchen die gemeine Krämerwage empfindlich wird, d. h. die Eigenschaft erhält, dass der Wagebalken sogleich den horizontalen Stand verlässt und eine schiefe Lage annimmt, wenn das Gleichgewicht durch ein kleines Zulagegewicht gestört wird, sei AB (Fig. 21) die horizontale Lage des in O aufgehängten Wagebalkens im Stande des Gleichgewichtes, nämlich für den Fall, dass $AC = BC$ und $W = P$ ist (§. 89), ferner $A'B'$ die Lage dieses Balkens, welche er dadurch annimmt, dass in die Wagschale B zu dem Gewichte P noch jenes p zugelegt wird, wodurch im Stande der Ruhe sofort der Punct C nach C' kommt.

Setzt man $AC = BC = a$, $OC = OC' = b$, und wenn D den Schwerpunct des Wagebalkens bezeichnet, $OD = c$, ferner

*) Ausführlicheres hierüber findet man in dem *Mémoire sur les Ponts suspendus* von *Navier*. Paris, 1824.

das Gewicht dieses Balkens $= q$; so kann man die in den Puncten A', B', D lothrecht wirkenden Gewichte oder Kräfte W, $P+p$ und q jede in zwei aufeinander senkrechte Kräfte zerlegen, wovon die eine (w, r, s) perpendikulär, die andere (w', r', s') parallel zu dem Balken wirkt. Setzt man nämlich den Ausschlagwinkel $COC' = \alpha$, so ist (Nr. **9.**):

$$w = W\,Cos\,\alpha,\; w' = W\,Sin\,\alpha,\; r = (P+p)\,Cos\,\alpha,\; r' = (P+p)\,Sin\,\alpha,$$
$$s = q\,Cos\,\alpha \text{ und } s' = q\,Sin\,\alpha.$$

Da ferner angenommen wird, dass diese auf den um O drehbaren Hebel $A'B'$ wirkenden 6 Seitenkräfte im Gleichgewichte stehen, so muss nach dem Satze der statischen Momente (Nr. **19.** Anmerk. 2) sofort die Bedingungsgleichung bestehen: $wa + w'b + s'c + r'b = ra$, oder wenn man für $w, w' \ldots$ die vorigen Werthe setzt:

$$aW\,Cos\,\alpha + bW\,Sin\,\alpha + cq\,Sin\,\alpha + b(P+p)\,Sin\,\alpha = a(P+p)\,Cos\,\alpha,$$

und wenn man durchaus mit $Cos\,\alpha$ dividirt und aus der entstehenden Gleichung, nachdem man im ersten Theil aW, gegen jenen aP, im zweiten ausgelassen (wegen $aW = aP$) und $W = P$ gesetzt hat (Bedingungen für das Gleichgewicht in der Lage AB), $tang\,\alpha$ bestimmt, sofort: $tang\,\alpha = \dfrac{ap}{(2P+p)b + qc}$.

49. Da nun die Wage um so empfindlicher ist, je grösser bei demselben Zulagegewicht p der Ausschlagwinkel α, folglich auch $tang\,\alpha$ wird; so folgt aus dem vorigen Ausdrucke von $tang\,\alpha$, dass diese Empfindlichkeit um so grösser ist, je grösser a (Länge der Arme), je kleiner q (Gewicht des Balkens), je kleiner P (aufgelegtes Gewicht), je kleiner $b (= OC)$ und je kleiner c (Entfernung des Schwerpunctes des Balkens vom Aufhängepunct) ist. (Vergleiche §. 91.)

Anmerkung. Die Wage wird am empfindlichsten, wenn es gelingt, $b = OC = 0$ zu machen, in welchem Falle $tang\,\alpha = \dfrac{ap}{cq}$ zugleich von dem aufgelegten Gewichte P ganz unabhängig wird. Geht der Winkel α für ein anderes Zulagegewicht p' in α' über, so ist ebenso $tang\,\alpha' = \dfrac{ap'}{cq}$, folglich:

$$tang\,\alpha : tang\,\alpha' = p : p'.$$

Wäre unter dieser Voraussetzung von $b = 0$ gleichzeitig auch $c = 0$, so würde $tang\,\alpha = \dfrac{ap}{0} = \infty$, also $\alpha = 90^\circ$, zum Beweis, dass in diesem Falle, in welchem nämlich die Wage in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte aufgehängt ist, der Balken bei dem kleinsten Uebergewichte p sogleich aus der horizontalen in die verticale Lage übergeht. Ausserdem wäre dabei für jede richtige Abwägung, d. i. für $W = P$ und $p = 0$, sofort $tang\,\alpha = \frac{0}{0}$, zum Zeichen, dass dabei der Balken in jeder Lage ruhen kann und nicht nothwendig, wie es die zweite Bedingung (§. 90) fordert, horizontal stehen muss.

Wollte man endlich den Schwerpunct des Balkens, bei der Voraussetzung von $b = 0$ über den Punct C legen, so müsste c negativ genommen werden, wodurch dann auch $tang\,\alpha$ negativ würde, also der Winkel α in den 2ten oder 4ten Quadranten fiele, zum Beweis, dass der Balken bei dem kleinsten Zulagegewicht p umschlagen würde.

Ausführlicheres hierüber, sowie über Wagen überhaupt, findet man in unserer Abhandlung in Prechtl's technol. Encyklopädie im 20. Bande.

Widerstand der Materialien.

(§. 126.)

50. Um sich von dem Widerstande fester Körper gegen jede Volums- oder Formänderung einen nur einigermassen richtigen Begriff zu machen und um die dabei auftretenden Gesetze zu formuliren, geht man heute von der Ansicht oder Hypothese aus, dass diese Körper aus Gruppen von Atomen oder aus Molecülen zusammengesetzt sind, die durch zweierlei Kräfte, nämlich anziehende und abstossende, in bestimmten Entfernungen von einander im Gleichgewichte erhalten werden. Von diesen sogenannten Molecularkräften geben sich durch ihre Reaction die ersteren oder anziehenden zu erkennen, wenn man durch äussere Kräfte diese Entfernungen vergrössern, die letzteren oder abstossenden hingegen, wenn man diese Entfernungen vermindern will.

Insoferne die Molecularkräfte die Molecüle in gewissen Entfernungen von einander halten, widersetzen sie sich jeder Volumsveränderung; insoferne sie aber diese auch in gewissen relativen Positionen erhalten, widersetzen sie sich zugleich auch jeder Formänderung eines festen Körpers.

Dieser Widerstand der Molecularkräfte oder ihrer Resultirenden gegen jede Volums- oder Formänderung ist aber nothwendig eine Function dieser Veränderung selbst und verschwindet innerhalb gewisser Grenzen nur dann, wenn diese Veränderung selbst Null ist; diese Grenzen heissen die Elasticitätsgrenzen des Körpers, welcher innerhalb dieser Grenzen elastisch genannt wird. Hieraus folgt, dass das Gleichgewicht der Molecularkräfte innerhalb dieser Grenzen ein stetiges ist, indem die Molecüle nach dem Aufhören jener äusseren Kräfte, welche die Volums- oder Formänderung bewirkt haben, wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren.

a) *Widerstand der Körper gegen das Zerreissen oder Zerdrücken.*

(Absolute und rückwirkende Festigkeit.)

(§§. 127 u. 148.)

51. Zur Bestimmung des Widerstandes fester Körper gegen das Zerreissen oder Zerdrücken geht man am einfachsten von der Hypothese der parallelen Schichten aus, indem man sich vorstellt, dass die Körper aus parallelen Schichten von Molecülen bestehen, deren Schwerpuncte sämmtlich in der auf diesen Schichten normalen Längenachse liegen. Wirken nun gegen die beiden ebenen, mit diesen Schichten ebenfalls parallelen Endflächen des Körpers nach der Richtung oder parallel mit dieser Achse (also normal auf die genannten Schichten) gleichmässig vertheilte Kräfte, deren Resultanten in diese Achse fallen und sich im Gleichgewichte halten; so werden je nach dem Sinne, nach welchem diese beiden resultirenden Kräfte wirken, diese Schichten von einander entfernt oder einander genähert. Die dadurch zwischen je zwei aufeinander folgenden Schichten hervorgerufenen oder in Thätigkeit gesetzten Molecularkräfte (beziehungsweise anziehend und abstossend) haben in jeder dieser Schichten eine ebenfalls in die Achse des Körpers fallende Mittelkraft. Bezeichnet man diese mit R, die ursprüngliche Entfernung zweier Schichten durch z_0, und die jetzige nach Einwirkung der erwähnten äusseren Kräfte durch z; so wird nach der obigen Bemerkung (**50.**) die Kraft R eine Function von $z - z_0$ und zwar von solcher Beschaffenheit sein, dass sie innerhalb der Elasticitätsgrenze mit dieser Differenz $z - z_0$ zugleich verschwindet.

Man nennt die abgeleitete oder derivirte Function von R, d. i. $\frac{\Delta R}{\Delta z}$ (Comp. §. 630) die Steifheit des Körpers und betrachtet diese, wenn die Differenz $\Delta z = z - z_0$ nur sehr gering ist, als constant, indem die Erfahrung gezeigt hat, dass sich die Steifigkeit eines Körpers innerhalb der Elasticitätsgrenze nur sehr wenig ändert. Setzt man daher innerhalb dieser Grenze $\frac{\Delta R}{\Delta z} = a$, wo a eine constante Grösse bezeichnet, so wird $R = a \Sigma_{z_0}^{z} \Delta z = a(z - z_0)$ und es lässt sich daher die genannte Resultante der zwischen zwei aufeinander folgenden Schichten in der Flächeneinheit wirkenden Molecularkräfte innerhalb der Elasticitätsgrenzen durch $R = a(z - z_0)$ ausdrücken. Da man aber ferner die Intensität dieser Kraft R auch dem Flächeninhalt dieser Schichten innerhalb des Wirkungskreises der Molecularkräfte proportional annehmen kann, so wird man, wenn der Flächeninhalt dieser Schichten durch ω bezeichnet wird, diese Resultirende endlich wenigstens annäherungsweise durch:

$$R = a\omega(z - z_0) \ldots (\alpha)$$

ausdrücken können.

52. Ist nun l die ursprüngliche Länge des betreffenden Körpers und sind $+P$ und $-P$ die Resultirenden der auf die beiden Endflächen normal, nämlich nach der Längenachse wirkenden äusseren Kräfte, sowie endlich Δl die dadurch in dem Körper bewirkte Ausdehnung oder Zusammendrückung; so hat man für den Zustand des Gleichgewichtes, nach der vorigen Relation (α):

$$R = a\omega(z - z_0) = a'\omega'(z' - z'_0) = a''\omega''(z'' - z''_0) = \ldots$$

mithin:
$$\Sigma(z - z_0) = \Delta l = P\Sigma\left(\frac{1}{a\omega}\right).$$

Ist der Körper homogen, so ist, wegen $a = a' = a'' = \ldots$ (und $z_0 = z'_0 = z''_0 = \ldots$) sofort:

$$\Delta l = P . \frac{1}{a}\Sigma\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Bezeichnet man nun den Abstand irgend eines der Querschnitte ω von der einen Endfläche des Körpers durch x und bemerkt, dass wenn die Anzahl der in $\Sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)$ zu summirenden Glieder gleich n gesetzt wird, sofort $n = \frac{l}{z_0}$ ist, so kann man im vorigen Ausdruck das Summen- mit dem Integralzeichen vertauschen, und $\frac{1}{z_0}\int_0^l \frac{dx}{\omega}$ statt $\Sigma\left(\frac{1}{\omega}\right)$ setzen; dadurch geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$\Delta l = \frac{P}{az_0}\int_0^l \frac{dx}{\omega},$$

wobei ω eine Function von x ist. Setzt man das bloss von der Materie des Körpers abhängige Product $az_0 = E$, so erhält man endlich: $\Delta l = \frac{P}{E}\int_0^l \frac{dx}{\omega} \ldots (1)$ und es wird E der Coefficient oder Modul der Elasticität des betreffenden Körpers genannt.

53. Ist z. B. als einfachster Fall der Körper ein gerades Prisma, so ist dafür ω constant und daher $\int_0^l \frac{dx}{\omega} = \frac{1}{\omega}\int_0^l dx = \frac{l}{\omega}$, mithin: $\Delta l = \frac{P}{\omega} \cdot \frac{l}{E} \ldots (2)$, d. h. die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Prisma ist innerhalb der Elasticitätsgrenze der ausdehnenden oder zusammendrückenden Kraft und der Länge des Prisma direct und dem Querschnitte desselben umgekehrt proportional (§. 128).

Setzt man die auf die Flächeneinheit des Querschnittes entfallende, noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Belastung $\frac{P}{\omega} = p$, so ist [vorige Relation (2)] $\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E}$ (β), oder wenn man das Verhältniss der Ausdehnung des Prisma zur ursprünglichen Länge desselben innerhalb dieser Grenze, d. i. $\frac{\Delta l}{l} = s$ setzt, auch $E = \frac{p}{s}$.

Könnte nun, ohne dass diese Grenze überschritten würde (was jedoch nur fictiv ist), $\Delta l = l$, d. i. $s = 1$ sein, so wäre dem Gewichte nach ausgedrückt: $E = p$.

54. Aus der vorigen Relation (β) folgt für die Kraft, welche ein Prisma vom Querschnitt $= 1$ und der Länge l um die noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Grösse Δl ausdehnt oder zusammendrückt: $p = E\frac{\Delta l}{l} \ldots (3)$.

Lässt man nun diese Kraft p bis zur Elasticitätsgrenze zunehmen (wodurch also Δl an jene Grenze ankommt, über welche hinaus das Prisma nicht mehr genau auf seine ursprüngliche Länge zurückgeht) und bezeichnet diesen Grenzwerth, insoferne das Prisma dabei auf Ausdehnung oder Zusammendrückung in Anspruch genommen wird, beziehungsweise durch T_a und T_r; so werden diese beiden Werthe respective Coefficienten der absoluten und rückwirkenden Tragfähigkeit (wohl auch Tragmodul der Zug- und Druckfestigkeit) genannt; dabei darf jedoch im letzteren Falle das Prisma nicht so lang sein, dass durch die Einwirkung der Kraft T_r eine Biegung eintritt.

Werden endlich für die Belastung p diese Werthe T_a und T_r folglich auch die Elasticitätsgrenze überschritten, so tritt eine permanente Aenderung in der Lage der Molecüle des Prisma ein und es darf dann der Elasticitäts-Coefficient E nicht weiter mehr als constant angenommen werden. Bezeichnet man in diesem Falle die kleinsten Werthe von p, bei welchen der Körper überhaupt noch zerrissen oder zerdrückt wird, beziehungsweise mit F_a und F_r; so heissen diese Werthe Coefficienten der absoluten und rückwirkenden Festigkeit (Bruchmodul für Zug und Druck). Auch hier wird vorausgesetzt, dass beim Zerdrücken keine Biegung des Körpers eintritt.

b) *Widerstand der Körper gegen Biegung.*

(§. 142.)

55. Betrachtet man einen prismatischen Körper $C'N$ (Fig. 48) von durchaus gleichen Querschnitten, welcher horizontal an dem einen Ende eingemauert oder unveränderlich befestigt, und am anderen durch eine lothrecht wirkende Last oder Kraft Q gebogen wird; so werden die gegen die convexe Seite CN zu liegenden Längenfasern oder Schichten (aus denen man sich den Körper bestehend denken kann) ausgedehnt, und jene gegen die concave Seite $C'N'$ hin liegenden zusammengedrückt. Zwischen diesen nun liegt jene sogenannte neutrale Längen- oder Achsenschichte DG, welche ihre ursprüngliche Länge beibehält, also weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird und sofort, wenn die Biegung in verticalen Ebenen, wie $CC'NN'$ statt hat, eine horizontale Cylinderfläche $DEFG$ bildet.

Denkt man sich in einer beliebigen Entfernung $AO = z$ vom Angriffspuncte der Kraft Q einen Querschnitt $acbc'$ normal auf die Längenachse des Prisma, so durchschneidet derselbe die neutrale Schichte nach der horizontalen Geraden ab, und es werden sonach alle diesen Querschnitt über ab schneidenden Schichten des Prisma ausgedehnt und jene unterhalb ab liegenden zusammengedrückt; dadurch werden aber in diesem Querschnitt Molecularkräfte thätig oder hervorgerufen, welche oberhalb ab anziehend, wie S in Fig. 49, und unterhalb dieser Geraden abstossend, wie T wirken. Diese Kräfte können in horizontale, mit der Länge des Prisma parallele, wie s und t, und in verticale Componenten, wie s' und t' zerlegt werden.

