Sechstes Capitel.

Vermessung der Terrains von größerer Ausdehnung.

138. — Triangulirung. In den vorhergehenden Capiteln ist nur von Flächen gehandelt worden, die 300 Hectaren nicht übersteigen, und man wird sich erinnern, daß man Behufs deren Vermessung sie in ein Polygon oder in ein System von Linien einschloß, und bei der Meßoperation immer die Kette vorzugsweise brauchte. Da bei dieser Messungsmethode zuweilen viel von einer Richtlinie oder der Lage einer Polygonseite gegen die andern abhängt, so kommt es sehr auf die Bedingungen an, unter welchen die Linien gelegt werden.

Man wird dann im Allgemeinen veranlaßt, gewisse Theile der Polygongrenzen abzukürzen, andere zu verlängern, um die ganze Arbeit in Uebereinstimmung zu bringen; nichts berechtigt aber zu der Annahme, daß die Correctionen, welchen man die Linien unterwirft, rationel sind. Andern Theils hängt die Bestimmung der Ecken der Figur auch von der Genauigkeit der Winkel ab, und die Größe dieser kann in gewissen Fällen ebenfalls ansehnliche Irrthümer herbeiführen; denn damit die Winkel die nöthige Schärfe haben, müssen die einschließenden Seiten immer ziemlich gleiche Länge haben, die Beobachtungen müssen stets auf die letzten Jalons gemacht werden und den Polygonen, die den Theil des zu messenden Terrains umschließen, muß die möglichst kleinste Anzahl Seiten gegeben werden. Diese Bedingungen können nur selten erfüllt werden, weil sich die locale Gestaltung fast immer dagegen sträubt. Wiewohl wir empfohlen haben, bei dem Abstecken der Polygone sich nicht ängstlich an die Nähe der Grenzen des Grundstücks zu binden, und lieber durch secundäre Operationen auf diese Grenzen zurückzukommen, so ist man doch oft genöthigt, von dieser Vorschrift abzugehen, um die mühsame Arbeit auf dem Felde zu kürzen; dann aber müssen die Seiten des Polygons vermehrt werden, damit entsteht eine größere Anzahl Winkel, folglich mehr Rechnungselemente, und sonach mehr Ursachen und Chancen zu Fehlern.

Es ist klar, daß man bei immer größerer Ausdehnung des Terrains, auch mehr und mehr die Differenzen zu fürchten hat, die aus dieser Procedur entspringen, und auf einen Grenzpunct stoßen muß, wo alle Resultate nichts als Annäherungen werden. Diesen Irrungen entgeht man, und gelangt dazu, den Vermessungsoperationen die nöthige Verbindung mit allen Correctionen zu geben, deren sie empfänglich sind, wenn man eine Triangulirung vorausschickt.

Eine Triangulirung hat sonach den Zweck, der Vermessung von Flächen Hauptgrundlinien zu verschaffen, woraus sich die verschiedenen Theile eines Systems von Operationen, deren Ziel die Vermessung ist, stüzzen können.

139. — Es kann hier nicht die Sprache von einem Dreiecknetz sein, wie solches bei Landesvermessungen mit Zuziehung astronomischer Bestimmungen gelegt wird, wo z. B. die Dreiecksseiten gegen 30000 bis 50000 Toisen (gegen 60000 — 100000 Meter) genommen werden.

Nach der Instruction für die topographischen Arbeiten des preußischen Generalstabes sollen die Seiten nicht unter 15000 und nicht über 25000 (gegen 56 — 94000 Meter) preußische Ruthen enthalten.

Ein solches Netz heißt dann ein astronomisches Dreiecksnetz und die Winkelpuncte desselben sind Puncte erster Ordnung in Beziehung auf anderweitige untergeordnete Triangulirungen. Es bedarf nicht der Erwähnung, daß bei weniger großen Landstrichen die ersten (trigonometrischen) Triangulirungen ebenfalls erster Ordnung sein können, wenn sie als Grundlage eines zweiten Systems von Netzen betrachtet werden.

Bei regelmäßig geordneter topographischer Vermessung eines Landes werden folgende Netze der endlichen Detailmessung unterlegt.

1) zwei trigonometrische Netze, und zwar:

a. das große Hauptnetz durch astronomisch und trigonometrisch bestimmte, 15000 bis 25000 Ruthen entfernt liegende Puncte;

b. das kleinere oder Secundarnetz, in der Art, daß von diesem auf eine Quadratmeile womöglich drei Puncte fallen.

2) Zwei graphische Netze, und zwar

c. das graphische Hauptnetz, bei welchem die Dreieckspuncte 250 bis 400 Ruthen;

d. das graphische Secondär- oder Sectionsnetz, wobei die Dreieckspuncte 100 bis 150 Ruthen entfernt liegen.

An das letztere schließt sich unmittelbar die Detailvermessung an.

Zu Flächen von einigen Quadratmeilen bedarf es nur der drei letztern Triangulirungen und so herab bis man bei kleinern Districten nur der einzigen unter d nöthig hat. Ueber die Länge der Dreiecksseiten werden noch speciellere Bestimmungen erfolgen.

Die Aufstellung eines Hauptnetzes ist eine von allen Geometern und geübten Practikern als unerläßlich erkannte Operation; sie ist es im flachen wie im gebirgigen Lande, in bewaldeten wie in offenen Gegenden.

Weil es aber eine sehr delicate Arbeit ist, die Kenntnisse und Sorgfalt verlangt und ziemlich ermüdend ist, so entschließen sich nur wenig Geometer dazu. Wir scheuen uns nicht, zu bemerken, daß deren Nutzen von einigen Geometern zwar bestritten wird, die Vernunftgründe aber, die sie für ihre Behauptung geltend machen, mehr Unerfahrenheit oder Furcht, eine nicht gemeine Beschwerde übernehmen zu müssen, aussprechen, als innere Ueberzeugung, die Frucht einer großen Anzahl von Beobachtungen.

Die Benennung „Triangulirung“ erklärt hinreichend die Natur der Flächen, welche der Vermessung zu Grunde gelegt werden. Im Allgemeinen kannte man früher nur ein Verfahren dabei; es bestand in der Bildung eines Dreiecks, von dem man eine Seite maß und die drei Winkel beobachtete *).

Die übrigen unbekannten Stücke bestimmte man durch Rechnung, knüpfte an sie andere Dreiecke, an diese wieder weitere und so fort, bis die ganze zu messende Fläche mit Dreiecken überzogen war. Bei einer solchen Verkettung mußte ungemeine Sorgfalt verwendet werden, um zu genügenden Resultaten zu gelangen. Man hat deßhalb in neuerer Zeit zwei andere Methoden vorgeschlagen; die eine von Beuvière, die wir bereits angeführt haben, hat man die Methode der geometrischen Orte genannt; sie nähert sich durch ihre Einfachheit sehr dem Vermessungsverfahren durch Intersection. Die

*) Die Messung des dritten Winkels dient mehr zur Controle, indem durch ihn das Dreieck überbestimmt ist.

andere, von Lefèvre beschriebene, kann füglich mit der Aufnahme durch die Bussole verglichen werden.

140. — **Erste Methode**, oder die gewöhnliche Methode. Die Methode der gewöhnlichen Triangulirung kann in sieben Theile zerlegt werden:

1) Aufsuchen und Feststellung der Fixpuncte des trigonometrischen Netzes, oder Aussteckung der Signale;

2) Auswahl und Messung der Basis;

3) Beobachtung der Winkel;

4) Entwerfung des vorläufigen Croqui;

5) Berechnung der Dreiecke;

6) Berechnung der Abstände von dem Meridian und der Perpendiculare und

7) Abfassung des Registers und Auftragen des trigonometrischen Netzes.

Aufstellung der Signale. Die Stellung welche die Fixpuncte einer Triangulirung erhalten sollen, verlangt eine vorgängige Bekanntschaft des Terrains. Was dann zunächst liegt, ist, die Dreieckspuncte auf Höhen zu legen, weil die Signale, womit man diese Puncte bezeichnet, besser gesehen werden, wenn sie über den Horizont treten, daher die Beobachtung der Winkel erleitert wird. Jedoch nöthigt die Natur der Meßoperationen zuweilen zur Stellung derselben in Thäler. Jemehr ein Terrain der Aufnahme Schwierigkeiten entgegenstellt, desto mehr Aufmerksamkeit muß der Operirende darauf verwenden. Es ist daher anzurathen, daß sich derselbe auf die Puncte begiebt, die durch erhöhete Lage und andere locale Umstände eine gute Stellung eines Dreieckspunctes versprechen, und andere aufsucht, die leichte Anknüpfungen bei'm Gang der Vermessung abgeben können. Oft wird diese letztere Bedingung vernachlässigt. Ist die Vermessung sehr ausgedehnt und sind bereits topographische Charten vorhanden, so kann man aus ihnen die Lage und Gestaltung der Dreiecke vorläufig gestimmen.

Man kann sich jedoch nur oberflächlich nach dergleichen Charten über Aufstellung der Fixpuncte berathen; denn scheint auch nach ihnen die örtliche Lage sehr annehmlich, so findet man doch oft bei der Untersuchung zur Stelle, daß die Aussicht auf eine hinreichende Anzahl anderer Fixpuncte mangelt, die Aufstellung der Instrumente unmöglich, oder andere Hindernisse die Operation von diesem Puncte aus erschweren. Man darf sich daher auch bei Aufstellung der Signale nur auf eingeübte, mit dem Wesen der Operationen vertraute Leute verlassen.

Von den obenbemerkten Triangulirungen genügen für unsern Zweck schon zwei; eine erster Ordnung oder das trigonometrische Netz, dessen Eckpuncte auf den höchsten Puncten der Gegend liegen und die zu Legung eines zweiten Netzes von kleinern Dreiecken (Secondärdreiecken) dienen. Dieses letztere ist bestimmt, die Grundlage der Detailsmessung abzugeben. Die Lage dieses Netzes ist so anzuordnen, daß der Feldmesser sich specieller an sie anschließen kann, so daß die Seiten der Dreiecke soviel als möglich Elemente bei der Messung des Details abgeben. Daher hat man die Dreieckspuncte auf die Grenzen von größerer Ausdehnung, auf den Ausgang von Wegen, an Bäche, Flüsse, an die Brahne von Hölzern, endlich in Thälern aufzustellen, wo es oft schwierig ist, Richtlinien anzubinden.

Die Untersuchung der Puncte muß die Totalität der zu messenden Gegend umfassen. Man darf nicht scheuen auf ihre Lage zurückzugehen, um passendere Beobachtungen zu gewinnen; auch muß man darauf sehen den Dreiecken die beste Form zu geben; das Netz muß in stetem Zusammenhang bleiben, damit die Beziehungen, die in allen Theilen der Arbeit vorherschen sollen, nicht unterbrochen werden.

141. — Von den Signalen. Die Spitzen der Dreiecke sind entweder natürlich gebotene Puncte, als Thürme, Windmühlen, hohe Essen und dergleichen, oder sie werden durch besonders errichtete Signale bezeichnet. Zu den Signalen erster Ordnung werden bei Landesvermessungen hohe Pyramiden von Holzverband aufgestellt, denen man nach Umständen mehr oder weniger Höhe giebt, damit sie von den entlegenern Puncten aus gesehen werden können. Man rechnet für deren Höhe $\frac{1}{7000}$ der Distanz bis zu dem entferntesten Puncte, der von da aus zu beobachten ist. Zuweilen mauert man sie von Steinen auf und befestigt in deren Mitte ein Holzstück, welches gegen 3 Meter die Spitze überragt. Die Signale zweiter Ordnung bestehen nur aus einer starken Stange von 3 bis 6 Met. Höhe, die man zwischen eingegrabene Steine einsetzt und zuweilen noch mit Streben versieht. An die Spitze wird ein Strohwisch festgebunden und genagelt.

Es ist anzurathen, an jeden Punct, den man zu jeder Zeit wiederfinden will, einen starken Pfahl bis wenige

Zoll über die Erde einzurammen und um denselben einen Haufen Kohlenkleien, Ziegelbrocken und dergleichen flach einzugraben, weil man nicht sicher ist, daß dergleichen Stangen weggenommen werden. Auch bei untergeordneten Puncten, die einen Anhalt bei der Operation gewähren, ist diese Vorsicht zu empfehlen.

Dergleichen kostspielige Baue von Signalen übersteigen ersichtlich die Grenzen, worin die vorliegende Schrift sich bewegt, sie werden für unsern Zweck durch eine hohe Stange (Fig. 133), auf welche ein Bündchen Stroh, welches in der Mitte aufgelockert und oben und unten angebunden wird, genügend ersetzt. Deren Höhe soll sich nach der Distanz, wie oben bemerkt, bestimmen, und ist annähernd, wenn D diese Distanz bezeichnet

$$H = 0{,}00015\ D.$$

Je weiter die Entfernung, desto stärker muß die Stange und der Strohwisch sein.

Andere werden wie (Fig. 134) angefertigt. Man befestigt nämlich an die Spitze eine kleine conische oder pyramidale Kappe gegen 0,4 Met. Höhe und 0,3 Met. unterer Weite, von starker Leinwand an einen Reif gegenäht, durch mehre Bunde n, m, o. Steht sie gegen den Himmel, so schwärzt man sie, gegen Wald u. dergl. läßt man sie weiß. Diese Signale haben den Vorzug, daß sie, wegen größerer Leichtigkeit als Stroh, nicht zur Biegung der Stange beitragen.

Die Aufstellung des Signals erfordert einige Sorgfalt, denn es führt oft großen Zeitverlust herbei, wenn eins während den Operationen verlohren geht. Man gräbt ein Loch A 0,4 bis 0,6 Meter tief, setzt die Stange senkrecht durch Ablothen ein und rammt hart daneben einen starken Pfahl V zu deren Halt ein. Das Loch füllt man mit Steinen aus, und stößt sie mit darauf geschütteter Erde fest. Der Pfahl dient zugleich zum Wiederauffinden des Punctes, wenn die Stange entwendet worden.

Dergleichen Signale sind jedoch immer dem Muthwillen und der Zerstörungssucht ausgesetzt. Man thut daher wohl, jeden solchen Punct noch besonders seinem Abstand nach von naheliegenden Gegenständen zu messen und in das Manual einzutragen; auch die Bezeichnung der Stelle durch Kohlen ꝛc. nicht zu versäumen, deren Spuren nicht so leicht vertilgt werden können.

Abgesehen von diesen Signalen sind Kirchthürme und dergleichen, frei stehende hohe Bäume, deren Stamm sichtbar ist, oder auf welche man eine Stange mit Strohwisch befestigt (Fig. 135), und den Fußpunct des Lothes durch einen Pfahl bezeichnet, dienliche Gegenstände.

142. — Anlage des trigonometrischen Netzes. Die Anordnung des Netzes hat für Anfänger einige Schwierigkeit, weil sie noch ungeübt sind, Distanzen zu schätzen, woraus oft sehr spitz- oder stumpfwinkliche Dreiecke entspringen. Diese können folgenden Gang beobachten, dessen Modification ihnen bei größerer Einübung unbenommen bleibt.

Das Signal M (Fig. 136) sei auf einem erhabenen Punct aufgestellt, oder werde durch einen Thurm u. s. w. ersetzt.

Man begiebt sich auf einen Punct N in angemessener Entfernung, die man vorläufig abschätzt und wo man ein Signal nöthig erachtet. Hierauf geht man nach einen andern Punct C in ungefähr gleicher Entfernung von M und N, was leicht zu schätzen ist, da man bereits MN zur Vergleichung hat; geht dann in D, welches von C und M gleich abliegt, dann in E, F und G, so, daß dadurch ein möglichst regelmäßiges Polygon erhalten wird. Man operirt dann um eins der Signale N,C,D ... G, z. B. C, wie man um M operirt hat, woraus ein neues Polygon N, H, I, K, L, D, M von gleichen Bedingungen entsteht. Eine gleiche Aufstellung wird dann um einen der neuen Puncte, dann eine vierte und so fort geschehen müssen, bis man an die Grenzen des zu vermessenden Terrains gelangt.

Die Aufstellung der Signale zweiter Ordnung geschieht in derselben Weise; man hat nur in dem ersten Netz Polygonen von minderer Dimension anzuordnen.

Die Puncte a, b, c.... g sind Signale zweiter Ordnung.

Es ist Bedingung bei Aufstellung der Signale, daß alle Puncte von dem Puncte aus gesehen werden, um welchen das Polygon abgesteckt worden, und daß zugleich jedes Signal N, C, D.... G von einem und dem andern visirt werden kann. Wir werden weiter unten sehen, wie man dazu gelangt, die Dreiecke zu lösen, wenn die Localität nicht gestattet, dieser Bedingung nachzukommen.

Wenn die Vermessung eines Waldes oder eines Terrains vorliegt, dessen Inneres nicht zugänglich ist, dann muß das trigonometrische Netz anders angeordnet werden. Da die Messung den Grenzen des Terrains nachgeht, so muß auch die Triangulirung diesen folgen. Man beginnt dann Signale A, B, C, ... H, I (Fig. 145) so nah als möglich an dem Umfang und so aufzustellen, daß man von A nach B, von B nach C u. s. w. sehen kann. Hierauf stellt man eine zweite Folge von Signanalen K, L, M .... R, S, die beobachtet werden können, nämlich K von A und B, L von K, B und C, M von L, C und D u. s. w. Es läßt sich übersehen, daß bei dieser Anordnung die Raumverhältnisse zwischen den Signalen nicht immer gleich sein können, daß es vielmehr oft in der Wahl steht, Dreiecke von 3 bis 4000 Meter Seite zu bilden. Jedesmal, wenn diese Disposition zulässig ist, muß man sie benutzen; denn je weniger man Dreiecke hat, desto mehr gewinnt man an Genauigkeit bei Operationen dieser Art; man nimmt dann secondäre Puncte a, b, c, d, e auf dem Umfang der Waldung, um das Anknüpfen der Vermessungsarbeiten zu erleichtern. Ist der Abstand der Signale nur gering, so muß man dahin trachten, die Visirlinien zu kreuzen, um bei der nachfolgenden Rechnung Mittel zur Prüfung zu haben.

Sollte es nicht möglich sein, das trigonometrische Netz so anzukäpfen, daß man wieder zu dem Punct des Anfangs gelangt, so muß man auf einer vorherrschenden Höhe einen Baum K' oder Aehnliches aufsuchen und ihn zur Anbindung eines zweiten Netzes A' B' C' D' .... H' I' benutzen, welches man an dem Theil des Umfanges hin legt, der mit dem ersten Netz nicht in Beziehung steht. Gelingt es, zwei Fixpuncte der Art aufzufinden, so wird die Operation noch leichter.

143. — Von der Gestalt, die den Dreiecken zu geben ist und der durch das Instrument gebotenen Beschränkung.

Soviel als möglich gebe man den Dreiecken eine gleichseitige Form.

Nehmen wir an, es sei bei dem Winkel D (Fig. 137) ein Fehler $= \alpha$ in Folge der Unvollkommenheit des Instruments oder dessen Behandlung begangen worden, der auf CF eine Differenz $=$ AF nach sich zieht, so läßt sich diese Differenz in die Formel bringen:

$$AF = \frac{DF \cdot \text{Sin. } \alpha}{\text{Sin. } A};$$

da aber AF nur sehr klein ist, so kann man A = 90° setzen, so daß AF = DF · Sin. α.

Bei Linien ist $\frac{1}{500}$ Differenz zulässig; wählt man daher die größte Dreiecksseite des Netzes, so erhält man den Fehler α unmittelbar, welchen das Instrument nicht überschreiten darf. In dem Falle, um den es sich hier handelt, thut man besser, den Grad der Zulässigkeit auf $\frac{1}{1000}$ zu verringern, damit die Fehler, während sie wachsen, nie $\frac{1}{500}$ übertreffen.

Die ungünstigste Form ist, wenn der Winkel F sehr spitz wird, während die Seite CF in die Grundlinie CD überzugehen strebt, AF sich desto mehr verlängert. Ueberhaupt sollte man keinen Winkel unter $\frac{1}{3}$ R. zulassen, wenn die Localumstände nicht ausdrücklich bedingen, von dieser Regel abzugehen. Die gleichseitige oder gleichschenkliche Form, vorausgesetzt, daß bei letzterer eine der gleichen Seiten als Basis dient, ist die vorzüglichere. Im Allgemeinen nehme man als Regel: die Dreieckswinkel nicht über 75° und nicht unter 45° zu wählen.

144. — Anzahl der Fixpuncte, Entfernung zwischen den Ecken. Die Anzahl der Puncte hat ihre Grenzen, ebenso die Entfernung zwischen den Signalen; beides hängt von der Größe des angenommenen Maßstabes ab.

Erfahrung hat gezeigt, daß der Abstand der Signale gleich der Hälfte des Verhältnisses des Maßstabes, nach welchem der Plan aufgetragen wird, zu nehmen ist. Ist dieses Verhältniß 1 : 2500, so nimmt man den Abstand der Signale $\frac{2500}{2} = 1250$ Meter; ist dasselbe 1 : 5000, so nimmt man $\frac{5000}{2} = 2500$ Meter.

Die Spitzen der Dreiecke höherer Ordnung können den doppelten oder dreifachen Abstand haben.

145. — Von der Lage der Basis und deren Messung. Die Lage und Messung der Basis sind wichtige Bedingungen bei der Triangulirung. Da die Bestimmung der Dreiecke Schritt vor Schritt geht, so fängt man damit an, eine Seite eines der Dreiecke zu messen, welche dann nebst den anliegenden Winkeln zu Bestimmung der andern Seiten dient. Die letztern wer-

den dann wieder als Basen genommen, um die anliegenden Dreiecke zu berechnen; dadurch werden andere Dreiecke erhalten, die zur Auflösung noch folgender führen und so fort. Man kann annehmen, daß die Genauigkeit von allen den Seiten ausdrücklich von der ersten Seite oder Grundlinie abhängt, bei der man als Grundlage der ganzen Operation nichts versäumen darf, was zur genauen Bestimmung beiträgt.

Die Basis muß auf einem vollkommen horizontalen Terrain, welches frei von jedem Hinderniß ist, abgesteckt werden. Bevor man an die Messung geht, steckt man mittelst Jalons eine Gerade zwischen den beiden Endsignalen der Dreiecksseite ab. Das nach (§. 25 oder §. 24, 2.) vorzunehmende Abstecken ist mittelst eines Senkbleies auszuführen. Man mißt die Länge wenigstens dreimal und nimmt aus diesen drei Messungen das arithmetische Mittel als Resultat. Das Messen geschieht mit der Bandkette (§. 21) unmittelbar auf dem Boden.

Bei Messungen von mehren Quadratmeilen, wo die erste Standlinie vorzüglich dadurch bestimmt ist, eine der Fläche angemessene größere auf dem Terrain zu bestimmen, nimmt man die Messung mit größerer Genauigkeit vor, als die Kette gewähren kann.

Man richtet einige niedrige Böcke vor, welche zu Unterlagen der Enden der Meßstangen dienen und versetzt werden können. Meßstangen oder Latten, von 10 bis 15 Fuß Länge, an den Enden mit Eisen oder Messing beschlagen, mit einfachen Dioptern versehen und sehr genau justirt, werden in Mitten der Böcke scharf zusammengestoßen und, nachdem die Böcke schon vorher oberflächlich in's Niveau gebracht, durch untergeschobene Keile mit Hülfe einer Röhrenlibelle vollkommen horizontal gelegt.

Bei noch größern (Landes-) Vermessungen hat man gewöhnlich gleichzeitig Maßstäbe von verschiedenem Material, Eisen, Messing, Holz, Glas, um die Veränderungen, welche die Temperatur in der Länge bewirkt, genau auf das Normalmaß zurückführen zu können, indem jedes dieser Substanzen eine verschiedene aber constante Ausdehnungsfähigkeit besitzt. Wir bemerken dies hier nur um einen Begriff von der äußersten Genauigkeit zu geben, welche bei Messung der ersten Basis erfordert wird und verhältnißmäßig auch auf weniger ausgedehnte Aufnahme übertragen werden muß. —

146. — Von Messung der Winkel. Die Winkel des trigonometrischen Netzes müssen mit einem ganzen Kreis oder einem Theodolit mit einem oder zwei Fernröhren gemessen werden.

Die Fernröhre haben an ihren beiden Oeffnungen zwei Convergläser oder Linsen verschiedener Größe. Das größere heißt das **Objectiv**, und empfängt die von den Gegenständen reflectirten Lichtstrahlen. Das andere ist das **Ocular**, weil das Auge durch diese Linse blickt. Das Objectiv ist aus zwei Gläsern, wovon das eine und vordere ordinäres (Crown=) Glas und convex, das andere hintere, Krystal= (Flint=) Glas und concav ist; beide sind genau in einander geschliffen. Die Fernröhre mit einem solchen Objectiv heißen **achromatisch**, weil die Umrisse der Gegenstände durch sie farblos, deßhalb viel klarer erscheinen. Das **Sehfeld** des Fernrohrs ist der kreisförmige Raum, den man dadurch auf einmal übersehen kann.

Durch die Fernröhre mit nur zwei Linsen stellen sich die Gegenstände verkehrt dar, und dabei viel heller, als durch andere, welche mittelst mehrer Linsen die Objecte aufrecht zeigen. Erstere nennt man **astronomische** (coelestische), letztere **Erdfernröhre** (terrestrische).

Die Stelle in der innern Axe des Rohrs, wo das Bild entsteht, heißt der **Brennpunct**, **Focus** (des Objectivs). Ein kleines Rohr, worin das Ocular, ist zum Ausziehen auf geringe Länge vorgerichtet und wird je nach der Sehweite des Auges herausgezogen oder eingeschoben, bis die Gegenstände scharf gesehen werden.

Das **Fadenkreuz** im Focus ist eine Blendung, (Diaphragma) oder ein dünner Ring von Metall, dessen senkrechte Durchmesser etwas kleiner als die des Rohrs, durch zwei Kreuzfaden von Menschen=, Spinnenfaden oder feinsten Ziegenhaar, auch wohl durch feine Schnitte auf einem dünnen Glasblättchen, bezeichnet werden.

Dergleichen Fernröhre haben die Vorrichtung, daß sich ihre Axe in verticaler Ebene bewegen und ungefähr einen Quadranten durchlaufen kann. Zeigte sich bei der Beobachtung eine **Parallaxe**, d. h., daß der Kreuzschnitt der Fäden von dem fixirten Punct abwiche, wenn man die Stellung des Auges vor dem Objectiv verändert, so muß das **Objectiv** etwas vor oder zurückgeschoben werden, bis die Visirlinie unverrückt bleibt. Ist das Objectiv unverrückbar, das Fadenkreuz aber zum Verschieben eingerichtet, so verfährt man mit diesem auf gleiche Weise, bis die Parallaxe verschwindet.

Der Limbus und die Fernröhre bewegen sich um eine feste Axe oder einen Zapfen. Mit der Bewegung des Limbus um die Axe dreht sich eine kleine daran feste

Klemme, welche um ein Zahnrad (Scheibe mit einge- schnittenen Schraubengängen) greift, und nach gehöriger Feststellung durch eine Druckschraube, eine Schraube ohne Ende, die in der Scheibe tangirend eingreift, dergestalt einwirken läßt, daß damit dem Limbus eine sanfte Bewegung ertheilt werden kann. Dieses System ist in einigem Abstand unter der getheilten Scheibe angebracht.

Der Limbus trägt in der Regel zwei im rechten Winkel gestellte Libellen. Wenn das Instrument horizontal gestellt werden soll, so hat man die eine dieser Libellen genau über zwei der Stellschrauben zu bringen, welche entweder unter dem Limbus oder an den Füßen des Stativs angebracht sind und die Horizontalstellung bewirken. Man dreht diese Schrauben dann in entgegengesetzter Richtung, bis die Nivelle darüber einspielt, und bringt die Horizontalstellung, unter Beobachtung der andern Nivelle, mittelst der dritten Schraube zu Ende. Wenn die beiden Luftblasen in ihren Zeichen einspielen, ist das Instrument horizontal und man kann mit der Operation beginnen. Im Ganzen ist das Instrument auf der Platte des dreiflüssigen Stativs festgestellt.

Das obere Fernrohr steht auf dem Ende eines säulenförmigen Aufsatzes gegen 0,06 Meter über dem Limbus, mit ihm dreht sich auf dem Limbus eine Regel, die Alhidade, dessen Kante mit der Axenebene des Fernrohrs senkrecht ist, und an dessen Enden die Nonien befestigt sind (§. 44).

Der Nonius zur Rechten des Oculars ist ebenfalls mit einer Klemme und Tangenten- oder Mikrometerschraube am Limbus versehen. Will man das Fernrohr auf einen Punct richten, so lös't man die Klemme, giebt ihm die oberflächliche Stellung, schließt dann und bewirkt die feinere Richtung durch die Mikrometerschraube. Die zweite Beweguug des Fernrohrs ist die in einer senkrechten Ebene; mit dieser Bewegung heißt es dann eine Kippregel.

Diese Bewegung enthebt von dem Reduciren der Winkel auf den Horizont. Bei dem Senken oder Heben des Rohrs darf der Schnitt des Fadenkreuzes von dem Faden eines Senklothes auf eine jede Distanz nicht abweichen.

Das zweite, untere Fernrohr liegt unter dem Limbus, zuweilen auch unter dem obern, manchmal auch in excentrischer Stellung, wo dann bei Beobachtung der

Winkel eine kleine Correction des auf dem Limbus angezeigten Winkels nöthig wird. Im Allgemeinen wird dieses Rohr nur in fester Stellung gebraucht und um sich zu versichern, daß das Instrument während der Operation keine Verrückung erlitten hat.

Ein solches Instrument muß wenigstens die Minute angeben. — Man hat dessen Axe genau über den Mittelpunct der Station aufzustellen, weßhalb die Stange, so lange die Operation auf diesem Puncte dauert, stets ausgezogen werden muß; richtet die Platte des Stativs aus dem Gröbsten horizontal und zieht dessen Schrauben an; giebt hierauf dem Limbus die vollständige Horizontalstellung mittelst der Libellen; setzt die Nullstriche der Nonien mit dem Nullstriche und dem von 180° des Limbus in Uebereinstimmung: so ist alles vorgerichtet, was der Beobachtung vorhergehen muß.

Nachdem ein Winkel gemessen worden, ist es nöthig, die Anzahl Grade rc. mehrmals auf dem Limbus abzulesen und das Maß an beiden Nonien zu vergleichen, auch mit Hülfe des unteren Fernrohrs zu untersuchen, ob das Instrument sich nicht verrückt habe; oder wenn dieses fehlt, führt man das obere Rohr auf die Basis zurück, wobei der Nonius den Nullpunct genau wieder decken muß.

147 — Repetition der Winkel. Wir haben (§. 143) gesehen, daß der Fehler α, den man der Unvollkommenheit des Instruments und dessen Behandlung zuschreiben muß, auf **CF** (Fig. 137) eine Differenz = **AF** veranlaßt; betrachten wir jetzt, wie groß diese Differenz ist, wenn wir $\alpha = 0^{\circ}\ 1'$ und **DF** = 4000 Met. als mittlere Länge der Dreiecksseiten erster Ordnung setzen.

$$\begin{array}{lrl} \textbf{Log. } 4000 \text{ Met.} & = & 3{,}60206 \\ \textbf{Log. Sin. } 0^{\circ}\,1' \text{ -} & = & \underline{6{,}49373 - 10} \\ & & 0{,}06579, \end{array}$$

folglich **AF** = 1 Met. 16 C.,

wobei zu bemerken, daß wir den Winkel **A** = 90° zugelassen haben, und daß alsdann **AF** sein Minimum erreicht. Obgleich 1 Met. 16 C. noch weit unter der für Linien nachgelassenen Abweichung ist, so darf sie doch nur in seltenen Fällen übergangen werden. Puissant beweis't, „daß der Fehler, welcher der gesuchten Seite anhaftet, gleich ist demjenigen, der schon in der Basis des Dreiecks lag, multiplicirt mit dem Quotienten $\frac{\textbf{Sin. A}}{\textbf{n} \cdot \textbf{B}}$."

Er vermehrt sich sonach von einem Dreieck zum andern und zwar in solcher Progression, daß er bei dem Zusammenstoß zweier gegenliegenden Netze auf der gemeinschaftlichen Seite der beiden sich anschließenden Dreiecke eine Differenz erzeugt, die bei weitem größer ist, als sie zugelassen werden darf.

Die Repetition der Winkel verschafft das Mittel, den Werth α auf ein nach Belieben kleines Minimum zu bringen. Diese Repetition muß gleich Anfangs vorgenommen werden, um sich zu überzeugen, daß kein Fehler in den Puncten oder in dem Ablesen der Winkel auf dem Instrumente ist; der Hauptzweck aber ist, für die Dreiecke erster Ordnung größere Annäherungswerthe zu erhalten.

Da die Nullpuncte der Alhidade mit dem Nullpunct und dem von 180° auf dem Limbus übereinstimmen, so führt man mittelst Bewegung des Limbus die optische Axe des Fernrohrs auf das Signal **G** zur Linken (Fig. 138) *).

Man schließt dann die Klemme, um den Limbus festzustellen und lös't das bewegliche Fernrohr, welches man sanft in die Richtung nach dem Signal **D** zur Rechten dreht und hierauf mittelst der Klemme am Nonius festschraubt. — Hierauf zählt man die Grade des Winkels, führt das Fernrohr nach gelöster Klemme durch Bewegung des Limbus auf das Signal **G** nach links; dadurch wird der Nullpunct nach **G** um einen Winkel = **D C G** zurückgeführt sein. Nachdem der Limbus festgestellt worden, dreht man von Neuem das Fernrohr auf das Signal **D** nach rechts und lies't den Winkel ab, der jetzt doppelt so groß als vorher sein wird.

