Diese Resultate treten auffallender hervor, wenn man eine Vergleichung der Vermessung eines Polygons mit beiden Instrumenten, dem Winkelmesser und der Bussole, anstellt. Der Fehler, den wir oben angenommen haben und der im ersten Falle immer mehr zunimmt, wird auf den letzten Seiten des Polygons oder an den beiden Puncten des Schlusses so beträchtlich werden, daß alle Correctionsmittel versagen.

Ein Irrthum bei'm Kettenziehen bringt bei dem Auftragen des Plans nicht die Abweichung hervor, wie der bei Beobachtung eines Winkels; die Richtlinien werden verschoben, aber stets in paralleler Lage mit der, die ihnen eigentlich zukommt. Es ist demnach im Allgemeinen leicht, bei'm Mangel des Schlusses, namentlich wenn mit dem Winkelmesser operirt worden, die Natur des begangenen Fehlers in der Kettenmessung zu erkennen.

Fünftes Capitel.

Berechnungen der Flächen.

123. — Allgemeine Bemerkungen. — Der Zweck einer Vermessung ist gewöhnlich, den Rauminhalt einer Fläche zu bestimmen.

Diese Fläche kann entweder sofort auf dem Felde selbst, nach Ausmessung der Linien und Winkel, oder auf dem Zimmer nach dem Auftragen des Plans berechnet werden.

Die Methoden, den Arealgehalt zu bestimmen, sind zweierlei Art: die rein graphischen mit Hülfe des Lineals und des Zirkels und die durch Rechnung, wobei die Maße des Terrains als Hauptelemente auftreten.

Man hat eine Menge Formeln, durch welche man zur Kenntniß des Flächeninhaltes eines Polygons gelangt, theils in Functionen der Coordinaten der Ecken, theils in Functionen seiner Seiten und Winkel, theils endlich wenn das Vieleck durch Intersection vermessen worden ist. So elegant dergleichen Formeln auch gewöhnlich sind, so werden sie doch in der Praxis angewandt, weil wenig deren Lösung immer mühsam ist und die Bildung der Gleichungen viel Sorgfalt und Zeit erfordert.

Wir werden uns daher in diesem Capitel nur solcher Formeln bedienen, deren Gebrauch die wenigste Verwickelung herbeiführt und die immer angewendet werden können *).

Grundsätze der Flächenberechnung. 1) Das Quadrat. Der Inhalt oder die Fläche eines Quadrats ist gleich dem Product einer der Seiten mit sich selbst.

Ist eine der vier gleichen Seiten $= a$, so ist der Inhalt des Quadrats $= a \cdot a = a^2$.

2) Das Parallelogramm. Der Inhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Product einer Seite als Basis in die Höhe.

Ist a eine der Seiten und h die auf sie beziehliche Höhe, so ist der Inhalt $= a \cdot h$; ist eine der anliegenden gleichen Seiten $= b$ und die zugehörige Höhe $= h'$, so drückt sich der Inhalt aus durch $b \cdot h'$ und es ist stets $a \cdot h = b \cdot h'$.

3) Das Rechteck. Das Rechteck, als specieller Fall der Parallelogramme, wo die eine zweier anliegenden Seiten stets Basis, die andere Höhe ist, ist gleich dem Product dieser Seiten.

Sind a, b, c, d die Seiten des Rechtecks ihrer Folge nach, so ist $I = a \cdot c = b \cdot d$.

4) Das Trapez. Der Inhalt eines Trapezes (Paralleltrapez) wird gefunden in dem Product der mittleren arithmetischen Proportionale der parallelen Seiten mal dem senkrechten Abstand (Höhe) derselben.

Wenn a und a' die parallelen Seiten, h die Höhe, so ist $I = \frac{a + a'}{2} \cdot h = \frac{1}{2} (a + a') h$.

5) Das Rhombus ist ein anderer specieller Fall des Parallelogrammes und da sämmtliche Seiten unter sich und auch die Höhen gleich sind, so ist der Inhalt gleich dem Product einer der Seiten in die Höhe, $= a \cdot h = b \cdot h \ldots\ldots$

6) Das Dreieck. Jedes Dreieck ist seinem Inhalte nach gleich dem halben Product einer der Seiten in die zugehörige Höhe.

---

*) Wenn in dem Folgenden mehre bekannte, den ersten Elementen der Geometrie entlehnte Sätze aufgeführt sind, so geschieht es, um die Verbindung mit den übrigen herzustellen.

So ist, wenn a, b, c die drei Seiten und h, h', h'' die den Seiten zukommende Höhen sind,

$$I = \tfrac{1}{2}(a \cdot h) = \tfrac{1}{2} a \cdot h = a \cdot \tfrac{1}{2} h,$$

es ist aber auch $\tfrac{1}{2}(a \cdot h) = \tfrac{1}{2}(b \cdot h') = \tfrac{1}{2}(c \cdot h'')$.

7) Die regulären Polygone. Ein reguläres Polygon hat zum Inhalt das Product des Umfanges in die halbe Höhe eines Dreiecks, in welche das Polygon zerlegt werden kann.

Also (Fig. 122)

$$I = (a + b + c + d + e + f) \cdot \tfrac{1}{2} h.$$

$$= 6a \cdot \tfrac{1}{2} h = 3a \cdot \tfrac{1}{2} h = \frac{n}{2} \cdot a \cdot h.$$

124. — Berechnung der Flächen durch graphische Methoden, mit Anwendung der Zerlegung im Dreiecke rc. Zu Bestimmung des Inhalts eines Polygons nach graphischer Methode, d. h. bloß mit Anwendung des Lineals, des Maßstabes und Zirkels, muß man die Fläche in Dreiecke, Trapeze oder Rechtecke zerlegen. Die Linien werden dann mit dem Zirkel nach dem Maßstabe abgenommen, der zur Zeichnung des Plans gedient hat. Man hat also vorher den Plan des Terrains aufzutragen, und zwar in möglichst großem Verhältnisse, damit die Genauigkeit der Linienmaße desto größer ausfalle.

Es soll der Inhalt des Polygons ABCDE (Fig. 22) gefunden werden. Man zerlege das Polygon in die drei (d. i. in n — 2 Dreiecke) Dreiecke α, β, γ, indem man die Transversalen AD, AC aus der Ecke A nach den Ecken C und D zieht: messe die Transversale AD als Grundlinie des Dreiecks ADE und die Höhe Ex; ein Gleiches geschehe mit den Dreiecken ADC und ACB, worin die Seiten AD und AC als Grundlinien angenommen und die Höhen Cx' und Bx'' sind.

Der Inhalt des Polygons ist sonach

$$\overset{\text{I.}}{AD \cdot \frac{Ex}{2}} = \alpha \text{ oder besser } \overset{\text{IV.}}{AD \cdot \frac{Ex + Cx'}{2}} = \alpha + \beta$$

$$+ \overset{\text{II.}}{AD \cdot \frac{Cx'}{2}} = \beta \qquad + \overset{\text{III.}}{AC \cdot \frac{Bx''}{2}} = \gamma,$$

also $\alpha + \beta + \gamma =$ Inhalt.