Ausserdem machen sich bei einer starken Biegung des Körpers noch Kräfte geltend, welche in dem Querschnitte $acbc'$ selbst liegen und einem Abgleiten (Abreissen) oder einer Verschiebung des Körpers in diesem Querschnitte widerstehen; auch diese Kräfte (wie V) können nach horizontalen (parallel mit der Länge des Prisma) und verticalen Richtungen (wie v und v') zerlegt werden.

Soll nun unter allen diesen, auf den zwischen den Querschnitten FNN' und $acbc'$ liegenden Theil des Prisma (Fig. 48) wirkenden Kräften das Gleichgewicht bestehen, so müssen offenbar folgende Bedingungen stattfinden:

1. Muss die (algebraische) Summe aller verticalen Componenten der Kraft Q gleich sein.

2. Muss die Summe der genannten horizontalen Componenten gleich Null sein.

3. Muss endlich die Summe der statischen Momente dieser horizontalen und verticalen Kräfte in Bezug auf die Gerade ab gleich sein dem Momente der Kraft Q auf dieselbe Gerade bezogen.

Anmerkung. Was die zuletzt erwähnten, im Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) oder cc' (Fig. 49) selbst liegenden Widerstandskräfte V betrifft, so fällt bei so geringen Biegungen, wie sie hier durchaus vorausgesetzt werden und auch bei wirklichen Constructionen nicht überschritten werden dürfen (oder auch bei einer sehr geringen Länge des Prisma im Vergleich zu dessen Querschnitt), dieser Querschnitt nahezu in eine verticale Ebene; mithin fallen auch die verticalen Componenten, wie v', in dieselbe Ebene und es können daher die horizontalen Componenten v als beinahe Null vernachlässigt werden. Es haben sonach unter dieser Voraussetzung diese letztgenannten Widerstandskräfte V nur auf die erste der angeführten 3 Bedingungen Einfluss.

56. Man nehme nun im genannten Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) die Gerade ab zur Abscissenachse und a als Anfangspunct der rechtwinkeligen Coordinaten, setze für einen beliebigen Punct m dieser Querschnittsfläche $ap = x$, $pm = y$, bezeichne die Gleichungen der oberen und unteren Hälfte der Umfangscurve $acbc'$ beziehungsweise durch $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$, sowie die Grenzwerthe von x durch $x = o$ und $x = ab = b$, und jene für y durch $y = o$, $y = f(x)$ für die Fläche oberhalb der Geraden ab, und $y = o$, $y = \varphi(x)$ für die Fläche unterhalb ab.

Nimmt man ferner ausser dem eben betrachteten Querschnitt noch einen zweiten, dem ersteren unendlich nahe liegend an, und sind dd' und ef (Fig. 49) die Durchschnittslinien dieser beiden Querschnitte mit einem verticalen Längenschnitt $C'N$ des Prisma, wofür also $AO = z$, und $OO' = \mathrm{d}z$ ist; so werden sich diese beiden auf der Längenachse AOB normal stehenden Schnitte, welche vor der Biegung des Prisma zu einander parallel waren, durch die eintretende Biegung in einer durch den Punct J gehenden auf der genannten verticalen Ebene des Längenschnittes $C'N$ normalen Geraden durchschneiden, wobei bekanntlich J der Mittelpunct des Krümmungskreises für das Bogenelement OO' der neutralen Achsenschichte AOB ist. Ferner wird, um zuerst nur die über AOB liegenden, der Ausdehnung unterworfenen Faserschichten zu betrachten, eine durch P gehende Faserschichte des Körperelementes fd, welche vor der Biegung die Länge $rP' = de = OO' = \mathrm{d}z$ hatte, durch die Biegung des Prisma bis auf die Länge PP', also um die Grösse $Pr = \varDelta\,\mathrm{d}z$ ausgedehnt.

Setzt man den Krümmungshalbmesser des Bogens OO' der neutralen Schichte $JO = \varrho$, so folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken PrO und $OO'J$ sofort: $Pr : OP = OO' : JO$, d. i. $\varDelta\,\mathrm{d}z : y = \mathrm{d}z : \varrho$, und daraus für das Verhältniss der Ausdehnung der Fasern im Puncte P zur ursprünglichen Länge (d. i. die Ausdehnung der Längeneinheit) $\frac{\varDelta\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = \frac{y}{\varrho} \ldots (\gamma)$.

Der durch diese Ausdehnung in der durch P (oder m in Fig. 48) gehenden Faserschichte vom Querschnitt $= 1$ hervorgerufene Widerstand ist sonach [**54**. Gleich. (3)] $p = E\frac{\varDelta\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = E\frac{y}{\varrho}$, mithin für die Elementarfaser vom Querschnitt $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (in m Fig. 48) gleich $E\frac{y}{\varrho}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, sowie dessen statisches Moment, in Bezug auf die Achse ab gleich ist: $E\frac{y}{\varrho}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cdot y = \frac{E}{\varrho}y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Die Summe aller Widerstandskräfte gegen Ausdehnung der Faserschichten ist sonach gleich $\frac{E}{\varrho}\int_0^b \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y\,\mathrm{d}y$, sowie die Summe ihrer statischen Momente, auf die Achse ab (Fig. 48) bezogen, gleich: $\frac{E}{\varrho}\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y^2 dy$.

57. Auf eine ganz gleiche Weise erhält man auch, auf die untere Hälfte $ac'b$ des Querschnittes übergehend, für die Summe der Widerstandskräfte gegen die Zusammendrückung der Faserschichten den Ausdruck: $\frac{E}{\varrho}\int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y\, dy$ und für das statische Moment, auf ab bezogen: $\frac{E}{\varrho}\int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y^2 dy$.

58. Drückt man nun von den in **55.** angegebenen Gleichgewichts-Bedingungen die 2te und 3te aus (indem die 1ste für unseren Zweck hier übergangen werden kann), so erhält man beziehungsweise dafür die Ausdrücke:

$$\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y\, dy = \int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y\, dy \ldots . (1)$$

und
$$\frac{E}{\varrho}\left[\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y^2 dy + \int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y^2 dy\right] = Qz \ldots (2).$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dass bei einer so geringen Biegung des Prisma, wie sie hier vorausgesetzt wird, statt der aus der verticalen Kraft Q abgeleiteten, auf der Längenachse AOB (Fig. 49) normal stehenden Componenten, diese Kraft Q selbst gesetzt werden darf, wie es in der Relat. (2) geschehen ist.

Auch versteht es sich von selbst, da die beiden Relationen für jeden Querschnitt des Prisma gelten, dass sich die Gleichung (2) auf den letzten, oder an der Mauer befindlichen Querschnitt $DCEC'$ bezieht, wenn man in derselben $z = l$ gleich der Länge des Prisma setzt (wobei der Bogen AOB mit dessen Sehne verwechselt werden kann).

59. Die erste dieser beiden Bedingungsgleichungen dient zur Bestimmung der Lage der neutralen Achse ab (Fig. 48) im Querschnitt $acbc'$, und sie zeigt (**27.** Anmerkung), dass diese Achse unter der gemachten Voraussetzung von nur geringen Biegungen, durch den Schwerpunct dieses Querschnittes geht. Theilt daher die Gerade ab diesen Querschnitt in zwei symmetrische Theile, so theilt auch die neutrale Achsenschichte das Prisma der Länge nach in zwei gleiche Hälften.

Wären (was bei einer starken Biegung wirklich eintritt) die Widerstände der Fasern gegen Zusammendrückung nicht mehr den Widerständen derselben gegen Ausdehnung gleich; so wäre

4*

auch die Gleichung (1) nicht mehr richtig, indem dann die Gleichgewichtsachse ab nicht mehr durch den Schwerpunct des Querschnittes geht, sondern gegen jene Seite hinrückt, in welcher der Widerstand der Fasern zunimmt.

60. Setzt man in der Gleichung (2) von Nr. **58.** den ersten Theil derselben (in welchem der eingeklammerte Ausdruck nach §. 200 nichts anderes als das Trägheitsmoment des Querschnittes $acbc'$ in Bezug auf die Achse ab ist) mit Auslassung von ϱ, d. i.

$$E\left[\int_0^b dx \int_0^{f(x)} y^2 dy + \int_0^b dx \int_0^{\varphi(x)} y^2 dy\right] = \varepsilon \ldots (3)$$

so heisst dieser Ausdruck oder ε, welcher von der Grösse der Biegung unabhängig ist, und bloss vom Elasticitäts-Coefficienten E der Materie abhängt, das Biegungsmoment des Körpers in Bezug auf die neutrale Achse $a\,b$.

61. Kennt man das Biegungsmoment ε eines prismatischen Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunct des Querschnittes gehende Achse, so lässt sich daraus leicht auch das Biegungsmoment ε' in Bezug auf eine andere, mit der ersteren parallele Achse ableiten, und umgekehrt.

Denn liegt z. B. die Achse $a'b'$ (Fig. 48) in der Entfernung $os = a$ unterhalb der durch den Schwerpunct o gehenden Achse ab, mit welcher sie parallel ist, und sind $op = x$ und $pm = y$ die Coordinaten irgend eines Punctes m des Querschnittes, vom Puncte o aus gezählt; so sind $sp' = x$ und $p'm = a + y$ die Coordinaten desselben Punctes von s aus gezählt, und es ist nach der Relation (3), wenn man davon nur das eine Integral ansetzt, indem für das zweite genau das nämliche gilt, auf die Achse $a'b'$ bezogen:

$$\varepsilon' = E\int dx \int (y + a)^2 dy = E\int dx \int y^2 dy + 2Ea\int dx \int y\, dy + Ea^2 \int dx\, dy,$$

oder wegen: $E\int dx \int y^2 dy = \varepsilon$, $\int dx \int y\, dy = 0$ (weil o der Schwerpunct, also Y in Nr. **25.** Null ist) und $\int dx \int dy = F$, wenn der Flächeninhalt des Querschnittes durch F bezeichnet wird, auch:

$$\varepsilon' = \varepsilon + Ea^2F \ldots (4) \text{ oder } \varepsilon = \varepsilon' - Ea^2F \ldots (5),$$

woraus zugleich erhellet, dass das Biegungsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunct gehende Achse am kleinsten ist.

Biegungsmomente für einige specielle Fälle.

62. Sei zuerst als einfachster Fall der Querschnitt des Prisma ein Rechteck von der Breite $ab = b$ und Höhe $cc' = h$ und der Balken an dem einen Ende so eingemauert, dass die erstere Dimension in die horizontale, also letztere in die verticale Richtung fällt (Fig. 50).

Für diesen Fall ist in dem vorigen Ausdruck (3) $y = f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}h$ zu setzen, während $x = b$ seinen Werth behält. Es ist daher $\int_0^b dx \int_0^{\frac{1}{2}h} y^2 dy = \int_0^b \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{8} dx = \frac{1}{24} b h^3$ und da das zweite Integral denselben Werth besitzt, so ist das Biegungsmoment $\quad \varepsilon = \frac{1}{12} E b h^3$.

63. Hat dagegen dasselbe Rechteck AD (Fig. 51) eine solche Lage, dass die Seite $AC = h$ mit der durch den Schwerpunct O des Rechteckes gehenden neutralen Achse EG den Winkel φ bildet, so fälle man, um den Werth des Integrales $\int dx \int y^2 dy$ für die Fläche $AEFB$ zu finden, von A auf die Achse EG das Perpendikel AL und setze $EL = n$, so hat man zuerst für das Dreieck AEL das betreffende Integral:

$$\int_0^n dx \int_0^{x\, tang\, \varphi} y^2 dy = \int_0^n \frac{1}{3} x^3\, tang\, \varphi^3\, dx = \frac{1}{12} n (n\, tang\, \varphi)^3 = \frac{1}{12} EL . \overline{AL}^3$$

Ebenso findet man als Werth dieses Integrales für das Dreieck ALG: $\frac{1}{12} GL . \overline{AL}^3$,
folglich für das ganze Dreieck AEG:

$$\frac{1}{12}(EL + GL)\overline{AL}^3 = \frac{1}{12} EG . \overline{AL}^3$$

und damit analog für das Dreieck BFG: $\frac{1}{12} GF . \overline{BH}^3$.

Das Integral $\int dx \int y^2 dy$ erhält daher für die obere Fläche $AEFB$ den Werth $\frac{1}{12} EG . \overline{AL}^3 - \frac{1}{12} GF . \overline{BH}^3$.

Nun ist aber $EG = EO + OG$, oder wie man leicht findet (wenn man aus O auf AC und AB perpendikuläre Linien zieht):

$$EG = \frac{b}{2\, Sin\, \varphi} + \frac{h}{2\, Cos\, \varphi},$$

$$AL = \frac{1}{2} h\, Sin\, \varphi + \frac{1}{2} b\, Cos\, \varphi, \quad GF = \frac{h}{2\, Cos\, \varphi} - \frac{b}{2\, Sin\, \varphi}$$

und $\qquad BH = \frac{1}{2} h\, Sin\, \varphi - \frac{1}{2} b\, Cos\, \varphi$,

folglich ist endlich, wenn man diese Werthe substituirt und dann gehörig reducirt, das gesuchte Integral für die Fläche $AEFB$, nämlich: (6) $\int dx \int y^2 dy = \frac{1}{24} b h (h^2 Sin\, \varphi^2 + b^2 Cos\, \varphi^2)$.

Vermöge der Gleichheit der beiden Flächen $AEFB$ und $DFEC$ hat das mehrgenannte Integral für die untere Fläche $DFEC$ des Querschnittes denselben Werth, folglich ist für den vorliegenden Fall das Biegungsmoment:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12} E b h (h^2 \, Sin\, \varphi^2 + b^2 \, Cos\, \varphi^2).$$

Anmerkung. Ist $h > b$, so wird dieses Moment für $\varphi = 90^0$ am grössten und es ist dafür (wobei das Rechteck die in der vorigen Nummer betrachtete Lage Fig. 50 erhält): $\varepsilon = \tfrac{1}{12} E b h^3$.

64. Es sei ferner der Querschnitt ein Dreieck ABC (Fig. 59) von irgend einer Form und die Basis AB mit der durch den Schwerpunct O gehenden neutralen Achse DE parallel (also horizontal), ferner $AB = b$, die Höhe $CF = h$ und dabei die Spitze nach aufwärts gekehrt.

In Bezug auf die Achse AB wird nach dem in der vorigen Nummer Entwickelten das Biegungsmoment $\varepsilon' = \tfrac{1}{12} E b h^3$, mithin in Bezug auf die durch den Schwerpunct gehende neutrale Achse DE nach Relation (5) in **61.** wegen $a = FO = \tfrac{1}{3} h$ und $F = \tfrac{1}{2} b h$:

$\varepsilon = \tfrac{1}{12} E b h^3 - E . (\tfrac{1}{3} h)^2 . \tfrac{1}{2} b h = \tfrac{1}{12} E b h^3 - \tfrac{1}{18} E b h^3,$

d. i. $\varepsilon = \tfrac{1}{36} E b h^3.$

Derselbe Ausdruck gilt offenbar auch für die umgekehrte Lage des Dreieckes, wie in Fig. 58.

65. Es sei der Querschnitt des prismatischen Körpers eine Ellipse von den Achsen $2a$ und $2b$, wobei die grössere $2a$, wie in Fig. 52, horizontal liegt, also mit der neutralen Achse zusammenfällt.

Zählt man die Coordinaten auf diesen Achsen vom Mittelpuncte O aus, so ist wegen $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, das obige Integral für die obere Hälfte des Querschnittes (wenn man anstatt die Grenzen für x von $-a$ bis $+a$ zu nehmen, diese von o bis a, und das Integral doppelt nimmt):

$$2\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy = 2\int_0^a dx . \tfrac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{8} \pi a b^3 \; ^*).$$

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 817, Lehrbuch III., S. 336, Beisp. 4) $a^2 - x^2 = X$ gesetzt: $\int X^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{X}{4} + \tfrac{3}{8} a^2\right) x \sqrt{X} + \tfrac{3}{8} a^4 \, arc\, Sin \left(\frac{x}{a}\right).$

Da nun das zweite Integral für die untere Hälfte $AB'A'$ der Ellipse den gleichen Werth erhält, so hat man für das Biegungsmoment:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi E a b^3.$$

Erhält die grosse Achse die verticale Stellung, so wird ebenso:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi E a^3 b.$$

66. Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, der Körper also ein gewöhnlicher Cylinder, so darf man in den beiden vorigen Ausdrücken nur $a = b = r$ setzen, um das Biegungsmoment zu erhalten; es ist nämlich dafür $\varepsilon = \frac{1}{4}\pi r^4$.