Man sieht, daß diese Wiederholung 3, 4 . . . n mal Statt finden kann und daß die definitive Größe des Winkels durch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . . $\frac{1}{n}$ der n Wiederholungen erlangt wird.

Auf folgende Weise verfährt man, wenn das Instrument zwei Fernröhre hat und man bei der Beobachtung von dem unteren Gebrauch machen kann:

---

*) Es ist ein für allemal angenommen, daß die Gradtheilung des Instruments von der Rechten zur Linken gezählt wird, wenn sich der Beobachter in den Mittelpunct versetzt, und daß sie von Null bis 360° geht.

1) Man richtet das obere Rohr, nachdem es auf Null festgestellt worden, mit dem Limbus nach dem Object zur Linken; dreht dann das untere Rohr nach dem Object zur Rechten, nachdem man es durch Lösung der Klemme frei gemacht hat. — Sobald beide Fernröhre genau nach den zwei Objecten gerichtet sind, werden sie festgestellt*).

2) Jetzt macht man, ohne die Röhre zu verrücken, den Limbus frei und richtet das untere Rohr auf das linke Object, fixirt den Limbus und führt das obere Rohr, nachdem es beweglich gemacht, auf das Object zur Rechten, worauf es wieder festgestellt wird. Dasselbe hat nun einen Winkel beschrieben, gleich dem doppelten der ersten Beobachtung; man lies't den Winkel ab und nimmt die Hälfte als Werth des gesuchten, mit Rücksicht auf die jedesmal vorzunehmende geringe Correction, wenn das untere Rohr excentrisch angebracht ist.

Diese Methode, die Winkel zu beobachten, nennt man die Repetitionsmethode.

Indem man die Operation 1, 2, 3 . . . n mal wiederholt, stets von dem Puncte ausgehend, den das obere Fernrohr auf dem Limbus geschnitten hat, erhält man nach der zweiten oder paarweisen Repetition offenbar das vierfache, sechsfache, achtfache ꝛc. des Winkels; man hat dabei auf die Anzahl der durchlaufenen n·4 R Acht zu geben.

Die Reichenbach'schen Wiederholungskreise sind anstatt mit zwei einzelnen Nonien mit vier dergleichen versehen, deren Nullpuncte genau mit den Quadranten des Limbus stimmen müssen. Sollte diese Genauigkeit nicht in vollkommenem Grade vorhanden sein, so lies't man den Winkel an jedem Nonius und nimmt die mittlere arithmetische Proportionale.

Die Repetition auf zwei Nonien angewandt, giebt folgendes Rechnungsverfahren:

Man habe zuerst gefunden

an dem ersten Nonius 0,00 . . . . . 57° 38'
" " zweiten " 180° 0'30" . . . 237° 39';

---

*) In dem Falle, daß man nach dieser ersten Operation das Maß des Winkels wissen möchte, muß man das obere Fernrohr, nach festgestelltem Limbus, auf das Object rechts rücken.

es wird sonach der an dem zweiten Nonius gefundene Winkel sein

$$237^\circ\ 39' - 180^\circ\ 0'\ 30'' = 57^\circ\ 38'\ 30''$$

und das Mittel

$$\frac{57^\circ\ 38'\ 0'' + 57^\circ\ 38'\ 30''}{2} = \ldots\ldots 57^\circ\ 38'\ 15''.$$

Bei der Repetition findet sich:

am ersten Nonius $115^\circ\ 17'\ 0''$
» zweiten » $295^\circ\ 18'\ 30''$.

Der vom zweiten Nonius durchlaufene Bogen beträgt daher:

$$295^\circ\ 18'\ 30'' - 180^\circ\ 0'\ 30'' = 115^\circ\ 18'',$$

hieraus der gemessene Winkel

$$\frac{115^\circ\ 18' + 115^\circ\ 17'}{2} = 115^\circ\ 17'\ 30''$$

Die Summe beider Beobachtungen . . . $172^\circ\ 55'\ 45''$,
daher der definitive Werth des Winkels $= 57^\circ\ 38'\ 35''$.

148. — Diese beiden Methoden haben das Unbequeme, daß man sich auf einmal nur mit einem Winkel beschäftigen kann, auch ist man genöthigt, zur Prüfung die Beobachtung aller Winkel um den Punct (C, Fig. 136) vorzunehmen (tour d'horizon), um die Uebereinstimmung mit 4 Rechten zu untersuchen. Stellt sich dabei eine Differenz von 4 bis 5 Minuten heraus, so ist diese verhältnißmäßig auf jeden Winkel zu vertheilen.

Man kann dabei folgende Formel benutzen, worin $H = 4\,R$, h die Summe der beobachteten Winkel, A einen der Winkel und a diesen Winkel corrigirt, bezeichnen.

$$h : H = A : a.$$

$$a = \frac{A \cdot H}{h}$$

oder die, welche die auf 1° zu machende Correction ausdrückt, wobei d die Differenz der Winkelsumme gegen $4\,R$ angiebt.

$$H : d = 1^\circ : \delta$$

$$\delta = \frac{d \cdot (60 \cdot 60)''}{H}.$$

Dergleichen Correctionen veranlassen ziemlich lange Rechnungen und werden daher nur selten von den Geometern berücksichtigt oder wenigstens nur schätzungsweise abgethan; man umgeht sie auf folgende Weise:

Wenn das Instrument gehörig aufgestellt ist, so richtet man das obere Fernrohr auf irgend ein Signal G (Fig. 138) und fixirt den Limbus: dreht dann das Rohr auf das erste Signal rechts D und lies't den Winkel α, führt dasselbe sodann, ohne das Instrument zu stören, auf das folgende Signal rechts D_1, und lies't den Winkel β ab, welcher aus $GCD + DCD_1$ zusammengesetzt ist; endlich dreht man das Rohr auf D_2 und bemerkt den Winkel γ, der aus $\beta + D_1\ CD_2$ besteht.

Für die Repetition, welche gleichzeitig eine Prüfung abgiebt, stellt man die Nullpuncte genau ein, bewegt das Fernrohr durch Drehung des Limbus nach einem Puncte, welcher dem zuerst beobachteten entgegengesetzt ist, vielleicht nach D_2, stellt den Limbus in dieser Richtung fest und richtet dann das freigemachte Rohr nach und nach auf die Puncte G, D und D_1, wo sich die Winkel α', β' und γ' ergeben.

Die zweite, dritte, vierte Wiederholung geschieht analog der ersten: man nimmt zur Basis der Beobachtung eine dritte Seite CD, mißt dann die Winkel $D_1\ CD_2$ $(D_1\ CD_2 + D_2\ CG)$, wählt dann eine vierte Seite &c. Es leuchtet ein, daß jeder einzelne Winkel dadurch verificirt wird und daß außerdem die Summe der Winkel um C ganz gleich 4 R ist.

Ein anderer Vortheil bei diesem Verfahren ist, daß das Instrument einen vielleicht anhaftenden Fehler, bestehe er in der nicht rechtwinklichen Stellung der Säule auf der Scheibe, in schiefer Stellung der Rotationsaxe, im Mangel vollkommener Centrirung, in unvollkommener Theilung, von selbst rectificirt, weil jeder Winkel auf verschiedenen Abschnitten des Limbus gemessen wird.

Wie bereits erwähnt, hat das andere Fernrohr nur den Zweck, jede kleine Verrückung des Instrumentes sofort anzuzeigen. Zu diesem Zwecke richtet man es auf einen entfernten Punct, wenn er auch nicht zu dem trigonometrischen Netz gehört, gleichviel, ob man die Röhre auf Null eingestellt hat, welches eine sehr delicate, Sorgfalt erfordernde Arbeit wäre. Um daher diese Einstellung zu ersparen, stellt man den Limbus in irgend einer Lage fest und visirt das untere Rohr nach einem beliebigen Object ein; dreht dann das obere Rohr auf das nächste Signal rechts und lies't die Grade, die zwischen Null und der

Visirlinie liegen. — Man richtet dasselbe Rohr nun auf das zweite, ebenfalls rechts liegende Signal, so liegt das Maß des Winkels offenbar zwischen beiden Visuren.

Angenommen, der Nullpunct des Limbus befinde sich (Fig. 139) in A, das obere Rohr sei, nach festgeschraubtem Limbus, zuerst nach G gerichtet worden, wo der Nonius 37° 17′ anzeige. — Bei der zweiten Richtung der Alhidade nach D, werden 179° 46′ abgeschnitten; folglich ist

$$GCD = 94^\circ\ 21' - 37^\circ\ 17' = 57^\circ\ 4'$$

und $DCD' = 179^\circ\ 46' - 94^\circ\ 21' = 85^\circ\ 25'$.

Wollte man den Winkel GCD_1' wissen, so ist dieser

$$179^\circ\ 46' - 37^\circ\ 17' = 142^\circ\ 29'.$$

149. — Man kennt nun das Verfahren, die Fehler des Instruments oder des Visirens zu compensiren; indeß bedarf es bei den Dreiecken zweiter Ordnung dieser großen Sorgfalt nicht, weil man weniger von den Differenzen in der Stellung der Winkelpuncte zu besorgen hat, da sie direct durch die des Hauptnetzes bestimmt werden. Man kann sich deßhalb bei ihnen mit Repetition begnügen, die hauptsächlich vorgenommen wird, um sich von dem richtigen Ablesen zu überzeugen.

In Bezug auf die Repetitionen für die Dreiecke erster Ordnung ist zu rathen, sie bis auf fünf (sechs Beobachtungen) auszudehnen, oder auf nur drei, indem man die Größe der Winkel auf beiden Nonien ablies't.

Giebt das Instrument nur die Minute, so erhält man damit das Mittel von 6 Operationen und die Annäherung ist dann $\frac{1}{6}$ der Minute $= 10''$, hinreichend für die Dreiecke dieser Ordnung, mit denen wir uns hier beschäftigen.

Zur Durchführung größerer Schärfe ist es nöthig, alle drei Winkel jedes Dreiecks zu messen. Dabei vermeidet man gern, die Beobachtungen an trüben und windigen Tagen vorzunehmen, weil dann das Visiren schwer und unsicher wird. Die beste Zeit ist von 11 Uhr Früh, bis 7 Uhr Abends im Sommer.

Bevor man die Beobachtung beginnt, hat man sich zu versichern, daß die Signale vollkommen senkrecht stehen, und muß deßhalb noch außerdem, wo möglich, stets den Fuß derselben visiren. Die Resultate der Beobachtung schreibt man unmittelbar in das Manual oder in eine nach dem Augenmaße gemachte Skizze; zugleich bereitet man bei dem Messen einen Entwurf vor, der zur Kenntniß der Oertlichkeit dient. Darin bezeichnet man die Signale durch Buchstaben, Nummern oder besondere Benennungen, um sie stets wieder zu erkennen. Die letztern sind vorzuziehen, weil sie zugleich die Gegend ihres Standorts bezeichnen und sich dem Gedächtniß besser einprägen.

Entwurf der Triangulirung.

Bezeichnung der Signale.	1. Beobacht.	2. Beob.	3. Beob.	Mittler Werth der Winkel.
Beobachtung vom Hohenberg.				
Die einzelne Tanne	0° 0′ 0″*)			
der rothe Hügel . .	37° 17′ 0″			
der Lindner Kirchth.	179° 46′ 30″			
die linke Esse vom Bösauer Guthe .	245° 58′ 0″			

Bevor man das Terrain verläßt, muß man sich nochmals versichern, daß man alle Data aufgezeichnet hat, die zur Bestimmung der Dreiecke gehören, wobei man sich erinnere, daß die Lage eines Punctes in Beziehung auf zwei andere nur durch das Schneiden zweier Visirstrahlen bestimmt werden kann. Dieser Schnitt kann aber nur erfolgen, wenn man eine Seite und die anliegenden Winkel kennt; die Seite wird aber fast immer durch die Rechnung gefunden. Ferner durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel**) und endlich durch die drei Seiten.

Um einen Punct mit aller Schärfe bestimmen zu können, müssen stets entgegengesetzte Berechnungen seiner Lage angestellt werden, d. h., es müssen zwei Schnitte gesucht werden, woraus die Auflösung zweier Dreiecke folgt. — So ist der Punct a (Fig. 136) nicht hinreichend bestimmt, wenn man sich nur an das Dreieck **MaN** hält; es muß auch das Dreieck **MaC** berechnet werden, wodurch die gemeinschaftliche Seite **Ma** ihre Verification erhält.

---

*) 0° 0′ 0″ bezeichnet die Basis der Operation. Es ist diese der Visirstrahl von dem ersten Standpuncte aus nach dem Signal oder Object zur Linken, wobei die Nullpuncte des Instruments sich decken und diesem Strahle entsprechen.

**) Ist die Beziehung des Winkels gegen die Seiten bekannt, so kann es auch einer der beiden andern sein.

150. — Anlegung des vorläufigen Entwurfs. Vor Anfang der trigonometrischen Rechnung muß man sich einen Entwurf der Triangulirung zulegen. — Man nimmt dazu einen beliebigen Maßstab, dessen Größe passend ist, um die Zeichnung auf das Format Grand-Aigle bringen zu können. Es eignen sich dazu die Verhältnisse 1:10000, 1:20000, 1:25000 und 1:30000, je nach der Ausdehnung des trigonometrischen Netzes.

Die Construction dieses Entwurfs besteht darin, daß man die Basis der Triangulirung aufträgt und daran Dreieck an Dreieck knüpft, wozu die beobachteten Winkel benutzt werden. Er ist bestimmt, sämmtliche Rechnungsresultate aufzunehmen, sowie man auch die auf dem Felde erhaltenen Messungen einzutragen hat. Gewöhnlich zeichnet man diese mit schwarzer, jene mit rother Tinte ein.

Manche begnügen sich, in den Entwurf die mittlere Größe der gemessenen Winkel einzuschreiben, jedem Dreiecke eine Nummer zu geben, die sie in ein Register eintragen, sowie sie die Berechnung eines Dreiecks vollführt haben.

Diese letztere Methode ist besser, weil man sich bei dem Einschreiben der bloßen Resultate in den Entwurf leicht versehen kann; zumal wenn man nicht strenge Ordnung und Sorgfalt verwendet, kann es leicht geschehen, daß man eine Zahl für eine andere setzt und andere schwere Fehler begeht, die zuweilen Nachforschung von mehren Tagen nach sich ziehen.

Zur Abfassung des vorläufigen Entwurfs nimmt man die in das Manual eingetragenen Winkel aus der einen oder andern Colonne; zieht die Basis und trägt an deren Endpuncte alle Winkel, die von da aus beobachtet worden. An jede dieser Linien (Schenkel) schreibt man mit Bleistift den Richtpunct bei, nach dem man visirt hat, und wenn zwei Linien nach demselben Richtpuncte sich schneiden, so ist der Durchschnitt nothwendig der Richtpunct selbst, den man mit einem kleinen Ringe einfaßt und die Benennung dazu schreibt.

Hat man sonach (§. 152) das Beobachtungsmanual und **AB** (Fig. 146) als Basis der Triangulirung in einer Lage auf das Papier getragen, die der auf dem Felde in Bezug auf die Orientirung nahe kommt (Norden oben genommen), und hat diese Basis bei dreimaliger Messung gegeben:

1. Messung . . 1549,63 Meter,
2. - . . . . 1549,55 -
3. - . . . . 1550,05 -

Summe 4649,23 Meter,
mittlerer Werth 1549,75 -

so macht man A B = 1549,75 Meter und schreibt diesen Werth der Linie des Entwurfs bei. Nimmt man nun das Manual zur Hand, so sieht man, daß bei den Beobachtungen, die am Südende der Basis (1. Colonne) gemacht worden, die erste Visur nach dem Signal mit der Benennung „Carthause" gerichtet und daß bei der Drehung nach dem Nordpunct der Basis die Alhidade durch die Signale „der Hügel" und Pic-d'Aillo gegangen, folglich einen Bogen = 111° 50′ durchlaufen ist; indem man sonach in dem Puncte B den Winkel ABP = 111° 50′ anträgt, erhält man den Visirstrahl BP, auf welchem P liegt. Und da das Fernrohr im ersten Standpuncte auf P gerichtet gewesen, so läßt sich der Transporteur an BP in B anlegen und man kann nun alle in B beobachtete Winkel aufsetzen, wodurch die Visirstrahlen BX, BK und BO entstehen. Hierauf nimmt man die Beobachtungen vor, die von dem Nordende der Basis aus gemacht worden sind; hier stellt sich aber eine Schwierigkeit dar. Indem die Alhidade in die erste Stellung auf das Signal „der Hügel" eingerichtet und auf das Signal B, das südliche Ende der Basis, gedreht worden, ist das Rohr durch die Puncte Pic-d'Aillo und le Tuc gegangen; es ist daher nöthig, zuerst den Visirstrahl AX aufzutragen. Man erhält ihn, indem man den Winkel BAX, der durch die Visur von A nach dem Signal „der Hügel" und die Visur nach B = 0° 0′ 0″ gebildet ist, construirt, nämlich 360° — 283° 23′ 30″ = 76° 36′ 30″. AX wird dann den ersten Strahl BX in X schneiden. Hierauf legt man den Transporteur an AX und trägt noch die Winkel XAK = 61° 18′ 30″ und XAO = 139° 26′ auf.

Verfährt man auf dieselbe Weise in X („der Hügel") wie in A und B, so werden die Dreiecke XKA und XBP gebildet; und mit Hülfe der Beobachtungen in den Fixpuncten der „Carthause", Pic-d'Aillo und le Tuc, die Dreiecke PSK, OKT u. s. w.

Wie man selbst denken kann, bedarf die Construction dieses Entwurfs keiner besonderen Genauigkeit, jedoch ist es vortheilhaft, sich der Wahrheit möglichst zu nähern, damit man später, bei Berechnung der Abstände vom Meridian und der Perpendiculare nicht genirt wird.

151. — Berechnung der Dreiecke. Sobald der Entwurf vollendet, schreitet man zur Berechnung der Dreiecke. — Wir suchen zuerst die Winkel des Dreiecks Pic-d'Aillo, der „Carthause" und „Südende der Basis." Zieht man das Manual (§. 152) zu Rathe, so findet man, daß bei der ersten Beobachtung von dem letzteren Puncte aus die Alhidade bei der Richtung nach der Carthause auf . . . . 0° 0′ 0″
stand und bei'm Drehen nach dem Pic-d'Aillo
einen Bogen von . . . . 82° 9′ 0″
durchlaufen hatte.

Man hat sonach für die 1. Beobachtung 82° 9′ 0″

Die Repetition anlangend, ist die Alhidade nach den Pic-d'Aillo gerichtet worden, wobei man hat . . . 0° 0′ 0″ oder	360° 0′ 0″;	
auf die Carthause zurückgegangen, nachdem der ganze Kreis durchlaufen ist, findet sich der Winkel .	277° 51′ 30″	
und man hat zur 2. Beobachtung	82° 8′ 30″	82° 8′ 30″
In Betreff der 2. Repetition ist nach dem Signal le Tuc und dann nach der Carthause visirt und gefunden worden .	226° 38′ 0″	
dann hat man nach dem pic-d'Aillo visirt nnd abgelesen .	308° 47′ 0″	
Und so hat man für die 3. Beobachtuug	82° 9′ 0″	82° 9′ 0″
Summe der drei Beobachtungen . .		246° 26′ 30″
woraus das Mittel		82° 08′ 50″

Dieser Werth wird in das Manual in die Colonne „mittlere Winkel" eingetragen.

Gehen wir nun zu den Beobachtungen vom Pic-d'Aillo aus über, so findet sich:

Erste Beobachtung.

Für die Visur nach dem Südende der Basis	256° 8′ 0″	
Für d. Visur nach der Carthause	299° 55′ 30″	
Differenz		43° 47′ 30″.

Zweite Beobachtung.

Nach dem Südende der Basis	109° 36′ 0″	
Nach der Carthause . . .	153° 23′ 30″	
Differenz		43° 47′ 30″.

Dritte Beobachtung.

Nach dem südl. Ende der Basis	0° 0′ 0″	
Nach der Carthause . . .	43° 47′ 0″	
		43° 47′ 0″
Summe der drei Operationen . .		131° 22′ 0″
mittler Winkel		43° 47′ 20″.

Endlich geben die Beobachtungen auf dem Fixpuncte, die Carthause:

1. Beobachtung	54° 4′ 0″
2. -	54° 3′ 30″
3. -	54° 4′ 0″
Summe . .	162° 11′ 30″
mittler Winkel	54° 3′ 50″.

Die Winkel des Dreiecks **PBK** sind sonach gefunden

$$\left.\begin{array}{l} \text{Winkel } B = 82^\circ\ 8'\ 50'' \\ \text{-}\quad K = 43^\circ\ 47'\ 20'' \\ \text{-}\quad P = 54^\circ\ 3'\ 50'' \end{array}\right\} = 180^\circ$$

welche Werthe man mit Zuversicht in den Entwurf einschreiben kann.

Indem man auf gleiche Weise die Winkel des Dreiecks sucht, welches durch das Südende der Basis, den **Pic-d'Aillo** und **le Tuc** gebildet wird, gelangt man zu den Resultaten:

$$\begin{array}{l} \text{Winkel KBO} = 51^\circ\ 13'\ 10'' \\ \text{-}\quad \text{KOB} = 62^\circ\ 52'\ 10'' \\ \text{-}\quad \text{OKB} = 65^\circ\ 54'\ 30'' \\ \hline \text{Summe } 179^\circ\ 59'\ 50''. \end{array}$$

Diese Summe differirt um 10″ von 2 **R**, welches nach Verhältniß auf die drei Winkel vertheilt werden kann (§. 148).

Wir werden uns im Folgenden (Fig. 146) auf Zehntheile der Secunden beschränken, um nicht zu weitläufige Rechnungen zu veranlassen.

Mit Hülfe des Manuals der Triangulirung kann man nun mit Bildung der Winkel aller Dreiecke (Fig. 146) fortfahren, mit Ausnahme derjenigen Dreiecke, die eine der Spitzen in dem Punct S oder dem Kirchthurme von Bayeur haben, da die Beschaffenheit des Thurmes das Aufstellen des Instruments nicht gestattet hat. Die Winkel in diesem Puncte müssen dann aus der Differenz 180° weniger der Summe der beiden andern Winkel gefunden werden.

Man wird bei der Summe der Dreieckswinkel hier und da auf doppelte, zuweilen dreifache Differenzen stoßen, wie die bei dem Dreieck KBO gefundenen; sie sind dann, wie gesagt, zu vertheilen.

152 — Tabelle über die Beobachtungen (Fig. 146).

Benennung der Stationen.	Beobachtungen.			Dreiecksspitzen.	Mittlere Winkel.	Bemerkungen.
	Erste.	Zweite.	Dritte.			
1. Nördlich. Ende der Basis A.						
Der Hügel . . .	0° 0′ 0″	298°42′ 0″	220°34′ 0″			
Pic-d'Aillo . . .	61°18′30″	0° 0′ 0″	281°52′30″			
Le Tuc . , . .	139°26′ 0″	78° 7′30″	0° 0′ 0″			
Südl. Ende d. Basis	283°23′30″	222° 5′30″	143°58′ 0″			
2. Der Hügel X.						
Pic-d'Aillo . . .	0° 0′ 0″	288°41′ 0″	160° 9′30″			
Nördl. Ende d. Basis	71°19′ 0′	0° 0′ 0″	231°29′ 0″			
Südl. Ende d. Basis	110°47′ 0″	39°28′ 0″	270°57′ 0″			
Die Carthause . .	199°49′30″	128°30′ 0″	0° 0′ 0″			
3. Südlich. Ende der Basis B.						
Die Carthause . .	0° 0′ 0″	277°51′30″	226°38′ 0″			
Der Hügel . . .	47°54′30″	325°46′ 0″	274°32′30″			
Pic d'Aillo . . .	82° 9′ 0″	0° 0′ 0″	308°47′ 0″			
Nördl. Ende der Basis	111°50′ 0″	29°41′30″	338°28′ 0″			
Le Tuc	133°22′ 0″	51°13′30″	0° 0′ 0″			
4. Die Carthause S.						
Kirchthurm v. Bayeux	0° 0′ 0″	291°30′ 0″	237°26′ 0″			
Pic d'Aillo . . .	68°30′ 0′	0° 0′ 0′	305°56′ 0′	SPK	68° 30′ 0″	

Benennung der Stationen.	Beobachtungen.			Dreiecksspitzen.	Mittlere Winkel.	Bemerkungen.
	Erste.	Zweite.	Dritte.			
Der Hügel	79°31′ 0″	11° 0′30″	316°57′ 0″			
Südl. Ende d. Basis	122°34′ 0″	54° 3′30″	0° 0′ 0″	KPB	54° 3′50″	
5. Pic d'Aillo K.						
Thurm von Bayeux	0° 0′ 0″	213°27′30″	103°51′ 0″			
Der Abzugsgraben .	79°28′30″	292°56′ 0″	183 20′ 0″	SKF	79°28′50″	
Die Böschung . .	146°33′ 0″	0° 0′ 0″	250°25′ 0″	FKT	67° 4′20″	
Le Tuc	190°13′30″	43°41′ 0″	294° 6′10″	TKO	43°40′50″	
Nördl. Ende d. Basis	241°19′ 0″	94°46′30″	345°11′30″	OKB	65°54′30″	
Südl. Ende d. Basis	256° 8′ 0″	109°36′ 0″	0° 0′ 0″	BKP	43°47′20″	
Der Hügel	288°41′30″	142° 9′ 0″	32°34′30″	PKS	60° 4′10″	
Die Carthause . .	299°55′30″	153°23′30″	43°47′ 0″			
6. Am Abzugsgraben F.						
Kirchthurm v. Bayeux	0° 0′ 0″	263°14′30″	139°31′ 0″			
Le Lièvre . . .	50°23′30″	313°37′40″	189°54′20″			
Die Quelle . . .	96°44′ 0″	0° 0′ 0″	236°14′40″			
Die lange Stange .	178° 0′ 0″	81°16′ 0″	317°30′10″			
Die Böschung . .	220°28′ 0″	123°44′ 0″	0° 0′ 0″			
Pic d'Aillo . . .	295° 2′ 0″	198°17′ 0″	74°34′ 0″			
. Le Tuc O.						
Südl. Ende d. Basis	0° 0′ 0″	297° 8′ 0″	197°18′30″			
Nördl. Ende d. Basis	12° 5′ 0″	309°14′ 0″	209°23′ 0″	KOB	62°52′10″	
Pic d'Aillo . . .	62°52′ 0″	0° 0′ 0″	260°11′ 0″			
Die Böschung . .	162°41′30″	99°50′ 0″	0° 0′ 0″	KOT	9°49′40″	
8. An d. Böschung T.						
Pic d'Aillo . . .	0° 0′ 0″	321°39′ 0″	36°29′30″			
Der Abzugsgraben .	38°21′30″	0° 0′ 0″	74°51′30″	KTF	38°21′30″	
Die lange Stange .	86°33′30″	48°11′30″	123° 4′ 0″	FTU	48°12′ 0″	
Le Tuc	323°30′ 0″	285° 8′50″	0° 0′ 0″	OTK	36°29′50″	
9. Die lange Stange U.						
Die Böschung . .	0° 0′ 0″	270°40′30″	321° 4′30″			
Der Abzugsgraben .	89°20′ 0″	0° 0′ 0″	310°24′ 0″			
Die Quelle . . .	138°56′ 0″	49°36′30″	0° 0′ 0″			
10. An d. Quelle D.						
Die lange Stange .	0° 0′ 0″	310°51′30″	219° 5′ 0″			
Der Abzugsgraben .	49° 8′ 0″	0° 0′ 0″	268°13′ 0″			
Le Lièvre . . .	140°54′ 0″	91°46′ 0″	0° 0′ 0″			
11. Le Lièvre L.						
Die Quelle . . .	0° 0′ 0′	318° 7′ 0″	252°28′30″			
Der Abzugsgraben .	41°53′ 0″	0° 0′ 0″	294°21′ 0″			
Glockenth. v. Bayeux	107°32′ 0″	65°38′30″	0° 0′ 0′			

153. — **Von dem bei der Berechnung zu befolgenden Gang.** Man hat bemerken können, daß wir bei Bildung der Dreieckswinkel nicht auf deren Summe um eine Spitze herum eingegangen sind. Obwohl der von uns befolgte Modus der Beobachtung keine Differenz in dieser Summe zulassen kann, so ist es doch möglich, daß, wenn die Winkel um einen Punct zusammengenommen werden, nachdem mit denselben die Correction in Bezug auf 2 R vorgenommen worden, sie etwas mehr oder weniger als 4 R betragen. Diese Probe ist unnütz, sie kann weder größere Genauigkeit in die Lage der Dreieckspuncte noch in das ganze Netz bringen. Dagegen wird sie eher zum Gegentheil beitragen, denn jemehr man die Werthe Modificationen unterzieht, desto weniger erhält man Schärfe. — Nachdem alle Winkel des Netzes in den Entwurf schwarz eingeschrieben worden, nimmt man die trigonometrische Berechnung vor.

Die Berechnungen der Dreiecke bieten keine Schwierigkeiten, sie verlangen aber Sorgfalt, Aufmerksamkeit und vorzüglich eine gewisse Ordnung in dem vorzunehmenden Gang; von letzterer hängt hauptsächlich die Sicherheit der Resultate mit ab.

Man fängt mit Berechnung der Dreiecke erster Ordnung an; vermeidet aber dabei lange Reihen von zusammenhängenden Dreiecken, weil sich sonst leicht Fehler fortpflanzen und in einem Grade vergrößern können, daß oft Tage dazu gehören, sie in Ordnung zu bringen. — Behandelt man kleine Partien, gruppirt die Rechnungen so, daß sich nach 5 — 6 Dreiecken eine Prüfung selbst herausstellt, so umgeht man dergleichen Nachtheile.

Das folgende Beispiel giebt eine genaue Darstellung des Ganges, der in diesem Theile der Triangulirung zu befolgen ist. Ehe wir dazu schreiten, sei noch ausgeführt, wie man zur Kenntniß einer Dreiecksseite erster Ordnung gelangt, wenn die Grundlinie nicht ein Theil des Netzes ist.

Man fängt mit dem Dreieck ABX an, welches die Seiten AX und BX giebt; berechnet dann BXP, wodurch PB erhalten wird, welche ein Theil des Hauptnetzes ist. Hierauf löſ't man das Dreieck AXK und endlich AKO; erhält so die Größe von KO, die ebenfalls ein Theil des Netzes ist. Man hat nun zwei Seiten BP und KO, die nach der Strenge als Basen gelten könnten; dies darf jedoch nicht geschehen, bevor man sich überzeugt hat, daß die Werthe dieser Seiten in gehörigem Verhältniß stehen.

Zu diesem Behufe berechnet man KOB mit Hülfe von KO und BPK mit Benutzung von PB; damit man durch diese beiden unabhängigen Berechnungen ebenfalls die Größe von BK erhält, die mit jener übereinstimmen muß, wenn nicht in der Rechnung oder in Beobachtung der Winkel ein Irrthum obwaltet. Ist die Differenz nur klein, so kann man die mittlere Proportionale als Basis der Dreiecksberechnung erster Ordnung annehmen.

Nachdem KB festgestellt ist, benutzt man sie zur Berechnung eines neuen Dreiecks KBO, welches die Größe von BO und KO berichtiget; dann bestimmt man die Dreiecke KOT und KTF *).

Man geht nun zu dem Dreieck BKP über, mit dessen Berechnung zugleich die vorige Größe von BP und PK rectificirt wird, und fährt mit den Dreiecken KPS und KSF fort. — Auf diese Weise wird KF ebenfalls durch zwei unabhängige Berechnungen bestimmt, worauf man stets hinarbeiten muß.

Würde der Werth von KF aus dem Dreieck KSF nicht übereinstimmend mit dem aus dem Dreieck KTF gefunden, oder wenn die Differenz $\frac{1}{1000}$ überstieg, müßten die Rechnungen oder Beobachtungen revidirt werden. Häufig kommen die Differenzen von den Abänderungen, welche man bei Prüfung der Winkel vorgenommen hat. Man thut dann wohl, zu versuchen, ob sich nicht günstigere Resultate ergeben, wenn man dergleichen Verbesserungen mehr auf den einen als den andern Winkel überträgt. Ist dieses nicht der Fall, so bleibt nur übrig, sich nochmals zur Stelle zu begeben und mehre Repetitionen zu machen. Winkel nach Gutdünken zu verändern, ist durchaus unzuläßig.

Verhalten sich die Resultate in den gestatteten Grenzen, so nimmt man das arithmetische Mittel und betrachte die Seite als neue Basis, von der man ausgeht, um die Dreiecke zu bestimmen, die eine Spitze in dem einen Ende dieser Seite haben. So berechnet man weiter mit

---

*) Die Seite, welche bei Berechnung des Dreiecks zur Basis dient, ist immer mit den beiden ersten der drei Buchstaben angedeutet, womit man das Dreieck bezeichnet.

Hülfe des mittlern Werthes von KF das Dreieck FKT, dann nach einander TFU und FUD; nimmt hierauf das Dreieck FKS, ferner FSL und FLD vor, wodurch sich wieder zwei Resultate für FD ergeben; die mittlere Zahl dient zum Anknüpfen der folgenden Dreiecke 2c.

Man sieht, daß es bei Befolgung einer ähnlichen Ordnung leicht ist, Fehler aller Art aufzufinden, die sich in der Rechnung einschleichen könnten.

Anfänger können sich mit Hülfe der Beobachtnngstabelle (§. 152) üben und untersuchen, ob ihre Rechnungen mit den in Fig. 146 eingeschriebenen Maßen stimmen. Sie können nach folgendem Schema (s. folg. §.) ein Heft anlegen, wodurch man das Einschreiben in den Entwurf erspart.

154. — Wenn die Berechnung der Dreiecke 1. Ordnung beendigt ist, beginnt man mit den secondären Dreiecken, die (Fig. 146) mit schwachen Linien eingezeichnet sind.