Sind die Umfangslinien krumme, dann ist das Verfahren insofern nicht verschieden, als man innerhalb der Grenzlinien Gerade zieht, deren Endpuncte an einander stoßen und in den Grenzen liegen, dies Polygon aber in Dreiecke zerlegt. Den ersten Linien giebt man die größtmögliche Ausdehnung, betrachtet sie als Abscissen und zieht aus den Ecken der Grenzlinie Ordinaten, oder zerlegt den abgeschnittenen Raum ebenfalls in Dreiecke.

Hat man ein Stück der krummlinigen Grenze durch eine Gerade abgeschnitten, so erleichtert man sich die Rechnung, wenn man auf diese Gerade irgend ein Vielfaches (10, 30, 50 . . . Meter) n mal trägt und aus den Theilpuncten Ordinaten zieht. Ist a dies Vielfache und sind m, n, o, p . . . . u, v die Ordinaten, nach dem angenommenen Maßstabe gemessen, so hat man zuerst die beiden Dreiecke an den Enden wie bekannt zu berechnen, welche angenommen = s und s' seien; dann setzt man

$$\left(\frac{m+v}{2}+n+o+p+\ldots+u\right)a,$$

welches den Inhalt sämmtlicher Trapeze giebt. Sonach ist der Inhalt des Abschnitts

$$Q = s + s' + \left(\frac{m+v}{2}+n+o+p+\ldots u\right)a.$$

Es dürfen jedoch bei diesem Verfahren keine beachtenswerthen Krümmungen der Grenze zwischen die Ordinaten fallen. Man muß daher für die Länge der gleichen Abscissen ein schickliches Maß annehmen. Auch ist es anzurathen, für die Abscissenlinien möglichst diejenigen zu nehmen, die auf dem Felde bereits gemessen worden sind.

Man muß vermeiden, zu viele Transversalen in eine Ecke auslaufen zu lassen, damit in diesem Puncte nicht ein zu großes Loch in dem Papier durch das öftere Einsetzen des Zirkels entsteht, welches zu Differenzen in den Maßen Veranlassung geben kann. — Auch erlangt man größere Genauigkeit, wenn man die längsten Seiten der Dreiecke als Grundlinien nimmt. Der Theorie nach ist zwar die Wahl der Seite ganz indifferent, in der Praxis aber, wo alles von den Instrumenten und von dem Geschick des Zeichners abhängt, muß dergleichen berücksichtigt werden.

Man darf bei der Zerlegung in Dreiecke die Transversalen sich nie kreuzen lassen, und erleichtert sich die Rechnung, wenn man bei anliegenden Dreiecken die beiden Höhen auf einerlei Grundlinie bezieht, weil man dann nach obiger Formel IV. den Inhalt zweier Dreiecke zugleich erhält. Sollte dabei ein stumpfwinkliches Dreieck in Beziehung kommen, wo die Höhe auf die Verlängerung der Grundlinie fällt, so thut dies keinen Eintrag, wenn nur die zu verlängernde Linie lang genug ist, um mit Sicherheit daran anlegen zu können.

Es soll der Inhalt eines Polygons (Fig. 123) **berechnet werden.** Nach der gegebenen Vorschrift theile man die Figur in die Dreiecke erster Ordnung a, b, c, d, e, f, die nicht zu spitze Winkel haben, bilde dann soviel als nöthig die secondären trapezförmigen Figuren k, l, m, n . . . . und mache jede einzelne Figur durch einen Buchstaben oder Nummer namhaft; hierauf schreite man zur Messung der Linien, deren Resultate man zu bequemerer Uebersicht in eine Tabelle, die folgende Rubriken haben kann, bringt:

Figur und Bezeichnung.	Grundlinie Meter.	Höhe. Meter.	Inhalt in Quadr Meter Meter.	Inhalt in Hectaren u. Aren.	Bemerkungen.
Dreieck a	96,7	55,4	26.8,59		(1 Hectare = 10,000 Qdr. Meter = 391,623 ... preuß. Morgen. 1 Are = 100 Qdr. Meter = 7,049 ... preuß. Quadr. Ruthen. Nach rheinischem oder anderem landesüblichen Maße vermessen, wird in die zweite und dritte Columne ebenfalls nur die Ruthe in ganzen und Decimal-Theilen eingetragen, und die dritte Columne nimmt die Quadratruthen auf.)
— b	118,0	64,2	3787,8		
— c	145,6	71,2	5168,8		
— d	102,5	60,4	3095,5		
— e	82,0	20,4	1344 8		
— f	82,0	32,8	836,4		
— g	23,4	11,5	134,55		
— h	23,4	8,0	93,6		
— i	47,5	14,0	332,5		
— k	21,5	27,0	290,25		
Trapez l	43,0	aeq. 25,9	1113,7		
— m	11,7	— 17,4	203,58		
— n	29,0	— 16,5	478,5		
— o	17,5	— 20,0	350,0		
Dreieck p	21,0	17,0	178,5		
— q	60,0	8,0	240,0		
— r	58,0	11,7	339,3		
— s	22,4	14,6	163,52		
Trapez t	35,3	aeq. 14,2	501,26		
Dreieck u	39,0	13,8	269,1		
— v	31,5	5,0	78,75		
		Summa	21679,00	216H. 79A. □M.	

Man bemerke, daß bei den Dreiecken das Product halbirt werden muß; bei den Trapezen aber unverkürzt bleibt, da bereits die Parallelseiten in mittler arithmetischer Proportionale in die Columne eingetragen sind.

125. — **Berechnung durch ein umschriebenes Vieleck.** Der Flächeninhalt eines Polygons wird auch erhalten, wenn man (Fig. 124) ein Rechteck umschreibt, welches man mit den Ecken und Seiten in Verbindung bringt. Man berechnet dann den Inhalt des Rechtecks, ingleichen die complementären, außerhalb der vermessenen Fläche liegenden Figuren und zieht die Summe der letzteren von dem Rechteck ab; die Differenz ist der Flächeninhalt des vermessenen Raumes.

Wird die (Fig. 124) auf diese Weise behandelt, so ergiebt sich der Inhalt des Rechtecks 2 (267 • 124,3) = 33455,1 Quadr.-Met.

Fig. u. Bezeichnung	Grundl. Meter	Höhe Meter	Inhalt in Quadr. Met.	Inhalt in Hectaren rc.	Bemerkungen.
Dreieck a	112,0	43,2	2419,2		
- b	33,0	9,0	148,5		
- c	85,0	17,0	722,5		
- d	64,0	9,4	300,8		
- e	25,4	6,0	76,2		
- f	88,0	24,0	1056,0		
- g	88,0	38,0	1672,0		
- h	44,0	21,5	473,0		
- i	46,7	26,0	602,1		
- k	40,5	24,3	492,07		
- l	50,0	10,6	265,0		
- m	70,0	18,2	637,0		
- n	70,0	17,0	595,0		
- o	73,0	18,0	657,0		
		Summa	10116,37.		