67. Sei der Querschnitt ein rechteckiger Ring (Fig. 56) von der äusseren Breite b und inneren b', von der äusseren Höhe h und inneren h', und dabei die durch den Schwerpunct gehende horizontale oder neutrale Achse mit der Breite b parallel; dann ist das Biegungsmoment für das äussere, als voll angenommene Parallelepiped (**62.**) $= \frac{1}{12}E b h^3$, sowie jenes für das innere $= \frac{1}{12}E b' h'^3$, mithin das gesuchte Biegungsmoment für das hohle Prisma:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}E(b h^3 - b' h'^3).$$

Anmerkung. Derselbe Ausdruck gilt auch, wie leicht zu sehen, für Prismen, deren Querschnitte die in Fig. 55 und Fig. 57 haben, wenn in Fig. 55 das verticale Rechteck und in Fig. 57 die beiden zusammen die Breite (oder Dicke der Wände) $b - b'$ besitzen.

68. Für einen hohlen Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreisring von den Halbmessern R und r ist, erhält man auf eine ganz ähnliche Weise (**66.**) für das Biegungsmoment:
$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi E(R^4 - r^4).$$

69. Betrachtet man endlich noch von den in **67.** behandelten Querschnitten überall die Hälfte, wie in Fig. 55 den durch die Achse AB halbirten Theil $mnCD$, und bezeichnet die äussere und innere Höhe durch h und h', sowie die äussere und innere Breite durch b und b'; so ist das Biegungsmoment in Bezug auf die Achse AB gleich: $\frac{1}{3}E(bh^3 - b'h'^3)$ *).

---

*) Es ist nämlich, wie aus dem Werthe für ε in **67.** erhellet, jedes der beiden betreffenden Integrale der Relat. (3) in Nr. **60.** gleich $\frac{1}{24}E(b h^3 - b' h'^3)$ und da man in diesem Ausdrucke, um die dortige Bezeichnung (in **67.**) mit der gegenwärtigen in Uebereinstimmung zu bringen, $2h$ und $2h'$ statt h und h' setzen muss, sofort $= \frac{8}{24}E(b h^3 - b' h'^3)$.

Nun ist aber der Abstand des Schwerpunctes des in Rede stehenden Querschnittes von dieser Achse AB gleich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{bh^2 - b'h'^2}{bh - b'h'}\right)^{*)},$$

mithin nach Relation (5) in **61**. das Biegungsmoment in Bezug auf eine durch diesen Schwerpunct gehende mit AB parallele Achse: $\varepsilon = \frac{1}{3}E(bh^3 - b'h'^3) - E.\frac{1}{4}\left(\frac{bh^2 - b'h'^2}{bh - b'h'}\right)^2(bh - b'h')$, oder nach gehöriger Entwickelung und Reduction:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{12}E\left[\frac{(bh^2 - b'h'^2)^2 - 4bb'hh'(h-h')^2}{bh - b'h'}\right].$$

Auch gilt dieser Ausdruck für die umgekehrte Lage dieser Querschnitte.

70. Auf gleiche Weise findet man für einen halben Cylinder, dessen Querschnitt ein Halbkreis (Fig. 67) vom Halbmesser r ist und Durchmesser AB horizontal liegt, das Biegungsmoment in Bezug auf die Achse AB (Nr. **66**) $= \frac{1}{8}E\pi r^4$, mithin in Bezug auf die durch den Schwerpunct O gehende (mit AB parallele) neutrale Achse ab, wegen (§. 50) $CO = \frac{4r}{3\pi}$ nach **61**:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{8}E\pi r^4 - E\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2.\tfrac{1}{2}r^2\pi = \tfrac{1}{72}Er^4\left(\frac{9\pi^2 - 64}{\pi}\right).$$

Natürlich kann der Halbkreis auch die umgekehrte Lage haben.

c) *Widerstand der Körper gegen den Bruch.*

Relative Festigkeit.

(§. 132.)

71. Wird die Belastung eines prismatischen Körpers allmählich so weit fortgesetzt, bis eine Biegung eintritt, bei welcher irgend eine Faser in ihrer Ausdehnung oder Verkürzung die Elasticitätsgrenze erreicht oder überschreitet; so erhält man be-

---

*) Ist nämlich die Fläche des äusseren Rechteckes $ABCD$ (Fig. 56) $= F$, die des inneren $= f$, folglich des Ringes $f' = F - f$. Sind ferner m, n und O der Reihe nach die in der Geraden EF liegenden Schwerpuncte dieser Flächen; so ist $F.Em = f.En + f'.EO$ und daraus, wenn man die Werthe setzt:

$$EO = \frac{bh.\frac{1}{2}h - b'h'.\frac{1}{2}h'}{bh - b'h'} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{bh^2 - b'h'^2}{bh - b'h'}\right).$$

ziehungsweise das Tragvermögen und die relative Festigkeit dieses Körpers. Bezeichnet man, um diese Biegung in beiden Fällen zu finden, den Abstand der von der neutralen Achsenschichte am weitesten abstehenden Faser auf der convexen oder concaven Seite des gebogenen Körpers durch c, sowie durch ϱ den Krümmungshalbmesser der neutralen Schichte, ferner wie oben (Nr. **54.**) durch T und F beziehungsweise den Tragfähigkeits- und Festigkeits-Coefficienten; so ist für's Erste die Ausdehnung oder Verkürzung einer Längeneinheit dieser am weitesten abstehenden Faser (Relation (γ) in Nr. **56.**):

$$\frac{\varDelta l}{l} = \frac{c}{\varrho},$$

wenn man nämlich das Verhältniss $\frac{\varDelta z}{z}$ an der Elasticitätsgrenze durch $\frac{\varDelta l}{l}$ bezeichnet. Nun ist aber an dieser Grenze (Relat. (3) Nr. **54.**):

$$T = E\frac{\varDelta l}{l} = E.\frac{c}{\varrho},$$

folglich:

$$\varrho = \frac{E}{T}c \ldots . (f),$$

und diess ist der kleinste Werth, welchen der Krümmungs-Halbmesser an irgend einer Stelle erreichen darf, ohne dass bei der Biegung die Elasticitätsgrenze überschritten wird.

Da nun aber der Tragfähigkeits-Coefficient für die Ausdehnung von jenem für die Zusammendrückung der Fasern in der Regel verschieden (also nicht $T_a = T_r$) ist, so muss man ϱ sowohl für die convexe als für die concave Seite, d. i. sowohl $\frac{E}{T_a}c$ als auch $\frac{E}{T_r}c$ berechnen, und von diesen beiden Werthen für ϱ den grösseren beibehalten, d. h. ϱ darf dann nicht kleiner als dieser grössere Werth sein.

Da übrigens, wenn man den in den Parenthesen stehenden Theil der Relation (2) in Nr. **58.** durch X bezeichnet (wobei X bloss von der Form des Querschnittes des Prisma abhängt), aus dieser Relation

$$\varrho = \frac{EX}{Qz} \ldots . (g)$$

wird, so folgt, dass der Krümmungs-Halbmesser für den letzten, an der Mauer befindlichen Querschnitt am kleinsten wird, weil dafür $z = l$ am grössten ist; es wird daher auch an dieser Stelle des Prisma zuerst die Elasticitätsgrenze erreicht und überschritten.

72. Setzt man in der vorigen Relation (f) statt des Tragfähigkeits-Coefficienten T den Festigkeits-Coefficienten F, so gibt der Werth von $\varrho = \frac{E}{F} c$ die Grenze der Biegung an, an welcher der Körper (und zwar nach der vorigen Bemerkung am eingemauerten Ende) brechen wird.

Substituirt man diesen letzteren Werth von ϱ in der Relat. (g) der vorigen Nummer, sowie auch für X seinen Werth $\frac{\varepsilon}{E}$ (Relat. (3) Nr. **60.**) und setzt zugleich (da der Bruch am letzten Querschnitt erfolgt) $z = l$ gleich der Länge des Prisma; so erhält man dara us

$$Ql = \frac{\varepsilon}{Ec} F.$$

Auch hier muss man für F nach und nach die absolute und rückwirkende Festigkeit, d. i. (**54.**) F_a und F_r setzen und Q aus dem kleineren der beiden Ausdrücke berechnen, um die kleinste Last zu erhalten, welche, am freien Ende des Prisma angebracht, den Bruch desselben bewirkt.

73. Setzt man das stat. Moment $Ql = M$, so hat man also:

$$M = \frac{\varepsilon}{Ec} F,$$

und wenn man für das Biegungsmoment ε die den verschiedenen in den Nummern von **62.** bis **70.** behandelten Querschnitten der Prismen entsprechenden Werthe setzt, erhält man für dieselben Querschnitte die entsprechenden relativen Festigkeiten der Prismen. Davon sollen hier nur einige, und zwar die folgenden angeführt werden.

74. Ist der Querschnitt ein R e c h t e c k von der Lage Fig. 50, wobei $ab = b$, $cd = h$; so ist wegen $c = \frac{1}{2} h$ und (**62.**) $\varepsilon = \frac{1}{12} Ebh^3$, sofort $M = \frac{1}{12} \frac{Ebh^3}{\frac{1}{2} hE} F$, d. i.

$$M = \tfrac{1}{6} bh^2 F.$$

75. Hat das Rechteck die Lage Fig. 51, so ist wegen $c = AL = \frac{1}{2}(h \, Sin \, \varphi + b \, Cos \, \varphi)$ (**63.**) und wenn man für ε den Werth aus Nr. **63** setzt und reducirt:

$$M = \tfrac{1}{6} bh \left(\frac{h^2 \, Sin \, \varphi^2 + b^2 \, Cos \, \varphi^2}{h \, Sin \, \varphi + b \, Cos \, \varphi} \right) F.$$

76. Ist der Querschnitt ein Dreieck, so ist in der Lage Fig. 58 wegen $c = \frac{2}{3}h$ für F_r und $\frac{1}{3}h$ für F_a, und wegen (**64**) $\varepsilon = \frac{1}{36} E b h^3$, sofort:

$$M = \frac{1}{36} \frac{E b h^3}{E . \frac{1}{3} h} F_a = \frac{1}{12} b h^2 F_a \text{ und } M = \frac{1}{36} \frac{E b h^3}{E . \frac{2}{3} h} F_r = \frac{1}{24} b h^2 F_r,$$

dagegen in der Lage Fig. 59 gerade umgekehrt:

$$M = \frac{1}{24} b h^2 F_a = \frac{1}{12} b h^2 F_r.$$

77. Für den elliptischen Querschnitt in der Lage Fig. 52 ist wegen $c = b$ und (**65.**) $\varepsilon = \frac{1}{4} E \pi a b^3$ sofort $M = \frac{1}{4} \pi a b^2 F$.

Wenn dagegen die grosse Achse vertical steht: $M = \frac{1}{4} \pi a^2 b F$.

78. Für den kreisförmigen Querschnitt ist $M = \frac{1}{4} \pi r^3 F$.

79. Für einen rechteckigen Ring ist wegen $c = \frac{1}{2} h$, nach **67.**:

$$M = \frac{1}{6} \left(\frac{b h^3 - b' h'^3}{h} \right) F.$$

80. Endlich ist für einen hohlen Kreiscylinder, nach Nr. **68**, wegen $c = R$:

$$M = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{R^4 - r^4}{R} \right) F.$$

Anmerkung. Im Falle die Länge l des Prisma so gering ist, dass die parallel mit der Bruchfläche wirkende Kraft Q in diese Fläche selbst hineinfällt, so wird das Prisma nicht mehr durch Biegung gebrochen, sondern die sich trennenden Flächen werden von einander abgeschoben und man nennt die dabei hervorgerufene Festigkeit die Gleitungs- oder Abscheerungs-Festigkeit des Prisma. Ist F' der betreffende Festigkeits-Coefficient für die Flächeneinheit und A die Grösse der abgeschobenen Fläche, so ist die zum Abscheeren nöthige Kraft:

$$Q = F' A \ldots (m).$$

Was nun den Coefficienten F' betrifft, so kann man diesen den bisher ausgeführten Versuchen zufolge dem Coefficienten der absoluten Festigkeit gleich, d. i. $F' = F_a$, setzen.

Bolzen, Nieten u. dgl. werden mit ihrer Abscheerungs-Festigkeit in Anspruch genommen. Auch ist es eben diese Festigkeit, welche beim Ausstossen von Nuthen, Lochen von Blechen u. s. w. überwunden werden muss.

Körper von gleichem Widerstande.

(§. 137.)

81. Bei der bisherigen Annahme von durchaus gleichen Querschnitten des Körpers wird an einer oder mehreren Stellen zuerst oder vor allen übrigen die Elasticitätsgrenze überschritten, und an diesen daher auch der Bruch zuerst erfolgen. Ist daher der Körper an diesen Stellen gerade stark genug, so ist er an allen übrigen zu stark und man kann sich die Aufgabe stellen, den Längenschnitt des Körpers so zu bestimmen, dass alle Querschnitte eine genügende, keiner aber eine überflüssige Stärke oder Widerstandskraft besitze, und sonach die Elasticitätsgrenze bei der entstehenden Biegung, entweder bei der Ausdehnung oder bei der Zusammendrückung in allen Querschnitten zugleich erreicht wird.

Um nun für einige solche Körper von gleichem Widerstande die nöthige Form unter gewissen Bedingungen zu finden, sei der Körper wieder horizontal an dem einen Ende eingemauert und am anderen durch ein Gewicht Q, oder auch über die ganze Länge gleichförmig belastet.

82. Sollen die Querschnitte des Körpers Rechtecke von durchaus gleicher horizontaler Breite $CD = AB = b$ (Fig. 60) sein, so sei $CE = h$ die verticale Höhe des in der Ebene der Mauer liegenden, d. i. des vom freien Ende am weitesten, nämlich um $AC = l$ abstehenden Querschnittes, sowie $PM = y$ jene eines beliebigen Querschnittes im Abstande $AP = x$; dann ist die Festigkeit des Körpers in Bezug auf den Querschnitt ED (74.) $Q = \frac{1}{6} F \frac{b h^2}{l}$, sowie in Bezug auf den Querschnitt MP': $Q' = \frac{1}{6} F \frac{b y^2}{x}$.

Da nun $Q' = Q$ sein soll, so hat man aus der Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke:

$$y^2 = \frac{h^2}{l} x,$$

als Gleichung der Begrenzungscurve AME oder $BM'F$ des verticalen Längenschnittes des Körpers. Wie man sieht, ist diese Curve die gemeine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{l}$, deren Scheitel in A und Achse in AC liegt.

Anmerkung. Der Parameter $\frac{h^2}{l}$ lässt sich, wenn F, b und Q gegeben sind, aus der 1sten der obigen Gleichungen, aus welcher $\frac{h^2}{l} = \frac{6Q}{bF}$ folgt, bestimmen.

Da hier der Flächeninhalt der verticalen Schnitte durch $\frac{2}{3} AC.CE$, dagegen, wenn der Körper durchaus dieselbe Höhe $CE = h$ besitzt, durch $AC.CE$ ausgedrückt wird; so erspart man durch diese, gegen das freie Ende hin abnehmende Höhe des Körpers, wobei übrigens die ebene horizontale Fläche BC (wie hier) oben oder unten liegen kann, bei derselben

Festigkeit des Balkens, den 3ten Theil an Material. Auch bleibt dieses Verhältniss noch dasselbe, wenn das Prisma von zwei krummen Flächen derart begrenzt ist, dass die verticalen Längenschnitte vollständige Parabeln bilden, in welchen AC die Axe und für die obere wie untere Hälfte der Curve $CE = \frac{1}{2}h$ und $PM = \frac{1}{2}y$ ist.

Endlich kann noch bemerkt werden, dass man sich in der Praxis den für die Körper von gleichem Widerstande theoretisch gefundenen Formen in der Regel nur mehr oder weniger nähert, indem man z. B. im vorliegenden Falle dem Querschnitt an seinem Ende nicht die Höhe Null gibt, das Prisma also nicht wirklich in eine Schneide auslaufen lässt.