Da aber die Hauptbasen der untergeordneten Dreiecke auf den Seiten der ersten Ordnung liegen, so hat man bei den Beobachtungen Fixpuncte, wie c, d, e zu bestimmen, die das Anknüpfen der einen Ordnung an die andere erleichtern. Man berechnet dann die Dreiecke zuerst, welche diese Puncte zu Spitzen haben und geht von ihnen zu den näher liegenden Spitzen über.

Sonach würde man mit Auflösung der Dreiecke KPc, KSc, und SPc, sowie mit den KFd und FSd anfangen; von ihnen zu den Dreiecken Kcd, KXc, Sdc, Sce und Pce schreiten. Endlich gelangt man zu den Dreiecken cef, cXh, chf, efg, fgh, und ghP, dann Xhu und huP; indem man immer bemüht ist, sich an eine Spitze der ersten Ordnung auf dem kürzesten Wege anzuschließen und möglichst viele Vergleichungsresultate zu erhalten.

Berechnungsschema der Dreiecke.

Bezeichnung der Winkel.	Rectificirte Winkel.	Berechnung.	
Dreieck Nr. 1.			
	Basis AB	lg. 1549,75 = 3,1902617	 3,1902617
A	76°36′30″	lg. Sin. 76° 36′ 30″ = 9,9880278	lg. Sin. 63° 55′ 40″ = 9,9533928
B	63°55′40″	13,1782895	13,1436545
X	39°27′50″	lg. Sin. 39° 27′ 50″ = 9,8031783	 9,8031783
	180° 0′ 0″	lg. BX = 3,3751112	lg. AX = 3,3404762
		BX = 2371,98 Met.	AX = 2190,26 Met.
Dreieck Nr. 2.			
	Basis BX	lg. 2371,98 Meter = 3,3751112	 3,3751112
X	89° 2′20″	lg. Sin. 89° 2′ 20″ = 9,9999389	lg. Sin. 47° 54′ 30″ = 9,8704468
		13,3750501	13,2455580
B	47°54′30″	lg. Sin. 43° 3′ 10″ = 9,8342119	 9,8342119
P	43° 3′ 10″	lg. PB = 3,5408382	lg. PX = 3,4113461
	180° 0′ 0″	PB = 3474,07 Met.	PX = 2578,38 Met.

155. — **Von den verschiedenen Fällen, die bei einer Triangulirung vorkommen können.** Es trifft häufig, daß Dreiecke, wie cml, lmn und lnS nicht vollkommen bestimmt sind, weil die Oertlichkeit nicht gestattete, von den Puncten l, m, n aus die zur Lösung der Dreiecke erforderlichen Visuren vorzunehmen; wenn man sich an die Seiten lm und ln halten kann, so gelangt man durch die trigonometrische Formel VII. zum Ziel; es geben nämlich die Beobachtungen aus c den Winkel lcm und die Rechnungen die Seiten lc und cm; wodurch das erste Dreieck lmc gelöſ't werden wird. — Dann hat man den Winkel nml = nmc (der gemessen worden ist) — lmc, außerdem die Seiten lm und nm, wonach das zweite Dreieck lnm berechnet werden kann ꝛc. Hätte man in einem Dreieck, wie xqF nur den Winkel xFq messen können, so läßt es sich nach Formel VI. berechnen, da aus den andern Berechnungen die Seiten xq und qF hervorgehen. Jedoch dürfen dergleichen Nothhülfen nur in Ermangelung anderer Mittel benutzt werden, um zur Kenntniß einer Dreieckslinie zu gelangen, die zu Auffindung eines oder mehrer Puncte der Triangulirung unentbehrlich ist, weil man nicht sicher ist, daß Winkel, die auf diese Weise gefunden werden, vollkommen richtig sind; es darf eine Seite oder ein Winkel, selbst bei der Messung nicht genau sein, so entsteht dadurch schon ein merkliches Verschieben in der Lage der berechneten Puncte dieser Gattung.

Es ist anzunehmen, daß die auf eine Triangulirung beziehlichen Operationen von einiger Ausdehnung, auf Hindernisse stoßen werden, die durch verwachsenes Terrain und mehr dergleichen entstehen. In solchen Fällen muß man sich durch Hülfsoperationen, theils auf dem Felde, theils auf der Stube zu helfen wissen, die jedoch keinen Einfluß auf die Berechnungsmomente haben.

Nimmt man, wie oben, an, daß in dem Dreieck xqF nur der Winkel xFq bekannt sei, und daß durch Rechnung nur die Seite Fq zu erlangen wäre, so wird man genöthigt, eine der beiden andern Seiten xF oder xq zu messen, um das Dreieck lösen zu können.

Müßte z. B. der Punct a' mit dem trigonometrischen Netz verbunden werden, und es haben die Winkel in o und x des Dreiecks oxa' nicht beobachtet noch die Seite a'x gemessen werden können, so verlängert man diese Seite nach b', mißt a'b' und die Winkel oa'b', ob'a' und kann das Dreieck oa'b' mit Hülfe der bekannten Seiten oa' und ox lösen; da die letztere durch die Reihe der Netzdreiecke und des Winkels oa'x = 180° — oa'b' gegeben, so läßt sich das Dreieck a'ox finden, womit der Punct a' an die Triangulirung gekuüpft wird.

Könnte man dieses Verfahren nicht einschlagen, dann zieht man eine beliebige Linie m'n', die man genau mißt, und beobachtet von den Endpuncten aus die Winkel a'nx und xn'm'; die Berechnung der Dreiecke n'm'x, n'xa' führt auf die Linie a'x, wobei jedoch noch der Winkel oxm' gemessen werden muß.

Wäre auch diese Beobachtung nicht möglich, so würde man auf a'x (Fig. 140) einen Punct, wie b', zu suchen haben, aus dem man den Winkel ob'x messen kann; die Seiten xb' und xa' findet man durch Berechnung der Dreiecke m'n'a', m'a'x und m'n'b', m'b'x; geht hierauf an Lösung der Dreiecke b'xo und a'b'o, in welchen man für das erste zwei Seiten b'x, xo und den gegenliegenden Winkel b', für das zweite zwei Seiten ob', a'b' und den eingeschlossenen Winkel a'b'o = 180° — b' hat.

Zum Beispiel sei

n'm'a' = 28° 39'	m'n'b' = 75° 27'	n'm = 843,12 Met.
n'm'b' = 48° 54'	m'n'a' = 106° 8'	ox = 1234,4 „
b'm'x = 52° 43'	xb'o = 94° 32'	
m'n'x = 33° 33'.		

1) Dreieck n'm'a (Seite a'm').

$$\begin{aligned} \lg.\ 843{,}12 &= 2{,}9258894 \\ +\lg.S.106^\circ 8' &= 9{,}9825506 \\ \hline &\ 2{,}9084400 \\ -\lg.S.n'a'm' & \\ = 180^\circ - (106^\circ 8' & \\ + 28^\circ 39') &= 9{,}8511211 \\ \hline &\ 3{,}0573189 \\ a'm' &= 1141{,}09 \end{aligned}$$

2) Dreieck n'm'x (S. m'x).

$$\begin{aligned} \lg\ 843{,}12 &= 2{,}9258894 \\ +\lg.S.33^\circ 33' &= 9{,}7424616 \\ \hline &\ 2{,}6683510 \\ -\mathrm{Sin.}\ n'xm' & \\ = 180 - (96^\circ 37' & \\ + 33^\circ 33') &= 9{,}8831908 \\ \hline &\ 2{,}7851602 \\ m'x\ & 609{,}76. \end{aligned}$$

3) Dreieck a'm'x.

$$a'm' - m'x = 1141{,}09 - 609{,}76 = 531{,}33 \text{ Met.}$$
$$a'm' + m'x = 1141{,}09 + 609{,}76 = 1750{,}85 \text{ „}$$
$$\mathrm{tg.}\ \tfrac{1}{2}a' + x = \frac{180^\circ - a'm'x}{2} = \frac{180^\circ - 67^\circ 58'}{2} = 56^\circ 1$$

lg. 531,33 = 2,78536
+ lg. tg. 56° 1′ = 0,17129
2,89665
lg. 1750,85 = 3,24325
lg. tg. ½ a′ — x = 9,65340
a′ — x = 24° 14′
a′ = 56° 1′ — 24° 14′ = 31° 47′
x = 56° 1′ + 24° 14′ = 80° 15′

Die Seite a′x.
lg. a′ m′ .... = 3,0573189
+ lg. Sin. 67° 58′ .. = 9,9670637
3,0243826
— lg. Sin. 80° 15′ .. = 9,9936813
lg. a′ x = 3,0307013
a′ x = 1073,25 Met.

Durch Wiederholung dieser Rechnungen für die Dreiecke n′b′m′ und b′m′x findet man den Werth von b′x = 746,15 Met.

Dreieck x b′ o.

Die trigonometrische Formel VI. giebt:

$$\text{Winkel } b'ox > \text{Sin. } o > \frac{x\,b'\ \text{Sin.}'}{ox}$$

lg. 746,15 = 2,8728265
+ lg. Sin. 94° 32′ = 9,9986392
2,8714657
— lg. 1234,4 = 3,0914559
lg. Sin. o = 9,7800098
xob′ = 37° 3′ 20″
daher b′xo = 48° 24′ 40″

Die Seite ob′.
lg. 1234,4 = 3,0914559
+ lg. Sin. 48° 24′ 40″ = 9,8738591
2,9653150
— lg. Sin. 94° 32′ = 9,9986392
lg. ob′ = 2,9666758
ob′ = 926,13 Met.

Dreieck a′ b′ x.

a′b′ = a′x — xb′ = 1073,25 — 746,15 = 327,10 Met.
Winkel a′b′o = 180° — 94° 32′ = 85° 26′.
Hieraus Winkel a′ob′ = 19° 54′ 40″
Winkel b′a′o = 74° 37′ 20″
Seite a′o = 957,51 Met.

Dreieck a′ o x.

Winkel xa′o	= 76° 5′ 20″	Seite ox	= 1234,40 Met.
„ a′ox	= 56° 58′ 0″	„ a′x	= 1073,25 „
„ a′xo	= 48° 24′ 40″	„ a′o	= 957,51 „

156. — Reduction der Winkel auf das Centrum. Oefters erlaubt das Signal, bei Bäumen, Thürmen, Häusern u. s. w. nicht die Winkel von dem eigentlichen Punct der Station aus zu beobachten. Damit man die Winkel erhalte, stellt man das Instrument in möglichst kleiner Entfernung von dem Signal, doch so auf, daß man an dem Visiren nach den andern beziehlichen Signalen nicht gehindert werde und mißt den Winkel nach den beiden andern Eckpuncten.

Die Correction dieses beobachteten Winkels hängt von der Stellung des Instruments ab, folglich finden mehrere Auflösungen statt:

1) Man kann sich in O (Fig. 141) auf einen der Schenkel CG oder CD des Winkels C stellen, der gesucht wird. Der gemessene Winkel ist dann GOD, daher der Winkel in C = GOD — ODC; es genügt also, den Winkel ODC und die Distanzen OD und OC zu bestimmen.

Es sei OD parallel CD gezogen, so ist der Winkel GOd = GCD und dOD = ODC, folglich GCD oder C = GOD — dOD = GOD — ODC.

Man messe OC auf dem Terrain; in Betreff OD kann man, wenn GD durch die Triangulirung gegeben und DGO bekannt ist, das Dreieck GOD berechnen. Ist dieses nicht, so messe man OD mit dem Zirkel auf dem Entwurf, denn da OC stets sehr klein ist, so kann eine Differenz in diesem Maße auf die Größe von ODC keinen beachtenswerthen Einfluß haben.

2) Hat man sich in O′ auf die Verlängerung von GC aufgestellt, dann ist der Winkel in C = GO′D + O′DC und die Berechnung dieselbe.

3) Wenn man sich in O (Fig. 142) aufstellt, so ist

C = GCK + DCK;

es ist aber GCK = GOK — CGO,

und DCK = DOK — CDO.

Also GCD = GOK — CGO + DOK — CDO = GOD — (CGO + ODC).

Demnach messe man OC des Terrains und da OG und OD entweder durch den Entwurf oder die vorläufige Berechnung gegeben sind, so lassen sich die Dreiecke OCG und OCD finden.

4) Ist das Instrument in O′ derselben Figur gestellt, so ist

C = GCK + DCK;

aber GCK = GO′K + CGO′,

und DCK = DO′K + CDO′,

daher GCD = GO′D — CGO′ + CDO.

5) Wenn der Standpunct rechts oder links des Punctes C, z. B. in O (Fig. 144) ist; dann hat man

a = o + d,

und a = c + g;

daher o + d = c + g

und endlich c = o + d — g; . . . . A.,

es ist sonach g und d zu ermitteln, da o durch die Beobachtung bekannt ist.

Man kennt in dem Dreieck CGO die Seite OC = r durch Messung auf dem Terrain; desgleichen durch Beobachtung GOC = y; GC = G (bei linkem Stand kann man aus dem Entwurf oder aus vorläufiger Rechnung entnehmen, und erhält dann g

$$\text{Sin. } g : \text{Sin. } y = r : G; \ldots\ldots\ldots B.$$

In dem Dreieck COD kennt man OC = r, desgleichen COD = o + y als beobachtet, CD = D (Distanz zur Rechten) wird durch den Entwurf bestimmt. Dann ist

$$\text{Sin. } d : \text{Sin. } y + o = r : D; \ldots\ldots C.$$

Anwendung. Es sei $o = 51^{\circ}\ 34'$, $y = 58^{\circ}\ 32'$, also $y + o = 110^{\circ}\ 6'$, $r = 14$ Met., $D = 818$, $G = 935$.

Für das Dreieck GCO (nach B.)

$$\text{Sin. } g = \frac{r \text{ Sin. } y}{G} = \text{lg. } 14 \ldots\ldots = 1{,}14613$$

$$\text{lg. Sin. } 58^{\circ}\ 32' = 9{,}93092$$

$$11{,}07705$$

$$\text{lg. } 935 \ldots = 2{,}97081$$

$$\text{lg. Sin. } g = 8{,}10624$$

$$g \ldots = 0^{\circ}\ 43'\ 55''.$$

Für das Dreieck COD (nach C.)

$$\text{Sin. } d = \frac{r \text{ Sin. } (y + o)}{D} = \text{lg. } 14 \ldots = 1{,}14613$$

$$\text{lg. Sin. } 110^{\circ}\ 6'' \ldots = 9{,}97271$$

$$11{,}11884$$

$$- \text{lg. } 818 \ldots = 2{,}91275$$

$$\text{lg. Sin. } d \ldots = 8{,}20609$$

$$d \ldots = 0^{\circ}\ 55'\ 16''$$

(Nach Formel A.) $c = 51^{\circ}\ 34' + 0^{\circ}\ 55'\ 16'' - 0^{\circ}\ 43'\ 55'' = 51^{\circ}\ 45'\ 21''$.

Man bemerke: wenn d und g gleich sind, so heben sich die Ausdrücke B. und C., und die vier Puncte G, D, C und O liegen auf einem Kreise, und der Winkel o (welcher beobachtet) ist gleich dem gesuchten Winkel c. Es ist daher vortheilhaft sich auf dieser Kreislinie aufzustellen. Das letztere Verfahren ist für alle Fälle geltend. Verbindet man B und C, so erhält man die allgemeine bekannte Formel: Reduction auf das Centrum

$$C = \frac{r \text{ Sin. } (o + y)}{D} - \frac{r \text{ Sin. } y}{G};$$

eine Formel, die sehr einfach ist, und deren Gebrauch in keinem Falle Schwierigkeiten hat, wenn man Acht auf die Zeichen von Sin. $(o + y)$ und Sin. y hat. Die Correction ist positiv, wenn der Winkel $o + y < 180^o$, negativ wenn $o + y > 180^o$; das Gegentheil findet unter gleichen Umständen für den zweiten Ausdruck statt, der von dem Richtwinkel y abhängig ist.

6) Wir theilen zuletzt noch ein Verfahren mit, nach welchem man unmittelbar auf dem Felde den wahren Winkel finden kann.

Man stellt sich in O (Fig. 143) auf einen der Schenkel, z. B., auf CD, wählt dann einen abgelegenen Fixpunct K, der durch das Fernrohr scharf geschnitten werden kann, und den zweiten Schenkel CG schneidet; man mißt den Winkel KOD, stellt sich dann im Durchschnittspunct O' der Linien OK und CG auf, mißt auch den Winkel KOG, so ist der gesuchte Winkel $C = KOD - KOG$. Denn ziehen wir O'd parallel CD, so ist $KO'd = KOD$, desgleichen $GO'd = GCD$; daher, wenn man KO'G von $KO'd = KOD$ wegnimmt, bleibt $GO'd = GCD$.

Dieses Verfahren ist einfach und schnell, da jede Rechnung dabei wegfällt; jedoch muß man sich genau auf die Schenkel stellen, die den Winkel C bilden, was nicht immer ganz leicht ist, so wie sich auch nicht überall ein passendes Object K auffindet, nach dem man visiren kann. In dessen Ermangelung läßt sich jedoch ein Punct durch einen Jalon ausstecken.

157. — Die Centrirung des Winkels be einem runden Thurm. Zuweilen macht sich noch ein Verfahren nothwendig, wenn z. B. der Punct C die Mitte eines runden Thurms ist, die man von dem Stationspunct aus nicht beobachten kann.

Man mißt dann die Winkel GOT und GOT' (Fig. 148), welche durch den Visirstrahl nach dem Object G zur Rechten und durch die beiden Visirlinien gebildet werden, welche die Seiten des Thurms tangiren. Der Richtwinkel y ist $\frac{GOT + GOT'}{2}$ und die Distanz $r = OK + KC$, wobei man den Radius KC des Thurmes findet, wenn man eine Gerade mn absteckt und auf ihr den Abstand hi der Fußpuncte zweier senkrechten Tangenten mißt; der Radius ist nothwendig $\frac{hi}{2}$.

Wenn der Thurm ein Polygon ist, so mißt man, wie früher, die Winkel GOT und GOT' (Fig. 147), hierauf die Entfernungen OT und OT' von der Station nach den Endpuncten der Diagonale TT'; nimmt auf OT beliebig einen Punct d und bestimmt c durch

$$OT : Od = OT' : Oc,$$

verbindet cd und zieht durch deren Mitte k die Linie OK. Man hat dann

den Richtwinkel $y = \frac{GOT + GOT'}{2}$,

die Distanz r zum Mittelpunct OK + KC

$$KC = \sqrt{(Cn)^2 + (nK)^2}.$$

Im Allgemeinen ist $OC = \frac{OT + OT'}{2}$.

Das hier beschriebene Verfahren nennt man das Centriren der Winkel. Es kommt bei Triangulirungen sehr häufig in Anwendung, denn selten wird ein natürliches Object, ein Thurm, ein Baum, selbst ein solid errichtetes Signal einen guten Aufstellungspunct abgeben, so vorzüglich es auch als Fixpunct ist. Zuweilen kann man zur Beobachtung von Winkeln einen Spiegelsextant gut brauchen, wo ein anderes Winkelinstrument nicht anwendbar ist.

Hierbei möge noch in Bezug auf die Sorgfalt, die bei genauern Messungen zu befolgen ist, bemerkt werden:

Bei fernen Fixpuncten gewährt die Spitze eines Thurms (Kreuz) selten ein scharfes Visir, zumal wenn der Kreuzfaden des Fernrohrs nicht von großer Zartheit ist. Eben soviel kann man fehlen, wenn ein Gegenstand halb von der Sonne beleuchtet ist, wenn man zu verschiedenen Tageszeiten dessen Mitte visirt; ja selbst der Temperaturwechsel zwischen den Früh- und Mittagsstunden bei heißen Tagen kann Differenzen durch Störungen des Instruments veranlassen. —

158. — Reduction auf den Horizont. Obwohl wir bereits oben gesagt haben, daß die Construction der gebräuchlichsten Instrumente von dieser Reduction entheben, weil die Fernröhre zur Beweglichkeit in der senkrechten Ebene eingerichtet sind uud daher die Winkel von selbst auf der horizontalen Ebene bestimmen, so kann man doch in den Fall kommen, einen Winkel ohne Neigung des Limbus nicht beobachten zu können.

Man mißt daher mit solchen Instrumenten nicht den Horizontalwinkel B' C A' (Fig. 147 a), den die durch die Richtpuncte A und B und durch den Scheitel C gelegten Verticalebenen mit einander bilden, sondern statt dessen den geneigten Winkel ACB, indem man den Limbus in die Ebene seiner Schenkel bringt.

Es sei (Fig. 290) der Winkel MCN zu beobachten, dessen Scheitel C und die Visirpuncte M und N in verschiedenen Horizonten liegen; der Winkel wäre also eigentlich mCn, wenn man mit einer Kippregel beobachtet hätte. Um die Puncte M, N auf den Horizont des Scheitels C zu reduciren, muß nebst dem schiefen Winkel MCN auch der Höhenwinkel mCM und der Tiefenwinkel nCN gemessen werden *), und sodann wird jener nach der folgenden allgemeinen Gleichung auf den Horizont reducirt:

$$\text{lg. Sin. } \tfrac{1}{2}\, mCn = \tfrac{1}{2}\,[\text{lg. Sin. }(S - a) + \text{lg. Sin. }(S - b) - (\text{lg. Sin. } a + \text{lg. Sin. } b)].$$

In dieser Gleichung ist jedesmal

$a = 90^\circ +$ dem Tiefenwinkel nCN

$b = 90^\circ -$ dem Höhenwinkel mCM

und $S = \frac{1}{2}(b + a +$ dem beobachteten Winkel MCN).

Es sei als Beispiel

$MCN = 95^\circ\ 48'$

$nCN = 11^\circ\ 30'$

$mCM = 4^\circ\ 50'$

so ist $a = 90^\circ + 11^\circ\ 30' = 101^\circ\ 30'$

$b = 90^\circ - 4^\circ\ 50' = 85^\circ\ 10'$

und $S = \frac{1}{2}(85^\circ\ 10' + 101^\circ\ 30' + 95^\circ\ 48') = \frac{282^\circ\ 28'}{2} = 141^\circ\ 14'$

Mithin ist $S - a = 141^\circ\ 14' - 101^\circ\ 30' = 39^\circ\ 44'$

$S - b = 141^\circ\ 14' - 85^\circ\ 10' = 56^\circ\ 4'$;

lg. Sin. $(S - a) = 9{,}8056472$

lg. Sin. $(S - b) = 9{,}9189146$

Dec. E. lg. Sin. $a = 0{,}0088073$

Dec. E. lg. Sin. $b = 0{,}0015471$

$19{,}7349162$, halbirt giebt

lg. Sin. $\frac{1}{2}\, mCn = 9{,}8674581$

folglich $\frac{1}{2}\, mCn = 47^\circ\ 28'\ 30''$

und $mCn = 94^\circ\ 57'$ der gesuchte horizontale Winkel.

Wenn beide Gegenstände M und N höher, oder beide tiefer als C liegen, so wird im ersten Falle jeder

*) Wie diese Messung der Höhenwinkel geschieht, wird später gezeigt werden.

Höhenwikel besonders von 90° abgezogen, im zweiten Falle jeder Tiefenwinkel ins'besondere zu 90° addirt, um die oben mit a und b bezeichneten Winkel zu erhalten.

Diese Methode hat den besondern Vortheil, daß die Fehler, die sich bei Beobachtung der Höhen- und Tiefenwinkel leicht einschleichen, keinen merklichen Einfluß auf die Berechnung des gesuchten horizontalen Winkels haben. Man hätte, z. B., den Höhenwinkel mCM um 10′ zu klein, und den Tiefenwinkel nCN um 20′ zu groß, nämlich mCM = 4° 40′ und nCN = 11° 50′ beobachtet, so würde der schiefe Winkel MCN = 95° 48′ in den horizontalen mCn = 94° 57′ 42″ übergehen, also nur um 42″ größer sein, als im vorigen Falle.

159. — Correction der Winkel, wenn zwei Basen nicht stimmen. Wenn bei einer Kette von Dreiecken, wie sie (Fig. 145) dargestellt worden, die Oertlichkeit bedingt hätte, die Basis AK an das eine Ende der Kette zu legen, so nehme man hinlänglich entfernt eine zweite Basis HS an dem andern Ende der Kette an, um sich von der Regelmäßigkeit der Beobachtungen und der Genauigkeit der Rechnungen zu überzeugen.

Es ist möglich, daß die Messung von HS eine Differenz gegen das Rechnungsresultat dieser Seite abgäbe, indem sie durch die Schlußfolge der Dreiecke AKB, BKL, BLC ..... RHS erlangt wird. Um diese beiden Resultate, die von unbedeutenden Fehlern in den Winkeln herrühren können, weil diese immer weniger sichere Resultate geben, als die gemessenen Basen, in Uebereinstimmung zu bringen, ist die einfachste Methode, diese Werthe um ein Geringes zu verbessern.

Bezeichnet A den der ersten Basis AK = a gegenliegenden Winkel; B den dieser Basis anliegenden Winkel, der BK = a′ gegenliegt (wenn diese Seite als Basis des zweiten Dreiecks KBL in Rechnung genommen werden soll); A′ den a′ gegenliegenden und B′ den an a′ liegenden, aber BL = a″ gegenliegenden Winkel; endlich $A^{(n-1)}$, $B^{(n-1)}$ die Winkel, welche der vorletzten berechneten Basis $a^{(n-1)}$ gegen- und anliegen, so ist

$$\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = x\begin{bmatrix} \cot. A + \cot. A' + \ldots\ldots \cot. A^{(n-1)} \\ + \cot. B + \cot. B' + \ldots\ldots \cot. B^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Es ist nämlich $a' = \frac{a \text{ Sin. } B}{\text{Sin. } A} \ldots\ldots 1.)$

desgleichen für das zweite Dreieck

$$a'' = \frac{a' \text{ Sin. } B'}{\text{Sin. } A} \ldots\ldots 2.)$$

Bezeichnet n die Anzahl der Dreiecke der Kette, und a^n die letzte gesuchte Seite oder HS, die man vergleichen soll, so hat man allgemein:

$$a^{(n)} = \frac{a \text{ Sin. } B \text{ . Sin. } B' \text{ . Sin. } B'' \ldots\ldots \text{ Sin. } B^{(n-1)}}{\text{Sin. } A \text{ . Sin. } A' \text{ . Sin. } A'' \ldots\ldots \text{ Sin. } A^{(n-1)}} \ldots . 3.)$$

Angenommen die Winkel A, A' . . . . . seien jeder um x vermindert, und die B, B' . . . . um dieselbe Größe vermehrt, so erhält man genau

$$\alpha = a^{(n)} + \varepsilon^{(n)} = \frac{a \text{ Sin. } (B + x) \text{ Sin. } (B' + x) \ldots\ldots \text{ Sin. } (B^{(n-1)} x).}{\text{Sin. } (A - x) \text{ Sin. } (A' - x) \ldots . \text{ Sin. } (A^{(n-1)} - x)}$$

Nimmt man die Logarithmen jedes Gliedes, entwickelt und reducirt mittelst der Gleichung 3.), so erhält man zuletzt obige Formel.

In dieser Formel von Puissant (Traité de Géodésie, p. 407) bezeichnet ε^n die Differenz zwischen der gemessenen HS, deren Maß $= a^{(n)}$ und dem berechneten HS, wobei x positiv ist, wenn $\varepsilon^{(n)}$ ein Uebermaß ist, und negativ im entgegengesetzten Fall.

Sind aber die Dreiecke des Netzes gut angeordnet, so daß sie ungefähr gleichseitige Form haben, so erhält man genügende Genauigkeit, wenn man den Factor von x im zweiten Gliede $2n \cdot \text{cot. } 60^o$ nimmt: dann wird x, in Secunden ausgedrückt:

$$\frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} = x \, (2n \cdot \text{cot. } 60^o) \text{ Sin. } 1'' \ldots\ldots 1.)$$

$$\text{wodurch } x = \frac{\varepsilon^{(n)} \text{ tg. } 60^o}{2n \cdot a^{(n)} \cdot \text{Sin. } 1''} \ldots\ldots 2.)$$

und wenn die Seiten durch die folgende Formel desselben Verfassers corrigirt werden,

$$\text{lg. } a_{(n)} \text{ corrigirt} = \text{lg. } a^{(n)} + M \frac{\varepsilon^{(n)}}{a^{(n)}} \ldots . 3.)$$

wobei M der Modul der Tafeln, n aber = 2, 3, 4 . . . gesetzt wird, je nachdem es für das 2), 3), 4) . . . n, Dreieck gilt.

Anwendung der Formel 2.) Man habe eine Kette von 15 Dreiecken. Das Uebermaß $\varepsilon^{(n)} = 4{,}47$ Meter und $a^{(n)} = 2810$ Meter; dann ist:

$$x = \frac{4{,}47 \cdot \text{tg. } 60^o}{30 \cdot 2810 \cdot \text{Sin. } 1''} = 18{,}94 \text{ Min.}$$

Es sind sonach die Winkel A, A', A'' . . . . um 18,94'' zu vergrößern, die B, B' B'' . . . . um den gleichen Werth zu vermindern.

160. — Berechnung der Abstände gegen den Meridian und die Normale (die Coordinaten-

aren). Wir haben (§. 111) ein Verfahren angegeben, um mit Hülfe von Quadraten die Ecken eines Polygons aufzutragen, wenn die Lage dieser Ecken durch die Berechnung festgestellt worden ist. Bei einem trigonometrischen Netz ist es um so mehr nothwendig, die Abstände der Ecken in einem rechtwinklichen Liniensystem kennen zu lernen, da im Allgemeinen die Dreiecksseiten sehr lang sind, deßhalb die graphische Construction nur eine annähernde sein würde.

Wenn man mittelst eines Fernrohrs, welches in den Meridian gestellt wird, weithin gegen Nord und Süd zwei Signale aufstellt, sie durch eine unbestimmte Gerade verbindet, indem man die Zwischenweite jalonirt, so kann man sie als Abscissenlinie aller trigonometrischen Puncte betrachten. Diese Linie legt man gewöhnlich durch einen der Dreieckspuncte und nimmt diesen zum Anfang der Abscissen. Eine zweite, der Abscissenaxe senkrechte Linie legt man als Axe der Ordinaten und setzt die Anfangspuncte der Ordinaten auf die Abscissenlinie.

In der Regel wählt man zu einem dergleichen Richtpuncte der Abscissenaxe den vornehmlichsten Kirchthurm der Gegend. Bei Landesmessungen wird gemeiniglich der Meridian durch eine der benachbarten Sternwarten angenommen.

160. — Zu Berechnung der Abstände von dem Meridian und der Normale, die durch irgend einen Punct der Triangulirung gehen, muß man nothwendig den Winkel kennen, den der Meridian mit einer Seite (der Basis) des Netzes macht; diesen Winkel giebt allenfalls die Magnetnadel, wenn man ihn wegen der Declination (§. 45) verbessert, bevor man die Rechnung vornimmt. Die Methode, das Auftragen mittelst Coordinaten zu bewerkstelligen, ist im Allgemeinen (§. 111) beschrieben.

Da aber die Bussole nicht sehr zuverlässig, auch nicht immer bei der Hand ist, so muß man Mittel kennen, sie zu entbehren; auch läßt sich dadurch die zeitliche Abweichung der Nadel finden.

Methode bei Tage oder durch den Gnonom (Fig. 149.) Man wähle auf der Basis (wenn man deren Abweichung unmittelbar finden will) einen freien ebenen Platz von einigen Quadratruthen, beschreibe aus einem Puncte a einige nach Norden gelegene concentrische Kreisbögen und schlage nahe bei a einen Stab gegen 6 Fuß lang und mit einer dünnen Platte am obern Ende versehen, worin sich eine $\frac{1}{2}$ Zoll weite Oeffnung befindet, dergestalt schräg ein, daß die Oeffnung genau über a steht*). Die Platte wird ungefähr rechtwinklich der Sonne entgegengestellt.

Hierauf beobachte man an einem heitern Vormittag zwischen 10 — 11 Uhr, wenn der Lichtpunct auf einen und den andern Kreis fällt, und markire die Puncte i, h, g mit Pikets. Gleichermaßen bemerke man nach Mittag, ungefähr zwischen 1 — 2 Uhr, das Eintreffen des Lichtpunctes in dieselben Kreise, wie f, d, c, theile jeden Bogen in zwei gleiche Theile und verbinde die Halbirungspuncte p, q, r mit a; so wird die Gerade ab die verlangte Mittagslinie sein, in welche der Schatten eines Lothes über a fällt, wenn die Sonne in dem Meridian tritt.

Stellt man in a eine Bussole auf und visirt nach b, so zeigt die Nadel die zu derselben Zeit herrschende Abweichung. Man würde mit der Beobachtung auf einem Kreise ausreichen, wenn man nicht befürchten müßte, das zur Zeit der correspondirenden Beobachtung die Sonne verdeckt sein könnte; übrigens müssen die Puncte auf den verschiedenen Kreisen stets auf dem Radius vom Mittelpunct a liegen. Die gefundene Richtung des Meridians mißt man nach dem Neigungswinkel mit der Basis in a und trägt sie in den Plan.

Man nimmt hierbei nicht Rücksicht auf die tägliche Abweichung der Sonne, die beiläufig zur Zeit der Solstitien am schwächsten ist.

Mittelst des Theodoliten, Fig. 150. Weit genauer kann der Meridian durch correspondirende Sonnenhöhen gefunden werden.