Da nun das Rechteck = 33455,1 □ Meter,
die umliegenden Dreiecke = 10116,37 □ -
Differenz = 23338,73 □ -
so hält die vermessene Figur 23338,73 □ Meter 2 H. 33 A. 38,73 □ Meter.

Diese Berechnung wird vorzüglich angewandt, um eine Berechnung zu prüfen, die nach der ersten Methode ausgeführt worden. Es ist nicht nöthig, zu der umschließenden Figur ein Rechteck zu nehmen; jede andere einfache, leicht zu berechnende Figur vertritt dessen Stelle. Die beiden Rechnungen werden nie vollkommen gleichen

Inhalt geben, wovon die Ursache in der Unvollkommenheit der Instrumente und dem Abnehmen der Maße liegt; wir werden die Grenzen der Abweichung in Folgendem besprechen.

126. — **Von den Compensationen.** Befindet sich das Innere der Polygone in Details getheilt, so ist jede Parzelle besonders zu berechnen. Man berechnet dann den Gesammtinhalt, entweder nach (§. 124) oder nach dem vorhergehenden. Die Summe der partiellen Flächen muß dem Inhalt der ganzen gleich sein. Sehr oft sind die Grenzen der Parzellen durch Ein- und Ausbiegungen gebildet, und man würde auf eine bedeutend größere Differenz stoßen, wenn man bei der Zerlegung in Dreiecke darauf Bezug nehmen wollte, als wenn man die Grenze als gerade Linie betrachtete. In diesem Falle zieht man **Compensationslinien**, d. h. man zieht eine Gerade, die Biegungen der Parzellen abschneidet, dafür aber andere hinzuschlägt.

So kann, z. B. (Fig. 125) die gebrochene Linie ABOD durch die gerade ab ersetzt werden, ohne daß daraus eine merkliche Differenz in dem Flächeninhalt der Parzelle oder des Polygons, zu dessen Grenze diese Linie gehört, entsteht.

Die Dreiecke aa' sind von der Figur abgetrennt, dafür aber die gleichhaltigen Dreiecke $\beta \beta'$ hinzugeschlagen.

Wenn die gebrochenen Linien, welche auf diese Weise ausgeglichen werden, mehrern Parzellen angehören, so ist zu sorgen, daß man die Geraden für jede Parzelle besonders ziehe. Man verrichtet dies gewöhnlich mittelst eines kleinen Lineals von Glas oder durchsichtigem Horn.

127. — **Ausmittelung des Inhalts durch Reduction.** Die Geometrie (Legendre, Buch III., Aufgabe X) gewährt uns ein sehr schnelles Mittel, den Inhalt eines Polygons zu erhalten, indem sie dasselbe in ein gleichgroßes Dreieck zu verwandeln lehrt. — Dieses Mittel gewährt außerdem eine größere Genauigkeit, wenn der Umfang des Polygons sehr gebrochen ist, indem es die Messungen auf dem Plane vermindert. — Da man auch wenig zu rechnen hat, so läuft man folglich weniger Gefahr, sich zu irren.

Obgleich dieses Verfahren aus der Geometrie hinlänglich bekannt sein muß, so nehmen wir es doch hier auf, weil der Fall selten ist, daß man ein Polygon von bedeutendem Umfang in ein einfaches Dreieck wird verwandeln können.

Wir nehmen an, daß ein Polygon (Fig. 127) zu ausgedehnt sei, um von einem Puncte A der Grenze aus den Punct B mit dem Zirkel oder Lineal erreichen zu können. Die Operation ist dann zu theilen und ein Punct C anzunehmen, der von A aus mit dem Zirkel bequem zu erreichen ist. Man zieht die unbestimmte Gerade CD' bildet das Dreieck abc und zieht durch die Ecke c desselben ca' parallel ab' dann die Verbindungslinie a'b.

Letztere Linie kann als ein Theil der Grenze angesehen werden; denn die Dreiecke acb und aa'b haben einerlei Grundlinie ab und die Spitzen liegen zwischen denselben Parallelen, sind also inhaltsgleich. Hierdurch ist das Polygon um eine Seite verringert.

Man bildet nun ein zweites Dreieck a'bd, zieht vd' parallel a'd und verbindet d'd; wodurch abermals eine Seite weggeschafft ist, ohne den Inhalt des Polygons zu verändern, und es gehen die drei Seiten ac, cb, bd in d'd über. Wenn man endlich das Dreieck Ad'd bildet, dF parallel Ad' zieht, so wird durch die Gerade AF der Theil der Grenze acbdA in eine gerade Linie AF verwandelt.

Auf gleiche Weise behandelt man AeM, indem AF als Grundlinie genommen wird, woraus man GM erhält. Endlich giebt die Verwandlung des Theiles klmnM die Gerade DM und der Theil P des Polygons ist nun in ein inhaltgleiches Viereck DFGM verwandelt, welches noch in ein Dreieck umgewandelt werden kann, da aber diese letztere Verwandlung keine großen Vortheile gewährt, so kann man es bei dem Viereck bewenden lassen.

Wenn man gleichmäßig mit dem Theil Q verfährt, indem man CD zur Grundlinie nimmt, gelangt man auf das Dreieck CBE.

Solchergestalt beschränkt sich nun die Inhaltsberechnung des gegebenen Polygons auf die der Dreiecke FMG, FMD und CBE. Man hat jedoch bei dergleichen Verwandlungen mit größter Genauigkeit zu verfahren; denn die geringste Versetzung der Puncte F, G, M, D und E kann große Differenzen in den Resultaten veranlassen.

Man hat Rollineale zum Parallelziehen, die hierbei die Arbeit sehr beschleunigen können. Dergleichen Instrumente müssen aber äußerst genau gearbeitet sein; sie gründen sich darauf, daß die

Abwickelungsfläche eines vollkommenen Cylinders, oder die Theile, die zwischen zwei Seiten liegen, Rechtecke sind. Sicherer ist jedenfalls der Gebrauch von Dreiecken.

128. Man erspart durch dergleichen Verwandlungen die langweilige Operation vielfacher Multiplicationen, zumal wenn man nicht mit einer Productentabelle (wie die von Oyon) versehen ist, wobei es genügt, schiefwinkliche Dreiecke auf rechtwinkliche zurückzuführen, deren einer Cathete man ein solches Maß giebt, daß man durch Messung der andern den Inhalt unmittelbar erhält.