83. Sollen dagegen die gegen das freie Ende des prismatischen Körpers hin abnehmenden Querschnitte Rechtecke von durchaus gleicher Höhe sein; so sei $MN = CE = h$ (Fig. 61) diese constante Höhe, ferner wieder $CD = b$ die horizontale Breite des Querschnittes an der Mauer $AG = l$, und für einen beliebigen Querschnitt MN' der Abstand $AP = x$ und die Breite $MM' = y$. Diess vorausgesetzt ist wieder $\frac{1}{6}F\frac{yh^2}{x} = \frac{1}{6}F\frac{bh^2}{l}$ zu setzen, woraus sofort $\frac{1}{2}y = \frac{\frac{1}{2}b}{l}x$ als Gleichung der Geraden AC oder AD folgt, so dass also hier das Prisma von gleichem Widerstande von zwei gleichschenkeligen Dreiecken ACD und BEF als obere und untere Ebene begrenzt wird.

Anmerkung. Offenbar erspart man bei dieser Form des Prisma gegen einen durchaus gleichbreiten Balken und der gleichen relativen Festigkeit die Hälfte am Materiale.

84. Sollen die Querschnitte für den Fall bestimmt werden, dass die Last Q über die ganze Länge des prismatischen Körpers gleichförmig vertheilt ist, so sei, wenn der Balken durchaus eine gleiche Breite $CD = PP' = b$ (Fig. 62) haben soll, $AC = l$, $CE = h$, $AP = x$ und $PM = y$, sowie das Gewicht, womit bei der Breite b die Längeneinheit belastet ist $= q$, folglich das gesammte Belastungsgewicht $Q = ql$. Da nun aber auf die Länge AP die Belastung qx entfällt, so hat man mit Rücksicht auf die Gleichung (2) in §. 132 für die Festigkeit des rechteckigen Querschnittes PM' sofort: $\frac{1}{2}qx = \frac{1}{6}F\frac{by^2}{x}$, sowie für den Querschnitt CF: $\frac{1}{2}ql = \frac{1}{6}F\frac{bh^2}{l}$, und es folgt aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen $l^2y^2 = h^2x^2$ oder $y = \frac{h}{l}x$, als Gleichung der

Geraden AME, woraus sofort folgt, dass die untere Begrenzungsfläche AF des Prisma eine Ebene ist.

Die Höhe des Prisma am letzten Querschnitt CF ergibt sich aus der Gleichung $h = l\sqrt{\frac{3q}{bF}}$.

85. Ist der prismatische Körper im letzteren Falle bloss durch sein eigenes Gewicht belastet, so sei wieder (Fig. 63) $CD = PQ = b$ die constante Breite, $CE = DF = h$, $AC = l$, und für einen verticalen Querschnitt PN sofort $AP = x$, $PM = y$, sowie für einen zweiten, zwischen dem vorigen und dem freien Ende des Prisma liegenden Querschnitt $P'N'$, ebenso $AP' = x'$ und $P'M' = y'$; ausserdem sei für einen diesem letzteren unendlich nahe liegenden Querschnitt $P'p = \mathrm{d}x'$, sowie endlich γ das Gewicht der cubischen Einheit des prismatischen Körpers. Diess vorausgesetzt, ist das Gewicht des Körperelementes $pN' = \gamma b y' \mathrm{d}x'$ und dessen Moment gegen den Querschnitt $PN = \gamma b y' \mathrm{d}x' (x - x')$, folglich ist die Summe der Momente aller der den Körper bildenden Elemente, d. i. des Gewichtes des ganzen Körpers

$$= \gamma b \int_0^x y' \mathrm{d}x' (x - x').$$

Soll nun ein in A aufgehängtes Gewicht Q gegen diesen Querschnitt PN dieselbe Wirkung hervorbringen, so muss:

$$Qx = \gamma b \int_0^x y' \mathrm{d}x' (x - x') \text{ oder wegen } Qx = \tfrac{1}{6} F b y^2$$

und wenn man Kürze halber $\frac{1}{6}\frac{F}{\gamma} = A$ setzt, auch:

$$\int_0^x y' \mathrm{d}x' (x - x') = A y^2 \text{ sein.}$$

Um nun aus dieser Bedingungsgleichung die Gleichung $y = f(x)$ oder $y' = f(x')$ der Begrenzungscurve AME zu finden, wollen wir dieselbe zweimal nach x differenziiren; dadurch entsteht zuerst $y' \mathrm{d}x' (x - x') = A \mathrm{d}.y^2$ und dann $y' \mathrm{d}x' \mathrm{d}x = A \mathrm{d}^2.y^2$, oder, wenn man x' in x, also auch y' in y übergehen lässt, $y \mathrm{d}x^2 = A \mathrm{d}^2.y^2$, woraus $\frac{\mathrm{d}^2.y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{y}{A}$, und wenn man diese Gleichung zweimal integrirt, sofort: $y = \frac{x^2}{12A}$ folgt*).

---

*) Setzt man nämlich $y^2 = z$ und multiplicirt zugleich die obige Gleichung $\frac{\mathrm{d}^2.y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{y}{A}$ mit $\mathrm{d}z$, so erhält man $\mathrm{d}z \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{z^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}z}{A}$, und wenn man integrirt:

Diese Gleichung, welche, wenn für A der Werth hergestellt wird, die Form $x^2 = \frac{2F}{\gamma} y$ annimmt, gehört einer gemeinen Parabel AME vom Parameter $\frac{2F}{\gamma}$ an, deren Achse in der durch A gehenden lothrechten Linie und deren Scheitel in A liegt.

86. Um ferner auch den Fall zu behandeln, in welchem der prismatische Körper horizontal an beiden Enden A, B (Fig. 64) frei aufliegt und in irgend einem Puncte D mit dem Gewichte Q belastet ist, sei, um wieder die Querschnitte von gleicher Festigkeit unter der Voraussetzung zu finden, dass sämmtliche Querschnitte von derselben horizontalen Breite b sein sollen, sofort $AB = l$, $AD = a$, $BD = l - a = a'$ und $DC = h$, sowie für einen zwischen A und C liegenden Punct M der gesuchten Curve $AP = x$ und $PM = y$; dann ist der vom Gewichte Q auf den Punct P ausgeübte Druck q, wegen $q(l - x) = Qa'$ sofort

$$q = \frac{Qa'}{l - x}.$$

Da ferner die Festigkeit des Querschnittes PM [§. 134, Gleichung (5)] durch $q = \frac{1}{6} F b y^2 \frac{l}{x(l - x)}$ ausgedrückt wird, so erhält man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von q:

$$y^2 = \frac{6Qa'}{Fbl} x,$$

oder wegen $Q = \frac{1}{6} F b h^2 \frac{l}{aa'}$, auch, wenn man substituirt:

$$y^2 = \frac{h^2}{a} x,$$

als Gleichung der Begrenzungscurve AMC, nämlich einer gemeinen Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a}$, deren Scheitel in A und Achse in AB liegt.

Auf ganz gleiche Weise findet man auch für die Begrenzungscurve $BM'C$ eine solche Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a'}$, deren Scheitel in B und Achse wieder in AB liegt.

$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{A}$ oder $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{4}{3A}} \cdot z^{\frac{3}{4}}$, d. i. $z^{-\frac{3}{4}} dz = \sqrt{\frac{4}{3A}} dx$, folglich durch die zweite Integration: $4 z^{\frac{1}{4}} = x \sqrt{\frac{4}{3A}}$, oder $16 z^{\frac{1}{2}} = \frac{4x^2}{3A}$, d. i. den Werth für z wieder hergestellt:

$$4y = \frac{x^2}{3A}, \text{ oder } y = \frac{x^2}{12A}.$$

Ist die Last in der halben Länge des Körpers angebracht, so erhalten beide Parabeln denselben Parameter $\frac{2h^2}{l}$ und besitzen gegen die mittlere Verticale eine symmetrische Lage.

87. Es sei endlich die Last Q über die Länge des auf beiden Enden frei aufliegenden prismatischen Körpers gleichmässig vertheilt und es werde wieder gefordert, dass die Querschnitte Rechtecke von durchaus gleicher (horizontaler) Breite b sein sollen. Setzt man die Entfernung der beiden Stützen $AB = l$ (Fig. 65) $\frac{1}{2}l = a$ und die bei dieser Breite b auf die Längeneinheit entfallende Belastung $= q$, so wird jede der beiden Stützen A und B mit dem Gewichte aq gedrückt, und jede Hälfte des Körpers von gleichem Widerstande, wie jene ACD, befindet sich in derselben Lage, als ob diese Hälfte im Querschnitt CD befestigt, im Puncte A (und beziehungsweise B) mit der Kraft aq vertical aufwärts gezogen und mit dem über die ganze Länge AC (oder BC) gleich vertheilten Gewichte aq belastet wäre.

Ist nun $CD = h$ die Höhe des Prisma in der Mitte oder halben Länge, sowie $PM = y$ jene in der Entfernung $CP = x$; so ist in Bezug auf den durch PM gehenden Querschnitt das statische Moment der in A aufwärts wirkenden Kraft aq gleich $aq(a-x)$, sowie das Moment der über AP gleich vertheilten Last $(a-x)q = \frac{1}{2}(a-x)q \times (a-x) = \frac{1}{2}q(a-x)^2$, folglich ist die Differenz beider Momente $= aq(a-x) - \frac{1}{2}q(a-x)^2 = \frac{1}{2}q(a-x)^2$, mit welchem der Bruch in PM bewirkt werden muss. Da aber dieses Moment auch gleich $\frac{1}{6}Fby^2$ ist, so folgt die Gleichung $\frac{1}{6}Fby^2 = \frac{1}{2}q(a-x)^2$ und daraus $y^2 = \frac{3q}{Fb}(a^2-x^2)$, oder da für den mittleren Querschnitt CD offenbar $\frac{1}{2}aq = \frac{1}{6}F\frac{bh^2}{a}$ ist, woraus $\frac{3q}{Fb} = \frac{h^2}{a^2}$ folgt, auch: $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2-x^2)$, als Gleichung der gesuchten Begrenzungscurve AMB, die also einer Ellipse von den Achsen $2a = l$ und $2h = l\sqrt{\frac{3q}{Fb}}$ angehört, deren grosse Achse $2a = l$ mit AB zusammenfällt.

Gleichung der elastischen Linie. Bestimmung des Coefficienten oder Moduls der Elasticität.

88. Es sei der prismatische Körper, dessen eigenes Gewicht hier wieder vorläufig ausser Acht gelassen wird, wie früher horizontal an dem einen Ende eingemauert oder unveränderlich be-

festigt und am anderen freien Ende mit dem Gewichte oder einer vertical wirkenden Kraft Q so weit belastet, dass die dadurch entstehende Biegung noch vollständig innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt; dabei stelle AMB (Fig. 69) die neutrale Achsenschichte von der Länge l vor, deren Puncte M durch die rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$ und $PM = y$ festgesetzt, die Abscissen also auf der durch den tiefsten Punct A gehenden Geraden AC gezählt werden sollen. Ferner bilde die im Puncte M an diese Curve gezogene Tangente mit der Horizontalen AC den Winkel α, dagegen im Anfangspuncte A den Winkel φ; ferner sei ϱ der Krümmungs-Halbmesser der Curve im Puncte M, der Bogen $AM = s$, die ganze Länge AMB (gleich der ursprünglichen Länge des Prisma) $= l$, sowie die dem Endpunct B entsprechende Abscisse $AC = a$ und endlich der Biegungspfeil $A'A = BC = \delta$.

Diess vorausgesetzt hat man zuerst, wenn ε wieder das Biegungsmoment bezeichnet (Relat. (3) in Nr. **60** und Relat. (2) in Nr. **58**): $\frac{\varepsilon}{\varrho} = Qx \ldots (n)$. Ferner ist (Comp. d. h. Mathem. §. 728) $\varrho = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$, oder da für so geringe Biegungen, wie sie vorausgesetzt werden, $tang\, \alpha = \frac{dy}{dx}$ so klein wird, dass man die 2te Potenz davon gegen 1 auslassen kann, auch:

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y}.$$

Setzt man diesen Werth für ϱ in die vorige Gleichung (n), so erhält man $(r) \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{\varepsilon}x$, oder: $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{Q}{\varepsilon}x\,dx$, und daraus durch Integration: $\frac{dy}{dx} = C - \frac{Q}{\varepsilon}\frac{x^2}{2}$, wo C die unbestimmte Constante bezeichnet. Um diese zu bestimmen, bemerke man, dass für $x = a$ die Ordinate $y = \delta$ am grössten und $\frac{dy}{dx} = 0$ wird; es ist also $C = \frac{Q}{\varepsilon}\frac{a^2}{2}$ und daher:

$$dy = \frac{Q}{2\varepsilon}(a^2 - x^2)\,dx \ldots (m).$$

Aus dieser Gleichung folgt durch abermalige Integration:

$$y = \frac{Q}{2\varepsilon}(a^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) \ldots (1),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, und dieses ist sofort die Gleichung der elastischen Linie.

89. Da, wie bereits erwähnt, $y = \delta$ für $x = a$ wird, so hat man aus der vorigen Gleichung für den Biegungspfeil:

$$\delta = \tfrac{1}{3} \frac{Q}{\varepsilon} a^3 \ldots (2).$$

Da ferner für $x = 0$ die Tangente $\frac{dy}{dx} = tang\,\varphi$ sein soll, so folgt aus der Relat. (m): $tang\,\varphi = \frac{Q a^2}{2\varepsilon}$, oder mit Rücksicht auf die vorige Relat. (2): $\quad tang\,\varphi = \tfrac{3}{2} \frac{\delta}{a} \ldots (3).$

Für die Länge der Curve hat man $l = \int_0^a dx \sqrt{l + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, oder, da für eine geringe Biegung $\frac{dy}{dx}$ sehr klein ist, nahe genug:

$$l = \int_0^a dx \left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = \int_0^a \left[dx + \frac{Q^2}{8\varepsilon^2}(a^2 - x^2)^2 dx\right]$$

mit Rücksicht nämlich auf die obige Gleichung (m), oder wenn man die Integration ausführt und reducirt: $l = a + \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \frac{a^5}{15}$, oder auch, wenn man l durch den Pfeil δ ausdrücken will, wegen Gleichung (2): $\quad l = a + \tfrac{3}{5} \frac{\delta^2}{a} \ldots (4),$ woraus auch unmittelbar folgt, dass für geringe Biegungen $a = l$ gesetzt werden kann.

90. Aus der obigen Gleichung (2) folgt $\varepsilon = \tfrac{1}{3} Q \frac{a^3}{\delta}$, oder wenn man den Werth für das Biegungsmoment ε aus Nr. **60.** substituirt und den in den Parenthesen stehenden Ausdruck wieder Kürze halber durch X bezeichnet, wodurch $\varepsilon = E X$ wird, auch $E X = \tfrac{1}{3} Q \frac{a^3}{\delta}$, und daraus erhält man für den M o d u l oder C o e f f i c i e n t e n der E l a s t i c i t ä t den Ausdruck:

$$E = \tfrac{1}{3} \frac{Q}{X} \frac{a^3}{\delta} \ldots (5).$$

Dabei erhält man, ohne erst die Integralausdrücke in der Gleichung (3) Nr. **60.** wieder neuerdings entwickeln zu müssen, für die in den Nummern **62.** bis **70.** behandelten Querschnitte den entsprechenden Werth von X, wenn man aus diesen Nummern die Werthe von $\frac{\varepsilon}{E}$ nimmt. So ist z. B. für einen r e c h t e c k i g e n Querschnitt, wie er in **62.** behandelt wurde, $X = \frac{\varepsilon}{E} = \tfrac{1}{12} b h^3$;

in der Lage von **63.** ist $X = \frac{1}{12} b h (h^2 Sin \varphi^2 + b^2 Cos \varphi^2)$. Für einen dreieckigen Querschnitt (Nr. **64.**) ist $X = \frac{1}{36} b h^3$ u. s. w.