Es sei **B** der Punct der Beobachtung auf einer der Dreieckseiten, dessen Mittagslinie **BS** gefunden werden soll, und A der Endpunct dieser Seite, so ist die Lage des Meridians bestimmt, wenn man das Azimuth des Punctes A, d. i. den Winkel **ABS** kennt, welchen die vom Beobachtungspuncte nach A gezogene Gerade **BA**

---

*) Ein Blech leistet hierbei die besten Dienste; wählt man zur Platte ein Bret, so schneidet man die Oeffnung bedeutend größer, verklebt sie mit dickem Papier und schneidet in dieses die obige Oeffnung.

mit der Mittagslinie bildet. Man stelle daher den Theodolit in **B**, den Limbus genau horizontal auf, stelle das Fernrohr auf Null ein und richte es nach **A**. Nachdem der Limbus fixirt worden, drehe man das Fernrohr mit dem Nonius soweit fort und erhöhe es, daß der horizontale Kreuzfaden den untern (oder obern) Rand der Sonne tangirt. Diese Beobachtung nimmt man von 10 — 11 Uhr in den Vormittagsstunden vor und läßt das Instrument unverrückt stehen; nachdem man den Winkel **ABH** abgelesen hat. In ungefähr gleichem Zeitmaß nach der Mittagsstunde verfolge man den Stand der Sonne durch Drehung des Fernrohrs von **H** nach **H'**, jedoch ohne dessen Höhenwinkel zu verändern, bis der untere (oder obere) Rand derselben wieder in den Horizontalfaden eintritt und bemerke den Drehungswinkel **ABH'**. Man kennt nun die Winkel **ABH, ABH'**, daher auch $HBH' = HBA + ABH'$; und da $HBS = SBH'$ sein muß, so ist auch

$$HBS = \frac{HBA + ABH'}{2}$$

und daher

$$ABS = \frac{HBA + ABH'}{2} - ABH = \frac{ABH' - ABH}{2}.$$

Zu größerer Schärfe ist es nöthig, diese Beobachtung an verschiedenen Tagen zu wiederholen und bei geringen Abweichungen das arithmetische Mittel zu nehmen. Auch ist es vorzuziehen, dazu die Zeit der Solstitien zu wählen und die Beobachtungszeit nicht zu lange vor und nach dem Mittag vorzunehmen, um, wie bereits bemerkt, die Correction wegen des Vorrückens der Sonne außer Acht lassen zu können. Es muß zu der Beobachtung das Fernrohr mit einem Blendglas versehen werden.

Aufsuchen des Meridians bei Nachtzeit. Das Verfahren, welches hier in Bezug auf die Sonne beschrieben worden, kann zur Nachtzeit mit jedem andern Firstern vorgenommen werden, wobei der Bogen der durchlaufenden Bahn größer genommen werden kann.

Diese Beobachtungen können auch als Prüfung der correspondirenden Sonnenhöhen betrachtet werden. Dabei ist aber nicht allein die Blendung überflüssig, vielmehr noch eine Beleuchtung des Objectivs nöthig; auch muß das Signal A durch ein erkennbares Licht (eine Reverbere) bezeichnet werden.

Mittelst des Polarsterns läßt sich einfach der Meridian bestimmen. Wenn man die Sterne α und β des Sternbilds des großen Bären (großen Wagen) Fig. 151, jedesmal nach der Seite hin verlängert, wohin der Bruch oder mittlere Stern γ der Wagenstange zeigt, so wird diese Verlängerung ungefähr in der Länge des Sternbildes ziemlich genau auf den größten Stern dieser Region, den Polarstern am Ende des kleinen Bären (Wagen) stoßen.

Diese beiden Sternbilder sind aus ihrer Aehnlichkeit leicht erkennbar, nur daß der kleine Bär die umgekehrte Stellung und weniger leuchtende Sterne hat. Der Polarstern steht nicht vollkommen am Pol, sondern beschreibt einen kleinen Kreis von 1 — 2° um denselben und geht zweimal in 24 Stunden durch den Meridian. Dieser Durchgang wird folgendermaßen beobachtet: man stelle sich beliebig in der Richtung nach dem Polarstern auf und lasse ein Senkloth einige Schritte entfernt aufhängen; mit diesem Senkloth beobachtet man durch allmäliges Fortbewegen von der angenommenen Stelle den Zeitpunct, wenn der erste Stern ε des Schweifes des großen Bären (der Deichsel) und der Polarstern zugleich in den Faden des Lothes treten. In dieser Stellung markirt der Beobachter den Stand seines Auges und allignirt jenseits des Fadens auf 100 — 200 Meter Entfernung ein Licht, welches dann durch einen Jalon zu bezeichnen ist. Die Verbindungslinie des Gesichtpunctes oder des Fadens und des Jalons ist der gesuchte Meridian.

Genauer läßt sich diese Operation mit dem Fernrohr des Theodoliten bewirken. Zu diesem Zweck stellt man das Instrument horizontal in einen Dreieckspunct, richtet zuerst den Nullpunct des Limbus auf irgend einen Fixpunct des Netzes und stellt ihn fest; löſ't dann das Fernrohr und verfolgt den Polarstern, bis derselbe in die oben angegebene Stellung tritt, und beide Sterne durch den senkrechten Faden des Fernrohrs geschnitten werden. Die abgeschnittenen Grade geben den Abweichungswinkel der zuerst visirten Linie von dem Meridian.

Wird die Genauigkeit nicht beansprucht, so läßt sich die Beobachtung in der erstern Zeit der Abenddämmerung unmittelbar mit dem Polarstern vornehmen.

161. — Wir nehmen an, die Abweichung $\triangle$ der Seite UT (Fig. 146) oder der Winkel UTδ sei nach einem der obigen Verfahren 33° 57′ gefunden, so läßt sich die Abweichung $\triangle$ *) von allen Seiten des Netzes (§. 111 u. f.) leicht finden; man bildet nämlich soviel rechtwinkliche Dreiecke, als das Netz Seiten hat und berechnet sie nach §. 113. Dem Rechnungsschema giebt man folgende Gestalt:

Berechnung der Distanzen gegen den Meridian und die Normale.

Rechnungsansätze. 1.	gefundene Seiten. 2.	Abstände von dem Meridian. 3.	Region. 4.	Abstände von der Normale. 5	Region. 6.
Dreieck Nr. 1. (Seite BX.)					
lg. Cos. 44° 50′ 10″ = 9,8482392		B = 6681,71	. . .	4294,55	
lg. BX . . . = 3,3751112		— 1682,03		1672,44	
lg. Sin. 44° 50′ 10″ = 9,8507237		X = 4999,68	Ost	2622,11	Süd
3,2233504	1672,44				
3,2258349	1682,03				
lg. Sin. 60° 51′ 20″ = 9,9412106					
lg. AB . . . = 3,1902617		B = 6681,71		4294,55	
lg. Cos. 60° 51′ 20″ = 9,6875406		+ 754,75		1353,55	
3,1314723	1353,55	A = 7436,46	Ost	2914,00	Süd
2,8778023	754,75				

Die 3. und 5. Colonne werden ausgefüllt, wenn man die Werthe der Seiten aller rechtwinklichen Dreiecke erhalten hat.

*) Das griechische $\triangle$ wird in Zukunft immer für Bezeichnung der Declination einer Seite irgend eines Dreiecks gebraucht werden.

162. — Wenn alle Winkel eines Netzes streng genau wären, so würde die Berechnung der Abstände von dem Meridian und der Normale keine Schwierigkeiten haben, denn der Gang der Rechnung ist einfach und leicht; da aber die erhaltenen Resultate zuweilen leichte Differenzen bieten, so müssen einige Correctionen vorgenommen werden. Diese Correctionen beziehen sich mitunter auf die Werthe von △, z. B., wenn man von der Abweichung der Seiten des Dreiecks zu der von Seiten des anliegenden Dreiecks übergeht. Obgleich diese Differenzen immer sehr klein sind, so darf man sie doch nicht anwachsen lassen. Man vertheilt sie, sobald sie sich zeigen auf jede △ der Seiten und so, daß die Richtung der letztern nicht merklich gestört werde.

Sie haben nicht leicht auf andere Weise statt, als wenn man △ auf eine ganze Reihe von Dreiecken übergehen läßt, wie es geschieht, wenn man, von der Seite **TU** ausgehend, alle anderen Seiten **UD**, **DL**, **LS** . . . . **OT** verfolgt; daher lassen sie sich leicht vermeiden, sobald ein Gang befolgt wird, wie der (§. 153) vorgeschriebene.

Die Correctionen beziehen sich hauptsächlich auf die Abscissen und Ordinaten, wenn die rechtwinklichen Coordinaten eines Punctes durch mehre Folgen von Seiten bestimmt werden. Wären z. B. die Abscisse x und die Ordinate y des Punctes **T** durch die Summe der rechtwinklichen Dreiecksseiten bestimmt, welche auf den Seiten **SL**, **LD**, **DU** und **UT** gebildet wurden (indem man von der Voraussetzung ausgegangen ist, daß der Meridian nebst Normale durch den Kirchthurm von Bayeux oder den Punct **S** gehen), dann durch die der rechtwinklichen Dreiecke auf den Seiten **SF** und **FT**, **SK** und **KT** und endlich durch die der rechtwinklichen Seiten auf **SP**, **PB**, **BO** und **OT**, so erhält man vier Resultate für x und ebensoviel für y, von denen man keins vorzugsweise annehmen kann. In diesem Falle giebt noch das arithmetische Mittel die Endbestimmung von x und y des Punctes.

Will man sich die Mühe geben, die rechtwinklichen Abstände der Spitze **T** zu berechnen, so findet sich zuerst durch die Seiten **SL**, **LD**, **DU** und **UT**

$x = 10994{,}23$ und $y = 2689{,}30$

dann durch

SF und FT, $x = 10993{,}08$ $y = 2692{,}65$

durch

SK und KD, $x = 10993{,}08$, $y = 2692{,}66$

und endlich durch

SP, PB, BO und OT $x = 10993{,}39$, $y = 2692{,}36$

Summe $4\,x = 43973{,}78$, $4y = 10766{,}97$

folglich in mittl. Zahl $x = 10993{,}45$, $y = 2691{,}74$.

Es ist anzurathen, mit Bestimmung der Coordinaten der äußersten Netzpuncte anzufangen und allmälig zu den näher liegenden überzugehen; man bringt so allein Einheit in den Gang der Rechnung.

Nachdem die Lage des Punctes T wie oben gefunden ist, wählt man eine zwischenliegende Spitze, möglichst in Mitten der Distanz, wie D und hat zu Seiten der auf SL und LD gebildeten rechtwinklichen Dreiecke:

$x = 3561{,}78$ und $y = 7267{,}2$ Meter

$x = 3561{,}0$ $y = 7269{,}61$ •

Summe $= 7122{,}78$ $= 14536{,}81$

Mittelzahl $x = 3561{,}39$ $y = 7268{,}40$.

Die Coordinaten der Spitze U sind durch die Seiten DU, und TU desgleichen durch SF und FU zu bestimmen.

Wenn die Lage eines Punctes genau feststeht, und die Werthe der Coordinaten sollen zu Bestimmung der Coordinaten eines andern Punctes dienen, so schreibt man deren Werthe in die Colonne 3 und 5 des Schema's (§. 161). So dient nämlich die Spitze B zu Berechnung der Puncte X und A. Endlich trägt man die Rechnungsresultate der Dreiecke und die der Coordinatenabstände in das trigonometrische Vermessungsregister von nachstehender Form:

163. — Trigonometrisches Vermessungsregister.

Dreiecks-spitze.	Benennung der Signale.	Abstände von dem Meridian.	Abstände von der Normale.	Himmels-gegend.	Bezeichn. der Dreiecks-spitzen.	Größe der Winkel.	Größe der Seiten.	Bemerkungen.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
		Meter.	Meter.				Meter.	
A	Nordende d. Basis	7436,46	2941,00	S. O.	X	39° 27′ 50″	1549,75	
B	Südende d. Basis	6681,71	4294,55	dit.	A	76° 36′ 30″	2371,98	
O	Le Tuc	9378,61	1113,87	dit.	B	63° 55′ 40″	2190,26	
K	Pic d'Aillo . .	5910,02	302,83	dit.				
P	Carthause	3212,18	4480,76	dit.	P	43° 3′ 10′	2371,98	
F	Der Abzugsgraben	5408,71	3462,15	N. O.	X	89° 2′ 20′	3474,07	
L	Le Lièvre . . .	623,15	5394,97	N. W.	B	47° 5430′	2578,38	
U	Die lange Stange	8868,14	5847,30	N. O.				

Man wird bemerken, daß die Seite die zu Berechnung des Dreiecks gedient hat, auf der ersten Linie der achten Colonne, und die in der siebenten Colonne bezeichneten Winkel auf derselben Linie, wie die ihnen gegenliegenden Seiten eingetragen sind.

164. — Umgekehrte trigonometrische Aufgaben. Wenn man die Meridian- und Normalabstände der Spitzen eines Triangulirungsnetzes kennt, so lassen sich verschiedene Aufgaben lösen, die man umgekehrte trigonometrische Aufgaben nennen kann, und die von fortlaufendem Gebrauche bei Vermessungen sind.

Wir gehen davon aus, daß die Lage irgend eines Punctes bestimmt ist, wenn die Abstände von dem Meridian und von der Normale bekannt sind.

Erste Aufgabe. Wenn die Lage zweier Puncte A und B (Fig. 152) gegeben, den Positionswinkel oder $\triangle$ der Linie zu finden, welche diese Puncte verbindet.

Hier muß auf die Himmelsgegend gesehen werden, nach welcher diese Puncte liegen; zuerst nehmen wir sie beide in einerlei Region an.

Nach dem bei der Berechnung der Abstände befolgten Gang, muß man, wenn x und y des Punctes A bekannt sind, dem x die Distanz aB zusetzen, um das x' von B, und eben so dem y die Distanz Aa, um das y' von B zu erhalten. Folglich hat man, da x, y, x' und y' bekannt ist

$$aB = x' - x \text{ und } aA = y' - y,$$

daher

$$\text{Tg. } \triangle = \frac{aB}{aA} \text{ (nach Formel IV. der Trigon.).}$$

Liegen A und B in verschiedenen Regionen, so ist (Fig. 153)

$$\left.\begin{array}{l} aB = x' - x \\ aA = y' - y \end{array}\right\} \text{Tg. } \triangle = \frac{a\,B}{a\,A}.$$

Es ist ebenfalls (Fig. 154)

$$aB = x + x', \qquad aA = y + y';$$

über die Rechnung ist das Nöthige bereits gesagt.

Zweite Aufgabe. Die Lage zweier Puncte A und B (Fig. 153) ist gegeben, man soll die Größe der Verbindungslinie suchen.

Da man den Positionswinkel $= \triangle$ als Element der Abstandsberechnungen wissen kann, so läßt sich auch das zweite Element oder die Hypotenuse des Dreiecks AaB finden. Man suche also zuerst $\triangle$ durch eine der vorstehenden Formeln und hat dann:

$$AB = \frac{aB}{\text{Sin.}\,\triangle}.$$

Dritte Aufgabe. Aus der bekannten Lage der drei Spitzen eines Dreiecks ABC (Fig. 155) die Winkel und Seiten des Dreiecks zu berechnen.

Unter der Voraussetzung, daß

$$\text{für } A\begin{cases} x = 365{,}42 \text{ Met.} \\ y = 483{,}50 \text{ „} \end{cases} \Big\} \text{ N. O.}$$

$$\text{für } B\begin{cases} x' = 4119{,}07 \text{ „} \\ y' = 141{,}38 \text{ „} \end{cases} \Big\} \text{ S. O.}$$

$$\text{für } C\begin{cases} x'' = 392{,}54 \text{ „} \\ y'' = 4127{,}41 \text{ „} \end{cases} \Big\} \text{ S. W.}$$

ist zuerst:

$$aA = 4119{,}07 - 365{,}42 = 3753{,}65$$
$$aB = 483{,}50 + 141{,}38 = 624{,}88.$$

Hieraus $\triangle AB = 80^0\ 33'\ 5''$ und $AB = 3805{,}28$ Meter; folglich:

$$bC = 4119{,}07 + 392{,}54 = 4511{,}61$$
$$bB = 4127{,}41 - 141{,}38 = 3986{,}03.$$

Und $\triangle BC = 48^0\ 32'\ 20''$, $BC = 6020{,}25$ Met.,
endlich $cA = 365{,}42 + 392{,}54 = 757{,}96$ „
$cC = 483{,}5 + 4127{,}41 = 4610{,}91$ „
$\triangle AC = 9^0\ 20'\ 5''$ $AC = 4672{,}75$ „
wodurch die drei Seiten des Dreiecks gefunden sind.

Für die Winkel ist die Rechnung leicht

$$\begin{array}{rcl}
\text{Winkel } A = \triangle AB & = & 80^0\ 33'\ 5'' \\
+ \triangle AC & = & 9^0\ 20'\ 5'' \\ \hline
& = & 89^0\ 53'\ 10'' \quad .\ .\ 89^0\ 53'\ 10'' \\
\text{Wkl. } B = \text{Compl.} \triangle AB & = & 9^0\ 26'\ 55'' \\
+ \text{Compl.} \triangle CB & = & 41^0\ 27'\ 40'' \\ \hline
& = & 50^0\ 54'\ 35'' \quad .\ .\ 50^0\ 54'\ 35'' \\
\text{Winkel } C = \triangle CB & = & 48^0\ 32'\ 20'' \\
- \triangle AC & = & 9^0\ 20'\ 5'' \\ \hline
& = & 39^0\ 12'\ 15'' \quad .\ .\ 39^0\ 12'\ 15'' \\
& & \overline{\quad 180^0\ 0'\ 0''.}
\end{array}$$

Vierte Aufgabe. Es ist die Lage zweier Puncte A und B gegeben, deren Verbindungslinie gemessen worden; es soll ein Zwischenpunct I (Fig. 153) gefunden werden.

Man gelangt zu der fraglichen Lage durch eins der Verfahren (§. 120).

Hat man für A $\begin{cases} x = 365{,}42 \text{ Met.} \\ y = 483{,}50 \text{ ,,} \end{cases}$ N. O.

für B $\begin{cases} x' = 4119{,}67 \text{ ,,} \\ y' = 141{,}38 \text{ ,,} \end{cases}$ S. O.

und die gemessenen Abstände AB = 3807,5 Met.
AI = 1238,4 ,,

So findet man:

$$I \begin{cases} x = 1584{,}31 \text{ Met.} \\ y = 280{,}32 \text{ ,,} \end{cases} \text{N. O.}$$

Diese Aufgabe wird beständig bei'm Auftragen des Plans gebraucht. Wenn z. B. zwei Puncte F und T (Fig. 146) in Betracht ihrer beziehlichen Lage nicht auf dasselbe Blatt Papier (wenn der Plan aus mehren Sectionen besteht) gebracht werden können, so ist es nöthig, irgend einen Punct auf der Seite FT durch Rechnung zu bestimmen, der jedoch so gewählt werden muß, daß er auf dasselbe Blatt, wo F oder T, fällt. Man nimmt dann die Hälfte, das Viertel, Fünftel des Abstandes FT und bestimmt die Lage dieses Zwischenpunctes.

In diesem Falle verfährt man folgendermaßen:

man hat (§. 163) F $\begin{cases} x = 5408{,}71 \\ y = 3472{,}15 \end{cases}$

(§. 162) T $\begin{cases} x' = 10993{,}45 \\ y' = 2691{,}74 \end{cases}$

$T\lambda = (x' - x) = 5584{,}74$ $\quad F\lambda = (y - y') = 770{,}41.$

Nimmt man an, daß das Blatt, worauf F sich befindet, erfordert, daß der Zwischenpunct I in einer Distanz von F = $\frac{1}{4}$ FT angenommen werde; so genügt, in Folge der ähnlichen Dreiecke, den vierten Theil von $T\lambda$ und auch $\frac{1}{4}$ $F\lambda$ zu nehmen. Die Lage des Punctes I ist dann:

$$F \begin{cases} x = 5408{,}71 + \frac{1}{4}\, 5584{,}74 = 5408{,}71 + 1396{,}19 = 6804{,}87 \\ y = 3462{,}15 - \frac{1}{4}\; 770{,}41 = 3462{,}15 - 192{,}6 = 3269{,}55 \end{cases}$$

indem man die beziehliche Lage der Puncte F und T berücksichtigt.

Folglich

$$I \begin{cases} x = 6804{,}87 \\ y = 3269{,}55. \end{cases}$$

Hätte man übrigens FT gemessen und zwischen der Messung und den Resultaten der Triangulirung eine Differenz d gefunden, so wird natürlich von dieser Differenz $\frac{1}{4}$ d auf FI kommen und man wird auf FI dieselben Correctionen wie auf FT (§. 121) zu machen haben.

165. — **Aufgabe.** Man kennt die Lage dreier Puncte ABC (Fig. 156) und soll die Lage eines vierten Punctes O bestimmen, an welchem die Winkel α und β, die zwischen den Linien OA, OB und OC liegen, haben beobachtet werden können.

Man bilde das Dreieck ABC und suche dessen Winkel und Seiten (§. 164, 3); lege durch A, C, O einen Kreis, indem man auf AC einen Kreisabschnitt construirt, der den Winkel ($\alpha + \beta$) als Peripheriewinkel faßt. — Es können nun verschiedene Fälle eintreten: die Spitze B kann innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, sie kann in die Peripherie fallen, endlich kann der Punct O in oder außer dem Dreiecke ABC liegen *).

Erster Fall. Die Spitze B fällt in das Innere des Kreises. Man verlängere OB bis an die Kreislinie (in D) und ziehe AD und CD; in dem Dreieck ACD hat man dann den Winkel ACD $= \alpha$, als Peripheriewinkel auf derselben Sehne; desgleichen DAC $= \beta$, und kann sonach das Dreieck ACD lösen, indem man die bekannte Seite AC zur Basis der Berechnung nimmt und den Winkel ADC $= 180^\circ - $(DAC + DCA) als gegenliegenden Winkel des Kreisvierecks hat. — Nunmehr kennt man in dem Dreiecke DAB die Seite AB, kann AD durch Rechnung finden; hat ferner den Winkel DAB $=$ DAC $= \beta -$ BAC und kann auch dies Dreieck lösen. Man hat nun den Winkel ADO, der gleich ACO ist, da er zu seinem Maße den halben Bogen AO hat. Die Berechnung des Dreiecks DCB führt zur Kenntniß des Winkels CDO $=$ CAO, so daß nunmehr die drei Winkel des Dreiecks ACO und dessen Seite AC gefunden sind und die Aufgabe gelös't ist.

Zweiter Fall. Die Spitze B des Dreiecks ABC liegt außer dem Kreise (Fig. 158). — Hier ist ebenfalls ACD $= \alpha$ und CAD $= \beta$. — Man lös't zuerst das Dreieck ADC, dann jedes der Dreiecke DAB und DCB, in welchen man AB und AD und den eingeschlossenen Winkel BAD $=$ BAC $-$ DAC, desgleichen DC und BC und den Winkel BCD $=$ BCA $-$ DCA erhält, so daß sich nun ACO berechnen läßt.

Dritter Fall. Wenn der Punct O in das Dreieck ABC (Fig. 157) fällt, so hat man durch die Verlängerung von BO bis an die Kreislinie in D den Winkel CAD $=$ AOD $= 180^\circ - \alpha$ und den Winkel ACD $=$ COD $= 180^\circ - \beta$. Man berechnet das Dreieck ACD, dann die Dreiecke ABD und BDC, mit

*) Man vergleiche die graphische Lösung dieser (Pothenot'schen) Aufgabe §. 72 u. f.

welchen man AB und AD, BC und CD, desgleichen die Winkel BAD = BAC + CAD, BCD = BCA + ACD erhält. Man hat endlich in dem Dreiecke ABO die Winkel ABD und α und die Seite AB, kann sonach das Dreieck berechnen. — Zur Prüfung wird man das Dreieck BOC benutzen.

Vierter Fall. Endlich kann der Punct B auf der Kreislinie liegen. Dann ist der Punct O unbestimmbar, denn man hat α = BCA und β = BAC, und welchen Punct der Peripherie O auch einnehmen mag, wird sich dies immer gleich bleiben.

Die verschiedenen Lagen des Punctes O und der Spitze B erhellen aus Folgendem: es tritt ein
der erste Fall, wenn α > BCA und B > BAC;
der zweite „ wenn α < BCA und β < BAC;
der dritte „ wenn α und β > 90°; endlich
der vierte „ wenn α = BCA und β = BAC.

Man hat für die vorstehende Aufgabe — welche, wie bereits angegeben, die Pothenot'sche genannt wird — ihrer großen Wichtigkeit in der ausübenden Geometrie wegen, so mancherlei Lösungen angegeben, die graphische Behandlung der in ihr liegenden Fälle mittelst des Meßtisches, welche wir §. 74 und folgende beschrieben haben, stammen von dem königl. sächs. Major Lehmann, der sich große Verdienste um die Behandlung des Meßtisches erworben hat. Wir haben andere, früher gebräuchliche, mittelst eines dreifüßigen Zirkels, des Bauspapiers, einer abgesonderten Hülfsfigur u. a. als weniger practisch übergangen. Unter den analytischen Auflösungen heben wir noch die von Lefébure heraus, theilen indeß noch eine zweite mit, die der Gebrauch eines Hülfswinkels elegant macht.

Erste Auflösung. Wir setzen AB = a, Ac = b, den eingeschlossenen Winkel BAC = A und beginnen damit, ABO = x und ACO = y zu suchen.

In dem Viereck ABOC ist:

$$x + y = 360^\circ - (A + \alpha + \beta),$$

wir kennen sonach die Summe von x und y. Um deren Differenz zu erhalten, betrachte man die Dreiecke ABO und ACO, worin

$$\text{Sin. } \alpha : \text{Sin. } x = a : AO, \quad \text{Sin. } \beta : \text{Sin. } \gamma = b : AO;$$

man setze die Werthe von AO gleich, so entsteht

$$\frac{a \cdot \text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,\alpha} = \frac{b \cdot \text{Sin.}\,y}{\text{Sin.}\,\beta} \text{ oder } \frac{b\ \text{Sin.}\,\alpha}{a\ \text{Sin.}\,\beta} = \frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,y}$$

und nehmen wir $d = \frac{a\ \text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha}$, so entsteht

$\frac{b}{d} = \frac{\text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,y}$, woraus $\frac{b+d}{b-d} = \frac{\text{Sin.}\,x + \text{Sin.}\,y}{\text{Sin.}\,x - \text{Sin.}\,y}$;

endlich $\frac{b+d}{b-d} = \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(x+y)}{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(x-y)}$,

und $\text{tg.}\,\frac{1}{2}(x-y) = \frac{\text{tg.}\,\frac{1}{2}(x+y)\,(b-d)}{b+d}$.

Beispiel. Es sei $A = 101^0\,03'$, $\alpha = 59^0\,18'$, $\beta = 93^0\,11'$; $a = 1878{,}64$ Met., $b = 2648$ Meter.

Zuerst ist $d = \frac{1878{,}64 \cdot \text{Sin.}\,93^0\,11'}{\text{Sin.}\,59^0\,18} = 2181{,}47$ M.

dann $b + d = 2181{,}47 + 2648 = 4829{,}47$ Meter,

$b - d = 2648 - 2181{,}47 = 466{,}53$ -

$\text{tg.}\,\frac{1}{2}(x-y) = \frac{466{,}53\,.\,\text{tg.}\,\frac{1}{2}\,106^0\,28'}{4829{,}47} = 7^0\,22'$

$x = 53^0\,14' + 7^0\,22' = 60^0\,36'$

$y = 53^0\,14' - 7^0\,22' = 45^0\,52'$

und endlich AO = 1903,46 Meter

CO = 1738,18 -

BO = 1894,06 -

Zweite Auflösung. Da die gegenseitige Lage der Dreieckspitzen (Fig. 159) gegeben ist, so sind es auch die Winkel; die Aufgabe kann aber als gelös't betrachtet werden, wenn man einen der Winkel BAO oder BCO kennt. Es sei daher

$$BAO = x,\ BCO = y$$

der Winkel ABC sei durch γ bezeichnet. Dann ist in dem Viereck ABCO

$$\gamma + \alpha + \beta + x + y = 360^0$$

$$x + y = 360^0 - (\gamma + \alpha + \beta) \ldots\ldots 1.)$$

Verfahren wir weiter wie oben, so erhalten wir wieder die Gleichung

$$\frac{a\ \text{Sin.}\,x}{\text{Sin.}\,\alpha} = \frac{b\ \text{Sin.}\,y}{\text{Sin.}\,\beta} = BO$$

und daraus $a\ \text{Sin.}\,\beta\,.\,\text{Sin.}\,x = b\ \text{Sin.}\,\alpha\,.\,\text{Sin.}\,y$, folglich $\text{Sin.}\,x + \text{Sin.}\,y : \text{Sin.}\,x - \text{Sin.}\,y = b \cdot \text{Sin.}\,\alpha + a\,.\,\text{Sin.}\,\beta : b\,.\,\text{Sin.}\,\alpha - a\,.\,\text{Sin.}\,\beta$

oder $\frac{\text{Sin. } x + \text{Sin. } y}{\text{Sin. } x - \text{Sin. } y} = \frac{b \text{ Sin. } \alpha + a \text{ . Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha - a \text{ . Sin. } \beta}$
und den ersten Quotienten in Factoren zerlegt:

$$\frac{\text{Sin. } \tfrac{1}{2}(x+y) \text{ . Cos. } \tfrac{1}{2}(x-y)}{\text{Cos. } \tfrac{1}{2}(x+y) \text{ . Sin. } \tfrac{1}{2}(x-y)} = \frac{b \text{ Sin. } \alpha + a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha - a \text{ Sin. } \beta}$$

d. i. $\text{tg. } \tfrac{1}{2}(x+y) \text{ . cotg. } \tfrac{1}{2}(x-y) = \dfrac{1 + \dfrac{a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha}}{1 - \dfrac{a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha}}.$

Wir setzen nun

$$\frac{a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha} = \text{tg. } \varphi \text{ . . . . . } 2.)$$

welches unbedenklich geschehen kann, weil die Tangenten alle Werthe von 0 ∞ durchlaufen; und erhalten

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(x + y) \text{ . cotg. } \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{1 + \text{tg. } \varphi}{1 - \text{tg. } \varphi},$$

oder dafür

$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(x + y) \text{ . cotg. } \tfrac{1}{2}(x - y) = \text{tg. } (45^0 + \varphi),$
folglich $\text{cotg. } \tfrac{1}{2}(x - y) = \text{tg. } (45^0 + \varphi) \text{ . cotg. } \tfrac{1}{2}(x + y),$

weil $\text{tg.} = \dfrac{1}{\text{cotg.}},$

oder auch $\text{tg. } \tfrac{1}{2}(x - y) = \text{cotg. } (45^0 + \varphi) \text{ . tg. } \tfrac{1}{2}(x + y) \text{ . . . . } 3.)$

Man hat also für den Werth von $x - y$ folgende Formeln zu beobachten:

$$x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma) \text{ . . . . , } 1.)$$

$$\text{tg. } \varphi = \frac{a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } \alpha} \text{ . . . . } 2.)$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(x - y) = \text{ctg. } (45^0 + \varphi) \text{ . tg. } \tfrac{1}{2}(x+y) \text{ . . } 3.)$$

oder auch bloß

$$\text{tg. } \varphi = \frac{a \text{ Sin. } \beta}{b \text{ Sin. } a}$$

$$\text{tg. } \tfrac{1}{2}(x - y) = - \text{cotg. } (45^0 - \varphi) \text{ . tg. } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Diese Formeln lassen sich bequem logarithmisch behandeln, und da der Werth des Hülfswinkels φ durch lauter bekannte Größen ausgedrückt ist, so wird es leicht $x - y$, folglich auch x und y selbst zu finden.

Vorstehende Aufgabe findet in vielen Fällen Anwendung, z. B., wenn man zwei trigonometrische Netze (Fig. 145), die auf jeder Seite eines Waldes liegen und die unmittelbare Anknüpfung nicht gestatten, verbinden will. Es ist augenscheinlich daß, wenn man aus einem Puncte H' des einen Netzes A'B'I, B'I'C' . . . . G'H'F drei Puncte R, P und C des andern Netzes beobachten kann, sich das Dreieck RPC (§. 164 3.) und nach obigem Verfahren die Lage des vierten Punctes H' finden läßt; wobei nicht nöthig ist, daß H' ein Fixpunct des Netzes sei; er kann außerhalb, vielleicht in M' angenommen werden, wenn man nur darauf achtet, daß aus ihm drei Puncte jedes Netzes gesehen werden können.

Wie man in diesem Falle zu verfahren hat, möge Folgendes lehren: man habe K' (Fig. 145) aus den Puncten R, P, C des einen und A', C', H' des andern Systems beobachtet und dadurch die Winkel QRK', FPK' und DCK' der einen, sowie die Winkel I'A'K', B'C'K' und I'H'K' der andern Seite erhalten. Die Coordinatenabstände geben △PQ und △PR, woraus △PK' gefunden wird; aus den Abständen △RQ und △RP erhält man △RK' und so auch △CK'. Es läßt sich daher zuerst das Dreieck RPC bilden und dann kann man die Dreiecke RPK' und CPK' berechnen. Indem man auf gleiche Weise bei dem andern System verfährt, hat man △A'K', △C'K' und △H'K' und kann nun die Dreiecke A'C'K' und C'K'H' lösen.

Der Winkel △ von K'C und K'H' läßt den Winkel H'K'C finden und so wird es leicht, mittelst der Seiten K'C und K'H' auch das Dreieck H'CK' zu lösen, wodurch die beiden Systeme verbunden werden. Begreiflich hängt die Genauigkeit der Operation von der Schärfe des Winkels △ ab, der deßhalb für jedes der Systeme möglichst genau zu bestimmen ist. Die Bussole giebt genügende mittlere Resultate, wenn man eine große Anzahl Stationen auf den Dreiecksseiten der beiden Netze nimmt.