Nehmen wir ein Dreieck ABC (Fig. 126), errichten in dem Endpunct A von AB eine Normale AO, ziehen CO parallel der Grundlinie AB und dann OB, so ist das Dreieck ABO inhaltsgleich dem Dreieck ABC. — Verlängert man nun AB nach K und macht $AK = 200$ Meter und setzen ein rechtwinkliches Dreieck AKD von der Grundlinie AK und einem $\text{Inhalt} = AOB = ACB$, so ist:

$$\frac{AD}{2} = \frac{ACB}{AK} = \frac{ACB}{200} \text{ oder } AD = \frac{ACB}{100}.$$

Der Inhalt ACB ist demnach direct durch die einzige Messung von AD gegeben, welcher man nur zwei Nullen anzuhängen braucht.

Zur Bestimmung von AD hat man das Dreieck OBK zu bilden, dann BD parallel OK zu ziehen und DK zu verbinden. Das entstandene rechtwinkliche Dreieck ADK ist gleich dem Dreieck AOB und gleich ABC; und da die Dreiecke OBK und ODK dieselbe Grundlinie OK und gleiche Höhe haben, sind sie inhaltsgleich; es ist aber OBK dem Dreieck OBA zugelegt; dann aber ODK von dem Dreieck OKA abgeschnitten worden, sonach dieselbe Größe, um die das Dreieck OBA vermehrt ist.

Ist AD des Plans 77,5 gemessen, dann ist:

$$\text{Der Inhalt } ADK = \text{Inhalt } ACB = \frac{200 \cdot 77{,}5}{2} = 100 + 77{,}5$$

$$= 77{,}50 \text{ Ares.}$$

Dieses Verfahren ist leicht auf alle schiefwinkliche Dreiecke anzuwenden, selbst wenn die Fläche eines Polygons ermittelt werden soll, welches nach (§. 114) construirt worden ist.

Man hat also in dem letzteren Falle folgendermaßen zu verfahren:

Man nimmt zur Basis der Reduction die Seite $\alpha\beta$ (Fig. 128) des Quadrats $\alpha\beta\gamma\delta$ und reducirt den Theil des Polygons ACDB in ein gleichhaltiges Dreieck Bba. Da die Ecken des Dreiecks a und B des Dreiecks Bba auf $\alpha\beta$ liegen, fängt man mit der Verwandlung der Ecke B an. Zu diesem Zwecke bildet man das Dreieck αbB und zieht Bb' parallel αb; verbindet man b'α, so wird das Dreieck Bba in das αb'a übergehen, ohne daß dadurch der Flächeninhalt verändert wird. Man zieht dann b'n parallel $\alpha\beta$ und führt die Verwandlung, wie in dem Vorhergehenden aus, so erhält man ein Dreieck $\alpha\beta\varepsilon$, welches dem Theile des Polygons ABCD gleich ist.

Ist $\alpha\beta = 500$ Meter, wie (§. 114) angenommen, und $\alpha\varepsilon = 282{,}8$, so hat man in

$$\text{Inhalt von ABCD} = \frac{500 \cdot 282{,}8}{2}$$

eine einfache Multiplication mit 5, wo sich ein Fehler nicht leicht einschleichen kann.

129. — **Den Inhalt einer Parzelle von rechtwinklicher Form zu finden.** Die Catasterpläne enthalten oft Figuren, die dem Rechteck oder Trapez nahe kommen. Zur Berechnung von dergleichen Figuren braucht man weder die Zerlegungs- noch Verwandlungsmethode; man begnügt sich, die Längen und mittlern Breiten auszumitteln.

Hat man von der Parzelle LGON (Fig. 32) die Längen ab und cd gemessen, so giebt das Product den Inhalt. In andern Fällen mißt man ab, dann die Breiten Le und No senkrecht auf ab. Zu Vermeidung der Addition der letzteren Größen, trägt man eine derselben auf die Verlängerung der andern von N nach l und mißt lO: man erhält dann:

$$\text{Inhalt von LGON} = \text{ab} \cdot \frac{\text{lO}}{2}.$$

Man zerlegt Raumfiguren nicht eher in Dreiecke, als bis man auf dem Plan die Maße der Seiten LG und NO beigeschrieben hat, welche in die Rechnung aufgenommen werden sollen. Hierauf wird LG als Grundlinie des Dreiecks GOL betrachtet, die Höhe On dieses Dreiecks wird mit dem Zirkel gemessen. Ebenso kann ON die Basis des Dreiecks ONL sein, wo dann die Höhe Lm ist; daher

Inhalt von GLNO $= \frac{GL \cdot On}{2} + \frac{ON \cdot Lm}{2}$.

130. — Zerlegung eines Polygons in parallele Streifen. Die Methode, nach welcher hier zu verfahren ist, findet man bereits (§. 124 Bemerkung) beschrieben, wie dort auf einen Abschnitt der Grenze angewandt, findet sie auch bei dem vollständigen Polygon Statt. — Wir wollen hier die Ableitung jener Formel geben.

Man hat das Vieleck Fig. 126a durch Parallelen von 10 Meter Abstand in Streifen zerlegt, deren jeder (die äußersten vielleicht ausgeschlossen) ein Trapez ist. Dadurch ergiebt sich $\frac{aa' + bb'}{2} \cdot 10 + \frac{bb' + cc'}{2} \cdot 10 + \frac{cc' + dd'}{2} \cdot 10 + \frac{dd' + ee'}{2} \cdot 10 + \ldots = I.$

Diese Summe vereinfacht, hat man

$$\frac{aa' + 2bb' + 2cc' + 2dd' + ee'}{2} \cdot 10, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{aa' + ee'}{2} + bb' + cc' + dd'\right) 10.,$$

woraus das Verfahren und zugleich die Anwendbarkeit auf das ganze Polygon hervorgeht.

Dabei ist zu berücksichtigen:

Wenn das Polygon besonders vorspringende oder eingehende Ecken hat, die gegen der Mitte der Grenzen nach beiden Seiten hin liegen, so nehme man deren Verbindung als erste Ordinatenlinie an, ziehe ihr senkrecht eine andere beliebige (Abscissenlinie) und trage auf letztere die gleichen Theilungen von jener Ordinate aus nach beiden Seiten.

Hat die Umgrenzung nur eine dergleichen Ecke, so legt man zwar die erste Ordinate ebenfalls durch diese Ecke, kann ihr aber jede beliebige Neigung geben, wenn sie nicht mit einer Seite des Vielecks parallel gelegt werden kann; nur müssen die Abstände stets in senkrechter Richtung zu dieser Ordinate aufgetragen werden.

Bei kleinen zwischen die Ordinaten fallenden Ecken läßt sich die Methode der Verwandlung anwenden. —

131. Prüfung der Inhaltsberechnung. So wie alle Messungsoperationen, müssen auch die Berech-

nungen des Inhalts einer strengen Prüfung unterzogen werden. Man kann sich bei'm Ablesen vom Maßstabe in dem Maße der Linien irren; man kann das Abschneiden der Decimalstellen vergessen; Fehler bei der Multiplication machen; endlich die Decimalen im Product falsch abschneiden 2c. Man darf daher nie die erste Berechnung als richtig annehmen.