Will man nun z. B. die Biegung eines prismatischen, an dem einen Ende eingemauerten und am freien Ende mit Q belasteten Körpers von rechteckigem Querschnitt, von der Breite b und Höhe h, ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht bestimmen; so darf man nur aus der obigen Gleichung (5) δ suchen und $X = \frac{1}{12} b h^3$ setzen. Man erhält dadurch für den Biegungspfeil:

$$\delta = \frac{4 Q a^3}{E b h^3},$$

wobei man ohne Fehler a für die Länge l des Prisma nehmen kann.

Anmerkung. Es mag hier bemerkt werden, dass für Körper von gleichem Widerstande die Biegung bei derselben Belastung eine grössere ist. Betrachtet man z. B. jenen in Nr. 82. behandelten Fall, in welchem die Querschnitte durchaus Rechtecke von gleicher Breite sind und wofür wir als Begrenzungscurve eine Parabel gefunden haben, deren Gleichung $y^2 = \frac{h^2}{l} x \ldots (\alpha)$ ist, so wird man zur Bestimmung des Pfeiles δ' in der ursprünglichen Gleichung (r) in Nr. 88., d. i. in $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Qx}{\varepsilon} = -\frac{Qx}{EX}$ für X den Werth, welcher sich auf den Querschnitt von der constanten Breite b und variabeln Höhe y, im Abstande x vom freien Ende bezieht, d. i. $X = \frac{1}{12} b y^3$ setzen, und wieder zweimal integriren.

Man erhält nämlich, wenn man unter einem in X für y den Werth $h\sqrt{\frac{x}{l}}$ aus der vorigen Relation (α) setzt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{12 Q l^{\frac{3}{2}}}{E b h^3} x^{-\frac{1}{2}}$$

und daraus als erstes Integral (da für $x = l$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ ist):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24 Q l^{\frac{3}{2}}}{E b h^3} (\sqrt{l} - \sqrt{x}),$$

und als zweites Integral (da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist):

$$y = \frac{24 Q l^{\frac{3}{2}}}{E b h^3} (x\sqrt{l} - \tfrac{2}{3} x\sqrt{x}).$$

Aus dieser Gleichung folgt nun $y = \delta'$ für $x = l$, so dass der gesuchte Biegungspfeil $\delta' = \frac{8 Q l^3}{E b h^3}$, also doppelt so gross ist, als jener δ für Querschnitte von gleichen Höhen, wenn man nämlich $a = l$ setzt.

Ebenso findet man, wenn man eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last annimmt, dass der Biegungspfeil δ' viermal so gross als δ ist, wenn sich letzterer auf Querschnitte von durchaus gleichen Höhen bezieht u. s. w.

91. Aus der obigen Relation (n) (Nr. **88.**) folgt für den Krümmungs-Halbmesser der Werth $\varrho = \frac{\varepsilon}{Qx}$, und da dieser, wie bereits (**71.**) bemerkt, für $x = a$ am kleinsten, die Biegung des Prisma also am letzten oder eingemauerten Querschnitt am grössten wird, so wird dasselbe auch an dieser Stelle am ersten brechen (oder dieser Querschnitt, von Einigen der „gefährliche“ genannt, ist gleichsam der schwächste). Damit nun aber an dieser Stelle die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde, darf (Nr. **71.**) $\varrho = \frac{\varepsilon}{Qa}$ nicht kleiner sein als $\frac{E}{T}c$, mithin ist an dieser Grenze selbst $\frac{\varepsilon}{Qa} = \frac{E}{T}c$ zu setzen, woraus sofort für die grösste Belastung $Q = \frac{\varepsilon T}{Eac} \ldots (6)$ folgt, d. h. dieser Werth von Q darf als Belastung am freien Ende des prismatischen Körpers nicht über schritten werden, wenn derselbe diese Last noch mit Sicherheit soll tragen können.

Setzt man in dem vorigen Ausdrucke statt dem Trag- den Festigkeits-Coefficienten F, so erhält man $Q = \frac{\varepsilon F}{Eac}$ als diejenige kleinste Last, bei welcher der Körper am eingemauerten Ende brechen wird (vergl. Nr. **72**).

92. Um jetzt auch die Biegung des prismatischen Körpers unter der Voraussetzung zu untersuchen, dass ausser dem am freien Ende angebrachten Gewichte Q auch noch eine Last gleichförmig über dessen Länge vertheilt oder angebracht ist, sei p das Gewicht, welches auf die Längeneinheit der Abscissenachse (als Projection) entfällt, dann kommt auf die Abscisse $AP = x$ (Fig. **69.**) das Gewicht px und das von diesem auf den Querschnitt M ausgeübte Moment ist $= \frac{1}{2}px \cdot x = \frac{1}{2}px^2$ und man muss offenbar zur Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingung in der obigen Gleichung (n) (Nr. **88.**) $Qx + \frac{1}{2}px^2$ statt dem dortigen Moment Qx setzen. Dadurch erhält man durch Einhalten oder Wiederholung desselben Verfahrens, wie es in Nr. **88.** durchgeführt wurde, ohne Schwierigkeit, zuerst als Gleichung der Curve:

$$y = \frac{Q}{2\varepsilon}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3) + \frac{p}{6\varepsilon}(a^3x - \tfrac{1}{4}x^4) \ldots (1),$$

und daraus für den Biegungspfeil (wenn man $x = a$ und $y = \delta$ setzt):

$$\delta = \frac{a^3}{\varepsilon}(\tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{8}pa),$$

oder wenn man das ganze über die Länge a gleich vertheilte Gewicht, d. i. $pa = G$ setzt, auch:

$$\delta = \frac{a^3}{\varepsilon}(\tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{8}G) = \tfrac{1}{3}\frac{a^3}{\varepsilon}(Q + \tfrac{3}{8}G)\ldots(2).$$

Ist $Q = 0$, so ist $\delta = \frac{1}{8}\frac{a^3}{\varepsilon}G$, während, wenn dieses Gewicht bloss am freien Ende des Prisma angebracht wäre, die Biegung durch [**89.**, Relat. (2)] $\delta' = \frac{1}{3}\frac{a^3}{\varepsilon}G$ ausgedrückt würde: es verhalten sich also die beiden Biegungspfeile $\delta : \delta' = \frac{1}{8} : \frac{1}{3} = 3 : 8$.

Lässt man G für das eigene Gewicht des prismatischen Körpers gelten, so folgt also, dass dasselbe in Bezug auf die dadurch hervorgebrachte Biegung gerade so wirkt, als wenn davon $\frac{3}{8}$ am freien Ende des Körpers angebracht, also das Aufhänggewicht Q um $\frac{3}{8}G$ vermehrt worden wäre (wobei dann der Körper als gewichtslos zu betrachten ist).

93. Mit Rücksicht auf die obige Bemerkung (dass man $Qx + \frac{1}{2}px^2$ statt Qx setzen muss) und mit Beibehaltung derselben Bezeichnungen, erhält man in dem vorliegenden Falle für den Krümmungs-Halbmesser [**88.**, (n)] $\varrho = \frac{\varepsilon}{Qx + \frac{1}{2}px^2}$, also für den letzten oder schwächsten Querschnitt in B:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{Qa + \frac{1}{2}pa^2} = \frac{\varepsilon}{(Q + \frac{1}{2}G)a}.$$

An der Elasticitätsgrenze ist wieder, wie oben (**91.**), $\varrho = \frac{Ec}{T}$, folglich, wenn man diesen Werth dem nächst vorhergehenden gleich setzt und die dieser Grenze entsprechende Belastung bestimmt:

$$Q + \tfrac{1}{2}G = \frac{\varepsilon T}{Eac}.$$

Hiebei kommt also das über die Länge des Prisma gleich vertheilte Gewicht auf den Aufhängpunct am freien Ende reducirt mit der Hälfte in Rechnung.

94. Wir wollen endlich noch den Fall untersuchen, in welchem der prismatische Körper an beiden Enden horizontal auf zwei Stützen frei aufliegt und an einem beliebigen Puncte belastet ist.

Es sei zu diesem Ende die Entfernung der beiden Stützen $AB = a$ (Fig. 71), AFB die innerhalb der Elasticitätsgrenze, durch das im Puncte F aufgehängte Gewicht Q gebogene neutrale Achsenschichte (diese als gewichtslos angesehen), $AD = BD = b$, $DE = z$, $EF = \delta$; für die Curve AMF seien für einen beliebigen Punct M die rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, und für einen Punct M' der Curve $BM'F$, ebenso $BP' = x$, $P'M' = y$. Diess angenommen ist der Druck auf die Stützen A und B beziehungsweise:

$$p = \tfrac{1}{2} Q \frac{(b+z)}{b} \text{ und } p' = \tfrac{1}{2} Q \frac{(b-z)}{b},$$

und die beiden Theile AF und BF des Körpers befinden sich in derselben Lage, als ob sie in F eingemauert und beziehungsweise durch die Kräfte p und p' vertical aufwärts gebogen würden. Nun ist [Relat. (r) in Nr. 88.] für das Stück AMF:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{p}{\varepsilon} x, \text{ oder wenn man integrirt: } \frac{dy}{dx} = C - \frac{p}{2\varepsilon} x^2.$$

Zur Bestimmung der Constanten C setze man den Winkel, welchen die an die Curve AMF in F gezogene Tangente mit der Horizontalen AB bildet $= \alpha$, so wird für $x = AE = a - z$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\, \alpha$, folglich, wenn man diesen Werth substituirt, die Constante C aus der entstehenden Gleichung bestimmt und den erhaltenen Werth in die vorige Differentialgleichung einsetzt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\varepsilon} [(b-z)^2 - x^2] + tang\, \alpha.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch abermaliges Integriren:

$$y = \frac{p}{2\varepsilon} [(b-z)^2 x - \tfrac{1}{3} x^3] + x\, tang\, \alpha,$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss.

Da nun für $x = AE = b - z$ die Ordinate $y = EF = \delta$ sein soll, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\delta = \tfrac{1}{3} \frac{p}{\varepsilon} (b-z)^3 + (b-z)\, tang\, \alpha.$$

Genau auf dieselbe Weise erhält man für die Curve $BM'F$ die Gleichung:

$$y = \frac{p'}{2\varepsilon} [(b+z)^2 x - \tfrac{1}{3} x^3] - x\, tang\, \alpha$$

und
$$\delta' = \tfrac{1}{3} \frac{p'}{\varepsilon} (b+z)^3 - (b+z)\, tang\, \alpha.$$

95. Da nun $\delta' = \delta$ ist, so erhält man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe, und wenn man dann aus der entstehenden Gleichung $tang\,\alpha$ bestimmt:

$$tang\,\alpha = \frac{1}{6b\varepsilon}[p'(b+z)^3 - p(b-z)^3],$$

oder für p und p' die obigen Werthe gesetzt und gehörig reducirt:

$$tang\,\alpha = \tfrac{1}{3}\frac{Q}{b\varepsilon}z(b^2 - z^2)\ldots(q).$$

Mit diesem Werthe von $tang\,\alpha$ erhält man aus einem der beiden vorigen Ausdrücke von δ oder δ', wenn man auch gleich $\frac{1}{2}a$ statt b setzt, sofort:

$$\delta = \frac{Q}{3a\varepsilon}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)^2\ldots(r).$$

96. Um die dem tiefsten Punct der gebogenen Schichte ACB entsprechende Ordinate y zu finden, muss man aus der Gleichung der Curve $BM'F$ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ suchen und nach der bekannten Regel verfahren. Nun ist die Gleichung dieser Curve nach Nr. **94.**, wenn man sogleich für p' wieder den obigen und auch für $tang\,\alpha$ den Werth aus (q) setzt und reducirt:

$$y = \frac{Q(b-z)}{2b\varepsilon}[\tfrac{1}{2}(b+z)^2x - \tfrac{2}{3}(b+z)zx - \tfrac{1}{6}x^3].$$

Bestimmt man jetzt daraus den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, setzt diesen gleich Null und sucht x, so hat man als Abscisse BL dieses gesuchten tiefsten Punctes O:

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3}(3b^2 + 2bz - z^2)} = \sqrt{(b+z)(b - \tfrac{1}{3}z)}.$$

Da nun aber immer $z < b$ ist, so folgt, dass $x > b$ und $< b+z$ sei, also liegt der tiefste Punct O zwischen den Puncten C und F.

Die entsprechende Ordinate LO erhält man, wenn man diesen Werth von x in den vorhergehenden von y setzt, und zwar ist, wenn man für b den Werth $\frac{1}{2}a$ setzt:

$$LO = \frac{Q(\frac{1}{2}a - z)}{3a\varepsilon}[(\tfrac{1}{2}a + z)(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}z)]^{\frac{3}{2}}.$$

97. Nach Relat. (n) in Nr. **88.** erhält man für den Krümmungs-Halbmesser der Curve AMF: $\varrho = \frac{\varepsilon}{px}$ und für jene

$BM'F$: $\varrho = \frac{\varepsilon}{p'x}$, oder wenn man für p und p' die Werthe (aus **94.**) setzt, beziehungsweise:

$$\varrho = \frac{2b\varepsilon}{Q(b+z)x} \text{ und } \varrho = \frac{2b\varepsilon}{Q(b-z)x}.$$

Diese werden aber am kleinsten, beziehungsweise für $x = AE = b - z$ und $x = BE = b + z$, wodurch sie die gleichen Werthe erhalten:

$$\varrho = \frac{2b\varepsilon}{Q(b^2 - z^2)}$$

und woraus sofort folgt, dass die Curve (oder das Prisma) im Belastungspunct F am stärksten gebogen ist.

Damit an dieser Stelle die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, muss wieder $\varrho = \frac{E}{T}c$, d. i. $\frac{E}{T}c = \frac{a\varepsilon}{Q(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}$ sein, woraus sonach für die grösste zulässige Belastung in diesem Puncte $Q = \frac{Ta\varepsilon}{Ec(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}$ folgt.

98. Endlich erhält man noch für die Länge der neutralen Schichte $l = l' + l''$, wenn man $AMF = l'$ und $BM'F = l''$ setzt. Nun ist aber nach Gleichung (4) in Nr. **89.**: $l' = b - z + \frac{3}{5}\frac{\delta^2}{b-z}$ und $l'' = b + z + \frac{3}{5}\frac{\delta^2}{b+z}$ demnach $l' + l'' = l = 2b + \frac{3}{5}\delta^2\frac{2b}{b^2 - z^2} = a + \frac{3}{5}\frac{a}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}\delta^2$, oder wenn man für δ den Werth aus Relat. (r) in **95.** substituirt und abkürzt:

$$l = a + \frac{Q^2}{15a\varepsilon^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)^3.$$

99. Wird die Last Q in der Mitte zwischen den beiden Stützen, nämlich im Puncte C angebracht, so wird $z = 0$ und man erhält für diesen speciellen einfachern Fall (Fig. 71') der Reihe nach:

Aus Nr. **96** für die Gleichung der Curve ACB:

$$y = \frac{Q}{12\varepsilon}(\tfrac{1}{2}a^2x - x^3).$$

Aus **95.** für den Biegungspfeil:

$$\delta = \frac{Q}{\varepsilon}\frac{a^3}{48},$$

welcher Werth, wie es sein soll, mit der grössten Ordinate LO in **96.** zusammenfällt, weil hier der Aufhängpunct C zugleich auch der tiefste ist.

Aus **97**. folgt der Krümmungs-Halbmesser:

$$\varrho = \frac{2\varepsilon}{Qx},$$

und für den tiefsten Punct C:

$$\varrho = \frac{4\varepsilon}{Qa}.$$

Für die grösste, noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Belastung folgt aus **97**:

$$Q = \frac{4T\varepsilon}{Eac},$$

sowie endlich aus **98**. für die Länge der Curve ACB:

$$l = a + \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{a^5}{960}.$$

100. Will man endlich im vorliegenden Falle, in welchem nämlich die Last Q in der Mitte zwischen beiden Stützen angebracht ist, bei der Bestimmung des Biegungspfeiles auch das eigene Gewicht G des Prisma mit berücksichtigen; so darf man nur jede Hälfte der Curve oder des Stabes ACB, wie z. B. AC (Fig. 71′) so ansehen, als ob der Stab in C eingemauert und in A mit der Kraft $q = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}G$ vertical aufwärts gezogen wäre. Für diesen Fall darf man aber in dem Ausdrucke (2), Nr. **92**., des Pfeiles, in welchen man mit Rücksicht auf die gewählte Bezeichnung $\frac{1}{2}G$ statt G und $\frac{1}{2}a$ statt a zu setzen hat, nur das Gewicht des Prisma negativ nehmen (da dasselbe der Kraft q entgegen wirkt). Dadurch wird für den vorliegenden Fall:

$$\delta = \frac{a^3}{24\varepsilon}(q - \tfrac{3}{16}G),$$

oder wenn man für q den Werth setzt und reducirt:

$$\delta = \frac{a^3}{48\varepsilon}(Q + \tfrac{5}{8}G) \ldots (s).$$

Dieser Ausdruck zeigt zugleich, dass eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last G gerade so wirkt, als ob an dem gewichtslosen Stabe in der Mitte ein Gewicht von $\frac{5}{8}G$ angebracht wäre, oder die Biegungen, welche entstehen, wenn eine (immer innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende) Last Q einmal über die ganze Länge gleich vertheilt, und das zweite Mal (den Stab als gewichtslos betrachtet) in der Mitte angebracht wird, verhalten sich wie 5 : 8.

