Briggs berechnete zuerst eine Tafel unserer gemeinen Logarithmen (die man nach ihm auch Brigg'sche Log. nennt) für die Zahlen von 1 bis 20,000 und von 90,000 bis 100,000 auf 14 Bruchstellen im Jahr 1624. Adrian Vlacq ergänzte dieselbe. Diese auf 10 Decimalstellen berechneten Tafeln wurden allgemein gebraucht, bis sie in vervollkommneter Einrichtung und auf 10 Stellen berechnet, durch die von Vega (Thesaurus logar. completus etc. Fol. 1793) und von Callet (Tables portat. de Logar. etc. Paris, 1795), welche die Logarithmen bis 108000 auf 8 Stellen enthalten und sehr reichhaltig sind, verdrängt wurden. Vega's logarithmisch trigonometrisches Handbuch, 4. Leipzig. Stereotypausgabe, ist das am meisten gebrauchte Werk, sehr bequem eingerichtet und enthält in den neueren Ausgaben auch die von Gauß zuerst berechneten Tafeln, vermittelst deren man aus den gegebenen Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe und ihres Unterschieds finden kann. Ein Menge von andern herausgegebenen Tafeln können wir hier übergehen, da die meisten nur Abkürzung in den Decimalstellen geben, in dem System nicht verschieden sind und oft die Bequemlichkeit des Vega'schen Handbuchs nicht erreichen. In Frankreich sind die von Callet und Lalande die gebräuchlichsten. Die Letzteren haben nur 5 Decimalen und gehen von 1 bis 10,000.

Der Gebrauch der logarithmischen Tafeln muß zur Fertigkeit eingeübt werden und ist gewöhnlich jeder Sammlung als Einleitung beigegeben, worauf hier um so eher verwiesen werden kann, da deren Anwendung bereits in den bessern elementaren Unterrichtsanstalten gelehrt wird und bei dem angehenden Geometer vorausgesetzt werden muß.

Zweites Capitel.

Die wichtigsten Sätze der Trigonometrie.

8. — Die Grundlage der Feldmeßkunst bleibt immer die Geometrie, und sie ist in frühern Zeiten für allein hinreichend gehalten worden, ein Stück Terrain in Grund zu legen und zu berechnen. Auch genügen deren

Sätze bei Vermessungen einzelner Ländereien; und wenn es sich nur darum handelt, gegebene Flächen in Grund zu legen, bietet diese Wissenschaft in der That alle Mittel, den Zweck zu erreichen.

Bei umfangreichern Messungen, bei Aufnahmen ganzer Districte, Ländern und da, wo es auf vorzügliche Genauigkeit ankommt, langt die Anwendung geometrischer Sätze in Praxis nicht aus, es müssen dann die graphischen Constructionen an trigometrische Berechnungen geknüpft werden, wodurch allein Sicherheit und Vertrauen gewonnen werden kann, und ohne dieses wird der Geometer nie mit Lust und Liebe bei der Arbeit sein.

Bei größern Vermessungen ist es das trigonometrische Netz, welches, ein Scelett des Ganzen, dem Geometer sichere Anknüpfungspuncte gewährt, in die er die Detaijs einarbeiten kann, das jede Zweifel an Genauigkeit durch leichte Controle hebt und dabei die secundären Arbeiten ungemein erleichtert. Ein dergleichen Netz läßt sich zwar auch graphisch (mittelst des Meßtisches, der Zollmann'schen Scheibe ꝛc.) bilden, jedoch bei der nicht zu beseitigenden Unvollkommenheit der Instrumente uie mit der Schärfe, der man die untergeordneten Operationen mit Vertrauen anschließen kann.

Wird das trigonometrische Netz noch an einige astronomische Beobachtungen geknüpft, so erlangt man natürlicher Weise eine noch größere Zuverlässigkeit. Dergleichen Maßnahmen sind jedoch nur für Vermessungen von Ländern nöthig und gehören nicht in den Bereich dieser Schrift.