Einige Geometer bedienen sich als Prüfung des zuerst gefundenen Inhalts der Zerlegung in andere Dreiecke 2c. als die vorhergebrauchten und darauf gegründeten nachmaligen Berechnung. Andere wenden bei der zweiten Berechnung ein ganz verschiedenes Rechnungsverfahren an. Wenn sie bei der ersten Berechnung der Methode (§. 124) gefolgt sind, so verfahren sie bei der zweiten nach der (§. 125). Diese Methode hat aber die große Unbequemlichkeit, daß sie bei abweichenden Resultaten unbestimmt läßt, ob der Fehler in der ersten oder zweiten Rechnung liegt, und nöthigt folglich noch zu einer dritten. Denn man mag ein Verfahren annehmen, welches es sei, so darf man nicht ruhen, bis man volle Gewißheit erlangt hat, daß das Resultat fehlerfrei sei.

Es ist eine der besten Prüfungsmethoden, daß man mit Hülfe der ersten Zerlegung die Berechnung der Dreiecke nochmals durchführt, jedoch andere Seiten als Grundlinien, folglich auch andere Höhen nimmt. Man hat dann nicht die mühevolle Arbeit der ganzen Berechnung der Figur, weil sich die Differenz bei jedem Dreieck herausstellt und die Berichtigung sofort erfolgen kann, bis Uebereinstimmung eintritt.

Schon die Vergleichung einzelner Parzellen gegeneinander mit den berechneten Inhalten kann auf Erkenntniß von vorgegangenen Fehlern führen; ein geübtes Auge trügt sich dabei selten.

Nicht selten braucht man auch ein durchsichtiges Blatt, Pauspapier, Glaspapier, Horn oder Glas, worauf genaue Quadrate gezogen werden (Fig. 129), deren Seite z. B. 10 Meter, jedes Quadrat also 1 Are groß ist. — Man legt dieses Blatt auf die Zeichnung und zählt die Anzahl der Quadrate, welche die verlangte Figur decken, wobei die Bruchtheile nach dem Augenmaße geschätzt werden. Von 5 zu 5 Theillinien zieht man eine stärkere, wodurch das Zählen erleichtert wird.

Zu einem solchen System von Quadraten ist das Glaspapier (aus thierischer Gallerte bestehend) gut; man schneidet die Quadrate mittelst der scharfen Spitze eines Federmessers an einem Lineal leicht ein und reibt sie mit trockenem Zinnober ein.

Vorzüglicher ist eine dünne Scheibe von reinem Glas, worauf die Quadrate mit dem Diamant eingeschnitten und mit rothem Firniß eingerieben werden. Die geschnittene Seite muß auf die Zeichnung zu liegen kommen.

Um die Fläche eines Polygons damit zu berechnen, legt man das Blatt auf die Figur GKLM, zählt zuerst die Quadrate von 25 Ares, hier drei; dann die einzelnen, wobei man mit den Bruchtheilen wie oben verfahren und jeden einzeln notiren oder auch soviel Bruchtheile der Quadrate zusammenzählen kann, bis ihre Summe ein Ganzes beträgt.

Die mit einem † bezeichneten Quadrate geben hinreichend an, wie die Zählung vorgenommen werden muß.

Die Anzahl der einzelnen Quadrate ist . 81
dazu drei Quadrate zu 25 Ares 3 • 25 . 75

Daher ist die Fläche = 156 Ares, oder 1 Hectare 56 Ares.

Diese Zählung kann mit veränderter Blattlage wiederholt werden.

Es gehört allerdings einige Uebung dazu um übereinstimmende Resultate zu erhalten; man kann auf 1 Hectare 2, auf 50 Hectares 10 Ares Differenz rechnen. — Uebrigens darf man sich dieses Prüfungsmittels nur bedienen, um einen Ueberschlag zu erhalten, ob nicht große Fehler begangen worden sind.

132. — **Berechnung der Flächen mit Hülfe der auf dem Felde gefundenen Maße.** In den nachfolgenden Berechnungen sollen die Kettenmessungen zu Hauptelementen angenommen und mit Ausmittelung des Inhaltes des Vierecks ABCD (Fig. 33) begonnen werden.

Das Viereck läßt sich in die Dreiecke ADB und DBC zerlegen, in welchen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind. Die Formel (§. 12,3) giebt für den Inhalt

$$ADB = \frac{AB \cdot AD}{2} \text{ Sin. } A = \frac{124 \cdot 92}{2} \text{ Sin. } 103^\circ\ 37'$$

$$DBC = \frac{DC \cdot CB}{2} \text{ Sin. } C = \frac{159 \cdot 117}{2} \text{ Sin. } 74^\circ\ 39'$$

$$\lg.\ 124 = 2{,}0934217$$

$$\lg.\ \frac{92}{2} = \lg.\ 46 = 1{,}6627578$$

$$\lg.\,\text{Sin}.\,103^\circ\,37' = \lg.\,\text{Cos}.\,13^\circ\,37' = \frac{9{,}9876183 - 10}{3{,}7437978}$$

$= 5543{,}6 = 55$ Ares $43{,}6$.

Ebenso ist das Dreieck DBC $= 89$ „ 70.

Daher Inhalt ABCD $=$ 1 Hect. 45,14 Ares.

Wendet man die Formel (§. 12, 8) an, so ist

$$ABCD = \sqrt{(p - AB)\,(p - BC)\,(p - CD)\,(p - DA)}$$

$$p = \frac{AB + BC + CD + DA}{2} = \frac{124 + 117 + 159 + 92}{2} = 246,$$

daher

$$ABCD = \sqrt{(246 - 124)\,(246 - 117)\,(246 - 159)\,(246 - 92)} = \sqrt{122 \cdot 129 \cdot 87 \cdot 154} = 14516$$

oder 1 Hect. 45,16 Ar.

Enthält das Polygon eine größere Anzahl Seiten, so ist zwar die Formel (§. 12, 3) noch brauchbar, man muß aber das Polygon zuerst in $n - 2$ Dreiecke zerlegen nnd die Winkel und unbekannten Seiten der Dreiecke suchen.

Soll, z. B., der Inhalt des Vielecks ABCDEF (Fig. 130) berechnet werden, so bildet man die Dreiecke AEF, AEB, BEC und CDE. Die Winkel des ersten in A und E werden durch die trigonometrische Formel VII. und mit ihnen die Seite AE durch Formel V bestimmt.

Ist der Winkel FAE bestimmt, so zieht man ihn von FAB ab, wodurch man den zu Bestimmung des zweiten Dreiecks nöthigen Winkel EAB erhält. Nach dieser Bestimmung geht man zu jedem der folgenden über. Obgleich das Dreieck EBC bereits durch die anliegenden bestimmt ist, so darf man es doch von der Berechnung nicht ausschließen, damit man die Richtigkeit der vorhergehenden Rechnungen controliren kann. — Hat man nun die nöthigen Elemente gefunden, so schreitet man zu der Inhaltsberechnung der einzelnen Dreiecke und erhält in der Summe $= 4$ Hect. 23,19 Ares den Gesammtinhalt.