Anmerkung 1. Für die practische Bestimmung des Moduls der Elasticität ist es am bequemsten, Prismen aus dem betreffenden Materiale auf zwei Stützen horizontal frei aufzulegen, dasselbe in der Mitte, und zwar nur innerhalb der Elasticitätsgrenze zu belasten und dafür den Biegungspfeil zu beobachten.

Um nun dafür die entsprechende Formel aufzustellen, darf man nur aus dem vorigen Werthe von δ das Biegungsmoment ε ausdrücken und in dem Ausdrucke $\varepsilon = EX$ (Nr. **90**.) substituiren. Dadurch erhält man für den Elasticitäts-Coefficienten:

$$E = \frac{a^3}{48\,\delta X}(Q + \tfrac{5}{8}G).$$

Wählt man nun z. B. für das Prisma den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und verticalen Höhe h, so ist (**90**.) $X = \frac{1}{12}bh^3$, folglich dafür:

$$E = \frac{a^3}{4bh^3\delta}(Q + \tfrac{5}{8}G).$$

Anmerkung 2. Vermehrt man im letzteren Falle das Gewicht Q um das Zulagegewicht q und bringt das Gewicht $Q + q$ (welches immer noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegend angenommen wird) die stärkere Biegung δ' hervor, so wird, wenn man δ' nach der obigen Formel (s) ausdrückt und davon den Werth von δ abzieht, die Zunahme der Biegung durch $\delta' - \delta = \frac{qa^3}{48\varepsilon}$ bestimmt. Daraus folgt aber wieder $\varepsilon = EX = \frac{qa^3}{48(\delta' - \delta)}$ und daraus, wenn man einen rechteckigen Querschnitt annimmt, also $X = \frac{1}{12}bh^3$ setzt, als Modul der Elasticität:

$$E = \frac{qa^3}{4bh^3(\delta' - \delta)}.$$

Durch diese Formel wird das einfachste und bequemste Verfahren zur Bestimmung dieses Moduls oder Coefficienten E begründet.

d) *Widerstand eines vertical stehenden Prisma, dessen oberes Ende lothrecht belastet ist, gegen Ausbiegung.*

101. Es sei AE (Fig. 72) ein mit seinem unteren Ende BE auf einen festen horizontalen Boden sich stützender verticaler Stab oder ein Prisma, dessen oberes Ende mit dem Gewichte Q belastet ist und dadurch eine noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Ausbiegung erlangt, bei welcher die neutrale Achsenschichte die Curve ACB bildet; ferner sei die Länge der neutralen Schichte oder der Curve $ACB = l$, die Entfernung $AB = a$, ferner für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ und ϱ der Krümmungs-Halbmesser, sowie endlich wieder ε das Biegungsmoment des Prisma.

Diess vorausgesetzt, fordert das Gleichgewicht, dass in jedem Puncte der neutralen Achsenschichte ACB das statische Moment des Widerstandes gegen die Biegung dem Momente der auf das Prisma wirkenden Kräfte gleich sei.

Da sonach der vorliegende Fall mit jenem in Nr. 88. behandelten ganz analog ist, indem auch hier die Curve ihre concave Seite der Abscissenachse AB zukehrt (also, Comp. §. 728, der Krümmungs-Halbmesser mit negativen Zeichen zu nehmen) ist, so darf man in der dortigen Gleichung (r) nur das Moment Qy statt Qx setzen, und man erhält für das Gleichgewicht im gegenwärtigen Falle: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{\varepsilon}y$.

Wird diese Gleichung wieder zweimal integrirt, so erhält man als vollständiges Integral:

$$y = A\,Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) + B\,Cos\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right),$$

wobei A und B die zwei unbestimmten Constanten bezeichnen. Da nun aber für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, so folgt sogleich, dass $B = 0$ ist. Bezeichnet man ferner auch hier den Biegungspfeil DC durch δ, so fällt dieser mit der grössten Ordinate y zusammen; da aber y am grössten wird, wenn der Sinus seinen grössten Werth erreicht, d. i. wenn $Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) = 1$ wird, so hat man $\delta = A$, wodurch sofort auch die 2te Constante bestimmt ist. Es geht sonach die vorige Gleichung in folgende über:

$$y = \delta\,Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) \ldots (1).$$

102. Da für $x = a$ abermals $y = 0$ sein muss, so folgt aus dieser Gleichung (weil δ von Null verschieden) $0 = Sin\left(a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right)$, es muss daher $a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = n\pi$, also $a = n\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$ und $Q = \frac{n^2\pi^2\varepsilon}{a^2}$ sein, wenn n irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Denkt man sich an den beiden Endpuncten A und B, an die Curve ACB die Tangenten gezogen und bezeichnet die Winkel derselben mit der verticalen Abscissenachse AB beziehungsweise durch φ und φ'; so ist wegen [aus Gleich. (1)]

$$\frac{dy}{dx} = \delta\,Cos\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) \cdot \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$$

sofort für $x = 0$: $tang\,\varphi = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$ und für $x = a$: $tang\,\varphi' = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\,Cos\left(a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right)$, oder wenn man für a den obigen Werth setzt: $tang\,\varphi' = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\,Cos\,n\pi$, d. i. $tang\,\varphi' = \pm\,\delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$, so dass also

$tang\,\varphi' = \pm\, tang\,\varphi$ ist, d. h. die beiden in A und B an die Curve gezogenen Tangenten bilden mit der Verticalen gleiche Winkel.

103. Setzt man den obigen Werth von Q in die Gleich. (1) und Kürze halber $\frac{n\pi}{a} = b$, so wird $y = \delta\, Sin\, b\, x$ und daraus $\frac{dy}{dx} = b\,\delta\, Cos\, b\, x$, folglich $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = [1 + b^2\delta^2(Cos\, b\, x)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}b^2\delta^2(Cos\, b\, x)^2$, wenn man nämlich die folgenden Potenzen der kleinen Grösse $b\delta\, Cos\, b\, x$ vernachlässigt, mithin endlich:

$$l = \int_0^a dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^a dx\,[1 + \tfrac{1}{2}b^2\delta^2(Cos\, b\, x)^2] = a + \tfrac{1}{2}b^2\delta^2\,^{*)}$$

d. i. wenn man für b den Werth wieder herstellt:

$$l = a\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{a}\delta\right)^2\right]$$

und daraus, wenn man den Pfeil durch die Länge l ausdrücken will:

$$\delta = \frac{1}{n\pi}\sqrt{2a(l-a)}.$$

Da ferner aus dem obigen Werthe für Q sofort $\frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{Q}{\varepsilon}$ folgt, so hat man auch:

$$l = a\left(1 + \frac{Q}{\varepsilon}\,\frac{\delta^2}{2}\right) \text{ und } \delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon(l-a)}{aQ}}.$$

Anmerkung. Da die neutrale Achsenschichte durch das Gewicht Q um die Grösse $\frac{lQ}{E\omega}$ zusammengedrückt wird, wenn ω den Querschnitt des Prisma bezeichnet (Nr. **53.**), so muss man, um die ursprüngliche Länge des Prisma zu erhalten, diesen Werth zu dem vorigen von l addiren.

104. Der Krümmungs-Halbmesser der neutralen Achsenschichte ACB ist [88., (n)] $\varrho = \frac{\pm\varepsilon}{Qy}$.

Für $y = 0$ wird $\varrho = \infty$, zum Beweis, dass die Curve in A und B Wendepuncte besitzt.

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 838) $\int dx\,(Cos\, b\, x)^2 = \frac{Sin\, b\, x\; Cos\, b\, x}{2b} + \frac{x}{2}$, also innerhalb der Grenzen von 0 bis a gleich $\frac{Sin\, 2\, a\, b}{4b} + \frac{a}{2}$, oder wenn man $Sin\, 2\, a\, b$ in die bekannte Reihe auflöst und davon nur das 1te Glied beibehält $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$.

Für $y = \delta$, als grössten Werth von y, erhält ϱ seinen **kleinsten** Werth.

Nach der obigen Bemerkung (**101.**) wird die Abscisse für diese grösste Ordinate oder den Pfeil δ aus der Gleichung $Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) = 1$ bestimmt; nun folgt aber hieraus:

$$x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = \left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi,$$

folglich:
$$x = \left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}},$$

wobei $m = 0$ oder was immer für eine ganze Zahl sein kann, wenn nur dafür $x < a$ bleibt. (Die obigen Werthe von a und x zeigen, dass dafür immer $m < n$ sein muss.) Lässt aber diese letztere Bedingung mehrere Werthe für m zu, so besitzt auch die Achsenschichte mehrere grösste Werthe von y, die alle $= \delta$ sind.

Setzt man nun $n = 1$, so wird aus den obigen Relationen:

$$a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}},\ Q = \frac{\pi^2\varepsilon}{a^2},\ tang\,\varphi = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = \pi\frac{\delta}{a},\ \delta = \frac{1}{\pi}\sqrt{2a(l-a)}$$

und $x = \left(\frac{2m+1}{2}\right)a$.

Da nun, der vorigen Bedingung gemäss, $m < 1$, also $m = 0$ sein muss, so kommt die grösste Ordinate $y = \delta$ nur in **einem** Puncte und zwar für $x = \frac{1}{2}a$ vor.

Dieser Fall entspricht der Fig. 73, in welcher für $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$ im Puncte D die grösste Ordinate $CD = \delta$ stattfindet.

Setzt man ferner $n = 2$, so wird:

$$a = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}},\ Q = \frac{4\pi^2\varepsilon}{a^2},\ tang\,\varphi = \delta\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 2\pi\frac{\delta}{a},\ \delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2a(l-a)}$$

und $x = \left(\frac{2m+1}{2}\right)\frac{a}{2}$.

Da nun hier $m = 0$ und $= 1$ sein kann, so kommt das Maximum der Ordinate in 2 Puncten vor, wofür die Abscissen sind:
$$x = \tfrac{1}{4}a \text{ und } x = \tfrac{3}{4}a.$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$, so folgt dafür aus der obigen Gleichung (1) $y = 0$, zum Zeichen, dass die mittlere Achsenschichte die verticale Abscissenachse im Halbirungspuncte von AB durchschneidet.

Dieser Fall wird durch die Fig. 74 repräsentirt, in welcher $AC = \frac{1}{2}AB$, $AD = \frac{1}{2}AC$ und $CD' = \frac{1}{2}CB$ ist.

Auf gleiche Weise findet man, dass für $n = 3$ die Abscissenachse von der Curve in 2 Puncten und zwar in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Höhe dieser verticalen Achse geschnitten wird, und dass, weil hier $m = 0$, 1 und 2 sein kann, für die Ordinate 3 Maxima, und zwar für $x = \frac{1}{6}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{5}{6}$ stattfinden u. s. w.

105. Nach den Bemerkungen in Nr. **71.** ist die Ausdehnung oder Verkürzung der Längeneinheit einer von der neutralen Achsenschichte um e abstehende Schichte $= \frac{e}{\varrho}$, wo für ϱ der kleinste Werth zu setzen ist. Da nun dieser hier (vorige Nr.) $= \frac{\varepsilon}{Q\delta}$ ist, so ist diese Ausdehnung oder Verkürzung im vorliegenden Falle $= \frac{Q\delta}{\varepsilon} e$.

Liegt nun z. B. in Fig 74 die auf der rechten Seite des prismatischen Körpers von der neutralen Schichte ACB am weitesten abstehende Schichte um c, dagegen jene der linken Seite um c' entfernt, so ist die Ausdehnung an der convexen Seite im Puncte $m' = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c$ und im Puncte $m = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c'$ und die Verkürzung auf der concaven Seite in $n' = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c'$ und in $n = \frac{Q\delta}{\varepsilon} c$, oder es ist, mit Rücksicht auf die Bemerkung in **103.** (Anmerkung, wo $l = 1$ ist), die Verlängerung der Fasern der äussersten Schichte in den Puncten m' und m beziehungsweise $\frac{Q\delta}{\varepsilon} c - \frac{Q}{E\omega}$ und $\frac{Q\delta}{\varepsilon} c' - \frac{Q}{E\omega}$, sowie die Verkürzung in den Puncten n' und n:

$$\frac{Q\delta}{\varepsilon} c' + \frac{Q}{E\omega} \text{ und } \frac{Q\delta}{\varepsilon} c + \frac{Q}{E\omega}.$$

Nach der Bemerkung in Nr. **91.** muss, damit durch die Belastung Q an der Stelle der Curve, für welche der Krümmungs-Halbmesser am kleinsten ist, die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, an dieser Grenze $\varrho = \frac{E}{T} c$, also im vorliegenden Falle, wegen $\varrho = \frac{\varepsilon}{Q\delta}$ (als kleinster Werth) $\frac{T}{E} = \frac{Q\delta c}{\varepsilon}$ sein. Diese Relation auf die vorhin genannten Puncte $m, m' \ldots$ des prismatischen Körpers angewendet, hat man also an der Elasticitätsgrenze der convexen Seite, in den Puncten m' und m beziehungsweise:

$$\frac{T_a}{E} = \frac{Q\delta c}{\varepsilon} - \frac{Q}{E\omega} \text{ und } \frac{T_a}{E} = \frac{Q\delta c'}{\varepsilon} - \frac{Q}{E\omega}$$

und an dieser Grenze der concaven Seite, in n' und n:

$$\frac{T_r}{E} = \frac{Q\delta c'}{\varepsilon} + \frac{Q}{E\omega} \text{ und } \frac{T_r}{E} = \frac{Q\delta c}{\varepsilon} + \frac{Q}{E\omega}.$$

Der aus diesen Gleichungen resultirende kleinste Werth von Q darf dann nicht überschritten werden.

106. Wie die obigen Werthe (**104.**) für a zeigen, so ist jener für $n = 1$, welchem Falle die Fig. 73 entspricht, der kleinste, und zwar ist $a = \pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$, woraus, wie bereits bemerkt, $Q = \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2}$ folgt. Da nun, wenn überhaupt eine Biegung eintreten soll, $a < l$ sein muss, so folgt für diesen Fall $Q > \frac{\pi^2 \varepsilon}{l^2}$.

107. Ist das Prisma oder der Stab, dessen neutrale Achsenschichte AMB in Fig. 75 dargestellt ist, am unteren Ende B eingemauert oder unveränderlich befestigt, so geht der obere Endpunct A der Achsenschichte durch die lothrechte Belastung Q, sobald eine Biegung des Stabes eintritt, aus der Verticalen BE heraus und man findet für die entstehende Curve AMB, wenn man die Verticale AD zur Abscissenachse nimmt, für irgend einen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ setzt und wieder die Länge AMB durch l, den Abstand AD durch a und den Pfeil BD durch δ bezeichnet, genau so wie in Nr. **101.**, da sich im Gange der Entwickelung nichts ändert, die Gleichung:

$$y = \delta \, Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right).$$

Diese Gleichung enthält bereits wieder die Bedingung, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss. Da aber für $x = a$, $y = \delta$ sein soll, so folgt:

$$Sin\left(a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}\right) = 1, \text{ oder } a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ und } Q = \frac{(2n+1)^2}{4a^2}\pi^2\varepsilon,$$

wobei n Null oder irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet. Die Fig. 75 entspricht dem Falle, in welchem $n = 0$ ist. Dafür erhält wieder a den kleinsten Werth, und zwar ist $a = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{Q}}$ und $Q = \frac{\pi^2 \varepsilon}{4a^2}$, und da wieder, sobald eine Biegung eintritt, $a < l$ ist, so folgt, dass dafür $Q > \frac{\pi^2 \varepsilon}{4l^2}$ sein muss.