Der Geometer muß selbst entscheiden können, welche Grundoperationen seiner Arbeit unterlegt werden müssen, welchen Grad der Schärfe das oder jenes Instrument leistet und danach die Wahl treffen; nie aber darf er mit der Entschuldigung vortreten, daß die ihm zu Gebot gestandenen Instrumente eine größere Genauigkeit nicht erzielen ließen. Die Meßinstrnmente sind jetzt auf einen Grad der Vollkommenheit gebracht, im Verhältniß weit billiger wie früher und so verbreitet, daß die richtige Wahl nicht schwer werden kann. Eine Menge der ältern sind ihrer Unvollkommenheit wegen in Ruhestand versetzt und nur noch im Gebrauch der Empyrie; wir werden auf sie nicht Bedacht nehmen und damit unsere Unterweisung nur auf die neueren, vollkommneren und jetzt üblichen beschränken können, wodurch zugleich eine größere Einfachheit der Schrift erlangt wird.

Wenn wir aber demnächst voraussetzen müssen, daß zu der Vorbildung eines Feldmessers die Trigonometrie unbedingt gehört, so darf der Leser hier nicht ein vollständiges Lehrgebäude dieser Disciplin erwarten, jedoch sollen die wichtigsten und nöthigsten trigonometrischen Formeln und deren Anwendung in einigen Beispielen in Nachstehendem aufgenommen werden, ohne in deren Ableitung einzugehen.

9. — I. Allgemeine trigonometrische Formeln.

1) $\text{Tg. } \alpha = \frac{\text{Sin. } \alpha}{\text{Cos. } \alpha}$;

2) $\text{Cotg. } \alpha = \frac{\text{Cos. } \alpha}{\text{Sin. } \alpha}$;

3) $\text{Sec. } \alpha = \frac{1}{\text{Cos. } \alpha}$;

4) $\text{Cosec. } \alpha = \frac{1}{\text{Sin. } \alpha}$

5) $\text{Sin. vers. } \alpha = 1 - \text{Cos. } \alpha$;

6) $\text{Cos. vers. } \alpha = 1 - \text{Sin. } \alpha$;

7) $\text{Sin. } \alpha^2 + \text{Cos. } \alpha^2 = 1$;

daraus: $\text{Sin. } \alpha^2 = 1 - \text{Cos. } \alpha^2$;

$\text{Cos. } \alpha^2 = 1 - \text{Sin. } \alpha^2$;

$\text{Sin. } \alpha = \sqrt{1 - \text{Cos. } \alpha^2}$;

$\text{Cos. } \alpha = \sqrt{1 - \text{Sin. } \alpha^2}$;

8) $\text{Tg. } \alpha \cdot \text{Ctg. } \alpha = 1$;

daraus: $\text{Tg. } \alpha = \frac{1}{\text{Ctg. } \alpha}$;

$\text{Ctg. } \alpha = \frac{1}{\text{Tg. } \alpha}$;

9) $\text{Sin. } (\alpha + \beta) = \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta + \text{Cos. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta$;

10) $\text{Sin. } (\alpha - \beta) = \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta - \text{Cos. } \alpha \cdot \text{Sia. } \beta$;

11) $\text{Cos. } (\alpha + \beta) = \text{Cos. } \alpha \cdot \text{Cos. } - \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta$;

12) $\text{Cos. } (\alpha - \beta) = \text{Cos. } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta + \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta$;

13) $\text{Sin. } 2\alpha = 2 \text{ Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \alpha$;

und setzt man für α den Winkel $\frac{\alpha}{2}$,

$\text{Sin. } \alpha = 2 \text{ Sin. } \frac{\alpha}{2} \cdot \text{Cos. } \frac{\alpha}{2}$;

14) $\mathrm{Cos.}\ 2\alpha = \mathrm{Cos.}\ \alpha^2 - \mathrm{Sin.}\ \alpha^2$;
und daraus wie vorher

$$\mathrm{Cos.}\ \alpha = \mathrm{Cos.}\ \frac{\alpha^2}{2} - \mathrm{Sin.}\ \frac{\alpha^2}{2}$$

15) $\mathrm{Cos.}\ 2\alpha = 1 - 2\ \mathrm{Sin.}\ \alpha^2$;
woraus noch

$$\mathrm{Cos.}\ \alpha = 1 - 2\ \mathrm{Sin.}\ \frac{\alpha^2}{2};$$

16) $\mathrm{Cos.}\ 2\alpha = 2\ \mathrm{Cos.}\ \alpha^2 - 1$;
und daraus

$$\mathrm{Cos.}\ \alpha = 2\ \mathrm{Cos.}\ \frac{\alpha^2}{2} - 1;$$

17) $\mathrm{Sin.}\ 3\alpha = \mathrm{Sin.}\ 2\alpha \cdot \mathrm{Cos.}\ \alpha + \mathrm{Cos.}\ 2\alpha \cdot \mathrm{Sin.}\ \alpha,$
$= 3\ \mathrm{Cos.}\ \alpha^2 . \mathrm{Sin.}\ \alpha - \mathrm{Sin.}\ \alpha^3$;