166. — Bei größeren topographischen und Catastervermessungen wird gewöhnlich verlangt, daß die Meridiane und Normalen durch die Hauptpuncte eines trigonometrischen Netzes auf Hauptmeridiane bezogen werden, welche durch Hauptstädte oder Sternwarten gelegt sind. Hierzu sind schon einige astronomische Kenntnisse

erforderlich, und die Operationen mehr Sache der Directoren. Sie übersteigen die Grenzen der vorliegenden Schrift, wir verweisen daher auf andere Werke, wovon wir nur „Handbuch der höhern und niedern Meßkunde von Dr. Fr. W. Barfuß, Weimar" (ein vorzüglich gutes Buch) „Mayer, practische Geometrie" anführen.

167. — Eine andere Methode der Triangulirung durch geometr. Orte. Nach Obigem mußten bei einer Triangulirung die Puncte zu Dreiecken verbunden werden, um deren Lage bestimmen zu können, und sonach in jedem mindestens zwei Winkel und eine Seite gefunden, dann aber noch jeder dieser Puncte auf den durch einen bestimmten Punct gelegten Meridian und die zugehörige Normale bezogen werden.

Die folgende Methode befolgt ein umgekehrtes Verfahren, wobei in den Operationen, welche der Messung vorhergehen, zwar nichts geändert wird, nur daß man dabei selbst die möglichst größte Anzahl von Visuren nach soviel Puncten wie möglich vorzunehmen hat. Es werden dann zuerst die Abstände vom Meridian und der Normale gesucht und aus diesen die Dreiecke bestimmt, wenn die Bildung von Dreiecken nöthig wird.

Um diese neue, von Beuvière, in seinen „Annalen für Forstmänner" aufgestellte Methode zu befolgen, hat man an dem einen Ende der gegebenen Basis die coordinirten Abstände (x und y), die dem Puncte zugehören, den man als Durchschnitt der beiden Axen annehmen will, zu bezeichnen. Diese ersten Distanzen und die Abweichung (△) der Basis dienen, die analogen Abstände des andern Endes zu erhalten. Man hat sonach zwei den Axen verbundene Puncte, an welche man sich stützt, um einen dritten abzuleiten. Verbindet man diesen mit einen der beiden andern oder mit beiden zugleich, so gelangt man zu der Feststellung eines vierten Punctes u. s. f.

Es folgt aus diesem Umstande, daß die Erklärung dieser Methode auf das Verfahren, wodurch man die Ableitung der Winkel oder das △ der Linien und die Bestimmung der Coordinaten (x und y) von dem Meridian und der Normale erhält, zurückgeführt werden kann.

168. — Orientirung der Visirlinien. Diese Orientirung ist von dem Verfahren (§. 161) nur darin verschieden, daß sie unmittelbar auf dem Entwurfe der

Triangulirung vorgenommen wird, nachdem die Beobachtung sämmtlicher Winkel erfolgt ist. Um aber die Abweichung einer Station oder einer Spitze auf eine andere überzutragen, muß man bei Aufstellung der Signale suchen, daß die Spitzen unter sich oder wenigstens paarweise gesehen werden können.

Nehmen wir (Figur 159) an, daß die Abweichung des Strahls A V (der Basis der Operation) $= \triangle$: so genügt, um die aller Visirstrahle von diesem Puncte aus zu erhalten, daß man $\triangle$ allen Winkeln $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ zusetzt. Man hat dann $\triangle AB = \triangle + \alpha$, $\triangle AC = \triangle + \beta \ldots$ und die Abweichung dieser Seiten von den Spitzen B und C wird, nach der Paralleltheorie für die erste $\triangle'$ oder $\Theta' BA = 180^o - (\triangle + \alpha)$ für die zweite $\triangle'' = 180^o - (\triangle + \beta)$, dergestalt, daß, wenn man BC für die Spitze B als Basis der Beobachtung nimmt, man $\triangle BC = \triangle' - \alpha'$ erhalten wird; diese Abweichung muß man allen Werthen beifügen, welche die Beobachtung in B giebt. — Wenn aber die Basis der Beobachtung sich nach einer andern Himmelsgegend hin befände, so muß man, anstatt $\triangle$ den beobachteten Winkeln zuzusetzen, selbige davon abschneiden, wie es in C geschehen muß, wo CA die Basis ist, und wo $\triangle CB = \alpha'' - \triangle''$ und $\triangle CN = \beta'' - \triangle''$ ist.

Daraus folgt, daß $\triangle$ positiv ist, wenn der Visirstrahl $0^o\ 0'\ 0''$ oder die Basis der Operation in den Regionen Nordost und Südwest; und negativ wird, wenn der Strahl in den Regionen Nordwest und Südost liegt. Im Allgemeinen findet das Entgegengesetzte Statt, wenn $\triangle$ ein Complement ist, das heißt, wenn es durch die Normale und den Visirstrahl $0^o\ 0'\ 0''$ formirt wird.

Es ist nützlich, selbst unerläßlich, den Coefficient der Abweichung oder $\triangle$ zu verificiren; man versichert sich dadurch, daß Alles in Uebereinstimmung ist und den Beobachtungen kein Fehler anhaftet. Demungeachtet differiren die Resultate immer um einige Zehnfache von Secunden, und man muß dann das arithmetische Mittel (§. 162) nehmen.

Wenn die Gegend, worin die Vermessung vorgenommen wird, nicht coupirt ist, so stößt man selten auf Schwierigkeiten bei'm Uebertragen der Abweichung auf alle Stationen. Dagegen wird es schwierig, wenn das platte Land oder die Höhenspitzen mit Holz bewachsen sind.

Dann kann man meistens nur dadurch sein Ziel erreichen, daß man Zwischenpuncte nach Bedürfniß annimmt.

Zu größerer Zuverlässigkeit dient, daß man die Abweichung nicht aus zu kleinen Visirlinien ableitet, denn das Abstecken der Signale führt Differenzen in den Winkeln herbei, und auf einen weniger genauen Coefficient $\triangle$; überhaupt ist es am vortheilhaftesten, die Declination durch den längsten der Visirstrahlen um einen Punct herum zu legen.

Diese Bedingung nöthigt dann bei Beobachtung der Winkel auf dem Terrain die Visirlinien auf die möglichst größte Anzahl von Signalen und vorzugsweise auf die entlegenern zu richten. Das Instrument muß dabei die halbe Minute mindestens angeben.

Selten befinden sich bei'm Beginn der Beobachtungen die Signale noch in dem senkrechten Stande, den sie bei ihrer Aufrichtung hatten; da immer einige Zeit zwischen diesen Arbeiten verstreicht, und der Wind und andere Ursachen deren schiefe Richtung veranlassen. Ob man zwar stets bei'm Visiren den Fuß der Signale faßt, so geschieht es doch oft, daß Hecken, Höhen und dergleichen diesen verdecken und man genöthigt wird, nach der Spitze zu visiren, wodurch natürlich Fehler entstehen müssen. Dieses fällt so oft vor, daß man, besonders bei der neuen Methode der Triangulirung, das Princip befolgt, so viel Puncte als möglich anzuvisiren, ohne auf die Form der Dreiecke und darauf Rücksicht zu nehmen, ob diese sich mehr oder weniger von der (§. 143) bestimmten Grenze entfernen.

Wenn man den Fehler des ausgesteckten Signals (Fig. 161) durch einen Kreis ausdrückt, so wird, wenn der Beobachter in A steht, die Größe dieses Fehlers die Hälfte des Kreises = aB betragen. Ist der Standpunct in C in einer Entfernung von B, die mindestens die Hälfte von der nach A ist, so wird sie dieselbe sein, und so kann sie sich auf eine Minute und mehr bei Längen von 1000 Meters ausdehnen. Sie steht sonach in umgekehrtem Verhältnisse der Länge der Visirstrahlen, daher es vortheilhaft ist, nur solche Visirstrahlen zu brauchen, welche dergleichen Fehler auf die kleinstmögliche Grenze beschränken.

Auch ist vorzuziehen, die Abweichung von demselben Puncte zu ziehen, sie durch verschiedene Puncte zu legen und sie auf dieselbe Station zu schließen. Wenn man sonach Fig. 162 $\triangle$ von der Spitze **A** aus zieht und sie nach und nach durch die Stationen **B**,**C**,**D** und **E**, dann durch **G**,**F** und **E** gehen läßt, so muß sich für **DE** dieselbe $\triangle$ ergeben. Findet sich zwischen beiden Resultaten eine Differenz, so ist das arithmetische Mittel zu nehmen (§. 159, 2.); wenn aber $\triangle$ von **DE** geändert oder corrigirt wird, so darf dieses bei dieser Linie nicht allein geschehen, sondern muß sich gleichmäßig auf $\triangle$ der vorhergehenden Strahlen erstrecken.

Angenommen, die Beobachtungen hätten ergeben:

bei'm Winkel	$A = 107^\circ\ 30'\ 30''$	$E = 109^\circ\ 15'$
„ „	$B = 169^\circ\ 1'$	$F = 137^\circ\ 33'$
„ „	$C = 128^\circ\ 59'\ 30''$	$G = 122^\circ\ 30'$
„ „	$D = 125^\circ\ 11'$	

und $\triangle$**AG** oder δ**AG** $= 115^\circ\ 48'$, also dessen Supplement $= 64^\circ\ 12'$ (man nimmt stets $\triangle < 1\ R$), so würde man bei'm Ableiten finden:

$\triangle AB = 107^\circ 30' 30'' - 64^\circ 12' \ldots\ldots = 43^\circ 18' 30''$
$\triangle BC = 169^\circ 2' + 43^\circ 18' 30'' = 212^\circ 20' 30'' = 32^\circ 20' 30''$
$\triangle CD = 128^\circ 59' 30'' + 32^\circ 20' 30'' = 161^\circ 20' \ldots = 18^\circ 40'$
$\triangle DE = 125^\circ 11' - 18^\circ 40' = 106^\circ 31' \ldots = 73^\circ 29'$

dann:

$\triangle GF = 122^\circ 30' + 64^\circ 12' = 186^\circ 42' \ldots = 6^\circ 42'$
$\triangle EF = 137^\circ 33' + 6^\circ 42' = 144^\circ 15' \ldots = 35^\circ 45'$
$\triangle ED = 109^\circ 15' - 35^\circ 45' \ldots\ldots = 73^\circ 30'$

Die Reihe der Stationen **A**, **B**, **C**, **D**
ergiebt also $\triangle$ von **DE** . . . . . . $= 73^\circ 29'$
und die der Stationen **A**,**G**,**F**,**E** . . $= 73^\circ 30'$
die mittlere arithm. Proportionale . $= 73^\circ 29' 30''$.

Folglich ist 30″ der Abweichung bei der ersten Reihe zuzusetzen, von der andern aber abzuziehen; wie mit den Linien so mit den Winkeln, eine Differenz kann da nicht haften bleiben, wo sie sich auffindet, sie muß auf die ganze Folge der Werthe vertheilt werden, aus denen sie hervorgegangen ist; denn geschähe dieses nicht, so würde die Lage der Endpuncte dieses einen Strahls bedeutend verändert werden und nicht dieselben Bedingungen der andern Strahlen behalten. Wenn sonach die Correction jeder andern Declination zugetheilt wird, so ergiebt sich:

$\triangle AB = 43^\circ\ 18'\ 30''$ $\triangle AG = 64^\circ\ 11'\ 50''$
$\triangle BC = 32^\circ\ 20'\ 20''$ $\triangle GF = 6^\circ\ 41'\ 40''$
$\triangle CD = 18^\circ\ 40'\ 20''$ $\triangle EF = 35^\circ\ 45'\ 30''$
$\triangle DE = 73^\circ\ 29'\ 30''$,

indem man sich auf das Zehnfache einer Secunde beschränkt.

169. — Bestimmung der Dreieckspitzen. Wir haben gesehen, daß der Zweck der Triangulirung war, die genaue Lage einer gewissen Anzahl von Puncten zu bestimmen, an welche man die Vermessung anknüpft. Bei der gewöhnlichen Triangulirung gelangt man nur dazu, daß man ein Netz von Dreiecken legt, die man einzeln berechnet. Die Resultate geben den Anhalt zu weitern Berechnungen, durch welche man die Abstände des Meridians und der Normale herleitet. Diese Abstände begründen die Lage der Puncte und der Geometer bedarf keiner andern Elemente zu den Operationen seiner Messung. — Da nun die hier besprochene Triangulirungsmethode diese Distanzen ohne vorgängige Rechnung giebt, so gewährt sie eine Verminderung der Arbeit und einen ansehnlichen Zeitgewinn.

Beuvière wendet zu directer Bestimmung der Lage der Triangulirungspuncte eine Methode an, die sich auf die Eigenschaften der geometrischen Orte und auf die Grundsätze ihrer Anwendung bei Auflösung von Gleichungen gründet.

Die Construction der geometrischen Orte geschieht durch einen Proportionalmaßstab, welcher dazu dient, den verschiedenen Theilen der Figur die ihnen zukommende Stellung zu geben und das Größenverhältniß kennen zu lernen, welches unter ihnen Statt findet; je größer dieser Maßstab ist, d. h., je größer die vertretene Einheit ist, desto mehr ist die Grenze der Theilung hinausgerückt, folglich die zu erreichende Annäherung größer. Da nun die Mehrheit der Aufgaben ihrer Natur nach verlangen, daß die Resultate mit einer großen Schärfe erreicht werden, so muß man im Allgemeinen die geometrischen Orte mit einem sehr großen Maßstabe construiren; diejenigen Aufgaben aber, die eine Triangulirung herbeiführen und wo immer die Puncte sehr weit auseinander liegen, lassen die Bestimmung der Puncte nur selten zu. Beuvière operirt wie folgt:

Er construirt einen vorläufigen Entwurf (§. 150); zieht aber, anstatt ein Dreiecknetz zu bilden, alle Visirstrahlen, die er nach jedem Signal gerichtet hat. Die Basen der Beobachtung oder die mit 0° 0′ 0″ bezeichneten Strahlen, werden durch farbige Linien angegeben. Er mißt mittelst Zirkel die Entfernungen einer Spitze von der andern, so viel, als zu Bestimmung der Lage dieser Spitzen nöthig sind; mit Hülfe dieser graphischen Distanzen, die er vorläufig für genau annimmt und der Declinationen, operirt er wie (§. 111 am Schlusse und §. 113). Hat er 3, 4 oder 5 Visirstrahlen nach einer Spitze gerichtet, so erhält er dann 3, 4 oder 5 Resultate, deren Genauigkeit von der des Entwurfs abhängt. Ist der Entwurf mit Sorgfalt gemacht worden, so differiren die coordinirten Abstände nur um 30 bis 40 Meter; man kann sie hierauf auf ein besonderes Blatt Papier mit sehr großem Maßstabe auftragen. Die Zeichnung der Strahlen, die er mit Hülfe der Abweichung ausführt, bestimmt dann die definitive Lage der Spitzen; es bleibt nur übrig, die Schnitte dieser Zeichnung an eine der bekannten Coordinaten-Distanzen anzuknüpfen.

Man habe zum Beispiel folgende Beobachtungen gemacht:

Manual der Triangulirung, zweite Methode. (Fig. 163.)

Spitzen.	Beobachtungen. Erste.	Zweite.	Dritte.	Mittel der Beobacht.	Abweichung d. Visirstrahlen.
			In B.		
A	0° 0′00″	212°45′30″	51°30′15″	51°30′35″	55°28′30″
C	308 29 30	161 15 30	0 0 00	0 0 00	+3 57 55
D	329 26 00	182 11 30	20 57 30	20 56 40	24 54 30
E	334 11 00	186 57 30	25 43 00	25 42 10	29 40 00
O	348 29 00	201 15 30	40 0 30	40 0 00	43 57 50
			In A.		
B	0° 0′00″	303°59′30″	178°11′30″	0° 0′00″	+55°28′30″
E	13 33 00	317 33 00	191 45 30	13 33 30	69 2 00
O	19 22 00	323 22 00	197 33 30	19 22 10	74 50 40
D	31 56 30	325 56 00	210 8 30	31 56 40	87 25 10
C	56 0 45	0 0 00	234 12 30	56 0 45	21 29 15
F	70 11 00	14 10 00	248 23 00	70 11 00	35 39 30

Spitzen.	Beobachtungen. Erste.	Zweite.	Dritte.	Mittel der Beobacht.	Abweichung d. Visirstrahlen.
	In C.				
A	0° 0′00″	287°31′00″	192° 0′30″	0° 0′00″	+21°29′15″
O	24 30 00	312 2 00	216 30 00	24 30 30	45 59 50
D	38 10 00	325 40 00	230 11 30	38 10 00	59 39 20
E	55 51 30	343 24 00	247 52 30	55 52 10	77 21 30
B	72 28 30	0 0 00	264 29 00	72 28 40	3 57 55
G	331 1 30	258 31 00	163 3 30	331 1 00	82 30 20
F	349 43 30	277 14 00	181 45 00	349 43 30	11 12 50
	In D.				
B	0° 0′00″	235°16′00″	117°29′00″	0° 0′ 0″	+24°54′30″
C	124 45 00	0 0 00	242 14 30		
G	153 27 30	28 42 30	270 57 00		
F	205 57 30	81 12 00	323 26 30		
A	242 31 00	117 46 00	0 0 00		
O	266 6 00	141 20 00	23 34 00		
E	352 23 30	227 38 00	109 52 30		
	In E.				
A	0° 0′ 0″	219°21′00″	81°41′00″		
B	140 38 00	0 0 00	222 19 00		
C	278 19 30	137 40 30	0 0 00		
G	296 49 30	156 11 00	18 30 00		
D	308 16 00	167 38 00	29 56 00		
F	329 0 30	188 22 30	50 41 00		
O	352 30 30	211 52 00	74 11 00		
	In O.				
A	0° 0′ 0″	210°53′00″	118°51′30″		
B	149 7 30	0 0 00	267 59 00		
E	166 40 00	17 32 30	285 31 30		
D	216 8 00	67 1 00	334 59 00		
C	241 9 00	92 1 00	0 0 00		
G	259 10 30	110 3 00	18 1 30		
F	301 2 30	151 55 30	59 54 00		
	In G.				
E	0° 0′ 0″	74° 2′00″	192° 5′30″		
D	352 30 30	66 33 00	184 36 30		
O	328 11 00	42 13 30	160 17 00		
F	285 58 00	0 0 00	118 4 30		
C	76 40 00	150 42 30	268 45 30		
	In F.				
A	0° 0′ 0″	267°38′00″	193°50′30″		
O	70 15 00	337 52 30	264 5 00		
E	92 22 30	0 0 00	286 12 30		
D	105 11 30	12 49 30	299 2 00		
C	155 33 00	63 11 00	349 23 00		
G	166 9 30	73 47 30	0 0 00		

(Man bemerke, daß da, wo in den Repetitionen kein Visirstrahl 0° 0′ 0″ vorkommt, nach einem der Triangulirung fremden Gegenstande visirt worden ist.)

170. — **Construction der geometrischen Orte.** Der vorläufige Entwurf (Fig. 163), welcher nach diesen Beobachtungen aufgetragen worden, hat zur Basis eine Dreiecksseite von 9645,12 Meter; die Lage der Spitzen A und B, welche nach der Formel von Puissant (§. 166) erhalten worden, ist gegeben durch:

$$A \left\{\begin{array}{l} x = 131817{,}53 \text{ M.} \\ y = 44126{,}15 \text{ ,,} \end{array}\right\} \text{S.O.} \quad B \left\{\begin{array}{l} x = 139763{,}94 \text{ M.} \\ y = 38659{,}63 \text{ ,,} \end{array}\right\} \text{S.O.}$$

die aus denselben gefundene $\triangle$ (§. 164, 1) ist:

$$\triangle\, AB = 55^\circ\ 28'\ 30''.$$

Nachdem dieses festgestellt, beginnt man die mittleren Werthe der auf dem Felde gemachten Beobachtungen zu suchen.

Diese Operation unterscheidet sich von der, welche (§. 151) erklärt worden, darin, daß die Winkel progressiv sein müssen, das heißt, daß sie von einem der Strahlen 0° 0′ 0″ der Beobachtungen bis zu 360° gezählt werden müssen, damit die Bestimmung von $\triangle$ jedes beobachteten Strahls erleichtert werde.

Auf diese Weise geben die in A gemachten Beobachtungen:

Für den Winkel BAE.

1. Beobachtung	. .	= 13° 33′ 00″
2. ,,	. .	= 13° 33′ 30″
3. ,,	. .	= 13° 34′ 00″
mittlerer Werth		= 13° 33′ 30″,

den man unmittelbar in die mit „Mittel der Beobachtungen" bezeichnete Colonne einträgt.

Für den Winkel BAO.

1. Beobachtung	. .	= 19° 22′ 00″
2. ,,	. .	= 19° 22′ 30″
3. ,,	. .	= 19° 22′ 00″
mittlerer Werth		= 19° 22′ 10″.

Für den Winkel BAD.

1. Beobachtung	. .	= 31° 56′ 30″
2. ,,	. .	= 31° 56′ 30″
3. ,,	. .	= 31° 57′ 00″
mittlerer Werth		= 31° 56′ 40″

und so fort. Diese Methode ist, wie man sieht, viel einfacher als die (§. 151) erklärte.

Sind die mittleren Winkel bestimmt, so geht man zum Aufsuchen der Abweichungen über.

Man hat $\triangle AB = 55^\circ\ 28'\ 30''$ und da dieser Strahl sich in der Region N. O. befindet, so muß die Größe zu allen Winkeln der Spitze A (§. 167) hinzugenommen werden; folglich ist

$\triangle AB$ . . . . $55^\circ\ 28'\ 30''$
$\triangle AE = 13^\circ\ 33'\ 30'' + 55^\circ\ 28'\ 30'' = 69^\circ\ 2'\ 0''$
$\triangle AO = 19^\circ\ 22'\ 10'' + 55^\circ\ 28'\ 30'' = 74\ \ 50'\ 40''$
. . . .
. . . .
$\triangle AF = 70^\circ\ 11'\ 0'' + 55^\circ\ 28'\ 30'' = 125^\circ\ 39'\ 30''$
$= 35^\circ\ 39'\ 30''$.

Dieser letztere Winkel wird mit der Normale gebildet; man findet ihn stets dadurch, daß man 90° oder 270° von dem Werthe des Winkels abzieht; es ist gut, ihn durch eine besondere Bemerkung auszuzeichnen.

Den Coefficient $\triangle$ der Spitze B erhält man, indem man beachtet, daß der Winkel $AB\delta' = BA\delta = 55^\circ\ 28'\ 30''$, und da der Winkel $ABC = 51^\circ\ 30'\ 35''$, so hat man $CB\delta'$ oder $\triangle BC = 55^\circ\ 28'\ 30'' - 51^\circ\ 30'\ 35'' = 3^\circ\ 57'\ 55''$; da aber der Strahl BC oder 0° 0′ 0″ der Beobachtung vom Punct B (der mittleren Winkel) in der Region S. W. liegt, so ist der Werth 3° 57′ 55″ ebenfalls allen in B bestimmten Winkeln beizufügen.

Die Resultate schreibt man nach einander in eine Colonne des Registers ein, die zu dem Zwecke vorbehalten und mit der Ueberschrift Abweichung der Visirstrahlen versehen wird.

Nach erfolgter Berechnung der Abweichungen vergleicht man sie unter einander und nimmt (§. 167) das arithmetische Mittel. Diese Mittelzahl ist es, die bei den nachfolgenden Rechnungen gebraucht wird. — Die Vergleichung ist ganz einfach, denn es reicht hin, zu bemerken, daß die in A für AC erhaltene Abweichung dieselbe sein muß, die man in C erhalten hat, indem man durch B geht, oder gleich ihrem Complement.

Bevor man zu den Rechnungen und Constructionen, die (§. 169) angezeigt sind, übergeht, hat man vor Allem die Lage von wenigstens drei Puncten des Entwurfs zu wissen nöthig, die zur Basis des Ganzen dienen; denn es ist bei dieser Methode dasselbe, wie bei der ersten, daß es immer ungewiß bleibt, ob ein Punct gut bestimmt ist, so lange seine Lage nicht verificirt worden.

Man macht den Anfang damit, mit Hülfe der Beobachtungen ein großes Dreieck von möglichst guter Bildung zu suchen; in dieser Beziehung erfüllt das Dreieck ABC (Fig. 163) alle Bedingungen. Indem man dieses Dreieck nach dem gewöhnlichen Verfahren berechnet und die Lage der Spitze C bestimmt ergiebt sich:

$$C \begin{cases} x = 139184{,}0 \text{ Met.} \\ y = 47026{,}03 \text{ ,,} \end{cases}$$

Erhält man irgend drei Puncte aus einer größern Triangulirung mitgetheilt, so ist die Bestimmung des obigen Dreiecks unnütz; man knüpft dann diese Puncte an die Abscissen und Ordinatenaxen und bedient sich ihrer zu den folgenden Operationen.

Um die Lage der Spitze D zu bestimmen, mißt man auf dem Entwurfe die Länge CD = 3630 Meter, berechnet mittelst dieses Werthes und $\triangle CD = 59^\circ\,39'\,20''$ aus dem Register das rechtwinkliche Dreieck CDd, wodurch man

$$\begin{aligned} Dd &= 1833{,}71 \text{ Met.} \\ Cd &= 3132{,}79 \text{ ,,} \end{aligned}$$

erhält; folgert hieraus die Lage der genannten Spitze

$$C \begin{cases} x = 139184{,}0 - 1833{,}71 = 137350{,}29 \text{ Met.} \\ y = 47026{,}03 - 3132{,}79 = 43893{,}24 \text{ ,,*)}. \end{cases}$$

Bezeichnet man den Punct, der dieser Lage entspricht durch D,

$$D_1 \begin{cases} x = 137350{,}29 \\ y = 43893{,}24 \;\ldots\ldots\; A.) \end{cases}$$

D_1 gehört offenbar dem Strahl CD an. Damit aber die Richtung dieses Strahls auf das Blatt gezeichnet werden könne, welches zur Construction der geometrischen Oerter dient, muß noch ein zweiter Punct D_2 ungefähr 30 Meter entfernter als der erstere bestimmt werden, indem man wie oben verfährt; man erhält

$$D_2 \begin{cases} x = 137335{,}13 \\ y = 43867{,}35 \;\ldots\ldots\; B.) \end{cases}$$

---

*) Es wird vorausgesetzt, daß die Puncte A, B und C in der Region Südwest liegen.

Man zeichne (Fig. 164) ein Quadrat **abnc** von 50 Meter Seite, rechne **a c** von dem Meridian um 137330 Met. abstehend und trage den Ueberschuß von x (B) = 5,13 Met. von a nach k und von c nach k', und ziehe kk'; nehme ebenfalls a b von der Normale um 43860 Met. abstehend und trage den Ueberschuß von y (B) = 7,35 Met. von k nach D_2. — Ordne gleichmäßig den Punct D_1, d. h. mache av und cv' = 20,29 Meter und vD = 33,14 Met. (A) und verbinde $D_1 D_2$, so ist solches die Linie CD, auf welcher sich der Punct D befinden muß.

Indem man auf gleiche Weise die Richtungen der Strahlen **BD** und **AD** (Fig. 163) sucht, so wird sich der Punct D, der ihnen gemein ist, zugleich auf den drei Geraden D_1 und D_2, D_3 und D_4; D_5 und D_6 (Fig. 164) befinden, folglich in ihrem Durchschnitte liegen. Wenn man aus diesem Durchschnitte D eine Senkrechte $D\alpha'$ auf kk' fällt und $D\alpha'$ zu a k + 137330 nimmt, erhält man die Abscisse der Spitze D; desgleichen, wenn zu $D_2\alpha'$ die Länge kD_2 + 43860 genommen wird, ergiebt sich die Ordinate.

Gesetzt, man habe auf dem gedachten Blatte $D\alpha^1$ = 5,73 Met. und $D_2\alpha$ = 9,99 Met. gemessen, so wird man für die endliche Lage von D erhalten:

$$D \begin{cases} x = 137335{,}13 + 5{,}73 = 137340{,}86 \text{ Met.} \\ y = 43867{,}35 + 9{,}99 = 43877{,}34 \quad " \end{cases}$$

Uebrigens bemerke man, daß sich bei diesen Constructionen die Strahlen selten in einem Puncte schneiden. Die Mängel des Visirens oder der Instrumente bewirken immer eine kleine Unrichtigkeit in der Richtung der Strahlen, wodurch im Allgemeinen verschiedene Schnitte entstehen, wie in dem Puncte E (Fig. 165), wo es dann im Zweifel ist, welcher Schnitt für die Lage des fraglichen Punctes anzunehmen ist. Es steht nun bei der gewöhnlichen Methode fest, daß die Werthe der Winkel, die bei der einen wie bei der andern Methode in Rechnung kommen, bei der Lösung der Dreiecke ACE, ABE (Fig. 154) eine Differenz = $\alpha\beta$ (Fig. 165) auf der gemeinschaftlichen Seite AE hervorbringen, weil (wenn man die beiden Figuren vergleicht, deren eine (Fig. 165) die genaue Zeichnung durch die Winkel giebt, welche von den Visirlinien aus E nach den Spitzen A, B und C gebildet werden) AE in β durch CE und in α durch BE geschnitten wird, man also zwei Werthe von AE erhält.

Die beiden Werthe von BE differiren ebenfalls um eine Größe $\alpha\gamma$, ebenso die von CE, welche aus den Dreiecken BCE und ACE entspringen, um die Größe $\beta\gamma$. Sonach haben die Differenzen, die aus den in E zusammenstoßenden Dreiecken bei der Berechnung sich zeigen, zur Grenze das kleine Dreieck $\alpha\beta\gamma$. Es darf aber bei der gewöhnlichen Methode keiner der Werthe von AE vorzugsweise angenommen werden; die mittlere arithmetische Proportionale muß vielmehr auf eine Distanz führen, welche in Mitten von $\alpha\beta$ liegt; so wie bei BE in die Mitte von $\alpha\gamma$ und ebenso eine auf $\beta\gamma$: so daß man zuletzt zu dem Puncte E als Mittelpunct des kleinen Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ gelangt. Man wird sich daher nicht von der Wahrheit sehr entfernen, wenn man den Mittelpunct der Figuren für den gesuchten Punct annimmt. Liegen Strahlen bedeutend von dem Durchschnitt ab, so läßt sich vermuthen, daß bei ihnen ein Fehler vorgegangen ist, und man läßt sie ganz außer Beachtung.

Nach Obigem erhält man:

$$E \left\{ \begin{array}{l} x = 138001{,}15 \text{ Met.} \\ y = 41755{,}7 \quad \text{„} \end{array} \right.$$

und indem man dieselben Constructionen bei O, F, G vornimmt,

$$O \left\{ \begin{array}{l} x = 135435{,}72 \text{ Met.} \\ y = 43145{,}85 \quad \text{„} \end{array} \right. \qquad G \left\{ \begin{array}{l} x = 137043{,}47 \text{ M.} \\ y = 47254{,}43 \quad \text{„} \end{array} \right.$$

$$F \left\{ \begin{array}{l} x = 134590{,}64 \text{ Met.} \\ y = 46115{,}43 \quad \text{„} \end{array} \right.$$

Die Fig. 166 zeigt, wie sich eine dergleichen Construction für den Punct O der Figur 154 gestalten kann.

Gewöhnlich construirt man die geometrischen Orte mittelst eines Maßstabes, der groß genug ist, um Zehntel abnehmen zu können; es reicht im Allgemeinen der 1 : 500 hin. Wird der Plan aber nach diesem Maßstabe aufgetragen, so muß man wenigstens einen doppelt großen annehmen: der von 1 : 100 genügt aber allen Bedingungen. Das Verfahren gewährt eine große Schärfe, so daß man bei Triangulirungen ersten Ranges davon Gebrauch machen kann. In gewöhnlichen Fällen könnte man sich auf einen einzigen Punct der Strahlen beschränken und man erhält dann den Strahl, indem man den Richtwinkel auf das Beiblatt construirt.

Nachdem man nämlich den Punct D_1 (Fig. 164) festgestellt hat, bildet man den Winkel $cRD_1 = \triangle CD =$ 59° 39′ 20″, womit der Strahl CD auf dem Blatte erhalten wird; stellt man desgleichen den Punct D_4 des Strahls BD auf und macht den Winkel $\alpha R^1 D_4 = \triangle' BD$ $=24^\circ 54' 30''$; dann den Punct D_6 von AD und construirt den Winkel $\alpha R'' D_6 = \triangle AD = 87^\circ 25' 10''$: so ergeben sich die Strahlen BD und AD, die sich, wie vorher, in einem Puncte D scheiden werden. Die Differenz, die in der Lage dieses Punctes in Folge der graphischen Construction vorkommen kann, könnte nur von der Unvollkommenheit des Transporteurs herrühren; befürchtet man, daß sie zu groß sei, so wende man die Tangententafel (§. 105) an.

171. — **Aufgabe.** Es ereignet sich oft, daß man bei Anordnung der Puncte auf dem Terrain, um sie passend zu der Vermessung zu machen, veranlaßt wird, sie in ziemlich tiefe Schluchten zu stellen, die nicht immer gestatten, daß man sie von einer genügenden Anzahl Puncte sehen kann, wie zu deren Bestimmung nöthig ist, oder daß man sie unter passenden Winkeln einvisiren kann; man ist dann genöthigt, die Messung einer oder mehrer Linien zu Hülfe zu nehmen.

Um den Punct O (Fig. 167) zu bestimmen, hat man von A aus nur den Visirstrahl OA nehmen und die Linie BO messen können; man sieht sogleich, daß es zu Lösung der Aufgabe nach Bestimmung von AO hinreicht, aus dem Puncte B mit einem Halbmesser = BO einen Kreisbogen zu beschreiben, der AO schneidend die Lage des Punctes O giebt. — Diese graphische Construction kann jedoch nur ausgeführt werden, wenn BO klein genug ist, um mit dem Zirkel abgenommen zu werden.

Man bewirkt sie dennoch auf dem provisorischen Entwurfe, mißt dann AO auf demselben Entwurfe und berechnet mit Hülfe von $\triangle$AO das rechtwinkliche Dreieck AaO, desgleichen sucht man BbO, indem man den Declinationswinkel von BO mit dem Transporteur mißt.