Dieses Resultat, mit jenem in Nr. **106.** verglichen, zeigt, dass ein prismatischer Stab, welcher sich in verticaler Lage mit seinem unteren Ende bloss aufstützt, viermal so viel tragen kann, ohne gebogen zu werden, als wenn derselbe am unteren Ende befestigt ist.

Wir übergehen hier die weiteren Bestimmungen von ϱ, δ, l, sowie die den in Nr. **105**. analogen Werthe von $\frac{T_a}{\varepsilon}$ und $\frac{T_r}{\varepsilon}$, indem diese ganz eben so leicht, wie in den vorhergehenden Nummern, für den vorigen Fall gefunden werden.

e) *Widerstand der Körper gegen Drehung (Torsion).*

108. Zur Aufstellung der Theorie des Widerstandes fester elastischer Körper, gegen Torsion, die übrigens noch keineswegs ganz vollendet ist, muss man ähnliche Hypothesen, wie bei dem Widerstande gegen Biegung aufstellen, Hypothesen, welche mehr oder weniger mit der Wahrheit übereinstimmen.

Es sei nun, um eine solche Theorie zu entwickeln, BD (Fig. 76) ein an dem einen Ende ED eingemauerter oder auf sonstige Weise unveränderlich befestigter prismatischer Körper, mit dessen freiem Ende rechtwinkelig ein Hebel CF verbunden ist, auf welchen im Puncte F normal eine Kraft P wirkt, die eine Drehung des prismatischen Körpers um dessen Achse OC zu bewirken strebt.

Diess vorausgesetzt, wird in Folge der dadurch hervorgebrachten grösseren oder geringeren Verdrehung der Längenfasern, welche immer wieder als innerhalb der Elasticitätsgrenze liegend angenommen wird, der Durchmesser AB an der freien Endfläche in die Lage $A'B'$, jener ab irgend eines anderen normalen Querschnittes in die Lage $a'b'$ u. s. w. gekommen sein, während der zu AB parallele Durchmesser DE am befestigten Ende keine Verdrehung mehr erlitten hat, so dass man also annehmen kann, dass die Torsionswinkel aca' gegen das freie Ende zu allmählich zunehmen, und überhaupt der Entfernung der betreffenden Querschnitte vom befestigten Ende proportional sind. Setzt man den Drehungswinkel im Querschnitt der freien Endfläche $ACA' = i$, jenen im Querschnitt $adbd'$, dessen Abstand vom befestigten Ende $Oc = x$ ist, $aca' = i'$; so ist, wie eben bemerkt, nicht nur $i' < i$, sondern auch $i : i' = l : x$, woraus sofort $i' = \frac{x}{l} i$ folgt, wenn man nämlich die Länge des Prisma $OC = l$ setzt.

Lässt man x in $x+n$ übergehen, wobei n ein beliebiges Increment bezeichnen soll, und denkt sich in der Entfernung $x+n$ von O abermals einen normalen Querschnitt, sowie in diesem den Drehungswinkel $= i''$; so hat man nach der vorigen Relation auch $i'' = \frac{x+n}{l} i$, folglich ist die Differenz zwischen i'' und i' d. i.:

$$i'' - i' = \frac{n}{l} i.$$

Es ist nun einleuchtend, dass Molecüle, welche sich vor der Torsion in zwei aufeinander folgenden Querschnitten berührten, durch die Verdrehung um eine gewisse Grösse von einander entfernt oder verschoben haben, welche man als proportional annehmen kann, 1tens der Entfernung dieser Molecüle von der Längenachse OC des prismatischen Körpers, und 2tens der Differenz $\frac{n}{l} i$ der von jedem Halbmesser in den genannten beiden aufeinander folgenden Querschnitten durchlaufenen Winkeln i' und i''. Setzt man, wie bereits in der Einleitung bemerkt, die Torsion als innerhalb der Elasticitätsgrenze liegend voraus, so kann man auch annehmen, dass die Widerstandskräfte, welche in den Molecülen durch diese Verdrehung hervorgerufen werden, diesen Verdrehungen selbst proportional sind.

109. Es sei nun $CF = R$ die Länge des Hebels, an dessem Endpuncte die Kraft P wirkt, ferner in dem vom befestigten Ende um die Grösse $Oc = x$ abstehenden Querschnitt $ad'bd$ (Fig. 77) der Winkel eines beliebigen Leitstrahles cM mit der festen Geraden ab, d. i. W. $acM = \alpha$, so entsteht, wenn man auf cM in einer beliebigen Entfernung $cm = u$ einen Punct m annimmt, hierauf α um $d\alpha$ und u um du wachsen lässt, ein Flächenelement mn' des genannten Querschnittes, dessen Flächeninhalt $= u\, d\alpha\, du$ ist, und dessen Torsions-Widerstand sich nunmehr nach der vorigen Hypothese oder den gemachten Voraussetzungen leicht bestimmen lässt, wenn man zu den letzteren noch jene hinzufügt, dass dieser Widerstand auch noch der Grösse dieser Fläche mn' proportional ist.

Bezeichnet man nämlich den Torsions-Widerstand in diesem Querschnitt für eine Fläche $= 1$, deren Abstand von der Längenachse OC (Fig. 76) oder dem Drehungspuncte c (Fig. 77) ebenfalls $= 1$ ist, durch p; so lässt sich der Torsions-Widerstand des genannten Flächenelementes mn', welches von c um u absteht, sofort durch $p.u.u\,d\alpha\,du.\frac{n}{l}i = pn\frac{i}{l}u^2 d\alpha\,du$, oder wenn man den constanten, jeder Materie eigenthümlichen Coefficienten, welcher nur durch Versuche bestimmt werden kann, d. i. $pn = N$ setzt, durch $N\frac{i}{l}u^2 d\alpha\,du$ ausdrücken.

Dieser Widerstand bildet eine auf den Radiusvector u normal, und der Drehung entgegengesetzt wirkende Kraft, deren Componenten beziehungsweise parallel und senkrecht zu der den Winkel α bestimmenden festen Geraden ab sind:

$$N\frac{i}{l}u^2 d\alpha\,du\,Sin\,\alpha \quad \text{und} \quad N\frac{i}{l}u^2 d\alpha\,du\,Cos\,\alpha$$

und deren stat. Moment in Beziehung auf den Drehungspunct c durch $N\frac{i}{l}u^3 d\alpha\,du$ ausgedrückt wird.

Soll nun das Gleichgewicht zwischen der äusseren Kraft R und den durch die Torsion hervorgerufenen Molecularkräften stattfinden, so muss erstlich in jedem Querschnitt des prismatischen Körpers das Gleichgewicht zwischen den eben genannten Componenten bestehen, und ferner auch das statische Moment des Widerstandes auf den Drehpunct c bezogen, dem Momente der Kraft R gleich sein. Man erhält daher für das Gleichgewicht die 3 Bedingungs-Gleichungen [**20.**, Anmerkung 1, Relat. (l)]:

$$\frac{Ni}{l}\int_0^{2\pi} Sin\,\alpha\,d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^2 du = 0, \quad \frac{Ni}{l}\int_0^{2\pi} Cos\,\alpha\,d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^2 du = 0$$

$$\text{und} \qquad PR = \frac{Ni}{l}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3 du = \frac{Ni}{4l}\int_0^{2\pi} \overline{f(\alpha)}^4 d\alpha,$$

wenn man nämlich die Polargleichung der Umfangscurve $ad'bd$ des prismatischen Körpers durch $u = f(\alpha)$ bezeichnet.

110. Da, wie man leicht sieht, $x = u\,Cos\,\alpha$ und $y = u\,Sin\,\alpha$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Flächenelementes $u\,d\alpha\,du$ sind, so erhalten, wenn man dieses Element mit $dx\,dy$ bezeichnet, die beiden ersten der vorigen Gleichungen die Form $0 = \int\int x\,dx\,dy$ und $0 = \int\int y\,dx\,dy$, und zeigen (vergl. die Gleichungen in Nr. **27.**, Anmerkung für $X = 0$ und $Y = 0$), dass der Drehungspunct c in Fig. 77 zugleich der S c h w e r p u n c t des Querschnittes $adbd'$ ist, folglich die Gerade OC (Fig. 76), welche die Schwerpuncte sämmtlicher Querschnitte des Prisma verbindet, bei der Torsion die Umdrehungsachse bildet.

Die letzte oder 3te der erwähnten Gleichungen dient zur Bestimmung des Drehungswinkels i; was dabei die constante Grösse N betrifft, so wird dieselbe **Modul der Elasticität für Torsion**, öfter auch der **drehende Elasticitäts-Coefficient** genannt.

Anmerkung. Es versteht sich übrigens von selbst, dass hier i in Theilen des Halbmessers zu verstehen, d. i. die Zahl zu setzen ist, welche für den Halbmesser $= 1$ die Länge des Bogens angibt, welcher dem Torsionswinkel entspricht. Bezeichnet man daher den entsprechenden Torsionswinkel in Gradmass ausgedrückt durch (i), so muss man $i = \frac{\pi}{180}(i)$, oder $(i) = \frac{180}{\pi} i$ setzen.

111. Ist nun z. B. der Querschnitt des Prisma ein **Kreis** vom Halbmesser r, der Körper also ein gewöhnlicher **Cylinder**, so ist die Gleichung der Umfangscurve: $f(\alpha) = r = const.$, folglich geht die 3te Gleichung in **109.** für diesen Fall über in jene:

$$PR = \frac{Ni}{4l}\int_0^{2\pi} r^4 \,\mathrm{d}\alpha = \frac{Ni}{4l} r^4 \cdot 2\pi,$$

so dass also $\quad PR = \frac{1}{2}\pi N \frac{i}{l} r^4, \quad$ oder $\quad i = \frac{2PRl}{\pi N r^4}$

ist, d. h. der Drehungswinkel ist der 4ten Potenz des Cylinder-Halbmessers umgekehrt proportional.

112. Ist der Querschnitt ein **Quadrat** von der Seite a, so setze man den Winkel des Radiusvector $CM = u$ (Fig. 78), nämlich W. $ACM = \alpha$, dann ist die Gleichung der Umfangsseite AD, wegen $AC = CM \, Cos\,\alpha$ sofort $f(\alpha) = u = \frac{\frac{1}{2}a}{Cos\,\alpha} = \frac{a}{2\,Cos\,\alpha}$.

Nimmt man das Integrale der obigen 3ten Gleichung für eines der 8 congruenten Dreiecke, wie ACD, so erhält man für eines dieser Dreiecke das Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3 \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \overline{f(\alpha)}^4 \mathrm{d}\alpha, \text{ d. i. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4}{16\,Cos\,\alpha^4}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{a^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4}.$$

Nun ist aber [Comp. §. 838, (10)]:

$$\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4} = \frac{Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha^3} + \frac{2\,Sin\,\alpha}{3\,Cos\,\alpha},$$

folglich $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ und daher $\frac{a^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{Cos\,\alpha^4} = \frac{a^4}{12}$.

Wird nun für den ganzen quadratischen Querschnitt dieses Integral achtmal genommen, so erhält man aus der genannten 3ten Gleichung in Nr. **109.**:

$$PR = 8 \cdot \frac{Ni}{4l} \cdot \frac{a^4}{12} = \frac{1}{6} \frac{Na^4 i}{l} \text{ und daraus } i = \frac{6PRl}{Na^4};$$

es ist also hier der Drehungswinkel der 4ten Potenz der Seite des Quadrates umgekehrt proportional.

Anmerkung. So lange Körper von ähnlichen Querschnitten mit einander verglichen werden, werden auch die obigen Sätze durch die Erfahrung bestätigt. Man findet nämlich für den Coefficienten N nahezu immer denselben Mittelwerth aus den Versuchen mit Prismen von quadratförmigem Querschnitt; ebenso auch wieder einerlei Werthe aus den Versuchen mit cylinderischen Stangen oder Prismen. Allein diese letzteren weichen von den ersteren ab, und werden immer kleiner als diese letzteren gefunden.

Für den Fall eines rechteckigen Querschnittes haben die Untersuchungen gezeigt, dass die oben zum Grunde gelegte Hypothese, nach welcher der Widerstand eines Flächenelementes dem Abstande desselben von der Drehungsachse proportional ist, nicht mehr genau mit der Wahrheit übereinstimmt. Nach strengeren Methoden fand Cauchy (*Exercices de mathématiques 4e année. pag. 59*) für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b den Ausdruck:

$$PR = \frac{1}{3} N \frac{i}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Bei Voraussetzung von vollkommen homogenen, in jedem Sinne gleichen Widerstand leistenden Körpern findet man auch zwischen den beiden Elasticitäts-Coefficienten N und E (Nr. **52.**) die Relation $N = \frac{2}{5} E$.

113. Um endlich auch den durch Torsion herbeigeführten Bruch zu behandeln, muss man wieder bemerken, dass jene Fasern, welche von der Drehungsachse am weitesten abstehen, zuerst die Elasticitätsgrenze überschreiten und der prismatische Körper auch an dieser Stelle zuerst zerrissen oder gebrochen wird. Bezeichnet man daher diesen grössten Abstand wieder durch c, so ist die transversale Verschiebung zweier Puncte dieser betreffenden Faser (wie in Nr. **109.**) der Grösse $\frac{i}{l} c$ proportional, und wenn man, wie vorhin, den Widerstand der Molecüle gegen Torsion, dieser Verschiebung proportional annimmt, so muss, sobald diese Verschiebung eine gewisse Grenze erreicht oder überschreitet, auch die Elasticitätsgrenze des Körpers, oder dessen Zerreissungsgrenze erreicht oder überschritten sein.

114. Bezeichnet sonach T den Widerstand der Fasern von der Flächeneinheit und im Abstande c von der Drehachse, im

Augenblicke des Zerreissens derselben, oder vielmehr in dem Augenblicke, in welchem die Elasticitätsgrenze erreicht wird, so ist dieser Widerstand für eine Faser vom Querschnitt $u\,d\alpha\,du$ und im Abstande u von dieser Achse sofort $= \frac{T}{c} u . u\,d\alpha\,du = \frac{T}{c} u^2\,d\alpha\,du$, folglich das Moment desselben in Beziehung auf die Drehungsachse $= \frac{T}{c} u^3\,d\alpha\,du$.

Man hat daher nach der obigen 3ten Gleichung in Nr. **109**. für das Gleichgewicht die Relation:

$$PR = \frac{T}{c} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3\,du = \frac{T}{4c} \int_0^{2\pi} \overline{f(\alpha)}^4\,d\alpha.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit jenem eben genannten in Nr. **109**. zeigt, dass sich die Werthe der Bruchmomente aus jenen der Elasticitätsmomente ganz einfach dadurch ableiten lassen, dass man in diesen letzteren $\frac{T}{c}$ statt $\frac{Ni}{l}$ setzt; dabei wird T, wenn es sich bloss um die Drehung bis zur Elasticitätsgrenze handelt, der drehende Tragfähigkeits-Coefficient, wenn es sich aber um ein wirkliches Abdrehen handelt, der drehende Festigkeits-Coefficient genannt.

115. Nach der eben gemachten Bemerkung erhält man also für einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt und vom Halbmesser r, wegen $c = r$, aus **111**:

$$PR = \tfrac{1}{2}\pi \frac{T}{r} r^4 = \tfrac{1}{2}\pi T r^3.$$

Ebenso für ein Prisma, dessen Querschnitt ein Quadrat von der Seite a ist, wegen $c = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, aus Nr. **112**:

$$PR = \tfrac{1}{6} \frac{2T}{a\sqrt{2}} a^4 = \tfrac{1}{3} T \frac{a^3}{\sqrt{2}}.$$

Anmerkung 1. Wie man sieht, ist das Moment PR, welches das Abdrehen des Körpers bewirkt, von der Länge des letzteren unabhängig; nur wird der Körper, wenn er länger ist, vorher um einen grösseren Winkel gedreht.

Anmerkung 2. Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b findet Navier den Ausdruck:

$$PR = \tfrac{1}{3} T \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zugleich findet Navier, indem er den Bruch als dadurch herbeigeführt annimmt, dass ein Längenelement des Körpers in einem höheren Grade ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, als es die Natur des Körpers verträgt und in Folge dessen ein Zerreissen oder Zerquetschen der einzelnen Theile stattfindet, sowie in der Voraussetzung, dass wenn homogene und in jedem Sinne gleichen Widerstand leistende Körper angenommen werden, nothwendig ein bestimmtes Verhältniss zwischen den beiden Constanten T und F (Nr. **54**.) bestehen müsse, sofort: $T = \frac{4}{5} F$.