18) $\mathrm{Cos.}\ 3\alpha = \mathrm{Cos.}\ 2\alpha \cdot \mathrm{Cos.}\ \alpha - \mathrm{Sin.}\ 2\alpha \cdot \mathrm{Sin.}\ \alpha$
$= \mathrm{Cos.}\ \alpha^3 - 3\ \mathrm{Cos.}\ \alpha \cdot \mathrm{Sin.}\ \alpha^2$;

19) $\mathrm{Tg.}\ 2\alpha = \dfrac{2\ \mathrm{Tg.}\ \alpha}{1 - \mathrm{Tg.}\ \alpha^2}$; und $\mathrm{Tg.}\ \alpha = \dfrac{2\ \mathrm{Tg.}\ \frac{1}{2}\alpha}{1 - \mathrm{Tg.} \frac{1}{2}\alpha^2}$;

20) $\mathrm{Ctg.}\ 2\alpha = \dfrac{\mathrm{Ctg.}\ \alpha^2 - 1}{2\ \mathrm{Ctg.}\ \alpha}$; und $\mathrm{Ctg.}\ \alpha = \dfrac{\mathrm{Ctg.} \frac{1}{2}\alpha^2 - 1}{2\ \mathrm{Ctg.}\ \frac{1}{2}\ \alpha}$

21) $\mathrm{Sin.}\ n\alpha = n_1\ \mathrm{Sin.}\ \alpha^1 \cdot \mathrm{Cos.}\ \alpha^{n-1} - n_3\ \mathrm{Sin.} \alpha^3$;
$\mathrm{Cos.}\ \alpha^{n-3} + n_5\ \mathrm{Sin.}\ \alpha^5 \cdot \mathrm{Cos.}\ \alpha^{n-5} - \ldots\ldots$

22) $\mathrm{Cos.}\ n\alpha = \mathrm{Cos.}\ \alpha^n - n_2\ \mathrm{Sin.}\ \alpha^2 \cdot \mathrm{Cos.}\ \alpha^{n-2}$
$+ n_4\ \mathrm{Sin.}\ \alpha^4\ \mathrm{Cos.}\ \alpha^{n-4} \ldots\ldots n_n\ \mathrm{Sin.}\ \alpha^n\ \mathrm{Cos.} \alpha^{n-n}$;

23) $\mathrm{Sin.} \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{Cos.} \alpha}{2}}$;

24) $\mathrm{Cos.}\ \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\mathrm{Sin.} \alpha}{2\ \mathrm{Sin.}\ \frac{1}{2}\alpha} = \sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{Cos.} \alpha}{2}}$;

25) $\mathrm{Tg.}\ \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{Cos.}\ \alpha}{\mathrm{Sin.}\ \alpha} = \mathrm{Ctg.} \frac{1}{2}\alpha - 2\ \mathrm{Ctg.} \alpha$
$= \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{Cos.}\ \alpha}{1 + \mathrm{Cos.}\ \alpha}}$;

26) $\mathrm{Cotg.}\ \frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\mathrm{Sin.}\ \alpha}{1 - \mathrm{Cos.}\ \alpha} = \sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{Cos.} \alpha}{1 - \mathrm{Cos.} \alpha}}$;

27) $1 + \mathrm{Cos.} \alpha = 2\ \mathrm{Cos.}\ \dfrac{\alpha^2}{2}$;

28) $1 - \mathrm{Cos.} \alpha = 2\ \mathrm{Sin.}\ \dfrac{\alpha^2}{2}$;

29) $\mathrm{Sin.} (\alpha + \beta) + \mathrm{Sin.}\ (\alpha - \beta) = 2\ \mathrm{Sin.}\ \alpha \cdot \mathrm{Cos.} \beta$;