Man kann also die Coordinaten der beiden Puncte O_1 und O_2 (Fig. 168) bestimmen, von denen O_1 zu Legung des Strahls AO auf dem Beiblatt, der andere O_2 aber des Strahls BO dient; die Richtung des letztern ist jedenfalls ungenau, es handelt sich daher O_2 auf den Strahl AO zurückzuführen. Stellen wir einstweilen die Tangente $O_2\varepsilon$ für den Bogen $O_2\Theta$ und bestimmen die Coordinatenabstände des Punctes ε, so wird dieser Punct zwar nicht vollkommen den Begingungen der Aufgabe genügen, aber doch dienen, die Lage des Strahls OB zu berichtigen, denn indem wir ihn mit dem Anfangspuncte O_1 verbinden, können wir den Winkel $\triangle$ von OB genauer als den mit dem Transporteur gemessenen bestimmen; wir berechnen dann mit Hülfe dieses neuen Winkels und der Distanz OB einen zweiten Punct Θ, der offenbar von der gesuchten Spitze O nicht weit abliegt; diesmal können wir, ohne in der Lage von O einen besonderen Irrthum zu begehen, den Bogen $O\Theta$ $=$ tg. $O\Theta$ annehmen und die Operation darauf zurückführen, daß wir Θ' mit dem Anfangspunct O_1 verbinden, welches sich durch eine, aus Θ auf $\Theta B'$ oder den Strahl OB errichtete Senkrechte macht.

Sollte übrigens das nach der zweiten Operation erhaltene Resultat der Distanz OB eine zu bedeutende Differenz ergeben, schreitet man zu einer weiteren Operation.

Die Auflösung ist so einfach, daß wir eine Anwendung für entbehrlich halten *).

172. — Vergleichung der beiden Triangulirungsmethoden. Die Vorzüge der von Beuvière mitgetheilten Methode sind unbestreitbar; sie gewähren

1) Daß man bei Bestimmung der Spitzen nur vno den auf dem Felde direct gemachten Winkelbeobachtungen ohne irgend eine Abänderung Gebrauch macht, was bei der gewöhnlichen Methode nicht Statt findet, weil man da erst eine Correction mit den Winkeln in Bezug auf die Summe von 2 Rechten jedes Dreiecks, dann aber eine zweite in Betreff der Coordinaten Berechnungen vornehmen muß.

2) Daß die Herleitung der Winkel leichter ist, und weniger Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, als die nach der ältern Methode, um die Dreiecke zu bilden und daraus die Declinationswinkel zu suchen.

3) Erfordert sie weniger Rechnungen; sobald man sich mit den Coordinatenabständen der Spitzen begnügt

---

*) Diese Aufgabe findet häufige Anwendung, auch bei der gewöhnlichen Triangulirungsmethode.

(was im Allgemeinen hinreicht), hat man nicht nöthig, die Dreiecke, welche das Netz bilden, aufzulösen.

4) Daß man mit größerer Leichtigkeit auf dem Beiblatte der geometrischen Orte Aufgaben löset, die, nach gewöhnlicher Methode behandelt, sehr zeitraubende Arbeiten beanspruchen würden.

5) Daß die Feldarbeiten weniger mühsam werden, indem man sich weder an die Form der Dreiecke, noch daran zu binden braucht, daß jede Spitze unter geeigneten Winkeln geschnitten werde, weil es genügt, ein Signal unter Winkeln von 45° bis 135° geschnitten zu erhalten; eine Bedingung von breiter Ausdehnung, die jedem Standpuncte angepaßt werden kann.

Die Lage eines Punctes K' (Fig. 145) kann sonach durch Beobachtungen festgestellt werden, die man bloß in den Puncten R, P und C macht, ohne daß es nöthig wäre, diese Puncte durch Zwischenelemente zu verbinden.

Zwei trigonometrische Netze, die durch dichte Waldung getrennt sind, können sonach durch Beobachtungen aus zwei Puncten des nämlichen Systems verbunden werden. Ein, von jedem Netz aus gesehener Punct M' (Fig. 145) kann ebenfalls zu Anknüpfung der beiden Netze dienen, ohne daß man von der allgemeinen Formel (§. 165) Gebrauch macht.

6) Daß endlich die Construction der geometrischen Orte, indem sie etwas Bildliches ist, dem Nachdenken Körper giebt, somit den Geist von der ermüdenden Abstraction der Ziffern befreit, und die Schätzung und Verbesserung der Fehler erleichtert. Sie erlaubt eine gleichmäßigere Vertheilung kleiner Differenzen, die von entgegengesetzter Berechnung desselben Punctes entstehen; sie leitet bei der Wahl des Mittelwerthes, der am besten die verschiedenen Resultate ausgleicht, und endlich scheidet sie, durch Vereinigung dieser Vortheile, bis auf einen gewissen Punct die Nachtheile aus, die durch zu spitz geschnittene Winkel entstehen.

Wir haben (§. 149 u. f.) die unerläßlichen Bedingungen erörtert, die bei der gewöhnlichen Methode zu sachgemäßer Bestimmung der Puncte eines trigonometrischen Netzes gehören; es wird sonach die Vergleichung beider Methoden leicht.

Wollte man die Triangulirung durch ein Dreiecknetz vervollständigen, und eine Zeichnung oder trigonometrisches Register von derselben Form, wie bei der gewöhnlichen Methode, anlegen, so reicht hin, drei und drei Puncte, deren Lage bekannt ist, zu verbinden, mit Berücksichtigung einer schicklichen Form der Dreiecke, dann aus den Coordinaten die Winkel und Seiten der Dreiecke zu suchen (§. 164). Wir wiederholen jedoch, daß dieses eine überflüssige Arbeit ist.

173. — Dritte Methode der Triangulirung. Lefebure theilt in seiner „Traité d'arpentage II. Theil" ein neues Verfahren bei Beobachtung der Winkel einer Triangulirung mit.

Es besteht darin, das Winkelinstrument immer auf parallele Richtungen zu stellen, d. h., unmittelbar auf dem Terrain die Abweichung des Strahls $0^\circ\ 0'\ 0''$ abzustecken, worauf sich dann die Operation stützt.

Wir haben (§. 169) gesehen, wie man auf der Zeichnung der Triangulirung selbst die Abweichung der Strahlen von einem nach den anderen benachbarten Puncten ziehen kann; hiermit stimmt die Methode Lefebures überein, nur daß man, anstatt dort die Rechnung auf dem Zimmer nach vollständiger Messung der Winkel vorzunehmen, sie hier auf dem Terrain bei gleichzeitiger Beobachtung der Winkel ausführt.

Nehmen wir den Beobachtenden in A (Fig. 160) an, und die Abweichung des Strahls AV sei $\triangle$, so ist $\triangle AB = \alpha + \triangle$, die von $AC = \triangle + \beta \ldots$. Richtet man den Nullpunct des Limbus auf $A\delta$, so werden die Werthe $\alpha + \triangle$, $\beta + \triangle \ldots$ direct durch die Zahl der Abtheilung zwischen diesem Nullpunct und dem Null des Nonius gegeben.

Um die Beobachtungen in B auszuführen, hat man $\triangle BA = \alpha + \triangle AV$ (welches aus der Beobachtung in A bekannt ist), $= \triangle'$; es zeigt dann das Instrument einen Winkel $= \alpha + \triangle AV = AB\Theta$; und man zählt dann die Winkel in B von $B\Theta$ aus. Aber Lefebure hält fest, daß der Nullpunct des Limbus stets nach derselben Seite oder nach dem Pol gerichtet sei. — Man muß daher auf das Entgegengesetzte der Winkel Bedacht nehmen, wenn man eine andere Spitze annimmt, und dann in B auf dem Instrument einen Winkel $= 180^\circ - \triangle AV + \alpha$ (welches von A aus bekannt ist), oder das Supplement von $\triangle AB$ bilden.

Auch ist noch die Theilung des Instruments zu berücksichtigen; denn da diese von der Linken zur Rechten geht, und der Nullpunct des Limbus auf $B\delta'$ gerichtet ist, so muß der halbe Kreis nach Osten von $B\delta'$ aus in Rechnung gebracht werden, so daß der Winkel, den man auf dem Instrumente in B bildet, gleich sein muß $360^o - (\triangle AV + \alpha + 180^o)$, welches aber das Supplement zu 360^o ist, (nachdem man $\triangle$ zwei Rechte zugesetzt hat), das auf dem Instrumente bemerkt werden muß, da der Nullpunct des Limbus immer in paralleler Richtung liegt.

Dieses Princip ist aber nicht allgemein giltig; denn wenn man von B nach C geht, so wird das Instrument für BC eine Abweichung $= 360^o - \delta' BC$ angeben, d. h., es wird einen Bogen $CB\Theta$ + dem Halbkreis im Osten von $\delta'\Theta$ durchlaufen haben; folglich ist der Winkel auf dem Instrumente in C der $\delta'' CB$ oder der in B beobachtete weniger 180^o.

Es ergiebt sich bei dieser Methode, daß, wenn man auf einer Anzahl von Puncten stationirt war und zu den Beobachtungen von den benachbarten Puncten gelangt, man umgekehrte Beobachtungen hat; hiermit ist, wie bei der Bussole, ein Mittel gegeben, Fehler zu erkennen und sich unmittelbar von der Genauigkeit der Winkel zu überzeugen.

Diese Prüfung ist aber auch der einzige Vorzug dieser Methode; wobei wir noch bemerken müssen, daß auch dieser nicht reell ist, wie es auf den ersten Anblick scheint.

Zuerst kann man, da der Visirstrahl $0^o\ 0'\ 0''$ fortwährend auf den Meridian gerichtet ist, die Beobachtungen nicht repetiren, muß sich daher nur an die einzige Angabe des Instruments halten, und hat dann, wenn das Instrument unvollkommen ist, immer nur Näherungswerthe.

Ferner hat man mit Rechnungen zn thun, in welchen die Combination von Winkeln Statt findet, deren Erfolg von dem ruhigen Denken abhängt, was man selten bei der Arbeit auf dem Terrain besitzt; und sind Combinationen nicht glücklich aufgefaßt, so entstehen schwere Fehler, die das Zurückgehen auf schon verlassene Puncte nöthig machen.

Endlich fordert das Verfahren an sich selbst, daß der Feldmesser sich auf dem Terrain einen regelmäßigen Gang vorzeichnet. Er kann nicht auf einem Puncte Beobachtungen machen, wenn dieser Punct nicht bereits von andern aus beobachtet worden und wenn der Abweichungscoefficient nicht vorher bekannt ist. Demnach würde der Geometer, sofern er genau arbeiten will, wenn er die Declination des entferntesten Punctes nimmt (§. 168), sofort aufgehalten werden, oder genöthigt sein, lange und ermüdende Wege zu machen, wobei überdem viel Zeit verloren geht. Wollte er dagegen dergleichen Wege ersparen, so würde er häufig seine Operationen an einen Punct von sehr kurzem Visirstrahl knüpfen müssen, und dadurch manche Veranlassung zu Fehlern geben. — Es werden daher die Vorzüge dieser Methode von den genannten Unvollkommenheiten vollkommen aufgewogen und wir überlassen dem Geometer durch eigene Versuche diejenige der drei beschriebenenen Methoden auszuwählen, welche die meiste Sicherheit in den Resultaten giebt. — Lefebure erwähnt der Mittel nicht, sich Kenntniß der Coordinaten zu verschaffen.

174. — Die Hauptzeichnung und das trigonometrische Vermessungsregister. — Sobald sämmtliche trigonometrischen Berechnungen beendigt sind, und man mit den Größen der coordinirten Abstände im Reinen ist, schreitet man zu der bestimmten Zeichnung und dem trigonometrischen Vermessungsregister.

Die Zeichnung wird nach einem Maßstabe aufgetragen, der für die Größe eines Blattes paßt, um darauf alle Angaben bringen zu können, die zu Auffindung der Puncte auf dem Terrain und um den Gang der Operationen auf dem Zimmer zu verfolgen, nöthig sind.

Die Construction gleicht der (§. 112) für die Ecken eines Polygons angegebenen. Man zieht auf dem Blatte ein System von Quadraten, trägt mit Hülfe der Abstände von dem Meridian und der Normale jede Spitze, die zum Netz gehört, auf und zieht die Verbindungslinien, welche die Dreiecke bilden.

Hat man nach der ersten Methode der Triangulirung gearbeitet, so muß die Zeichnung die Folge von Dreiecken, die abgesteckt und berechnet sind, die Mittagslinie mit Angabe des Orts, durch den sie gelegt, den Declinationswinkel eines der trigonometrischen Strahlen, endlich die Buchstaben oder Zahlen der Bezeichnung der Signale, die sich auf das Register beziehen, enthalten.

Die Grundlinien oder gemessenen Seiten bezeichnet man durch schwarze, die Seiten der Dreiecke erster Ordnung durch rothe starke, die der zweiten Ordnung durch schwächere rothe Linien. Sind der Vermessung Linien unterlegt, welche von einer Landesvermessung herrühren, so giebt man diese blau an.

Geschieht eine Vermessung auf Anordnung der Regierung, so werden oder sind besondere Vorschriften ertheilt, wie die Bezeichnung geschehen soll. Oft wird in solchen Fällen auch der einzuschlagende Weg der Operation vorgezeichnet, und das genau und speciell zu führende Manual muß mit eingeliefert werden.

Wenn die Triangulirung behufs der Vermessung von Waldungen oder Fluren geschieht, so deutet man annäherungsweise die Grenze durch eine punctirte schwarze Linie an, jedoch stets so, daß dadurch keine Verwirrung in der Zeichnung geschieht und daß die trigonometrischen Linien sich stets vor dieser Beigabe auszeichnen.

Ist nach der zweiten Methode triangulirt worden, und man nicht gehalten, auf der Zeichnung ein vollständiges Dreiecknetz zu entwerfen, so kann man sich begnügen, die Hauptstrahlen zu ziehen, die zu der Construction der geometrischen Oerter gedient haben. Man unterscheidet dann gewöhnlich durch Blau die Strahlen 0° 0′ 0″ oder die Basen der Beobachtungen. Die Mittagslinie wird wie oben angegeben; gewöhnlich bezeichnet man sie durch eine schwache schwarze Linie.

Man richtet hierauf das trigonometrische Register nach der (§. 163) angegebenen Weise vor. Es versteht sich, daß dasselbe nur die ersten fünf Colonnen zu enthalten braucht, wenn man nach der zweiten Methode auf die Bestimmung der Coordinaten der Spitzen beschränkt ist. Die fünfte Colonne (der Region) kann wegfallen, sobald man die bei der Theorie der Curven eingeführte Bezeichnung durch + und — anwendet, und z. B. bei der südwestlichen Region, in Bezug auf den Meridian und die Normale, die Coordinaten x und y positiv annimmt. Es ist dann

in der Region	Südwest . . .	$+x, +y$
	Nordwest . . .	$-x, +y$
	Nordost . . .	$-x, -y$
	Südost . . .	$+x, -y.$

Es wird sonach die Lage des Punctes A des Registers (§. 163) bezeichnet werden

A, + 7436,46, — 2941,0 Meter
F, — 5408,71, — 3462,15 =

175. — Aus dem Ganzen, was über die Aufnahme eines Hauptnetzes in dem Vorhergehenden gesagt worden, ersieht man leicht, daß viel auf die Wahl des anzuwendenden Instruments dabei ankommt. Das vorzüglichste bleibt der Theodolit, nach ihm der Spiegelsextant. Wer aber den Meßtisch oder die Bussole dazu benutzen wollte, würde zeigen, daß er mit dem Wesen, den Leistungen dieser Instrumente nicht vertraut ist.

Indessen läßt sich der Meßtisch doch zu einer Triangulirung, einem sogenannten graphischen Netze erster Ordnung, anwenden, wenn die aufzunehmende Fläche einige Quadratmeilen nicht übersteigt.

Zu diesem Behufe ist eine Menselplatte, größer und solider als die gewöhnlichen Detailsmenseln, erforderlich, die, wie sich versteht, auch ein stärkeres und festeres Stativ bedarf; doch überschreitet sie die Größe von 26 bis 30 Zoll nur auf Kosten der Brauchbarkeit. Man hat dazu Platten von Messing, oder hölzerne mit geschliffener Glasplatte belegte vorgeschlagen und oft auch in Anwendung gebracht.

Da auf solche das Papier aber nicht ohne Gefahr des Verziehens aufgespannt werden kann, so muß man entweder die Metallplatte mit einem weißen, harten, mattgeschliffenen Lack überziehen lassen, der zarte Bleistiftlinien annimmt, oder auf mattgeschliffener Glasplatte mit sehr hartem Bleistift (H, H, H) oder Silberstift arbeiten.

Die Unbequemlichkeiten, die in der Natur dieser Materien liegen, machen es immer vorzüglicher, das Tischblatt von einem guten trockenen Holze in drei Kreuzlagen furnirt anfertigen zu lassen und es mit Papier (§. 48a) zu bespannen oder nach Art der französischen Ingenieurs mit einer etwas starken Zinnstaniolplatte zu überziehen, auf welcher man mit einer Stahlspitze Linien zieht.

176. — Das Verfahren bei'm Trianguliren ist analog dem mit dem Theodolit. Man geht von einer möglichst langen und vortheilhaft gelegten Standlinie aus und bestimmt die Dreieckspuncte graphisch auf der Mensel durch Intersection, wobei ein in dem Allignement der Standlinie angenommener dritter Punct zur Controle der Genauigkeit der Schnitte dient. Alle in dem Vorigen

empfohlenen Vorsichtsmaßregeln bei Bestimmung von Dreieckspuncten gelten auch hier.

Sind die Fixpuncte, je mehr je besser, bestimmt, so theilt man das Blatt (ohne es abzuspannen) in die Anzahl von Blätter, als einzelne Menselblätter der Detailvermessung, je nach dem angenommenen Maßstabe, in das Netz fallen und erhält dadurch eine Axenbeziehung der Fixpuncte durch Coordinaten, aus welcher man jeder einzelnen Detailmensel die auf sie fallenden Puncte — nach den Coordinatenmaßen — zutheilt. Das weitere hierüber wird man weiter unten finden, wo von der Detailsmessung gehandelt wird.

Fortsetzung der Vermessung auf den Grund der Triangulirung.

177. — Die specielle Vermessung von Districten, deren Ausdehnung trigonometrische Operationen bedingt hat, erfolgt nach Beendigung dieser. Das Verfahren weicht von dem nicht ab, welches im zweiten Capitel erklärt worden ist, nur daß jedes untergeordnete Dreiecks-System an die trigonometrischen Netzpuncte geknüpft wird. Man kann sonach nach Belieben

die Interfectionsmethode,
die Umziehungsmethode, oder die
des Allignirens

anwenden.

Hat man auf offenem Terrain zu messen, so muß man ausschließlich die letztere wählen, welche die meiste Schärfe und Sicherheit in den Resultaten gewährt.

Allignirungsmethode. Man habe ein Terrain, wie (Fig. 173) aufzunehmen, worin die Puncte A, B, C . . . G bereits trigonometrisch bestimmt sind. Man braucht die dadurch bestimmten Linien weder auf dem Terrain abzustecken, noch nachzumessen, sondern nimmt sie an, wie sie der Trianguleur mitgetheilt hat.

Die Lage des Terrains erfordert, eine Richtlinie ad anzunehmen, um die Krümmungen des Umfangs bestimmen zu können. — Sie knüpft sich eines Theils an den Punct B der Triangulirung, andern Theils an die Verlängerung Aa der Linie AG, welches zu diesem Zwecke gesucht wird.

Hierauf stecke man Df in der Richtung nach B ab; da sich aber diese Richtung von f an zu weit von der Grenze entfernt, so verlängere man AC nach c, um in e d eine Linie abstecken zu können, die brauchbarer sein wird.

Man wird ohne Zweifel die Vortheile erkennen, die durch das Abstecken der Linie Df erhalten werden. Die Linie ist erstlich nach dieser Richtung gelegt, weil sie die Signale D und B schneidet; zweitens giebt deren Zusammentreffen mit Ce, der Verlängerung von AC die Anknüpfung in F. Die Kettenmessung ist dadurch berichtigt, ohne noch einer Messung zu bedürfen.

Man muß immer so viel wie möglich Interfectionen dieser Art benutzen.

Man legt nun ed, dann Ba, die wir zugleich nach d verlängern, um sie mit de zu verbinden; Ba wird ebenfalls so abgesteckt, daß die Senkrechten, die zu Bestimmung der Biegungen nöthig sind, nicht zu lang werden. Diese Linie knüpft sich mittelst der Verlängerung Aa der trigonometrischen Linie GA an; st kann nicht eher abgesteckt werden, bevor man qr gelegt hat, welches leicht ist, wie man aus der Figur sieht.

Es trifft oft, daß das Terrain, wovon der Riß aufgenommen werden soll, ausspringende Theile, wie Eno hat, an deren Ende ein Signal nicht gestellt worden ist.

Man ersetzt diese Unvollständigkeit der Triangulirung durch Verlängerungen, auf welchen man immer eine oder mehre Interfectionen aufsucht. Um demnach den Theil des Terrains, der in das Dreieck Eno fällt, zu vermessen, stecke man En, Verlängerung von EF ab; verlängere auch mE bis in o und ziehe Go, die man bis zum Zusammentreffen mit En ausdehnt. Es ist offenbar, daß die Entfernungen auf dem Plane nicht unter einander zutreffen können, wenn die Messung dieser Linien nicht vollkommen genau bewirkt wird.

Die Verlängerungen on, oE, En werden zugleich mit den Linien Go und mE ohne Unterbrechung des Kettenziehens gemessen, weil auch dieses zu größerer Genauigkeit beiträgt.

Man sieht, daß der Anfang damit gemacht wird, die Richtlinien zu bestimmen, die zu der Aufnahme der äußeren Grenzen dienen sollen. Dieser Gang ist nöthig, weil man dadurch, bei'm Uebergang zu den Details, im

Voraus weiß, an welche Richtlinien die oder jene Linie angeknüpft werden muß. — Was die Linie betrifft, die man zur Messung der Details nöthig hat, so steckt man zuerst die ab, welche, indem sie durch die Ecken der Parzellen gehen, bestimmt sind, andere daran zu binden. — Man hat daher zuerst m'F, FC, dann Fp; hierauf yx und xu' und sofort auszustecken.

Werden die Grenzen von Grundstücken durch parallele, krumme Linien gebildet, wie gewöhnlich bei Ackerstücken, so mißt man diese Grenzen mittelst Linien, die man durch die Curven möglichst senkrecht und so nah an einander legt, daß das Curvenstück zwischen ihnen im Allgemeinen mit einer Sehne eine Bogenhöhe von 5 Decimeter nicht übersteigt; so daß man es ohne große Differenz als gerade annehmen darf, wobei eine oberflächliche Messung einer Bogenhöhe die beste Auskunft giebt.

Um sonach die Feldgrenzen zu vermessen, die in der Figur g, g', F, m', m, g liegen, steckt man die Linien gg', hh', iF . . . . U', mm' ab, die mit den vorher gelegten Richtlinien nf, CF und Fm' verbunden, in jeder Curve Puncte bestimmen werden. Es braucht nicht erinnert zu werden, daß die Curven desto genauer werden, je näher man die Durchschneidungslinien legt.

Bemerkt man, daß die Curven zwischen zwei dergleichen Linien einen zu hohen Bogen macht, so bedient man sich der Hülfslinien, wie rr', die man an das System mittelst einer kleinern Linie ss' anknüpft.

Die Ausbiegungen der Wege, Bäche rc. werden mittelst der nämlichen Durchschnittslinien bestimmt, die man nach Umständen verlängert, wie man in d', r', l', k' sieht, wobei man noch einzelne Senkrechten zwischen jenen Linien mißt, wenn die Biegungen es nöthig machen.

Jede Richtlinie ist benutzbar, und darin liegt die Geschicklichkeit des Geometers; man muß daher bei Anordnung der Anzahl dieser Linien nicht allein überlegen, ob dadurch die Figur genau bestimmt werden kann, sondern daß nur die allernöthigste Anzahl genommen werde, welche die wenigste Messung mit der Kette bedingt.

Wesentlich dabei ist, daß jede Linie an zwei andere geknüpft wird, während diese wieder an jedem Ende verbunden sind, dadurch entsteht ein System oder Scelet, dessen Theile so in einander gebunden sind, daß das Uebersehen einer Linie unmittelbar die Construction des Ganzen hindert. Man muß auch vermeiden, daß diese Linien sich unter zu spitzen Winkeln schneiden, weil sie in diesem Falle auf dem Plane selten genau die Puncte geben. Ist man demungeachtet genöthigt, von dieser Vorschrift abzugehen, so errichte man 30 bis 40 Meter von dem Scheitel ab eine Senkrechte, deren Ende auf der angeknüpften Linie liegt, mißt die Richtlinie und bestimmt dabei dieses Ende und den Fuß dieser Senkrechten, und mißt auch die letztere selbst. Zuweilen dient die Verlängerung einer andern Richtlinie oder einer Feldgrenze dazu, eine solche Linie anzuknüpfen, wenn sie unter so ungünstigen Bedingungen liegt.

Gestattet die Localität die Anbindung der Enden einer Linie der Messung nicht, so macht man von den Intersectionen Gebrauch, wiewohl dieses nur in den dringendsten Fällen geschehen darf, so geben wir doch davon ein Beispiel.

Bei dem Stück Terrain, welches von dem Viereck ACFG (Fig. 173) eingeschlossen wird, steckt man die Linien xz, vx und yx ab, die in x zusammenstoßen. — Wenn eine derselben Verlängerung einer schon vorhandenen Richtlinie sein kann, so wird an Genauigkeit nur gewonnen. Es ist ersichtlich, daß die Lage dieser drei Linien bestimmt wird, wenn man auf dem Plane aus den Puncten v, y und z drei Bögen mit den Radien vx, zx und yx beschreibt, und diese Linien den nöthigen Correctionen unterwirft, im Falle die Messungen nicht vollkommen sein sollten; noch eine vierte Linie e'f' wird zu diesen Correctionen behülflich sein. Man kann ebenfalls die Winkel v, z und y beobachten, jedoch bedient man sich bei dieser Methode selten eines Winkelinstruments, man muß vielmehr suchen, es entbehrlich zu machen und lieber einige Linien mehr abstecken und messen. Es können noch die beiden Linien vu und ub gelegt werden; wenn sich aber der Schnitt zu sehr von dem rechten Winkel entfernt, so ist es unumgänglich nöthig, die Richtung der einen irgendwo anzuknüpfen. Dazu eignet sich ein Punct u', der, mit v verbunden, alle Zweifel in Hinsicht der Lage beider Linien hebt. Ist ub oder vu nicht sehr lang, so kann man die Messung von uu' ersparen.

Wenn sich ein Hinderniß findet und es kann keine Richtlinie bis zu der Geraden geführt werden, woran sie sich binden soll, so kann diese Verbindung oft durch eine Senkrechte Statt finden. Diese darf jedoch nie länger als 50 Meter sein; wäre sie länger, so könnte die Lage der Richtlinie Zweifel unterliegen.

Diese Erläuterungen reichen hin, um sich von der Anordnung der Richtlinien auf dem Terrain zu unterrichten.

Die Richtlinien werden zuerst abgesteckt; man richtet so 100 bis 200 Hectaren (400 bis 780 preuß. Morgen) vor, bevor man zum Messen schreitet. Man muß stets Sorge tragen, durch einen Doppelstab oder ein Piket die Anknüpfungspuncte zu bezeichnen (§. 26), um deren Messung bei'm Messen der Richtlinien nicht zu übersehen. — Die in der Figur beigeschriebenen Maße zeigen, wie man das Croqui einzurichten hat; man bezieht sich dabei stets auf die (§. 87) gegebenen Details.

Zuerst werden immer die trigonometrischen Puncte auf dem Brouillon angegeben, damit man die Linien der Aufnahme, je nach der erfolgenden Messung eintragen kann. Dabei muß man stets eine gewisse Ordnung in dem Gange der Arbeit befolgen, die zugleich auf möglichste Zeitersparniß führt; auch darf keine Linie gemessen werden, bevor deren Endpuncte nicht schon festgestellt sind. Es ist deßhalb zu rathen, die äußeren Linien zuerst zu messen und von ihnen allmälig auf die der Details überzugehen.

Obwohl wir oben bemerkt haben, daß es nicht nöthig sei, die trigonometrischen Seiten weder zu jaloniren noch zu messen, so ist es doch gut, einige in das System zu binden, weil man durch sie die Mittel erhält, unmittelbar die Resultate der Kettenmessung mit denen der Triangulirung zu vergleichen.

Man mißt also GA (Fig. 173), von G ausgehend, nimmt das Maß des Zwischenpunctes z, dann das von A, und setzt die Messung auf der Verlängerung Aa fort, wobei man t bemerkt. In a angelangt, mißt man auf aB fort, indem man die Details der Umfangslinien und die Anknüpfungspuncte b', b, u' und c vermißt und schreibt ebenfalls in das Croqui das Maß der ganzen Richtlinie bis zu dem Puncte B ein; dann geht man bis zu d fort. Man sieht, daß in d die Linie de nicht in das Croqui eingetragen werden kann, weil Ce noch nicht gemessen worden; man muß daher von d abgehen, um Ce zu messen.

Nachdem dieses geschehen, kehrt man nach d zurück und mißt de und die Ungleichheiten des Umfangs. — Hierauf verfolgt man f D bis m, dann mE bis o, geht zurück zum Signal E, indem man der Linie En folgt, welche sich auf dem Croqui mit Hülfe des Signals F feststellen läßt.

Endlich nimmt man den Weg von n auf nG an, wobei man den Punct o bestimmt und die Ausbiegung der Grenzen mißt.

Man mißt Gq, qs und st, dann m'F, FC und Cc und kann dann auch gg', hh', iF . . . . messen, wobei man das Maß der Zwischenpuncte von jeder Akkergrenze bemerkt.

Es ist nöthig, bei der Messung ganz methodisch zu verfahren und die Kettenzieher nie weiter gehen zu lassen, bevor man nicht aufmerksam die Grenzen des Terrains besichtigt und sich versichert hat, daß keine partielle Operation vorzunehmen ist.

Der Brouillon des Terrains wird gewöhnlich nach dem Maßstab aufgetragen, der zu dem Plan gebraucht werden soll, oder nach einem doppeltgroßen, wenn viel Details einzutragen sind. Da eine große Genauigkeit bei dem Brouillen nicht nöthig ist, so bedient man sich anstatt des Zirkels eines getheilten, scharfkantigen Lineals, das dann zugleich dient, die Linie zu ziehen als auch Maße von 5, 10, 20 . . . Meter abzuschneiden. Diese Theilung erleichtert die Bildung der Figur sehr und gestattet gehörige Ordnung in das Beischreiben der Maße zu bringen, welches bei einer Zeichnung nach dem bloßen Augenmaße schwierig ist. Zu Hause müssen die Maße mit Tinte ausgefüllt werden, weil sie mit Bleistift sich zu leicht verwischen, wenn man mehre Tage lang das Croqui auf dem Felde benutzt. — Man gewöhne sich, die Zahlen mit spitzem Bleistift recht deutlich zu schreiben, auch nie das Original des Croqui durch Abschriften ersetzen zu wollen; wenigstens muß man bei dem Auftragen des Plans stets nach dem Original arbeiten.

Wenn die Ausdehnung des Terrains mehre Absteckungen nöthig macht, so vermeide man auf bereits begangene Linien zurückzukommen. Zwei Kettenzüge können sehr verschieden ausfallen und dann nur unsichere

Resultate bei Bildung des Plans bewirken. Wenn man also das Terrain (Fig. 173) nöthig hätte, zu der Vermessung in zwei Theile zu theilen, wovon der eine ACfDnG und der andere ACeBa ist, so darf, wenn man das Brouillon des ersten aufgenommen hat, der zweite nur durch Legung der Richtlinien v'b', vu' . . . gemessen werden, die sich an die trigonometrische Seite AC, welche beiden Abtheilungen gemein ist, anschließen, wo man also zu vermeiden hat, diese Seite nochmals zu messen. Man umgeht jeden Irrthum, wenn man auf der gemeinschaftlichen Linie die Puncte der Richtlinien vorher mit markirten Pikets aussteckt, die zur Bildung des andern Brouillon nöthig scheinen. Oder man stellt von 100 zu 100 Meter Pikets, die alsdann zu Anfallpuncten zu Anknüpfung der Richtlinien oder zu Aufnahme einzelner Partien dienen, die man braucht.

Bei den Operationen auf dem Felde, wie hier angenommen worden, ist es wesentlich eine Besichtigung der speciellen Feldgrenzen vorher zu unternehmen, weil diese in mancher Oertlichkeit in Folge der Bearbeitung nicht immer deutlich zu erkennen sind; man markirt dann jede durch Gruben oder wenigstens in den Endpuncten durch Pikets. Besonders ist diese Grenzbezeichnung auf Wiesen oder in Holzungen nöthig, wo man oft nur den Angaben der Besitzer oder Flurhüter folgen muß. In solchen Fällen verrichten es Löcher oder Pikets nicht allein, man muß dann Jalons zu Hülfe nehmen und die Namen der Besitzer daran schreiben; es ist zuweilen sogar unumgänglich, sich bei der Vermessung von Leuten begleiten zu lassen, die eine genaue Kenntniß der Grundstücke haben. Unter dergleichen Umständen legt man während der Begehung ein Croqui nach dem Augenmaße an, in welches man die Form und ungefähren Maße (nach Schritten) einträgt, sowie alle örtlichen Kennzeichen, welche zu Wiederauffindung der Grenzen einzelner Stücke verhelfen können.