Die Ausführung dieser Rechnungen erfordert viel Zeit, zumal wenn das Vieleck eine große Anzahl Seiten hat; man wendet sie deßhalb selten an. Es ist dabei noch das Unbequeme, daß man, um zur Kenntniß der einzelnen Elemente zu gelangen, die Winkel durch Beziehungen mit den bekannten Seiten aufsuchen muß, wobei sich immer Differenzen zeigen werden, deren Berichtigung lästig ist. Um diese möglichst zu vermindern, operirt man zuerst in Bezug auf die Dreiecke AEF und AEB; dann nimmt man die EDC und ECB. Findet nun eine Differenz auf EB in Folge der Berechnung von AEF und AEB Statt, so wird sie nur die Hälfte der auf CD betragen, wenn man die Berechnung von BEC, dann von ECD verfolgt hätte.

133. — Weit öfter bedient man sich eines umschriebenen Rechtecks, wie wir (§. 125) gezeigt haben Soll man den Inhalt des Polygons AB . . . F (Fig. 131) berechnen, so nimmt man zur Grundlinie des umschriebenen Rechtecks irgend eine Seite des Vielecks, hier AB; auf diese verlängerte Seite errichtet man die Senkrechten mp, no durch die äußersten Ecken C und F und schließt das Rechteck durch die Parallele op mit AB. Die Theile, wie pFEDp zerlegt man in rechtwinkliche Dreiecke und Rechtecke mittelst Senkrechter, wie Er, die aus den Ecken des Polygons auf die Seiten des Rechtecks gefällt werden, und durch Parallelen mit diesen Seiten, wie Fq. Es tritt nun das Verfahren (§. 125) ein, indem der Inhalt des Rechtecks mnop gesucht und davon die Summe aller außer dem Polygon liegenden Stücke abgezogen wird, womit der Inhalt des Polygons selbst erhalten wird *).

Die (§. 132 und 133) aufgestellten Verfahren beziehen sich auf Polygone von geringer Seitenzahl, oder wenn die Messung auf dem Felde einen gewissen Anhalt giebt, wodurch die Rechnung sich erleichtert. In einem Fall wie (Fig. 81) lassen sich diese Methoden jedoch nicht anwenden, indem die Grenze des Terrains zu gemischtlinig sind, und die Berechnung sehr beschwerlich werden würde. Indeß hat das dann zu beobachtende Verfahren insofern Aehnlichkeit mit jenen, daß man die Richtlinien der Vermessung als das umschriebene Vieleck betrachtet, von dem man die außer dem Vieleck liegenden Stücke abschneidet, um den Inhalt des Vielecks selbst zu erhalten; wobei zu beachten, ob diese Stücke negativ oder positiv addirt werden müssen.

---

*) Wir übergehen die numerische Ausführung, da sie schon sua dem Vorhergehenden genügend bekannt sein muß.

Man fängt sonach damit an, durch eine der angeführten Methoden die Fläche ABCD....H (Fig. 81), welche von den Linien der Vermessung eingeschlossen wird, zu berechnen. Hierauf sucht man den Inhalt jedes einzelnen Abschnitts, welcher zwischen einer Richtlinie und der Begrenzung des Vielecks liegt, und zieht diejenigen, welche außer der Fläche fallen, wie bei den Richtlinien AB, BC, CD...., ab, während man die, wie bei GH, HI zu dem Inhalt des umschriebenen n-Ecks zu addiren hat. Dabei darf man nicht versäumen eine Berechnungstabelle nach einem, in dem Vorhergehenden angegebenen, Schema anzulegen und die positive oder negative Beziehung den einzelnen Resultaten beizuschreiben.

134. — Obgleich die Berechnung der Oberflächen partieller Figuren keine Schwierigkeiten hat, so stellen sich diese Figuren doch zuweilen mit einer Verbindung der Richtlinien dar, die dem Anfänger auf den ersten Blick unlöslich scheinen. Nachfolgende sind die allgemeinern Fälle:

1) Die Form, die sich am öftersten bietet, ist die in A (Fig. 132). Der Inhalt dieser Figur ist leicht bestimmbar, indem man sie in drei Dreiecke zerlegt, wovon die beiden äußersten rechtwinklich sind, deren Seiten Aa, ab und Ac, cd bereits auf dem Felde gemessen sind. Von dem mittlern Dreieck erhält man den Inhalt durch Formeln (§. 12, 3.), nachdem man die Hypotenusen Ab und Ad der erstern Dreiecke berechnet hat; der Winkel bAd wird durch Subtraction der spitzen Winkel bAa, dAc von dem Winkel EAB erlangt.

2) Die zweite, ebenfalls oft vorkommende Form ist die, die sich zwischen den Senkrechten hg und Be auf BC findet.

Es handelt sich hier um zwei rechtwinkliche Dreiecke Bef, hfg, deren Seiten hg und Be bekannt sind, wie auch die Summe Bh der beiden andern. Man führt durch g eine Parallele gi mit Bh und bildet so ein neues rechtwinkliches Dreieck eig, dessen Catheten ei, gi bekannt sind. Man hat gi = Bh und ei = Be + hg, und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ist:

$$ei : ig = eB : Bf$$
$$ei : ig = hg : hf;$$

kennt man aber Bf und hf, so läßt sich der Inhalt der Dreiecke Bef und fhg berechnen.

3) Der Inhalt des Vierecks cdeB wird durch Zerlegung in zwei Dreiecke erhalten, wovon das cdB in c rechtwinklich ist; man kennt cd und Bc und sucht den spitzen Winkel cBd, dann ist

Winkel dBe = ABC — (cBd + eBf).

Bestimmt man noch die Hypotenuse Bd des Dreiecks Bdc, so hat man alle Stücke, die zu der Berechnung des Vierecks nöthig sind.

4) Die Figur in C zeigt mehr Schwierigkeit, weil man bei dem Messen auf dem Felde auf CD bei der Verlängerung von gn in m angehalten und nur die Distanz mn gemessen hat. Man kann auf verschiedene Art zu dem Inhalt dieser Figur gelangen: erstlich, indem man den Winkel Cmk des Dreiecks mkC berechnet, hierdurch den Winkel omn = 180° — Cmk erhalten und den Inhalt der Dreiecke mkC und onm nach der 3. Formel des (§. 12) berechnet.

Wenn man bei'm Messen von BC den Punct k nicht gemessen hätte, muß Ck nach der 2. Formel berechnet werden.

Man kann auch die Senkrechten lk, l'n aus k und n auf CD berechnen, hierauf das rechtwinkliche Dreieck lkC, worin der spitze Winkel lCk und die Hypotenuse Ck bekannt sind.

Es wird dann l'n gefunden durch

ml : lk = ml' : l'n

und somit die Höhe des Dreiecks bestimmt.