30) $\text{Sin.}(\alpha+\beta) - \text{Sin.}(\alpha-\beta) = 2\,\text{Cos.}\,\alpha\cdot\text{Sin.}\beta$;
31) $\text{Cos.}(\alpha+\beta) + \text{Cos.}(\alpha-\beta) = 2\,\text{Cos.}\alpha\cdot\text{Cos.}\beta$;
32) $\text{Cos.}(\alpha-\beta) - \text{Cos.}(\alpha+\beta) = 2\,\text{Sin.}\,\alpha\cdot\text{Sin.}\beta$;
33) $\text{Sin.}\alpha + \text{Sin.}\,\beta = 2\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\text{Cos.}\frac{\alpha-\beta}{2}$;
34) $\text{Sin.}\alpha - \text{Sin.}\,\beta = 2\,\text{Cos.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\text{Sin.}\frac{\alpha-\beta}{2}$;
35) $\text{Cos.}\alpha + \text{Cos.}\beta = 2\,\text{Cos.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\text{Cos.}\frac{\alpha-\beta}{2}$;
36) $\text{Cos.}\,\alpha - \text{Cos.}\,\beta = 2\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\text{Sin.}\frac{\beta-\alpha}{2}$;
37) $\frac{\text{Sin.}\,\alpha + \text{Sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\alpha + \text{Cos.}\,\beta} = \text{Tg.}\frac{\alpha+\beta}{2}$;
38) $\frac{\text{Sin.}\,\alpha - \text{Sin.}\,\beta}{\text{Cos.}\,\alpha + \text{Cos.}\,\beta} = \text{Tg.}\frac{\alpha-\beta}{2}$;
39) $\frac{\text{Sin.}\,\alpha + \text{Sin.}\,\beta}{\text{Sin.}\,\alpha - \text{Sin.}\,\beta} = \frac{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha+\beta)}{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha-\beta)}$;
40) $\text{Sin.}\,\alpha^2 - \text{Sin.}\,\beta^2 = \text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\cdot\text{Sin.}\,(\alpha-\beta)$;
41) $\text{Cos.}\,\alpha^2 - \text{Cos.}\,\beta^2 = \text{Sin.}\,(\alpha+\beta)\cdot\text{Sin.}\,(\beta-\alpha)$;
42) $\text{Tg.}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{Tg.}\,\alpha + \text{Tg.}\,\beta}{1 - \text{Tg.}\,\alpha\cdot\text{Tg.}\,\beta}$;
43) $\text{Tg.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{Tg.}\,\alpha - \text{Tg.}\,\beta}{1 + \text{Tg.}\,\alpha\cdot\text{Tg.}\,\beta}$;
44) $\text{Ctg.}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{Ctg.}\,\alpha\cdot\text{Ctg.}\,\beta - 1}{\text{Ctg.}\,\beta + \text{Ctg.}\,\alpha}$;
45) $\text{Ctg.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{Ctg.}\,\alpha\cdot\text{Ctg.}\,\beta + 1}{\text{Ctg.}\,\beta - \text{Ctg.}\,\alpha}$;

Wenn die Summe der Winkel α, β und γ gleich 2 R, so ist noch:

46) $\text{Sin.}\,\alpha + \text{Sin.}\beta + \text{Sin.}\,\gamma = 4\,\text{Cos.}\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Cos.}\frac{\beta}{2}\cdot\text{Cos.}\frac{\gamma}{2}$;
47) $\text{Cos.}\,\alpha + \text{Cos.}\,\beta + \text{Cos.}\,\gamma = 1 + 4\,\text{Sin.}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\text{Sin.}\frac{\beta}{2}\cdot\text{Sin.}\,\frac{\gamma}{2}$;
48) $\text{Tg.}\,\alpha + \text{Tg.}\beta + \text{Tg.}\,\gamma = \text{Tg.}\alpha.\,\text{Tg.}\,\beta.\text{Tg.}\,\gamma$;
49) $\text{Ctg.}\,\frac{\alpha}{2} + \text{Ctg.}\,\frac{\beta}{2} + \text{Ctg.}\,\frac{\gamma}{2} = \text{Ctg.}\,\frac{\alpha}{2}.\text{Ctg.}\frac{\beta}{2}.\,\text{Ctg.}\,\frac{\gamma}{2}$;

50) $\text{Tg.}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\text{Tg.}\,\frac{\beta}{2} + \text{Tg.}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\text{Tg.}\,\frac{\gamma}{2} + \text{Tg.}\,\frac{\beta}{2}\,.$

$$\text{Tg.}\,\frac{\gamma}{2} = 1;$$

51) $\text{Ctg.}\,\alpha\,.\,\text{Ctg.}\,\beta + \text{Ctg.}\,\alpha\,.\,\text{Ctg.}\,\gamma + \text{Ctg.}\,\beta\,.$

$$\text{Ctg.}\,\gamma = 1;$$

II. Formeln zu Berechnung von geradlinigen Dreiecken.

A. Für rechtwinklige Dreiecke.

Sind A, B die schiefen Winkel des Dreieckes, a und b die den gleichnamigen Winkeln gegenliegende Seiten, h die Hypotenuse, so bedarf es außer dem rechten Winkel noch zweier gegebenen Stücke:

1) die Hypotenuse und eines spitzen Winkels;
2) einer Cathete und eines spitzen Winkels,
3) der Hypotenuse und einer Cathete,
4) beider Catheten,

um sämmtliche Stücke des Dreiecks zu finden. Hierzu dienen folgende Formeln, worin der Radius gleich 1 gesetzt und der Inhalt mit Q bezeichnet ist.

Nr.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1	b, A	B	$B = R - A;$
	-	a	$a = h\,.\,\text{Sin.}\,A;$
	-	b	$b = h\,.\,\text{Cos.}\,A;$
	-	Q	$Q = \frac{1}{2}\,h^2\,.\,\text{Sin.}\,A\,.\,\text{Cos.}\,A;$
2	h, a	A	$\text{Sin.}\,A = \frac{a}{h}$
	-	B	$\text{Cos.}\,B = \frac{a}{h};$
	-	b	$b = \text{Sin.}\,B\,.\,h = \text{Tg.}\,B\,.\,a$ $= \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{(h+a)\,.\,(h-a};$
	-	B	$\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{h-a}{2\,h}};$
	-	-	$\text{Tg.}\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$
3	a, A od. B	A	$A = R - B;$
	-	B	$B = R - A;$

Nr.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
3	a, A od. B	h	$h = \frac{a}{Cos.\ B} = \frac{a}{Sin.\ A} = a . Sec. B$ $= a . Cosec.\ A;$
	-	b	$b = a . Tg.\ B = a . Ctg.\ A;$
4	a, b	A	$Ctg.\ A = \frac{b}{a};$
	-	B	$Ctg.\ B = \frac{a}{b};$
	-	A	$Tg.\ A = \frac{a}{b};$
	-	B	$Tg.\ B = \frac{b}{a};$
	-	h	$h = \frac{a}{Sin.\ A} = \frac{b}{Sin.\ B};$
	-	-	$h = \frac{a}{Cos.\ B} = \frac{b}{Cos.\ A};$
	-	-	$a . Cosec.\ A = b . Cosec.\ B;$
	-	-	$a . Sec.\ B = b . Sec.\ A;$
	-	Q	$Q = \frac{a^2 . tg.\ B}{2} = \frac{a^2 . Ctg.\ A}{2};$
	-	h	$h = \sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$

B. Für schiefwinkelige Dreiecke.

Bei den zu Lösung eines schiefwinkeligen Dreieckes nöthigen drei Stücken muß offenbar wenigstens eine Seite vorkommen und es beschränken sich die Fälle auf Folgende:

1) Gegeben eine Seite und zwei Winkel (daher auch der dritte bekannt);
2) Gegeben zwei Seiten und
   a) der eingeschlossene Winkel;
   b) ein gegenliegender Winkel;
3) Gegeben alle drei Seiten.

Außer diesen Hauptfällen können noch andere vorkommen, wo Linien oder Winkel im Dreieck gegeben sind, die nicht zu seinen ursprünglichen Bestandtheilen gehören. Einige dergleichen Aufgaben werden später folgen.