Dicke der Gefässwände.

(§. 159.)

116. Ist $AB = 2r$ (Fig. 80) der lichte Durchmesser einer cylinderischen Röhre von der Länge l und einer im Vergleiche zu r sehr dünnen Wand δ, und p der radicale Druck auf die Flächeneinheit der inneren Wand; so nehme man als einfachste Hypothese an, dass die Röhre zuletzt, wenn der Druck zu gross wird, nach der Länge in zwei Halbcylinder, d. i. nach dem Durchmesser AB in zwei Theile zerrissen werde. Diess vorausgesetzt, zerlege man zur Bestimmung der Kräfte, welche diese Trennung bewirken, die auf irgend einen Punct M des inneren Umfanges eines Querschnittes nach dem Radius CM wirkende Kraft p, wofür W. $ACM = \alpha$ sein mag, in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte p' und p'', wovon die erstere senkrecht auf AB, die letztere daher damit parallel ist; so hat man $p' = p\, Sin\, \alpha$ und $p'' = p\, Cos\, \alpha$.

Lässt man α um $d\alpha$ zunehmen, so ist der auf den unendlich schmalen, mit der Achse parallelen Streifen vom Flächeninhalt $l\, r\, d\alpha$ senkrecht gegen AB ausgeübte Druck $= l\, r\, d\alpha \,.\, p\, Sin\, \alpha$, folglich der gesammte Druck auf die halbe innere Cylinderfläche

$$AMB = r\, l p \int_0^\pi Sin\, \alpha\, d\alpha = 2\, r\, l p,$$

also gerade so gross, als ob die Kraft senkrecht auf die diametrale Ebene des inneren Cylinders, als Projection der inneren Mantelfläche auf diese Ebene wirksam wäre.

Ebenso gross ist auch der auf die zweite Hälfte ANB der Cylinderfläche senkrecht gegen AB, aber dem vorigen entgegengesetzte Druck, welcher mit dem ersteren zusammen die Trennung oder das Zerreissen bewirkt.

Was die mit AB parallel wirksamen Componenten p'' betrifft, so heben sich diese wieder in den beiden Halbcylindern, welche durch einen auf AB senkrechten Durchmesser oder einer durch diesen und die Achse des Cylinders gelegten Ebene getrennt werden, gegenseitig auf, und haben auf das Zerreissen des Cylinders nach der angenommenen Richtung keinen Einfluss.

Ist nun F_a die absolute Festigkeit des Materiales, woraus die Röhre oder der hohle Cylinder besteht, so hat, da durch die angenommene Trennung die Fläche $2l\delta$ abgerissen werden muss, die obige Kraft, als Resultirende der Componenten p', den Widerstand $2l\delta F_a$ zu überwinden, und es ist sonach für das Gleichgewicht: $(\alpha)\ldots 2rlp = 2l\delta F_a$, folglich die gesuchte Wanddicke, bei welcher die Röhre der Länge nach eben noch zerrissen wird:

$$\delta = \frac{rp}{F_a} \ldots (1).$$

Ein Längenriss nach einer anderen als diametralen Ebene, z. B. nach ab, ist bei einer homogenen, durchaus einerlei Festigkeit besitzenden Röhre aus dem Grunde nicht möglich, weil die hierzu verwendete Kraft bloss der entsprechenden Sehne ab proportional, also kleiner als AB ist.

Anmerkung. Wie man sieht, hat die Länge des Rohres auf dessen Festigkeit keinen Einfluss und wird diess auch durch die Versuche bestätiget. Allein nicht so ist es bei Röhren, welche einem äusseren Drucke, wie z. B. die Feuerrohre der Tubular- und anderer Dampfkessel zu widerstehen haben; in diesem Falle steht die Festigkeit nicht bloss wie im vorigen Falle im umgekehrten Verhältnisse mit dem Durchmesser, sondern nach den neuesten sehr ausführlichen Versuchen von W. Fairbairn, zugleich auch im umgekehrten Verhältnisse mit der Länge des Rohres.

Auf Grundlage dieser Versuche mit cylinderischen Röhren aus Eisenblech, deren Durchmesser von 4 bis 12 Zoll, Länge von $1\frac{1}{2}$ bis $9\frac{1}{2}$ Fuss und Blechdicke von $\frac{1}{2}$ bis 3 Linien variirte, leitete Fairbairn folgende Formel ab:

$$P = 37{\cdot}694 \frac{k^{2{\cdot}19}}{LD},$$

in welcher P den Druck auf den Quadratcentimeter in Kilogrammen bezeichnet, durch welchen die Röhre vom Durchmesser D Centimeter, der Länge L Meter, und Blechdicke k Millimeter bei einer gleichförmigen von Aussen nach Innen wirkenden Pressung zerdrückt wird.

Auf das W. Mass und Gewicht reducirt, erhält diese Gleichung die Form:

$$P = 723880 \frac{k^{2{\cdot}19}}{LD},$$

in welcher P die zerdrückende Kraft in Pfunden auf den Quadratzoll bezeichnet und L in Fussen, D und k dagegen in Zollen zu substituiren sind.

So würde z. B. ein Rohr von 2 Zoll Durchmesser, 10 Fuss Länge und 1 Linie Blechdicke nach dieser Formel schon durch eine Kraft zerdrückt, welche auf den Quadratzoll gerechnet $156\frac{3}{4}$ Pfund, oder etwas mehr als 12 Atmosphären beträgt. Nach denselben Versuchen ist für eine im Rohre von innen nach aussen wirkende Pressung die zerreissende Kraft P' auf den W. Quadratzoll in Pfunden, wenn wieder k und D in Zollen genommen werden: $$P' = 52000 \frac{k}{D},$$ so dass dabei die absolute Festigkeit der zusammengenieteten Röhren in runder Zahl nur $\frac{52000}{2} = 26000$ Pfund beträgt.

Die Vergleichung dieses Werthes von P' mit dem vorigen P gibt sonach:
$$P' = \cdot 0718 \frac{L}{k^{1 \cdot 19}} P.$$
Für das hier gewählte Beispiel wäre daher:
$$P' = \cdot 0718 \times 10 \times 12^{1 \cdot 19} P = 13 \cdot 8 P.$$
Dasselbe Rohr würde nämlich durch einen im Innern wirkenden Dampfdruck erst bei einer Spannung von $13 \cdot 8 \times 12 = 165 \cdot 6$ Atmosphären zerrissen werden.

117. Ist ein hohler Cylinder, dessen innerer und äusserer Halbmesser r und R sind, an beiden Grundflächen geschlossen, und untersucht man die Wanddicke δ', welche er haben muss, um von derselben Kraft so abgerissen zu werden, dass die beiden Theile durch eine Ebene senkrecht auf dessen Achse getrennt werden; so muss ein Kreisring vom Flächeninhalt $(R^2 - r^2)\pi$ abgerissen werden. Da nun mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung die zerreissende Kraft, in der Richtung der Cylinderachse $= p r^2 \pi$ ist, so hat man für das Gleichgewicht:
$$p r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi F_a, \text{ oder } p r^2 = \delta'(R + r) F_a$$
und daraus:
$$\delta' = \frac{rp}{F_a} \frac{r}{R + r}.$$

Da nun $\frac{r}{R+r} < 1$, so ist auch, wenn man diesen Ausdruck mit dem vorigen (1) vergleicht, $\delta' < \delta$, d. h. der Cylinder wird durch dieselbe Kraft bei der Wanddicke δ nur nach der Länge oder parallel, keineswegs aber nach einer Ebene senkrecht auf die Achse zerrissen werden können.

118. Ist $AC = BC = r$ (Fig. 81) der innere Halbmesser einer hohlen Kugel und nimmt man, mit Beibehaltung aller übrigen Bezeichnungen der vorigen Nr., an, dass die Kugel nach der diametralen Ebene $ADBE$ abreisst, oder in zwei Halbkugeln getrennt wird, so hat man für die auf einen dem Winkel α entsprechenden Parallelkreis senkrecht gegen diese Ebene $ADBE$

gerichteten Seitenkräfte auf die Flächeneinheit bezogen, den Ausdruck $q\, Sin\, \alpha$, folglich ist der auf die unendlich schmale Zone $2y\pi \,.\, r\, d\alpha$, welche entsteht, wenn man durch den Punct m, wofür $Mm = d\alpha$ einen zweiten Parallelkreis legt, nach der Richtung senkrecht auf $ADBE$ ausgeübte Druck $= 2y\pi r\, d\alpha \,.\, q\, Sin\, \alpha = 2r\pi q y\, Sin\, \alpha\, d\alpha$, oder wegen

$$y = PM = r\, Cos\, \alpha, \text{ auch } = 2r^2\pi q\, Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha\, d\alpha.$$

Es ist daher der gesammte auf die Halbkugel $ADBEF$ senkrecht gegen die genannte Ebene $ADBE$ ausgeübte Druck

$= 2r^2\pi q \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha\, d\alpha$, oder wegen $\int Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2} Sin^2 \alpha$, auch $= 2r^2\pi q \,.\, \frac{1}{2} = r^2\pi q$, d. h. gerade so gross, als ob der Druck q senkrecht gegen die Projection der halben Kugelfläche, d. i. gegen die Kreisfläche $ADBE$ stattfände.

Da nun nach der angenommenen Hypothese ein Streifen oder eine Fläche $2r\pi\delta$ abgerissen wird, so muss $2r\pi\delta F_a = r^2\pi q$, also

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{rq}{F_a} \ldots (2)$$

sein.

119. Ist die Gefässwand bedeutend dicker, so ist die Spannung an der äusseren Umfangsschichte des hohlen Cylinders nicht mehr, wie vorhin stillschweigend vorausgesetzt wurde, jener der inneren Wand gleich, sondern kleiner als diese. Um die Rechnung für diesen Fall durchzuführen, sei (Fig. 82) $Ca = r$ der innere und $CA = R$ der äussere Halbmesser des hohlen Cylinders von der Länge l. Nimmt man $CP = x$ und $Cp = x + dx$ und zieht mit diesen Halbmessern aus C die concentrischen Kreise, so bildet der dadurch entstehende unendlich schmale Kreisring den Querschnitt eines hohlen Cylinders vom Halbmesser x und der Wanddicke dx, auf welche die obige Relation (1) in Nr. **116.** volle Anwendung findet.

Dehnt sich nun r durch den Druck auf die innere Wand um $\varDelta r$, und, weil sich dieser Druck durch das Aufeinanderwirken der concentrischen Ringe oder Schichten nach aussen zu fortpflanzt, x um $\varDelta x$ aus, so muss, da das zwischen a und P liegende Kreisband nach der Ausdehnung dieselbe Breite $x - r$, wie vor der Ausdehnung behält, sofort:

$$(x^2 - r^2)\pi = [(x + \varDelta x)^2 - (r + \varDelta r)^2]\pi,$$

oder wenn man die 2te Potenz von $\varDelta x$ und $\varDelta r$ auslässt:

$$\varDelta x = \frac{r \varDelta r}{x} \ldots (n) \text{ (d. i. } \varDelta x : \varDelta r = r : x)$$

sein.

Ist ferner F_a die auf die Flächeneinheit der inneren dem Halbmesser r entsprechenden Cylinderwand stattfindende Spannung, und F'_a jene für den Cylinder vom Halbmesser x, so hat man, wenn Kürze halber $2 r \pi = \lambda$ und $2 x \pi = \lambda'$ gesetzt wird, nach der Relation (2) in Nr. **53.**, für die Ausdehnung der betreffenden unendlich dünnen concentrischen Schichten:

$$\varDelta \lambda = \frac{F_a \lambda}{E} \text{ und } \varDelta \lambda' = \frac{F'_a \lambda'}{E},$$

also auch: $\frac{\varDelta \lambda}{\lambda} : \frac{\varDelta \lambda'}{\lambda'} = F_a : F'_a \ldots (s)$.

Nach der Ausdehnung ist $\lambda + \varDelta \lambda = 2(r + \varDelta r)\pi$ und $\lambda' + \varDelta \lambda' = 2(x + \varDelta x)\pi$, folglich $\varDelta \lambda = 2 \pi \varDelta r$ und $\varDelta \lambda' = 2 \pi \varDelta x$, oder $\frac{\varDelta \lambda}{\lambda} = \frac{2 \pi \varDelta r}{2 r \pi} = \frac{\varDelta r}{r}$ und ebenso $\frac{\varDelta \lambda'}{\lambda'} = \frac{\varDelta x}{x}$.

Die Vergleichung dieser Quotienten mit den vorigen in (*s*) gibt daher:

$$F_a : F'_a = \frac{\varDelta r}{r} : \frac{\varDelta x}{x},$$

oder mit Rücksicht auf die Relation (*n*), auch $F_a : F'_a = \frac{\varDelta r}{r} : \frac{r \varDelta r}{x^2} = x^2 : r^2$, woraus sofort $F'_a = \frac{r^2}{x^2} F_a$ folgt.

Nun ist aber $F'_a dx$ die Spannung der unendlich dünnen concentrischen Schichte vom Halbmesser x, folglich:

$$\int_r^R F'_a dx = \int_r^R r^2 F_a \frac{dx}{x^2} = r^2 F_a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \left(\frac{r(R-r)}{R}\right) F_a$$

jene des ganzen Kreisringes von der Breite $R - r$, oder es ist, wenn man auch hier die Wanddicke $R - r$ des Cylinders durch δ bezeichnet, $\frac{r \delta}{R} F_a$ die Kraft, mit welcher der Cylinder bei einer rechteckigen Querschnittfläche von der Länge 1 und Breite δ dem Zerreissen widersteht. Da aber auch hier die Fläche $2 l \delta$ abgerissen werden muss, so hat man nach der obigen Relat. (α) in Nr. **116.**: $2 r l p = 2 l \frac{r \delta}{R} F_a$ und daraus für die gesuchte Wanddicke:

$$\delta = \frac{R p}{F_a} \ldots (3),$$

welcher Ausdruck von dem obigen in (1) nur dadurch abweicht, dass R statt r steht.

Um auch hier wieder den inneren Halbmesser r einzuführen, hat man, wegen $R = r + \delta$ sofort $\delta F_a = (r + \delta) p$ und daraus:

$$\delta = \frac{rp}{F_a - p} \ldots . (4).$$

Auf gleiche Weise erhält man auch für eine hohle Kugel:

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{rp}{F_a - p} \ldots . (5).$$

Anmerkung. Wie aus diesen letzteren Formeln (4) und (5) hervorgeht, so muss p oder der Druck auf die innere Gefässwand per Flächeneinheit immer kleiner als die absolute Festigkeit F_a des betreffenden Materiales sein, weil sonst δ unendlich gross oder negativ würde, was beides absurd wäre, zum Beweis, dass das Gefäss bei gar keiner möglichen Wanddicke dem inneren Drucke widerstehen könnte.

Wichtig ist diese Bemerkung in der Anwendung bei den gusseisernen Presscylindern der hydraulischen Pressen. Zugleich muss man bei der Annahme des Werthes von F_a für Gusseisen den Umstand mit berücksichtigen, dass bei einer bedeutenden Wanddicke $R - r$ der innere Druck etwas seitlich, d. i. nicht so wirkt, als ob ein Prisma durch eine nach der Achse desselben wirkende Kraft, sondern durch eine Kraft abgerissen würde, welche mehr oder weniger nach einer Seitenfläche in der Richtung einer Längenkante wirksam ist. Hodgkinson hat nun durch seine Versuche gefunden, dass wenn ein gusseisernes Prisma im ersteren Falle mit 15000 Pfund per Wr. Quadratzoll abgerissen wurde, dasselbe im letzteren Falle (wobei offenbar ein Theil der Kraft auf den Bruch wirksam wird) nur einer Kraft von 5110 Pfund widerstehen konnte. Wenn nun auch hier dieser extreme Fall nicht eintritt, so darf dieser Umstand dennoch nicht ganz übersehen werden.

Englische Ingenieure nehmen in diesem Falle, nämlich bei hydraulischen Pressen, den inneren Druck im Maximum mit 7400 Pfund auf den Wr. Quadratzoll, also nahe mit der halben absoluten Festigkeit des Gusseisens an.