Man hat in dem letzten Beispiel nur rechtwinkliche Dreiecke, deren Auflösung immer die leichteste und schnellste ist.

5) Wir kommen zu den verschiedenartigen Figuren an der Ecke D. Die Vermessung des Theils ursx des Umfangs hat mittelst der Verlängerungen Dr und Dt der Richtlinien DE und CD Statt gefunden; übrigens ist ts gemessen worden.

Um für das Dreieck sru den Ausdruck für den Inhalt zu erhalten, ziehe man die Senkrechte ss' von der Ecke s nach ru und suche deren Werth. In dem rechtwinklichen Dreieck tpD hat man tD und den Winkel tDp = 180° — EDC, woraus sich tp entwickeln läßt. Dann bestimmt man die Hypotenuse tu des rechtwinklichen Dreiecks tpu und hat:

tu : tp = tu + ts : ss'.

Man kann noch die Dreiecke tDu, trD und trs bilden. Der Inhalt des ersten ist $= Du \cdot \frac{1}{2}\, tp$, der des zweiten findet sich durch die Formel (§. 12, 3.). Den Inhalt des dritten str zu finden, muß man erst die Seite tr des Dreiecks trD, sowie die Winkel rtD, Dtu suchen, wodurch auch der Winkel str $= 180^0 - (rtD + Dtu)$ erhalten wird.

6) Endlich wird der Inhalt des Vierecks vxyE mittelst der beiden rechtwinklichen Dreiecke vxE und Exy erhalten, welche dann unmittelbar den Inhalt dieses Vierecks $= vE \cdot \frac{1}{2}\, vx + Ey \cdot \frac{1}{2}\, xy$ geben.

Hätte man die Ecke x auf dem Terrain nur mittelst der einen oder der andern Senkrechten vx und xy bestimmt, so müßte man die andere unbekannte berechnen.

Große Ersparniß in der Rechnung findet Statt, wenn man bei der Kettenmessung der Richtlinien die Durchgangspuncte u, f, k, o der Grenzen auf denselben bestimmt.

Uebrigens kann man diese Rechnungen mit Vortheil durch Construction der einzelnen Figuren nach einem zehn- oder hundertfach größern Maßstab, als der angenommene des Plans ist, ersetzen. Der Inhalt bestimmt sich dann durch Zirkel und Maßstab; der erhaltene Annäherungswerth ist fast stets ausreichend. Wenn der Plan (Fig. 132) nach einem Maßstab von 1 : 2500 aufgetragen worden, so construirt man die Figur aAcdb auf ein besonderes Blatt nach dem Maßstabe von 1 : 250; die Messung von Ac, cd und Aa, ab dienen dann, den Inhalt der Dreiecke Acd, Aab zu berechnen, man hat dann nur nöthig, auf dem Plan die Linien zu messen, die zu der Berechnung des Inhalts Abd gebraucht werden. Man verfährt auf gleiche Weise mit der Figur onkC, wie mit allen andern, die in diese Cathegorie gehören.

135. — Inhaltsbestimmung einer Parzelle mittelst der Maße auf dem Felde. Die (§. 132, 133 und 134) mitgetheilten Verfahren beziehen sich nur auf die Berechnung des Totalinhalts des Polygons, welches durch die Grenzen des Terrains eingeschlossen wird. Befinden sich aber Details oder Parzellen im Innern des Polygons, so fragt es sich, ob die nämlichen Proceduren angewendet werden können.

Es erleidet dieses keinen Zweifel, denn die Verpflichtung, die Messungen auf dem Felde der Rechnung als Elemente zu unterlegen, bezieht sich nicht allein auf Massen, sondern erstreckt sich auf die Details.

Man muß also bei Berechnung der innern Details den nämlichen Gang befolgen, den wir für ein Polygon vorgezeichnet haben. Jedesmal muß der Anfang mit Berechnung der Totalfläche gemacht werden, dann geht man zu den untergeordneten Figuren über. Die Summe der letztern muß nothwendig gleich dem Flächeninhalte der ganzen Figur sein.

Wir sahen §. 113, daß, um zu dem Schluß des Polygons zu gelangen, man oft genöthigt ist, die Maße der Kettenmessung zu modificiren. In diesen Fällen darf man auch nicht die Maße des Terrains in Rechnung nehmen, sondern muß sich der corrigirten Maße bedienen, die bei'm Auftragen des Plans gebraucht worden sind, außerdem würden die Resultate der Berechnung nicht mit dem Plan stimmen. Man darf sich nicht verhehlen, daß die Berechnungen in Folge dergleichen Anordnungen vermehrt und schwieriger werden, indem man genöthigt wird die Werthe der Hauptlinien trigonometrisch zu suchen und die Differenzen auf alle Abschnitte dieser Linien zu vertheilen. Es giebt auch wenig Geometer, die sich zu einer so langweiligen Arbeit entschließen.

Sie befolgen eine Methode, die auch, ohne die genauesten und schärfsten Resultate zu geben, dem größten Theile der gestellten Bedingungen genügen.

Nachdem sie nämlich trigonometrisch oder mittelst rechtwinklicher Coordinaten den Inhalt der Masse des Terrains berechnet haben, suchen sie nach (§. 124 und 130) auf graphische Weise den Inhalt der secondären Figuren oder Parzellen, wobei eine Differenz zwischen der Summe der letztern und der Gesammtfläche nicht fehlen wird. Uebersteigt diese Differenz nicht $\frac{1}{300}$, so vertheilen sie solche auf die Parzellen nach Verhältniß ihres Inhalts.

Diese Methode ist zwar nicht streng mathematisch; sie bringt aber doch bei zweckmäßiger Anwendung Resultate, die nicht verwerflich sind. Jedoch muß man bei einiger Ausdehnung des Plans diesen in mehrere Polygone theilen, und sie nach den wirklichen Maßen berechnen, damit die Vertheilung der Differenzen, die man gegen die graphische Berechnung erhält, leichter und rationeller ausgeführt werden kann.

136. — **Größe der zulässigen Differenzen bei Linien- und Flächenmessungen.** Wir haben bei der Construction von Plans eine Differenz bei der Summe einer Folge von Linien zwischen zwei Puncten oder bei zwei Folgen die sich treffen, nachgesehen. Diese Nachsicht hat jedoch ihre Grenzen und es wäre ein falscher Glaube, daß man über alle Differenzen, die sich bei der Messung zeigen, wegsehen dürfe, wenn man den Plan aufträgt.

Die, welche im Allgemeinen zulässig sind, haben die Behörden festgestellt, welche die Oberaufsicht der Vermessungsgeschäfte haben. Wiewohl sich diese Festsetzung nur auf die Revisionen beziehet, welche die Administration vor Zulassung einer Vermessung vornehmen läßt, so müssen wir sie doch hier in Erwägung ziehen.