Nr.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
5	a od. b, A, C	B	$B = 2\,R - (A + C)$;
	-	b	$b = \frac{\text{Sin. } B \,.\, a}{\text{Sin. } A}$;
	-	c	$c = \frac{\text{Sin. } C \,.\, a}{\text{Sin. } A}$;
	-	a	$a = \frac{c \,.\, \text{Sin. } A}{\text{Sin.}(A+B)}$;
	-	Q	$Q = \frac{1}{2} \frac{c^2 \,.\, \text{Sin. } A \,.\, \text{Sin. } B}{\text{Sin. } (A + B)}$;
6	a, b, C	A und B	$\text{tg. } \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} . \text{Ctg.} \frac{1}{2} C$, dann ist $A =$ Compl. $\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} (A - B)$, $B =$ Compl. $\frac{1}{2} C - \frac{1}{2} (A - B)$;
	-	c	$c = \frac{\text{Sin. } C \,.\, a}{\text{Sin. } A}$;
7	a, b, A	B	$\text{Sin. } B = \frac{b \,.\, \text{Sin. } A}{a}$; ist nur bestimmt, wenn $a > b$; ist $b > a$, so ist das Supplement zu nehmen, sobald B kleiner als A gefunden wird;
		C	$C = 2\,R - (A + B)$;
	-	c	$c = \frac{\text{Sin. } C \,.\, a}{\text{Sin. } A} = \frac{\text{Sin. } C \,.\, b}{\text{Sin. } B} = \frac{b \,.\, \text{Sin. } (A + B)}{\text{Sin. } B}$;
	-	Q	$Q = \frac{1}{2}\, ab \,.\, \text{Sin. } (A + B)$. Mit Anwendung eines Hülfswinkels φ, so daß $\text{Tg. } \varphi = \frac{B}{A}$, wenn $A > B$; dann ist: $\text{Ctg. } \frac{1}{2} (A - B) = \text{Tg. } \frac{1}{2} C . \text{Tg. } (\frac{1}{2} R + \varphi) \text{ Tg. } B = \frac{b \,.\, \text{Sin. } C}{a \,.\, b \text{ Cos. } C}$. Setzt man $\text{Tg. } \varphi = \frac{2 \text{Sin. } \frac{1}{2} C}{a - b} \cdot \sqrt{a\ b}$, so ist $c = \frac{a - b}{\text{Cos.} \varphi}$ oder $c = \sqrt{2a \,.\, 2b \,.\, \text{Sin. } \frac{1}{2} C^2 + (a\ b)^2}$.
8	a, b, c	A, B, C	Sind m und n die Projectionen von b und c auf der größten Seite a, so ist: $m - n = \frac{(b + c \,.\, (b - c)}{a}$; $m = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} (m - n)$; $n = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} (m - n)$;

Nr.	Gegeben.	Gesuchte.	Formeln.
	-	B	$\text{Cos. } B = \frac{n}{c}$
	-	C	$\text{Cos. } C = \frac{m}{b}$
	-	A	$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b+c) . \frac{1}{2}(b+c-a)}{b\ c}}$
	-	B	$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b+c) . \frac{1}{2}(a-b+c)}{a\ c}}$
	-	C	$\text{Cos.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b+c . \frac{1}{2}(a+b-c)}{a\ b}}$
		A	$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b-c) . \frac{1}{2}(a+b-c)}{b\ c}}$
		B	$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b-c) . \frac{1}{2}(b+c-a)}{a\ c}}$
		C	$\text{Sin.} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(b+c-a) . \frac{1}{2}(a+c-b)}{a\ b}}$

C. Einige besondere Formeln.

9. $(a+b) \text{ Sin.} \frac{C}{2} = c \text{ Cos.} \frac{A-C}{2}$ und $a-b \text{ Cos.} \frac{C}{2} = c \text{ Sin.} \frac{A-B.}{2}$

Diese unter der Benennung „Gauß'sche Gleichung" bekannten Formeln sind oft vortheilhaft anzuwenden.

10. $Q = \frac{b \cdot c \cdot \text{Sin. } A}{2} = \frac{1}{2} ab \cdot \text{Sin.} C$, woraus

$$\text{Sin. } A = \frac{2\,Q}{b \cdot c};$$

11. Ist $a + b + c = s$, so ist:

$$Q = \sqrt{\tfrac{1}{2} s \left(\tfrac{1}{2} s - a\right) \left(\tfrac{1}{2} s - b\right) \left(\tfrac{1}{2} s - c\right)}$$

12. Für den umschriebenen Kreis eines Dreiecks ist:

$$\text{Radius} = \frac{abc}{4Q} = \frac{a\ b\ c}{\sqrt{s\,(s-2a)\ (s-2b)\ (s-2c)}};$$

Für den eingeschriebenen Kreis:

$$\text{Radius} = \frac{2Q}{a+b+c} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-2c)}}{s}$$

13. Noch ist:

$\text{Sin. } A : (\text{Sin. } A + \text{Sin. } B + \text{Sin. } C) = a : s,$
$\text{Sin. } B : (\text{Sin. } A + \text{Sin. } B + \text{Sin. } C) = b : s,$
$\text{Sin. } C : (\text{Sin. } A + \text{Sin. } B + \text{Sin. } C) = c : s.$

Anmerkung. Für Leser französischer Schriften über Geodäsie werden folgende Bemerkungen nicht undienlich sein.