Noch ist ein Punct von Wichtigkeit anzuführen: wenn man zwei Richtlinien xz und py (Fig. 173) gemessen hat, welche die Enden der Parcellengrenzen von echteckiger Form bestimmen und es sind diese Grenzen in das Croqui einzutragen, so ereignet es sich oft, wenn der Feldcomplex groß ist und aus einer großen Anzahl Parcellen von dieser Form besteht, daß man, anstatt die beiden Grenzpuncte g und f zu verbinden, man gf' zieht, sonach die Form von allen folgenden Parcellen verändert wird. Um sich gegen dergleichen Irrthümer, die häufig vorkommen, zu sichern, hilft man sich durch Kennzeichen, die das Terrain selbst giebt, und schreibt bei'm Begehen in das Croqui die Art der Besämung jedes Grundstücks ein. — Fehlen dergleichen Hülfen, so nimmt man seine Zuflucht zu andern Gegenständen, als Bäumen, Rasenhügeln, Gräben, Steinen, und nöthigenfalls müssen die Jalons selbst die richtigen Ackergrengen in dem Croqui vermitteln.

178. — Methode des Umziehens. Wenn man von dieser Methode Gebrauch machen will, so bedarf es nur weniger Abänderungen in dem (§. 29a und 81) erklärten Verfahren. Man geht von einem der trigonometrischen Puncte aus, umgeht dann messend die Grenzen des Terrains oder der Grundstücke bis zu einem andern trigonometrischen Puncte. Man steckt nach Umständen ab, wobei man die Zahl der zu messenden Linien so gering als möglich nimmt.

Die Biegungen der Stücke oder die Details bestimmen sich durch Senkrechte, die Winkel aber werden mit Sorgfalt gemessen und repetirt.

Um die Grenzen des Holzes (Fig. 169) zu vermessen, haben die trigonometrischen Operationen bereits die Lage der Puncte I,F,C,B gegeben; es genügt daher, von dem Signal I auszugehen, zwischen I und F die Linien Ih, hg und gF auszustecken und zu messen, und auf diesen Linien die nöthigen Senkrechten zu errichten, um die Figur der Grenzlinie zu erhalten.

Indessen braucht man nicht allemal von einem Puncte der Triangulirung auszugehen und in einem andern zu schließen; man kann ebensogut den Ausgangspunct auf einer der Dreiecksseiten annehmen, wenn man ihn nur vortheilhaft für die Operation wählt; sowie auch der Punct des Anschlusses auf einer andern Seite oder einer Verlängerung liegen kann. Aus der Figur sieht man ferner, daß zu Bestimmung der Grenze zwischen den Signalen F und B die Richtlinien fe, ec', c'B . . . . gelegt worden sind. Hier hat die erste ihren Endpunct f auf FC; und verfolgt man die Operation weiter, indem c'n, nm, mp Richtlinien werden, so schließt sich die letztere an die Verlängerung von AB in p.

Hat man mehre Anknüpfungspuncte auf einer trigonometrischen Linie, so reicht es nicht hin, den Abstand dieser Puncte von dem einen Signal zu messen, man muß vielmehr die Messung auf die ganze Linie ausdehnen, damit man, wenn diese mit den Resultaten der Triangulirung nicht stimmen sollte, die nöthigen Correctionen in Bezug auf die einzelnen Abschnitte vornehmen kann.

Die Winkel, welche die abgesteckten Linien unter sich bilden, werden mit einem Winkelinstrumente oder der Bussole gemessen; wobei man die nicht übergehen darf, die mit den trigonometrischen Seiten gebildet werden, da sie zur Construction nöthig sind.

Lassen sich von dem Endpuncte einer Messungslinie mehre Puncte der Triangulirung sehen, so ist es nöthig, auch die Winkel zu beobachten, welche diese Puncte an dem gedachten Endpuncte bilden. Man erhält dadurch Rückschnitte, mittelst welchen man sich versichern kann, daß bei'm Kettenziehen keine wesentlichen Fehler vorgefallen sind. Die Aufgabe (§. 80) zeigt die Mittel, auf dem Plane die Beobachtungspuncte aufzutragen, wenn man mit dem Winkelinstrumente gemessen hat und (§. 86) wenn die Operation mit der Bussole geschehen ist. So oft es geschehen kann, müssen die Vermessungsoperationen an die Triangulirung angeknüpft werden. — Man muß das lange Aneinanderreihen von Linien und deren große Anzahl vermeiden; es sind dieses fehlerhafte Dispositionen, die eine beschwerliche Zimmerarbeit mit sich führen und selten gute Resultate geben. Wenn die Beschaffenheit der Gegend bei der Triangulirung nicht gestattet hat, Signale nahe an der aufzunehmenden Grenze aufzustellen, um sich an solche anknüpfen zu können, so ersetzt man deren Mangel durch Verlängerungen. Die Figur 169 stellt ein Beispiel auf, wie man sich in dergleichen Fällen zu verhalten hat. Man sieht, daß die Folge der Linien fe, ec', c'n, nm, mp durch die Verlängerung der trigonometrischen Seite AC bis ec' an die Triangulirung angeknüpft ist.

Läßt sich dieses nicht thun, dann wählt man einen Punct, wie d auf einer Dreiecksseite, zieht Dd und verlängert sie nach e an das System der Detailmessung. — Diese Verlängerungen werden gemessen und können dann auf dem Plane gezeichnet werden.

Wenn eine Grenze aufgenommen werden soll, welche zwei Hölzer trennt, so beginnt man damit, das Holz auf dieser Grenzlinie zu lichten, d. h. man veranstaltet einen Durchhau von 0,5 bis 1 Meter Breite, damit man von einem Winkel zum andern messen und die Winkel ohne zu große Schwierigkeit beobachten kann.

Man muß auch dadurch die Anzahl der Winkel und Seiten zu vermeiden suchen, daß man secondäre Durchhaue und zwar so nahe als möglich der Grenze macht, die, indem sie die zu großen Ausbauchungen derselben abschneiden, Operationslinien von mehr übereinstimmender Länge zulassen. Man folgt dann diesen Durchschnitten mit dem Kettenzuge und bestimmt die Ausbiegungen oder Ecken der Grenze durch Senkrechte. Uebrigens sind die Erläuterungen des zweiten Capitels (§. 77 bis 81) völlig anwendbar auf den besprochenen Fall und entheben eines weiteren Eingehens in die Details.

Bedient man sich der Bussole, so ist es sehr wichtig, daß der durch dieses Instrument angezeigte Winkel genau derselbe sei, der als Declinationswinkel für die Seiten der Triangulirung angenommen worden ist. Man versichert sich dessen, indem man die Declination der Seiten beobachtet, an welche man die Messung anknüpft. Im Falle einer Differenz bewirkt man die nöthigen Correctionen an dem Instrumente, wenn der Limbus beweglich ist, oder bringt auch die Differenz in Rechnung, entweder bei dem Arbeiten auf dem Terrain oder bei'm Auftragen des Plans. — Wir werden ein Mittel angeben, die Lage der Linien der Messung zu corrigiren, wenn deren Winkel mit denen der Triangulirung nicht stimmen.

179. — Methode der Intersectionen. Wir haben (§. 84) bemerkt, daß die Resultate, die man durch diese Methode erhält, im Allgemeinen wenig exact sind. Dieses kommt daher, weil die Lage der Objects nur mittelst der Visirstrahlen bestimmt werden kann, die ihrer Richtung nach nicht ganz zuverlässig sind und sich daher immer in mehren Puncten schneiden. Jedenfalls aber, wenn man diese Methode ausüben will, sei es einer Untersuchung wegen oder zur Aufnahme eines Plans, der keine große Schärfe verlangt, hat man dem Gange zu folgen, der (§. 84) vorgeschrieben worden.

Die Basis der Vermessung sind dann die trigonometrischen Seiten und man stellt sich in den Ecken der

Dreiecke oder in Puncten auf, die an diese Ecken angeknüpft worden sind.

180. — Construction des Plans. Wir haben ebenfalls nur wenige Erklärungen über die Art und Weise der Constructionen der Pläne zu geben, die ein Terrain von größerer Ausdehnung umfassen, indem wir nur auf das dritte Capitel in allen Puncten zu verweisen brauchen. Da die Operationen der Detailsmessnng immer denen der Triangulation untergeordnet sind, ist es von Gewicht, sich streng in den Schranken der letztern zu bewegen.

Man muß annehmen, daß die Regelmäßigkeit eines Plans gänzlich von der Genauigkeit der trigonometrischen Operationen abhängig ist, daher der Geometer nicht zu viel Sorgfalt auf alle Einzelnheiten verwenden kann, welche von diesen Operationen umfaßt werden. Die geringste Nachlässigkeit kann in gewissen Theilen des Plans beträchtliche Verschiebungen bewirken; wie genau auch bei den Kettenmessungen verfahren wird, so ist es doch unmöglich, zu genügenden Resultaten zu gelangen, wenn die Elemente, in welche ihr Spielraum fällt, fehlerhaft sind.

Man fängt damit an, auf dem Zeichnenblatte Quadrate von 500 bis 1000 Meter Seite (§. 112) abzutheilen*); da man sich aber bei Abnahme der Maße von dem Maßstabe leicht irren kann, so ist es nöthig, vor Auftragen der Richtlinien sich Gewißheit zu verschaffen, daß die trigonometrischen Puncte auf dem Plan ihre richtige Stellung einnehmen. Es genügt dabei nicht, die Abstände dieser Puncte unter einander mit den Angaben des Registers zu vergleichen, man muß vielmehr, wie folgt, verfahren:

---

*) Wenn die Triangulirung sich über eine größere Fläche verbreitet, die eine Zeichnung auf mehren Sectionen erfordert, so wird diese Abtheilung in Sectionen schon auf dem trigonometrischen Entwurf gemacht und die Seiten derselben dem Meridian und der Normale gewöhnlich parallel genommen. Auf diese Seiten wird dann natürlicher Weise auch die Lage jedes einzelnen Ortes durch Coordinaten bezogen und es wird dem Detailsvermesser die Größe jeder Section, die in sie fallenden Puncte nach ihrer trigonometrischen Bestimmung und Ordinatenbeziehung mitgetheilt. Dieses sind die Elemente, woran die Detailsmessung sich zu knüpfen hat, und die sonach auch das erste Anhalten bei'm Auftragen des Plans geben.

Es sei (Figur 102) $\alpha\alpha'\beta\beta'$ ein Quadrat von 500 Meter Seite, in welchem der Punct P liegt; die Coordinaten sind:

$$P \left\{ \begin{array}{l} x = 1615{,}18 \text{ Met.} \\ y = 1864{,}27 \text{ „} \end{array} \right\} \text{Südost.}$$

Vorausgesetzt, daß $\alpha\beta$ dem Meridian parallel und von dem ersten Meridian 1500 Meter abliegt; daß ferner $\beta\beta'$ der Normale parallel und ebenfalls 1500 Meter davon entfernt sei, hat man $\alpha p = 1615{,}18 - 1500 = 115{,}18$ Meter von α nach p und von β nach p′ zu tragen; auch wird $p'P = 1864{,}27 - 1500 = 364{,}27$ Meter von p′ nach P getragen.

Um sich nun zu überzeugen, daß man bei den Distanzen αp und $p'P$ nicht gefehlt habe, beachte man, daß $\alpha'\beta'$ um 500 Met. von dem Meridian weiter abliegt, als $\alpha\beta$, also $\alpha' p = 2000 - 1615{,}18 = 384{,}82$ M. sein muß. Nimmt man dieses Maß von dem Maßstabe, so muß es genau mit der Entfernung von α nach p stimmen; sowie p von $P = 2000 - 1864{,}27 = 135{,}73$ Meter abliegen muß. Diese Prüfung ist scharf und gestattet, kleine Differenzen zu verbessern, die durch das Abnehmen von dem Maßstabe entstehen.

Es ist nothwendig, nur gut ausgetrocknetes Papier zu verwenden*) und selbst nicht in einem Local zu arbeiten, wo abwechselnde Temperatur auf den hygrometrischen Zustand des Papiers bemerklichen Einfluß haben kann. Wenn man erwarten muß, daß das anzuwendende Papier zusammentrocknet (welches der gewöhnlichere Fall ist), so kann man den Quadratseiten 0,5 Met. zusetzen (wenn diese Seiten 500 Meter nach einem Maßstabe von 1 : 2500 sind), um dieses Einziehen zu neutralisiren.

Alle Linien der Messung müssen auf das Zeichnenblatt (§. 121) ohne Ausnahme gezeichnet und von 100 zu 100 oder von 200 zu 200 Meter getheilt werden, bevor man sich mit dem Auftragen der Grenzen und der einzelnen Grundstücke beschäftigt. Es muß dieses deßhalb geschehen, weil man im Verlauf der Construction leicht die Lage einer oder mehrer Linien verändert, und

---

*) Besonders darf kein auf Leinwand gezogenes Papier verwendet werden, was nicht Wochen lang an einem trockenen Orte nach dem Aufziehen gelegen hat.

man dann mit den Details vergebliche Arbeit gehabt haben würde.

Das Verlängern, von dem die Rede war (§. 177), erfordert Sorgfalt und Schärfe, zumal wenn die Linien selbst kurz und die Verlängerungen lang sind; in diesem Falle ist es besser, vorher die rechtwinklichen Coordinaten ihrer Enden zu bestimmen. Bei deren Berechnung verfährt man folgendermaßen: wenn die Verlängerungen nicht länger als ein Drittel der vorhandenen Linie sind, zieht man sie auf dem Plane zu gleicher Zeit, als man die Theilung dieser Linien zu 100 Meter macht.

Wir schreiten zum Auftragen der Richtlinien auf dem Plane, wobei die in (Fig. 173) beigeschriebenen Maße gelten und fangen mit **Ga** = 1401,6 an. Man vergleicht den Abstand **GA** = 903,2, weil **GA** zwischen zwei trigonometrischen Puncten liegt; dieser Theil der Linie muß zuerst aufgetragen werden, um sich unmittelbar Rechenschaft von der Genauigkeit der Kettenmessung zu geben.

Wenn eine Differenz Statt findet und diese nicht die zulässigen Grenzen (§. 136) überschreitet, so bestimmt man die Correction auf 100 Met. der Linie; und theilt, nachdem β oder das neunte Hundert bestimmt worden, **G**β in 9 gleiche Theile, die man bis zum 14. fortsetzt, dem man noch 1,6 Meter ansetzen muß, um den Punct **a** zu erhalten. Man muß die Anzahl dieser Theile soviel als möglich zu vermindern suchen, und von dem Grundsatze ausgehen, daß eine Linie desto genauer getheilt wird, je geringer die Anzahl der Theile ist. Man wird daher größere Schärfe erhalten, wenn man **G**β in drei Theile oder zu 300 Meter abtheilt und diese Theile weiter nach **a** zu trägt; der letzte anzusetzende Theil beträgt dann noch 201,6 Meter, wofür man auch von 15. Hundert 98,4 Met. rückwärts absetzen kann.

Man sieht aus den, der Figur eingeschriebenen Maßen, daß **Ga** von **G** ausgemessen worden, es könnte aber auch sein, daß man bei **a** angefangen hätte. Um sich, wie früher, zu versichern, daß das Maß von **Ga** genau ist, hätte man **aA** von **aG** abschneiden und die Differenz auf **AG** setzen, dann die **G** und **A** am nächsten liegenden Puncte der Hunderte eintragen und die Theilung bewirken müssen. Ein Beispiel des in diesem Fall nöthigen Verfahrens giebt die Linie **er**.

Man hat nämlich zuerst $eA = 2088{,}6$ Met., dann $eC = 561{,}2$ Met., also $AC = 2088{,}6 - 561{,}2 = 1527{,}4$ Meter.

Zuerst versichert man sich, daß diese 1527,4 Meter mit dem Plan stimmen (die Differenz darf das Zulässige nicht übersteigen); dann trägt man den C am nächsten liegenden Punct der Hunderttheilung auf, indeß man $\gamma C = eC - 500 = 61{,}2$ (§. 121) macht; dann den Punct ε des Hundert zunächst A, indem man $A\varepsilon = eA - 2000 = 88{,}6$ Met. macht; theilt endlich $\gamma\varepsilon$ in soviel Theile, als Hunderte in $2000 - 500$ sind, oder in 15 Theile, besser zuerst in 5 und dann jeden in 3. Man fährt mit dieser letztern Theilung auf Ce fort, um den Punct e des Ausgangs der Linie, sowie auch auf Ar, um den Punct r zu erhalten.

Man kann voraussehen, daß bei sehr großen Verlängerungen Differenzen in den Resultaten entstehen werden. Dergleichen treffen namentlich die Linien, welche darauf stoßen, wie z. B. mf und de. Es kann sich ereignen, wenn man A nicht scharf hätte sehen können, wie Ce abgesteckt wurde, daß der Punct e etwas über oder unter seiner wahren Lage zu liegen käme. Desgleichen müßte, wenn Ce bei'm Entwerfen des Plans nicht sehr genau gezogen würde, bei'm Anstoßen von de, diese Länge zu klein oder zu groß und bei'm Legen von mf diese zu groß oder zu klein ausfallen. Man müßte also, um Uebereinstimmung in den Plan mit den Terrainmessungen zu bringen, bei Ce dergestalt nachgeben, daß die Messungen so gut als möglich paßten. — Es gehört übrigens zu dergleichen Anordnungen viel Umsicht und man darf sie nicht eher entschieden annehmen, bis man Gewißheit über die richtige Lage der Verlängerungen hat, und muß, wenn die Differenzen einigermaßen bedeutend sind, sogar nicht scheuen, auf dem Felde selbst nachzusehen, wie die Linien treffen müssen.

Man erhält gewöhnlich mehr Richtigkeit in der Construction, wenn man die Meridianabstände der Enden von Verlängerungen berechnet. Sucht man, z. B., die Lage von e (Fig. 173) so ist zuerst:

$$A\left\{\begin{array}{l} x = +\ 47398{,}30 \\ y = -\ 122080{,}93 \end{array}\right. \qquad C\left\{\begin{array}{l} x = +\ 48750{,}76 \\ y = +\ 122795{,}23 \end{array}\right.$$

dann $\triangle AC = 27^\circ\ 50'\ 30''$ . . . . (§. 164. Aufg. 1.)
$AC = 1529{,}6$ Met. . . . . (§. 164. Aufg. 2.)

Da die Kettenmessung 1527,4 gegeben hat, so ist die Differenz = 2,2 Meter.

Folglich ist (§. 120):

$$1527{,}4 : 2{,}2 = eC \ (= 561{,}2) : x$$
$$x = 0{,}81 +,$$

daher:

$561{,}2 + 0{,}81 = 562{,}01$ Met. = das verbesserte eC.

Nimmt man die nöthigen Rechnungen (§. 120, 164 Aufgabe 4) vor, wobei man eC = 562,01 Met. und $\triangle Ce = 27^{\circ}\ 50'\ 30''$ setzt, so findet sich:

$$e\begin{cases} x = 48750{,}76 + 493{,}03 = 49247{,}79 \\ y = 122795{,}23 + 262{,}52 = 123057{,}75 \end{cases}$$

Man stellt sonach den Punct e auf dem Plan, mittelst dieser Distanzen fest; die Eintheilung von eA zu Hunderten geschieht dann direct von e aus.

Wenn die Operationen eine Lage bedingen, wie die Zusammenstellung der Linien En, Eo und Gn, bestimmt man die Lage von n auf gleiche Weise, muß aber vorher die Coordinaten der Endpuncte von fm, dann von mo berechnen, indem man stets die Kettenmessung den Rechnungsresultaten nachsetzt.

Da die Meridianabstände von o bekannt sind, so bestimmt man die von n mittelst $\triangle Go$ und ebenfalls durch $\triangle EF$.

Sind die Linien richtig gemessen, dann müssen beide Resultate übereinstimmen; im Falle einer geringen Differenz nimmt man das arithmetische Mittel.

Giebt man den trigonometrischen Puncten folgende Stellung:

	Zu dem Meridian.	Zu der Normale.
B	= + 49386,21	— 121950,51
D	= + 48934,45	— 124050,62
E	= + 47637,08	— 124093,13
F	= + 48218,56	— 123438,77
G	= + 47015,30	— 122900,15

so erhält man für:

f	= + 49160,13	— 123011,44
m	= + 48897,23	— 124222,01
o	= + 47041,59	— 124032,23
p	= + 47058,21	— 124747,93.

Die Anwendung auf die andern Linien des Plans hat nichts besonderes und wenn man die Erklärungen (§. 120 und 121 und die vorhergehenden) recht inne hat, so findet sich keine Schwierigkeit in der Construction von Figur 173 mittelst der eingeschriebene Maße. — Man lernt zugleich durch diese Construction, wie auf dem Felde verfahren werden muß, um nach Maßgabe der Messung einen derartigen Plan auftragen zu können.

Wenn man die Anordnung der Operationen (Fig. 173) genau prüft, so zeigt sich, daß die Construction des Plans viel hätte vereinfacht werden können, wenn man die Triangulirungspuncte gleich von vorn herein, z. B. A in a, E in n, C in c gestellt hätte. Die Ordnung der Richtlinien wäre fast die nämliche gewesen, aber man würde die vorgängigen Rechnungen erspart haben. Es ist daher ein Vortheil, daß man die Dreieckspuncte auf die Grenzen selbst oder außerhalb derselben stellt, damit die Richtlinien immer zwischen den trigonometrischen Rayons liegen. Hier ist jene erste Anordnung getroffen worden, um unmittelbar ein Beispiel zu geben, welches alle Fälle einschließt.

181. — Anwendung der Alignirungsmethode auf die Vermessung einer Waldgrenze. Die eben beschriebene Methode ist auch bei den Aufnahmen einer Waldung brauchbar, vorausgesetzt, daß die Umgrenzungen frei von Hindernissen sind.

Richtet man von dem Puncte I (Fig. 169) nach E eine Gerade Ih, legt von h aus hg in der Verlängerung von hH (man braucht hH auf dem Felde nicht abzustecken) so läßt sich dann der Punct g mit dem Signal F durch eine dritte Gerade verbinden. Es wird dann möglich, die Krümmungen der Grenze zwischen I und F aufzunehmen, ohne die Winkel in h und g zu messen; ja die Lage der Linien Ih, hg und gF wird sogar besser als durch Vermittelung dieser Winkel festgestellt, denn jede Linie knüpft unmittelbar an die Triangulirung. — Diese Winkel können demungeachtet gefolgert werden, denn es ist (§. 120):

$$\text{Winkel } Ihg = \triangle IE + \triangle hH$$
$$\text{„ } hgF = \triangle hH + \triangle gF,$$

wobei man jedesmal 1 R zusetzt, wenn der zu bildende Winkel ein stumpfer ist.

Die Grenzlinie zwischen B und F kann vermessen werden, indem man zuerst fe annimmt und von e nach D zieht, welches sich in d an die trigonometrische Seite FC anschließt; dann ec′ und c′B absteckt, deren Richtung durch die Verlängerung Cc der Seite AC regulirt wird. In Bezug auf das Stück der Grenze zwischen c′ und p läßt sich die Vermessung durch Abstecken der Hülfslinien c′n, nm, mp bewirken, deren Lage durch die Senkrechten aus n und m auf c′B bestimmt wird.

Diese beiden Beispiele reichen hin, die Möglichkeit zu zeigen, wie die Vermessung eines Waldes ohne alle Instrumente mit Ausnahme der Kette und des Winkelspiegels vorgenommen werden kann, sobald eine Triangulirung auf seiner Grenze Statt gefunden hat.

Bei dieser Anordnung findet immer etwas mehr Kettenmessung Statt, man darf sich aber durch diesen Zuwachs von Arbeit nicht abhalten lassen, weil zu bedenken, daß die Construction des Plans dadurch viel einfacher, leichter wird und die Correctionen der Differenzen schneller geschehen kann. Besonders gewährt es viele Vortheile bei allgemeiner Grenzberichtigung von Hölzern, wo die Anführung der Messungsoperationen in dem Protocolle vorzüglich den Zweck hat, die Grenzen im Falle eines Eingriffs berichtigen zu können.

182— Von der Wiederherstellung der Puncte eines trigonometrischen Netzes auf dem Terrain. Die Geometer oder Sachverständige, die ernannt werden, die Anwendung des Plans an Ort und Stelle vorzunehmen, wissen, welche Schwierigkeiten dabei obwalten, wenn der Plan nur die Größe der Linien und der Winkel angiebt. Man ist im Allgemeinen genöthigt, eine Gerade AB (Figur 97) von einem festen Puncte nach einem andern zu legen, auf dem Plane Senkrechte aus den Ecken C, D, E, F der Grenzlinie auf diese Basis zu fällen, auf dem Maßstabe die Abscissen und Ordinaten abzunehmen und endlich diese Maße auf das Terrain überzutragen. Ist jedoch der Plan nach einem kleinen Maßstabe gezeichnet, z. B. im Verhältniß 1 : 5000, so können diese Messungen nur ungenau werden und die Grenze erhält eine ganz andere Figur, als sie ursprünglich hatte.

Viel leichter ist die Herstellung der Messung auf dem Terrain, wenn die Alignementsmethode angewendet worden war und es beschränkt sich die Schwierigkeit nur anf das

Aufsuchen der Signalpuncte. Hat man dabei Sorge getragen, in die Triangulirung feste Puncte, wie Kirchthürme, Bäume, Ecken oder Essen von Gebäuden aufzunehmen, so lassen sich die Signale ohne große Mühe wieder auffinden; indem schon zwei dergleichen Objects hinreichen können, die Lage einer großen Anzahl Vermessungslinien herzustellen.

Aufgabe. Es sind die beiden Thurmspizzen A und B (Fig. 170a) ihrer Lage nach bekannt, man will den Signalpunct C auf dem Terrain aufsuchen, der zwar aus der Vermessung bekannt, auf dem Terrain aber verwischt ist.

Man weiß die Winkel und Seiten des Dreiecks ABC. Steckt man D und E beliebig, jedoch so aus, daß DE die Seite AC und CB des Dreiecks ABC schneiden muß, mißt DE und beobachtet die Winkel ADB, BDE, AEB und AED, so lassen sich die Dreiecke DEA, DEB und EAB (§. 166, 1.) berechnen, der Winkel DAf bestimmen und das Dreieck DfA lösen. Nachdem Df bekannt, steckt man dieses Maß ab, verlängert Af um eine Länge fC = AC — Af, so ergiebt sich der gesuchte Punct C.

Zur Prüfung kann man das Dreieck BgE berechnen und Bg um gC = BC — Bg verlängern.

Hat man drei bekannte Puncte A, B, D (Fig. 170), so läßt sich C nach (§. 165) finden.

Man stellt sich etwa in E auf, wo die bekannten Puncte sichtbar sind, bestimmt die Lage von E durch die Winkel AEB und BED und sucht mit Hülfe der Coordinaten von E und C den Winkel DEC, der zu Berechnung des Dreiecks DEC nöthig ist. Bildet man nun auf dem Terrain den Winkel DEC und trägt das Maß von EC auf, so ist der Punct C gefunden.

Zeigten sich bei diesem Verfahren Schwierigkeiten, so ließ sich das Dreieck DgC berechnen, g wie oben ausstecken und mittelst der Verlängerung gC von AC der Punct E mit vollkommener Schärfe finden.

Auf ähnliche Weise lassen sich Richtlinien auf dem Terrain wieder finden; man fängt stets bei den größten an, um auf die Linien des Details zu kommen.

183. — Man soll auf dem Terrain Linien der Detailmessung herstellen. Die Herstellung solcher Linien erfordert einige Aufmerksamkeit. Man hat sich dabei der Verfahrungsweisen zu erinnern, die bei deren

Auftragen auf den Plan angewendet wurden und verfährt ebenso auf dem Felde. Man darf sich bei diesen Operationen jedoch nicht damit begnügen, einzelne Stücke der trigonometrischen Linien zu messen, die zur Anknüpfung der Messungslinien unentbehrlich sind, sondern muß stets die ganzen Linien abstecken. Wenn also zwei Linien e f, e d (Fig. 169) an die Linie FC anstoßen, so ist es nicht genug, daß man Fd abmißt, es muß vielmehr die Messung bis C verfolgt werden. Diese Nothwendigkeit wird dadurch bedingt, daß vielleicht die Kette nicht ganz genau dieselbe der frühern Messung ist, oder daß die jetzige Messung nicht vollkommen mit den Resultaten der Triangulirung stimmt; es würde sich dann für Fd, wenn nur dieses Stück gemessen würde, eine nicht zu verbessernde Differenz ergeben, weil man nicht die ganze Länge FC kennt.

Wollte man also das Liniensystem zwischen den beiden trigonometrischen Puncten F und B abstecken, so sieht man bei Betrachtung des Plans, daß die Signale A, B, C, D, F dazu nöthig sind und man sonach mit Aufsuchung dieser Signalpuncte (§. 182) beginnen müsse; dann steckt man mit Sorgfalt FC ab, welches man mißt, indem man in f und d Pikets nach den Maßen, die der Plan vorschreibt, stellt. Da aber diese Kettenmessung, wie man annehmen kann, nicht vollkommen mit der frühern stimmen wird, so stehen auch die Pikets d und f nicht vollkommen auf der ihnen zukommenden Stelle und man muß schließen:

das frühere		neu gemessenem		das frühere		dem neuen
CF	:	CF	=	Fd	:	Fd.

Hieraus ergiebt sich die Differenz zwischen dem ältern und neuabgesteckten Fd, und es genügt, den Punct d nach Maßgabe der Differenz weiter vor oder zurück zu stellen.

Ebenso findet man den Punct f. Sind nun die Puncte d und f bekannt, so verlängert man Dd um die Linie = de und AC um die Länge = Cc, indeß man stets Ac ganz mißt und die Maße wo nöthig corrigirt; man hat dann nur noch fe und ec abzustecken, welche letztere man nach c′ verlängert und endlich c′B legt.

Wenn die Detailsmessungen innerhalb des trigonometrischen Netzes liegen, wird die Aufsuchung der Richtlinien viel leichter; denn wenn man sorgfältig die trigonometrischen Linien abgesteckt hat, setzt man, wie bereits erklärt, die auf diesen Linien liegenden Puncte fest, die zu den Richtlinien gehören, jalonirt dann die letzteren und operirt auf ihnen, wie man auf den Dreiecksseiten gethan hat. Man geht nach und nach zu andern Linien über, bis man endlich zu den letzteren gelangt.

184. — **Correctionen, die bei den Winkeln der Detailsmessung zu machen sind, wenn die Constructionen nicht stimmen.** Die Uebereinstimmung der Operationen, wobei Winkel in Bezug kommen, ist oft ernsten Schwierigkeiten unterworfen: selten ist es, wenn eine Folge von Linien Ivut . . . . oK construirt wird, die sich an die Endpuncte I und K anschließt, daß man genau in den Punct des Anschlusses gelangt; besonders tritt dieser Fall ein, wenn man die Winkel mit dem Winkelmesser bestimmt hat. Wir haben (§. 109) gesehen, wie man durch ein graphisches Verfahren die Resultate zwei entgegengesetzter Reihen verknüpft; desgleichen wie die Werthe der Linien corrigirt werden müssen, um deren Summe mit der gegebenen Distanz übereinstimmend zu machen. Wenn man aber in die Nothwendigkeit versetzt wird, die Größe der Winkel anpassen zu müssen, dann wird die Operation kitzlich.

Es sei (Fig. 171) von K nach M eine Grenze, ein Weg ꝛc., deren Ausbiegungen mittelst der Richtlinien MD, DE, EF, FG und CK aufgenommen worden, wovon die Puncte K und M ihrer Lage nach durch die Triangulirung gegeben sind; wenn man aber MD, DE . . . CK auf den Plan trägt, findet sich eine Abweichung = KK'. Die Winkel D, E, F, G sind mit einem Winkelinstrumente gemessen.

Die Ursachen, welche diese Abweichung verursachen, sind hauptsächlich in dem Visiren zu suchen, und sind für jede Spitze dieselben, so daß das Verrücken des Fernrohrs welches in dem Winkel M den Fehler verursacht hat, eben so bei'm Visiren von E aus dem Puncte D geschehen ist, obschon die Strahlen MD, DE in der Länge verschieden sind. Weil die Fehler gleich sind, so muß, wenn man E' um eine Größe D'D — ε versetzt, auch E um E'E — 2ε, F' um FF' — 3ε . . . . ꝛc. versetzt werden.

Wenn man sich also vorstellt, daß die Strahlen aus den Puncten E',E, F',F, G',G . . . . gezogen sind, so werden die Correctionswinkel D'MD = ε, E'ME = 2ε F'MF = 3ε . . . . K'MK = $n\,\varepsilon$ sein. Dieser letzter, ist offenbar gleich der Abweichung, die sich bei der Construction gefunden hatte; berechnet man diesen, so hat man die Größe aller übrigen.

Man erhält diesen Winkel mit hinlänglicher Genauigkeit, indem man MK' und KK' auf dem Plan abnimmt und die Formel (§. 85) anwendet. Für die andern beschreibt man aus M die Bogen d, e, f, g, welche durch die Spitzen D', E', F', G' gehen, dann macht man D'D $= \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ K'K, E'E $= \frac{2}{n} = \frac{2}{5}$ K'K, F'F $= \frac{3}{n} = \frac{3}{5}$ K'K . . . ., weil 5 die Anzahl der Spitzen ist. Endlich werden die Correctionswinkel durch dieselbe Formel (§. 85) erhalten, indem man für den ersten die Länge D'M, für den zweiten E'M, für den dritten den Abstand F'M ꝛc. mißt. Die Resultate werden abgezogen, wenn K' über K liegt, und werden addirt, wenn dasselbe unterhalb liegt.

Sind die Winkel mit der Bussole beobachtet worden, dann ist der Fehler K'K gemeiniglich durch die veränderte Abweichung der Nadel entstanden. Der Irrthum ist dann constant und gleich KMK'.