Im Allgemeinen sind sie bei Linien von

500 Meter und drüber $\frac{1}{500}$;
300 — 500 Met. . . . . $\frac{1}{300}$;
100 — 300 . . . . . $\frac{1}{100}$ und
unter 100 Meter . . . . . . $\frac{1}{50}$.

Das preußische Feldmesserreglement schreibt vor: „Findet der Revisor bei Nachmessung von Probelinien nur einen Unterschied von $\frac{3}{10}$ einer Ruthe auf 100 Ruthen Länge, oder weniger; so wird derselbe für zulässig gehalten, und die Aufnahme für richtig anerkannt.“ —

Wenn es sich jedoch um die Vermessung von Flächen handelt, wo die Irrung sowohl von der Winkel- als Kettenmessung entstanden sein kann, so kann die Zulässigkeit nur theilweise bezogen werden.

Angenommen es wäre bei'm Auftragen der Messung die Folge von Linien ABC...H (Fig. 98) bei ihrem Anschluß an die Folge der Linien AK'I'H'' eine Differenz HH'' gefunden worden, bei der ersten Folge aber ein Fehler nicht anzunehmen, die zweite würde dagegen nach der Correction (§. 109) AKIH; so wird die Fläche von der Grenze ABC....IKA eingeschlossen sein. Man begreift, daß eine Nachsicht, die dem Geometer auf Flächen zugestanden worden ist, und die Fläche, welche zwischen AKIH und AK'I'H'' liegt, sich innerhalb der Grenzen dieses Zugeständnisses hält, das Auftragen des Plans fortgesetzt werden kann; ist dieses nicht, so müssen die Operationen der Terrainmessung untersucht werden.

Die Berechnung der Fläche AKIHH''I'K'A ist leicht; es reicht hin HH'', so wie die von A nach H'' sich ergebende Länge (die Terrainmessung giebt stets diese letztere) zu messen, so giebt das halbe Product der einen in die andere die fragliche Fläche.

Wir schlagen vor für den hier erörterten Fall folgende Differenzen zuzulassen:

$\frac{1}{300}$ für Flächen über 300 Hectaren;
$\frac{1}{200}$ „ „ von 100 bis 300 Hectaren;
$\frac{1}{100}$ „ „ unter 100 Hectaren.

Das preußische Reglement gestattet bei Grundstücken von
1 bis 100 Morgen, 2 Quadr. Ruthen;
100 „ 500 „ auf 100 Morgen $1\frac{1}{9}$ Morgen, und auf jeden folgenden $1\frac{4}{5}$ Quadr.-Ruthe;
500 „ 1000 „ auf 500 Morgen $5\frac{1}{9}$ Morgen, und auf jeden folgenden $1\frac{1}{2}$ Quadr.-Ruthe;
1000 „ 5000 „ auf 1000 Morgen $9\frac{5}{18}$ Morgen, und auf jeden folgenden $1\frac{7}{20}$ Quadr. Ruthe ꝛc.

137. — Fehler, die von der Länge der Kette herrühren. Zuweilen wird wohl mit einer Kette gemessen, deren Berichtigung nicht hat vorgenommen werden können (§. 18) und die entweder größer oder kleiner als 10 Meter ist. Die Flächen sind dann mit einem Fehler behaftet, der sich jedoch berichtigen läßt, ohne eine neue Messung vornehmen zu müssen.

Ist die Kette zu lang, so ist die Fläche, die damit gemessen worden, zu klein, im Gegenfall erhält man einen zu großen Inhalt. Denn da die Endpuncte der Linien auf dem Terrain unveränderlich sind, so wird man mehr an Kettenlängen auf der Linie erhalten, wenn die Kette zu klein ist; dagegen werden weniger Ketten und Unterabtheilungen auf die Linie gehen, wenn die Kette größer als 10 Meter ist.

Nennt man die Normallänge der Kette L, die der gebrauchten Kette l, so kann diese $= L \pm$ irgend einem Bruchtheil sein, welcher leicht bestimmt werden kann. Setzt man ferner den Flächeninhalt eines mit der Kette l gemessenen Grundstücks $= s$, den Inhalt, welchen das Grundstück nach dem Normalmaß haben sollte $= S$, so hat man

$$l^2 : L^2 = s : S^{*}). \qquad (A.)$$

Bei einer großen Anzahl von Flächen wird aber diese Berechnung zu umständlich und man kürzt sie wie folgt ab:

*) Es verhalten sich nämlich ähnliche Figuren, wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

Es sei (Fig. 113) $AB = L = 10$ Meter, $AC = l, > 10$ Met.; man ziehe die Quadrate auf AB und AC und vervollständige die Figur. Die Differenz zwischen AB^2 und AC^2 ist $2\ AB \cdot BC + BC^2$ oder gleich den beiden Rechtecken a und b auf L und $l - L$ und dem Quadrat n mit $l - L$ construirt. Dann ist
$L^2 = l^2 - [2\ L\ (l - L) + (l - L^2)] \ldots.$ (B.)
Ist $l < C$, so wird die Formel:

$$L^2 = l^2 + [2\,l\ (L - l) + (L - l)^2] \ldots. \quad (C.)$$

Wir können daraus den Satz ableiten, daß die Differenz, welche zwischen dem wahren Inhalt einer Fläche und dem mit unrichtiger Kette ermittelten, gleich ist

dem Quadrat der Differenz der Quadratwurzeln dieser Flächen, vermehrt um das doppelte Rechteck, welches mit der Wurzel der ersten Fläche und der Differenz beider Wurzeln erhalten wird;

denn was von L^2 oder $10^2 = 1$ Are gilt, hat auch auf jede Anzahl von Ares Geltung. Folglich wird genügen a, b und n zu bestimmen, die Summe dieser drei Größen in den falschen gefundenen Inhalt zu multipliciren und das Resultat, je nachdem die Kette zu kurz oder zu lang ist, positiv oder negativ dem falschen Inhalt hinzuzurechnen, um den wahren Inhalt zu erhalten. Die Rechnung wird immer kurz sein, da der Factor $(a + b + n)$ stets nur aus wenig Ziffern besteht.

Beispiel. Man hat eine Vermessung mit einer Kette beendigt, die 0,027 Millim. länger als 10 Meter ist, und den Flächeninhalt = 24 Hect. 05 Ar. 36 Cent. gefunden. Welches ist der wahre Inhalt?

Nach der Formel (B) ist
$a = 10 \cdot 0{,}027 = 0{,}27, \quad a + b = 0{,}54, \quad n = 0{,}027^2 = 0{,}000729, \; a + n + d = 0{,}54 + 0{,}000739 = 0{,}540729$ oder kürzer 0,541.

Es ist daher der richtige Flächeninhalt
24 H. 05 A. 36 C. + (24,05, 36 · 0,541) = 24 H. 05 A. 36 C. + 12 A. 91 C. = 24 Hect. 18 Ar. 27 Cent.

In der Praxis und wenn die Differenz der Kette nicht 0,2 Cent. übersteigt, kann man den Werth n vernachlässigen.