Seit Einführung des neuen Maß- und Gewichtssystem hat man in Frankreich auch bei der Winkelmessung die Decimaltheilung festgesetzt, den vierten Theil des Kreises, den Quadrant, als Maßeinheit angenommen und ihn in 100 Theile zerlegt, so daß also der ganze Kreis 400 solcher Theile enthält. Um diese Eintheilung nicht mit der ältern zu verwechseln, hat man die Bestimmung getroffen, die ältern Grade (zu 360) degrés, die neuern (zu 400) grades zu nennen, wofür der Deutsche nur die allgemeine Benennung „Grade" hat. Die Bezeichnung der ältern Theilung ist die bekannte $^{\circ}$, $'$ $''$; die neuern ganzen Grade werden mit G oberhalb bezeichnet und deren Bruchtheile in Decimalen von zwei zu zwei Stellen in Minuten, Secunden u. s. w. abgeschnitten.

Zuweilen nimmt man die Einheit (den Quadranten) zum Maß für einen Bogen und drückt dann, z. B., einen Bogen oder Winkel von 34^{G}, 4617 aus durch 0,344617.

Die neuere Eintheilung ist jedoch nicht allgemein in Gebrauch gekommen, zuerst bei der großen Charte von Frankreich angewendet, später aber nur vereinzelt gebraucht worden, so viel Vortheil sie auch gewährt.

Ebenso hat der Leser auf die Bezeichnung des rechten Winkels zu achten. Wenn wir 1 R, 2 R, $\frac{1}{2}$ R u. s. w. schreiben, setzen die französischen Schriftsteller 1^{D}, 2^{D}, $\frac{1}{2}^{D}$.

11. — Da bei trigonometrischen Berechnungen zuweilen negative Winkel oder Functionen vorkommen, so glauben wir folgendes in Erinnerung bringen zu müssen.

Es erhalten sich die erwähnten Bezeichnungen am leichtesten im Gedächtniß, wenn man von der Bildung der Function der Figur 1 nach ausgeht, und die Bewegung der Erzeugung nach entgegengesetzter Richtung durch entgegengesetzte Zeichen andeutet. Es bewegt sich z. B., der Sinus im ersten Quadranten (Fig. 1) von dem festen Puncte a des Durchschnitts des beweglichen Schenkels eines von Null an wachsenden Winkels mit dem Kreis, oder von dem Endpunct des drehenden Radius, nach dem festen Schenkel und dessen Verlängerung, also von oben nach unten. Eben so im zweiten Quadranten. Setzt man diese Richtung positiv, so wird die im dritten und vierten Quadranten als entgegengesetzt, von unten nach oben, negativ bezeichnet werden müssen.

Der Cosinus findet, von dem Mittelpunct ausgehend, in dem ersten Quadrant sein Ende an dem Sinus in b in einer Richtung von links nach rechts. Dasselbe im vierten Quadranten; dagegen ist, wenn man diese Richtung positiv bezeichnet, der Cosinus im zweiten und dritten Quadranten negativ, wegen entgegengesetzter Bewegung.

Im Allgemeinen werden aber alle Functionen ihrer Richtung nach im ersten Quadranten positiv gesetzt.

Die Tangente hat ihren festen Punct im Durchschnitt m des unbeweglichen Schenkels mit dem Kreis und bewegt sich auswärts bis n. Man würde diese Bildung positiv setzen und danach die in den anderen Quadranten bestimmen können, doch kann dieses nur durch Beziehung auf den festen Schenkel unmittelbar, also durch Verlängerung des beweglichen Schenkels geschehen und es ist einfacher, die Tangenten und übrigen Functionen ihren Vorzeichen nach durch Sinus und Cosinus zu bestimmen. Es ist nämlich nach Oben

	im 1. Quadr.,	2. Quadr.,	3. Quadr.,	4. Quadr.
Sinus	+	+	—	—
Cosinus	+	—	—	+

Da nun Tangente $= \frac{\text{Sinus}}{\text{Cosinus}}$, so ist jede Tangente α des ersten Quadranten $\frac{+\ \text{Sin.}\ \alpha}{+\ \text{Cos.}\ \alpha} = +\ \text{Tg.}\ \alpha$; im zweiten Quadr. $\frac{+\ \text{Sin.}\ \alpha}{-\ \text{Cos.}\ \alpha} = -\ \text{Tg.}\ \alpha$; im dritten $+\ \text{Tg.}\ \alpha$, im vierten $-\ \text{Tg.}\ \alpha$.