Wir nehmen, wie oben, eine Folge von Linien MDEFGK (Fig. 172) an, deren Endpuncte durch die Triangulirung bestimmt sind, so daß

$$K \begin{cases} x = -\ 115235{,}7 \\ y = +\ \ 51035{,}5 \end{cases}$$

$$M \begin{cases} x = -\ 116306{,}2 \\ y = +\ \ 51441{,}5 \end{cases}$$

Bei'm Auftragen der Richtlinien MD, DE, EF.... CK auf den Plan, fällt das Ende der letztern in K', statt in K; also ist $\varepsilon =$ KMK'.

Der Werth ε wird erhalten mittelst der Coordinaten der drei Puncte K, K' und M (§. 164, Aufg. 3) und ist

$$\varepsilon = \triangle MK \pm \triangle MK',$$

je nachdem K' ober- oder unterhalb K fällt. Berechnet man die Lage der Spitzen (§. 111) nach den mit der Bussole gemessenen Winkeln, so ist

$$D \begin{cases} x = -\ 116035{,}0 \text{ Meter} \\ y = +\ \ 51494{,}2 \quad " \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ll}
E & \left\{ \begin{array}{l} x = -\ 115714{,}4 \text{ Meter} \\ y = +\ \ \ 51399{,}0 \ \ = \end{array} \right. \\
F & \left\{ \begin{array}{l} x = -\ 115625{,}5 \ \ = \\ y = +\ \ \ 51257{,}9 \ \ = \end{array} \right. \\
G & \left\{ \begin{array}{l} x = -\ 115886{,}4 \ \ = \\ y = +\ \ \ 51049{,}7 \ \ = \end{array} \right.
\end{array}
$$

und für K', $x = -\ 115237{,}8 \quad y = +\ 51087{,}6$ . . (1.)
für K aber $x = -\ 115235{,}7 \quad y = +\ 51033{,}5$ . . (2.)

Differenz . . . 2,1 . . . 54,1.

Nimmt man von (1) mit M, $\triangle$MK', so ergiebt sich $18^{0}\,19'\,40''$
und von (2) mit M, $\triangle$MK = = = $20^{0}\,51'\,50''$

daher KMK' = ε = . . $2^{0}\,32'\,10''$.

Es giebt daher die Bussole, womit die Richtung der Linien MD, DE . . . . GK gemessen worden, eine Verschiedenheit der Declination mit dem trigonometrischen Strahl MK kund, von $2^{0}\ 32'\ 10''$. Damit sonach K' auf MK falle, muß, je nach der Lage des Richtwinkels der Linien, dieser Werth ε zu jedem dieser Winkel zugesetzt, oder abgezogen werden. In dem vorliegenden Falle kommt also

$$
\begin{array}{rl}
\text{DM}\delta \text{ oder } \triangle\text{MD} & = 79^{0}\ 0' + 2^{0}\,32'\,10'' = 81^{0}\,32'\,10'' \\
\triangle\text{DE} & = 73^{0}\,27' - 2^{0}\,32'\,10'' = 70^{0}\,54'\,50'' \\
\triangle\text{EF} & = 32^{0}\,12' - 2^{0}\,32'\,10'' = 29^{0}\,39'\,50'' \\
\triangle\text{FG} & = 38^{0}\,35' - 2^{0}\,32'\,10'' = 36^{0}\ 2'\,50'' \\
\triangle\text{GK} & = \ \ 3^{0}\,21' - 2^{0}\,32'\,10'' = \ \ 0^{0}\,48'\,50''.
\end{array}
$$

Construirt man mit diesen letztern Werthen die Linien MD, DE . . . . GK' von Neuem auf dem Plan, so wird der Punct K' genau auf K fallen.

Wenn in dem Falle, wo eine Differenz in der Messung mit der Kette läge, die Correction gefunden werden soll, so hat man folgends zu verfahren:

Man vergleicht zuerst die beiden Längen MK und MK', welches nach (§. 164, Aufg. 2.) giebt:

$$
\begin{array}{rl}
\text{MK} & = 1145{,}6 \text{ Meter} \\
\text{MK}' & = 1125{,}5 \ \ = \\ \hline
\text{Differenz} & = \ \ \ 20{,}1 \ \ =
\end{array}
$$

und nach der Proportion (§. 109)

$$1125{,}5 : 20{,}1 = 100 : x$$

$$\text{MD} = 276{,}3 + (276{,}3 \times x) \text{ rc.},$$

bei'm weiteren Verfahren ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
MD &= 281{,}23 \text{ Met.}\\
DE &= 340{,}37 \text{ ,,}\\
EF &= 169{,}78 \text{ ,,}\\
FG &= 339{,}76 \text{ ,,}\\
GK' &= 661{,}30 \text{ ,,}
\end{aligned}
$$

Berechnet man mittelst dieser Werthe und den verbesserten Abweichungen die Coordinaten von Neuem, so erhält man

$$
\begin{aligned}
D &\begin{cases} x = -\ 116028{,}0 \text{ Met.}\\ y = +\ \ 51482{,}9 \text{ ,,}\end{cases}\\
E &\begin{cases} x = -\ 115706{,}3 \text{ ,,}\\ y = +\ \ 51371{,}6 \text{ ,,}\end{cases}\\
F &\begin{cases} x = -\ 115622{,}3 \text{ ,,}\\ y = +\ \ 51224{,}1 \text{ ,,}\end{cases}\\
G &\begin{cases} x = -\ 115897{,}0 \text{ ,,}\\ y = +\ \ 51024{,}2 \text{ ,,}\end{cases}\\
K' &\begin{cases} x = -\ 115235{,}8 \text{ ,,}\\ y = +\ \ 51033{,}5 \text{ ,,}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Differenz von 20,1 Meter, welche für **MK** angenommen worden ist, übersteigt die bei Linienmessungen zulässige bedeutend, und ist gesetzt worden, um die Vortheile des Verfahrens recht klar zu machen. Es leuchtet ein, daß ein Plan, wo die Messungen so wenig mit den Resultaten der Triangulirung stimmen, nicht zugelassen werden darf. Die Messung einer einzigen Linie würde hinreichen, die groben Unregelmäßigkeiten zu entdecken, welche in dem Plane liegen.

Dieses Verfahren gewährt ansehnliche Vortheile bei dem Auftragen des Planes, wenn man auf der getrennten Grenze zweier Holzungen operirt hat; überhaupt wenn ein Punct wie **K** (Fig. 169) von zwei Spitzen **A** und **G** des trigonometrischen Netzes aus beobachtet worden ist. In diesem Falle, wo die Grenze nicht anders als durch die Umgangslinien **Iv, vu, ut . . . . oK** vermessen werden konnte, ist es klar, daß, wenn die Bussole nicht die nämliche Abweichung, wie auf dem Strahl der **I, K** verbindet hat, es unmöglich ist, diesen Linien auf dem Plan die gehörige Lage zu ertheilen.

Ein Wald kann mit anderen Holzparcellen zusammenhängen, ist er aber hinreichend mit Wegen oder Durchhauen durchschnitten, so kann die Triangulirung im Innern Statt finden, wenn man auf den Kreuzungen **A, B.... G** der Wege rc. (Fig. 174) Signale aufstellt.

Bei der Detailmessung mißt man sorgfältig die Verlängerungen der verschiedenen trigonometrischen Seiten bis zu den Puncten b, c, d . . . der Waldgrenze; es wird dann leicht, den Umfang von b bis c, c bis d ꝛc. zu umziehen und mit Hülfe jenes Verfahrens die Detailmessung den Resultaten der Triangulirung ohne Störung anzuschließen.

185. — **Vermessung der Städte und Dörfer.** Dasselbe Verfahren (§. 184) kann auch bei der Vermessung von Ortschaften benutzt werden, wo die Anhäufung von Gebäuden eine gewünschte Absteckung von Richtlinien nicht gestattet. Man kann bei dergleichen Objecten ein trigonometrisches Netz bilden, dessen Dreieckspitzen, so viel als möglich an den Ausgängen der Hauptstraßen liegend, zu Anknüpfung der Folgen von Linien dienen, die man in dem Innern nimmt. Eine Uebersicht von den dabei nöthigen Operationen giebt die Fig. 175. Hier sind zuvörderst die Signale A, B, C . . . . G dergestalt aufgestellt, daß man einen Punct K von jedem aus sehen kann; auch kann man nach Befinden ein paar Puncte innerhalb nehmen. Alle Detailmessungen werden nun an diese Signale oder an sie verbindende Linien angeknüpft. Allerdings sind dergleichen Vermessungen von denen in Ebenen sehr verschieden. Jedes Gehöfte tritt in Gestalt eines Polygons auf, welches mit den anliegenden eine oder mehre Seiten gemein hat.

Es ist gut, nach einer gewissen Ordnung zu verfahren; und zwar beginnt man mit dem Abstecken einer gebrochenen Linie wie A a b c d in der Hauptstraße, die sich mit ihren Endpuncten an das trigonometrische Netz anschließt. Von ihr aus führt man eine zweite dergleichen f g h i, dritte und mehre g o p q r, s t u, m u q und gelangt so zu den Linien k l', k l . . . . einer niedern Ordnung. Die letztere legt man so, daß sie die Objecte in einen möglich kleinsten Raum einschließen. Man benutzt bei solchen Gelegenheiten Oeffnungen, Thüren ꝛc. die freien Durchgang und leichtes Kettenziehen gestatten.

Die Scheitel der Winkel und Anknüpfspuncte bezeichnet man durch starke Pikets von Holz oder eiserne Pfählchen, die tief eingetrieben werden.

Man hat sich bei'm Messen der Häuser vor dem überflüssigen Messen zu hüten; da die Gebäude meistens rechtwinkelig sind, so sind in der Regel zwei Senkrechte nach den Ecken der langen Fronten hinreichend und man braucht nur noch die Tiefe des Hauses zu messen, um es auftragen zu können. So sind (Fig. 176) die beiden Senkrechten p', q' auf der Richtlinie AB nach den Ecken p, q und die Breite m genügend zum Zeichnen des Gebäudes M. Findet sich ein kleiner Anbau an demselben, so läßt sich auch dieser durch die Maße qr und rs (Fig. 177) construiren.

Oft läßt sich von Senkrechten kein Gebrauch machen: dann verlängere man die Seiten tp, rq bis an die Richtlinie AB (Fig. 178), messe die Enden p' und q' der Verlängerungen, dann die Abstände pp', qq', sowie die Breiten m, m .... Das Auftragen geschieht, indem man auf die Richtlinie AB zuerst die Maße setzt, welche p' und q' bestimmen, sodann aus diesen Puncten Bögen mit den Radien pp' und qq' beschreibt und an diese eine Tangente pq zieht; errichtet man auf letzterer die Senkrechten qq', pp', so schließt sich die Construction mit Hülfe der gemessenen Breiten m, m .....

Fig. 179 zeigt eine häufig gebrauchte Anordnung bei Vermessung von Gebäuden gegen die Richtlinie AB, wozu die aufgenommenen Maße beigeschrieben sind.

Es kann ein Gebäude unzugänglich, seine Seiten aber von vier entlegenen Richtlinien aus, die in das Vermessungssystem gehören, sichtbar sein; so läßt sich dessen Lage durch die Verlängerung seiner Façaden nach den Richtlinien bestimmen. Die Figur 180 stellt ein dergleichen Beispiel auf; es reichen hier die Allignements aa', bb', cc', dd' aus, das Gebäude M auf dem Plan zu zeichnen. Fände sich nach demselben ein kleineres Haus N, so kann dessen Stellung mit Hülfe eines dieser Allignements bestimmt werden.

Es ist nicht nothwendig, zur Aufnahme einer Stadt- oder Dorflage ein besonderes trigonometrisches Netz zu legen, wenn sie sich in dem Vermessungsraume eines größeren Terrains befindet, wie z. B. einer Gemeindeflur; man hat dann schon vorher Bedacht zu nehmen, daß die Ortschaft von einem Polygon umgrenzt wird, wovon jede Seite zu dem Dreiecksystem gehört. Eine solche Anordnung führt sogar weniger Schwierigkeit als die oben angegebene mit sich, weil sich die Häusermasse in ein sehr kleines Polygon einschließen läßt und man oft Richtlinien quer durch den Ort führen kann; es bedarf auf diese Weise zuweilen nicht einmal der Messung eines Winkels.

Soll der Plan einer Stadt nach großem Maßstabe aufgetragen werden, wie es bei Geradlegung von Straßen und dergl. nöthig ist, so muß man sich dergestalt anknüpfen, daß die Senkrechten nach den Ecken der Häuser so kurz wie möglich werden. Sind zu diesem Zweck die Polygonseiten AB, BC, CD .... (Fig. 181) inmitten der Straße abgesteckt, so verbindet man mit ihnen die Häuserecken a, d, e... mittelst Senkrechten aa′, dd′, ee′... sorgfältig, mißt sie und bestimmt wie gewöhnlich die Ecken der Façaden durch Hülfslinien ac, de, bf, fg...., die man von einer bekannten Ecke nach einer andern legt. Wenn die Anknüpfung der Hülfslinien durch Senkrechte Schwierigkeiten bieten sollte, so kann man sich durch Intersection helfen. Man wählt zwei Puncte n und m auf der Hauptrichtlinie, mißt na und ma, wodurch der Endpunct a der Hülfslinie ae nach Wunsch bestimmt ist. Dieses Verfahren ist selbst kürzer als ersteres.

Nimmt man sich vor, zu dem Auftragen des Planes die Coordinaten der Polygonecken in dem Innern eines Ortes zu berechnen, so ist es vortheilhaft, sich anfangs bloß mit der Bestimmung der Polygonalseiten, ohne Rücksicht auf das Detail, zu beschäftigen und diese Messung der Rechnung zu Grunde zu legen. Dann nimmt man eine zweite Kettenmessung vor, um die Details aufzunehmen.

Man darf auch den Plan nicht theilweise, noch in einzelnen Polygonen auftragen, muß vielmehr mit den großen gebrochenen Richtungen anfangen, wie a, b, c, d .... f, g, h .... ꝛc. und erst wenn die Lage dieser Richtungen festgestellt ist, kann man die Polygons vornehmen, welche die Häusermasse umgeben.

Wenn ein Bauplatz nach dem Plane anzuweisen ist, so muß dem Betheiligten die Richtung der Façaden nach dem Allignementsplan mitgetheilt und abgesteckt werden, wobei man folgendermaßen verfährt:

Angenommen, der Plan einer Stadt (Fig. 182) gebe die Baulinie AC für alle zwischen A und C liegende Façaden an. Man kann aber von A aus C nicht sehen, denn sonst würde es hinreichen, AC abzustecken, soll aber dem Eigenthümer des Terrains M das Allignement db zum Bauen überweisen.

Man trägt zu diesem Zweck in A vor der Fronte irgend eine Länge Aa, jedoch so, daß wenn man dieselbe Länge in Cc setzt, der Punct a von c aus gesehen werden kann; mißt ac, wodurch eine Parallele mit AC entsteht, und man sich nur nach b' zu begeben nöthig hat, um bb' = Aa und von d' aus ebenfalls dd' = Aa zu machen.

186. — Von den Regeln, die bei Absteckung der Fixpuncte zu beobachten sind. Es wird die Aufnahme einer Gegend bedeutend erleichtert, wenn die Fixpuncte, an die sich eine graphische Triangulirung knüpfen soll, gut ausgewählt sind. Man hat sich dabei nach folgenden Regeln zu richten:

1) Man gehe bei der Auswahl und resp. Absteckung der Netzpuncte immer von der schwierigsten Oertlichkeit aus, und zwar im Gebirge von dem höchsten Bergrücken, (wo sich gewöhnlich auch die trigonometrischen Puncte vorfinden) allmälig in die Thäler und Ebenen herab.

In flachen Gegenden gehe man von dem District aus, wo das Terrain am meisten coupirt und aus diesem nach und nach in die freiern Striche über, bis man sich wieder an trigonometrische Puncte anknüpfen kann.

2) Wenn das graphische Hauptnetz über Thäler hinweg gezogen werden muß, so hängt die Aufstellung der Signale von deren Breite ab. Bei schmalen Thälern und nackten Bergwänden stellt man die Signale schachbretartig dergestalt, daß man von ihnen nicht allein die Puncte auf den gegenliegenden Höhen, sondern auch so viel als möglich das Thal übersehen kann, damit an jene Signale Dreiecke in dem letztern angeknüpft werden können.

Bei sehr breiten Thälern muß in dem Thal eine Zwischenreihe von Dreieckspuncten unter Berücksichtigung guter Schnitte eingerichtet werden. Zuweilen verlangen noch breitere Thäler noch mehre solche Zwischen-Signallinien.

3) Sind die Bergrücken so breit, daß man von ihrer Mitte aus in die anliegenden Thäler nicht hinabsehen kann, so müssen nicht allein Dreieckspuncte an beiden Kanten des Rückens, sondern wohl auch noch in dessen Mitte aufgesucht und zu einem System von Dreiecken verbunden werden.

4) Sind die Bergrücken mit Wald bestanden, so wird man sich begnügen müssen, mit einer oder zwei Ketten von Dreiecken in den Thälern fortzugehen und

den waldigen Rücken nur mit ein bis zwei Reihen, auf den höchsten Bäumen befestigten, Signalen zu versehen, welche man nachher von den beiden Thälern aus bestimmt, und die in der Folge als Fixpuncte zum Alligniren und Rückwärtseinschneiden mehr Nutzen schaffen werden, als selbst die kostspieligsten und mühsamsten Durchschläge und Lichtungen.

Dabei werden zuweilen zwei bis drei Signale in sehr nahen Distanzen bestimmt werden müssen, wenn man das eine von der einen Seite gut, von der andern Thalseite aber nicht sehen kann.

5) Schmale Au- und Waldpartien muß man innerhalb einer Dreiecksreihe zu bringen suchen, welche sich an den beiden Seiten solcher Partien hinzieht; ferner die etwa an beiden Ufern der Bäche oder Flüsse hinlaufenden schmalen und Aussicht gewährenden Stellen aufsuchen und nöthigenfalls durch Wegräumung einiges Gesträuchs lichten lassen. Blösen in Holzungen sucht man möglichst zu benutzen um mehre Fixpuncte darin aufzustellen und zu Placirung des Instruments zu brauchen; zumal wenn sie Durchsichten nach einigen äußern Puncten gewähren.

6) Signale zum graphischen Hauptnetz sollen nie zu nahe an die Ein- und Ausgänge von Wäldern, Ortschaften, Baumpartien &c. gesetzt werden, weil sie von da aus eine zu beschränkte Aussicht gewähren. Zuweilen ist es jedoch nöthig, wenn man an einen solchen Punct Linien knüpfen kann, welche Ortschaften, Wälder &c. durchschneiden und Allignements durchmessen lassen.

7) Sind Wälder dergestalt bestanden, daß Fixpuncte in dem Innern nicht statthaft sind, so müssen die Dreieckslinien so nahe als möglich den Umfang einfassen, und jeder Punct, der das Eindringen in das Innere vermitteln kann, muß benutzt werden.

8) Um die Verbindung des graphischen Hauptnetzes mit einem anstoßenden Sectionsblatt zu erleichtern, werden nahe an den Sectionsrändern gemeinschaftliche Puncte bestimmt, welche auf beide anstoßende Detailsectionen aufgetragen werden können.

9) Der Platz für ein Signal muß so viel als möglich die Bequemlichkeit zu Aufstellung des Instruments gewähren, daher darf man das Signal nicht unmittelbar an steile Ränder stellen, wodurch das Umgehen des Instruments gehindert würde.

10) Weiß der Geometer sich mit Aussetzung der Signale in dergleichen beschwerlichem Terrain zu behelfen, so ergiebt sich die in offenem, flachen Lande von selbst. Er hat dann nur auf eine gute Vertheilung und scharf schneidende Dreieckswinkel zu sehen. Die geringste Anzahl von Fixpuncten darf man für die Detailssection zu dreien annehmen und nur die Unmöglichkeit kann die Zahl auf zwei verringern. Ja es giebt Fälle, wo nur einer auf die Section fällt, dann wird es aber nöthig, mehre Allignements in das Sectionsblatt von anliegenden Dreiecksseiten herüber zu ziehen.

Man kann auf die Quadratmeile des Hauptnetzes bei günstigem Boden wenigstens 60, bei durchschnittenem und schwierigem Terrain 70 bis 80 Fix- und Standpuncte rechnen.

187. — Anwendung des Meßtisches zur Aufnahme einer Gegend von größerem Umfange. Ist der Vermessung eine trigonometrische Triangulirung vorhergegangen, so empfängt der Geometer, welcher die graphische Triangulirung ausführen soll, die auf sein Menselblatt fallenden Dreieckspuncte entweder bereits aufgetragen oder durch Coordinatenbestimmung gegen die beiden Axen, welche durch rechtwinkelige Randlinien seiner Mensel gegeben sind, und die er nach dem vorgeschriebenen Maßstabe auf das Genaueste aufzutragen hat.

Diese Puncte, welche vielleicht nur der Zahl nach drei (selten zwei) sind, machen die Grundlage seiner Arbeit aus, deren Richtigkeit von der genauen Lage dieser Puncte nothwendig abhängt. Es muß daher die erste Operation sein, die Lage derselben auf dem Meßtische zu prüfen.

Zu diesem Zweck begiebt sich der Geometer mit dem Meßtisch nacheinander in jeden der drei Puncte, richtet das Instrument nach einem der beiden andern ein und sieht, ob die Visirlinie den dritten dann vollkommen schneidet; wo nicht, so prüft er zuerst, ob die Einstellung des Instruments nicht mangelhaft ist und, bei Gewißheit der Genauigkeit der Orientirung, ob nicht bei'm Auftragen Ungenauigkeiten vorgegangen sind. Kann eine Ueberzeugung der Richtigkeit durch diese Untersuchungen keineswegs gewonnen werden, so darf die Arbeit vor Berichterstattung an den Dirigirenden und bevor eine Berichtigung der Puncte durch diesen bewirkt worden, nicht vorgenommen werden. Eigenmächtige Abänderung ist durchaus unzulässig.

188. — Sind die trigonometrischen Puncte richtig befunden worden, so schreitet man zu der Auswahl und Markirung der Fixpuncte und hierauf zu der Bestimmung derselben auf der Mensel. Wir halten es für überflüssig, das Verfahren dabei hier nochmals zu beschreiben, da es durch die vorbeschriebenen Operationen bereits hinlänglich entwickelt ist, bemerken daher nur, daß die Operationen hier vollkommen graphischer Natur sind, alle durch Intersectionen und möglichst mit Hülfe von Allignements ausgeführt werden, unmittelbare Messungen mit der Kette fast gar nicht vorkommen. Deßhalb darf man aber sich auch nicht mit Puncten begnügen, die nur durch einmaligen Schnitt bestimmt sind und muß sie so lange als unbestimmt ansehen, als sie nicht durch einen dritten, vierten Schnitt controlirt sind.

Man nennt das erste Anvisiren der Objecte rayoniren; das zweite aus einem andern Standpuncte schneiden und jede nachfolgende Visur aus einem dritten, vierten Standpuncte controliren. Diese Operationen können nicht mit einem gemeinen Diopterlineal vorgenommen werden, man muß dazu eine Kippregel mit Perspectiv anwenden.

189. — Ist diese Triangulirung beendigt, so hat man das über den zu vermessenden District sich erstreckende erste graphische Hauptnetz, aber in kleinerem Maßstabe als die Detailmessung bewirkt werden soll. Aus demselben werden nun dem Geometer diejenigen Fixpuncte zugetheilt, welche auf die Detailmensel fallen und zwar nach demjenigen Maßverhältniß, nach dem er seine Operationen fortsetzen soll. Zu dem Ende wird die Mensel der ersten Triangulirung mit Quadraten oder Rechtecken überzogen, deren jedes die Größe eines Menselblattes im Maßverhältniß der Haupttriangulirung, also im kleineren Maßstabe hat; man bezieht nun auf diese Seiten die gefundenen Fixpuncte durch Coordinaten und trägt sie proportional auf das beziehliche Menselblatt. Damit aber die auf diese Weise aufgetragenen Puncte die gehörige Genauigkeit erhalten, bedient man sich der Controle, daß man auf der Hauptmensel die Visirlinien, d. i. diejenigen Linien, auf welchen die Dreieckspuncte liegen, mit kurzen scharfen Bleistiftlinien auf dem Rande der Mensel zieht und dann durch genaues Anlegen an dieselben auch

Quadratseiten der beziehlichen Section rück- und vorwärts schneidet, den Abstand von den Ecken der Sectionsabtheilung mißt und ebenfalls auf die Section des Detailbretes überträgt.

Um die Sectionen, deren nach Umständen 4, 9, 16, 25 ꝛc. auf das Blatt der Haupttriangulirung fallen, constant in Größe zu erhalten, läßt man einen flachen Rahmen von nicht zu schwachem Messing- oder Zinkblech fertigen, der in den Seiten gegen 2 und mehr Zoll breit sein kann, auf diesen die sehr genaue Figur einer Sectionsgrenze ziehen und die Ecken mit sehr feinen Löchern durchbohren, die nicht weiter sind, als sie eine feine Copirnadel ausfüllt, oder mit feinen Stahlspitzen versehen. Der Gebrauch dieses Rahmens braucht nicht beschrieben zu werden.

190. — Nachstehendes Beispiel wird das Verfahren einer graphischen zweiten Triangulirung und deren weitere Benutzung deutlich machen.

Es seien durch die erste graphische Netzlegung bereits die Puncte **A** und **B**, Fig. 186, gegeben. Diese auf einem Plateau gelegenen Puncte sind zum Aufstellen des Meßtisches bequem und können sofort zur Grundlinie angenommen werden. Außer diesen beiden Puncten hat man noch die Signale **C**, **I**, **K**, **N**, **P**, **Q** abgesteckt.

Aus den Standpuncten **A**, **B** können die Puncte **O**, **E**, **K**, **L**, **M**, **N** geschnitten und bis zur nöthigen Controle als bestimmt betrachtet werden. Zugleich werden aus **A** die Puncte **D**, **O**, **P**, **Q**, aus **B** die Puncte **F**, **G**, **H**, **I** rayonirt, da diese aus **A** und **B** zugleich nicht gesehen werden können.

Um das Herrenhaus in **D**, die Scheune in **Q** und das Signal in **P** zu schneiden, setzt man sich in **C**, orientirt den Meßtisch genau und prüft, ob sich die bereits geschnittenen sichtbaren Puncte von **C** aus wieder genau schneiden. Findet sich bei allen oder den meisten der bereits geschnittenen Puncte, daß die Visirlinien aus **C** in den Durchschnittspunct nicht genau treffen, so läßt sich annehmen, daß eine Unvollkommenheit bei'm Visiren von **C** obgewaltet hat, die man sofort durch Rückwärtseinschneiden verbessern muß. Treffen aber die Visirlinien in einem, höchstens zwei Puncten nicht vollkommen, so wird der Fehler in diesen zu suchen sein. Die Puncte, die sich durch **C** als richtig controliren, bezeichnet man mit einem kleinen umzogenen Ring, während man die Unsicherheit des einen durch ein anderes Zeichen bemerkt.

Eben so hat man zu verfahren, wenn man von G aus die Schäferei in F, das Dorf Birkigt und das Signal I schneiden will u. s. w.

An den Rand des Tisches hat man zu jedem Rayon die Benennung des Objects zu schreiben, für welches der Visirstrahl gilt. Man darf dieses nicht übersehen, weil man sonst mit den Schnitten leicht in Verwirrung gerathen kann.

Einen Schnitt markire man nie eher durch einen Zirkelstich, bis dessen Genauigkeit controlirt ist. Zu spitze Schnitte lasse man ganz außer Beachtung und suche den Punct später aus vortheilhafteren Standpuncten zu schneiden.

Zuweilen findet sich bei'm Anlangen in einem der anvisirten neuen Standpuncte, daß dessen Lage nicht günstig und das gesteckte Signal nicht gut gewählt war. In diesem Falle bedenke man sich nicht, von dem früheren Puncte abzugehen, sich aber womöglich in das Alignement des einen oder andern Rayons zu setzen, wodurch man größere Sicherheit in dem Orientiren des Tisches gewinnt und die Stellung durch ein oder zwei Rückschnitte desto leichter bestimmen kann.

Das hier angenommene Beispiel ist ungefähr dem Flächeninhalt nach $\frac{1}{3}$ Quadratmeile, läßt sich sonach bequem auf einem Menselblatt von gewöhnlicher Größe aufnehmen, dessen Seite 16 Zoll groß ist, wenn der Zoll zu 900 Fuß wirklicher Größe angenommen wird, welches die topographischen Details sehr ausführlich giebt.

In Preußen werden die topographischen Karten des Generalstabes nach einem Maßverhältniß von 1 : 25,000 ausgeführt, dieses ist nach dem unsrigen über die Hälfte kleiner.

191. — In dem §. 189 ist angenommen worden, daß die Triangulirung nach einem kleineren Maßstabe vorgenommen werde, als die Detailsaufnahme. Die Dreieckspuncte werden sonach aus dem Kleinen in's Große übertragen, ein Umstand, der keineswegs auf Zuverlässigkeit deutet, jedoch nicht so bedenklich ist, als es scheint, wenn die Prüfung der Puncte auf dem Detailblatt mit Sorgfalt geschieht. Vorzuziehen bleibt aber

doch, die Triangulirung des graphischen Netzes sofort in dem Maßstabe der Detailaufnahme zu bewirken.

Ist in diesem Falle zur graphischen Vortriangulirung mehr als ein Menselblatt erforderlich, so werden auf das anstoßende von dem bereits ausgeführten erstern Puncte, welche sicher geschnitten sind, übertragen, die nahe an der Sectionslinie in oder außerhalb derselben liegen, wie Fig. 187 **M** bei **c**, **d** und **a**, wobei man die Sectionsrandlinien als Axen von den beziehlichen Coordinaten betrachtet. Die Genauigkeit verstärkt sich, wenn man außer diesen Puncten noch ein oder zwei Allignements von Puncten die weit sichtbar sind, über das anzustoßende Blatt ziehen kann. Es ist dann nicht schwierig, das neue Blatt zu orientiren und zum richtigen Anschluß an das erstere zu bearbeiten.

Bei der Triangulirung des graphischen Netzes erster Ordnung brauche man nicht die Anschlagnadeln bei'm Visiren; man hat daher nach jeder Visur, bevor man den Rayon zieht, genau nachzusehen, daß die Kante der Alhidade den Standpunct des Blattes vollkommen schneide. Bei der Aufnahme des Details hingegen sind Anschlagnadeln fast unentbehrlich und vermitteln eine große Zeitersparniß.

192. — Wenn die erste graphische Triangulirung mit dem Detail in gleichem Maßstabe vorgenommen worden, so ist es fast unnöthig, besondere Menselblätter zur Detailaufnahme zu verwenden. Es kann nur darin ein Vortheil gesucht werden, daß das Blatt bei der Triangulirung gewöhnlich mit Linien überladen ist, die bei dem weiteren Operiren stören können, oder daß man das Netz als Controle und zur Uebersicht bewahren will.

Wo dies nicht der Fall ist, kann die Detailaufnahme unmittelbar nach der Triangulirung auf denselben Menselblättern vorgenommen werden. Es ist aber die ganze Operation des Detailirens nichts als Fortsetzung des Triangulirens mehr und mehr in's Kleinere; wobei das Rückwärtseinschneiden (so viel als möglich in Allignements), bei krummen Linien die Bestimmung durch Coordinaten häufig in Anwendung kommt, und die speciellen Aufgaben der §§. 70—76, 79 und mehre folgende Anwendung finden.

Dabei ist zu bemerken, daß man in jedem Standpuncte alle und jede Details, deren Bestimmung der Stand des Tisches gestattet, einträgt und mit Bleistift vollständig auszeichnet, wozu auch die Abdachungen der Boden-fläche gehören (§. 156). Diese Details werden dann nach jeder Tagesarbeit zu Hause mit Tusche rein ausgeführt und beschrieben. Auch ist es sehr nöthig, alle Visirlinien, örtliche Gegenstände und sonstige Detailbeziehungen sofort zur Stelle zu bezeichnen und zu benennen, wobei ein Manual sehr zweckmäßig sein kann. Fast mehr als bei jedem andern Instrument ist bei dem Meßtisch Uebung der beste Lehrmeister und kann die Arbeit um die Hälfte der Zeit verkürzen. Man wird dahin gelangen, vieles Ausstecken von Pikets 2c. zu ersparen und dafür schickliche natürliche Gegenstände, Steine, Erdschollen, Büsche, ja selbst Grasbüschel benutzen zu lernen, ohne der Schärfe der Messung Eintrag zu thun.

Offenbar ist, daß die Behandlung, je nach der Größe des Maßstabes, je nach dem Zweck, eine ganz verschiedene ist, daß man dabei oft mit Abschreiten ausreicht und die Kette wenig oder nicht braucht. Dergleichen Fälle besonders abzuhandeln, würde nicht möglich sein; Zweck und Oertlichkeit müssen immer maßgebend bleiben.

Siebentes Capitel.

Theilung der Grundstücke. — Polygonometrie.

193. — Die Theilung von Grundstücken oder Fluren gehört ebenfalls zu dem Geschäft des Geometers; man hat diesen Theil der Vermessungskunde in neuerer Zeit mit dem Namen „Polygonometrie" belegt.

Soll eine Theilung von Grundstücken vorgenommen werden, so kann sie rein graphisch oder durch Rechnung geschehen. Die erstere erfordert die Entwerfung einer Zeichnung in großem Maßstabe und kann deßhalb nur auf kleinere Grundstücke angewendet werden; die andere ist vorzuziehen und dabei oft kürzer, indem alle zu theilende Figuren auf folgende zwei Fälle zurückgeführt werden können:

1) Kennt man eine Seite, einen Winkel und den Inhalt eines Dreiecks, die anderen Stücke zu suchen.

2) Ist eine der parallelen Seiten eines Trapezes, die Neigung der anliegenden Sei-