Auf gleiche Weise erhalten die Cotangenten, gleich $\frac{\text{Cosinus}}{\text{Sinus}}$, ihre Zeichen.

Die Secanten, als Quotienten von $\frac{1}{\text{Cos.}}$, erhalten mit den Cosinus, die Cosecanten $= \frac{1}{\text{Sin.}}$ mit den Sinus gleiche Zeichen. Die Sinusversus und Cosinusversus sind immer positiv, denn es ist $1 - \text{Cos.}\ \alpha$ und auch $1 - \text{Sin.}\ \alpha$ stets positiv, da der Cosinus und Sinus nicht größer als 1 sein können.

Uebrigens ist für einen beliebigen Winkel α

1) $\text{Sin.}\ (-\alpha) = -\ \text{Sin.}\ \alpha$;
2) $\text{Cos.}\ (-\alpha) = \text{Cos.}\ \alpha$;
3) $\text{Tg.}\ (-\alpha) = -\ \text{Tg.}\ \alpha$;
4) $\text{Cotg.}\ (-\alpha) = -\ \text{Cotg.}\ \alpha$;
5) $\text{Sec.}\ (-\alpha) = \text{Sec.}\ \alpha$ etc.

12. — Die trigonometrischen Formeln sind meistens auf die natürlichen Functionen gestellt, so daß sie durch Theile des Halbmessers = 1 gemessen weroen. Diese

Verhältnißzahlen zu dem Halbmesser sind in manchen logaritmisch-trigonometrischen Tafeln, z. B. in denen von Schulz, in der Quartausgabe in zwei Bänden von Vega u. A. aufgeführt und machen die eigentlichen Sinustafeln aus. Weil aber die Rechnung mit diesen Werthen alle Unbequemlichkeiten der Multiplication, Division, Potenzirung und Depotenzirung großer Decimalbrüche mit sich führt, so rechnet man selten unmittelbar mit ihnen, sondern mit Hülfe der Logarithmen dieser natürlichen Werthe.

Diese gemeinen Logarithmen zu jeder natürlichen Function zu suchen, würde eben so beschwerlich sein; man ist daher diesem zeitig entgegengekommen und hat die Logarithmen der natürlichen Sinus, Tangenten und ihrer Cofunctionen in besondere Tafeln gesammelt, die unter dem Namen „logarithmisch trigonometrische Tafeln" bekannt sind.

Es sei, z. B., der Sinus von 7° 30′ 0″ in Theilen des Halbmessers als Einheit = 0,1305262. Suchen wir in den gemeinen logarithmischen Tafeln zu dieser natürlichen Zahl den Logarithmus, so finden wir denselben = 0,1156977 — 1, und dieser ist es, der für den Sinus von 7° 30′ 0″ in die logarithmisch trigonometrischen Tafeln gestellt worden.

Wir finden daselbst jedoch dessen Characteristik nicht 0, sondern 9 angegeben. Man hat nämlich vorgezogen, in diesen Tafeln den Logarithmus des Halbmessers = 10 anzunehmen, um die lästigen negativen Characteristiken zu vermeiden.

Diese Annahme ändert in den Rechnungsoperationen und in dem gleichmäßigen Gebrauche der gemeinen und trigonometrischen Logarithmen nichts; nur ist zu beobachten, daß man jedem Logarithmus einer trigonometrischen Function dann die negative Characteristik — 10 anhängt und sie in Rechnung zieht; oder wenn das Resultat der Logarithmus eines Winkels ist, den man in den Tafeln aufsuchen will, die positive Characteristik um 10 Einheiten vermehrt.

Sollte man in einzelnen Fällen des natürlichen Verhältnisses zu dem Radius 1 bedürfen, so kann dieses leicht durch die natürliche Zahl der gemeinen Logarithmen gefunden werden.

Man wolle, z. B., die Größe des Cosinus kennen, der, den Radius 1 gesetzt, einem Winkel von 28° 32' zugehört, ohne im Besitz von Sinustafeln zu sein, so ist

$$\text{log. Cos. } 28^\circ\ 32' = 9 \cdot 6791279 - 10.$$

Die zu diesem Logarithmus gehörige natürliche Zahl findet sich in den gemeinen Logarithmen gleich 0,47767; es ist sonach das Verhältniß dieses Cosinus als Linie zu dem Radius 0,47767 : 1.

Beispiele trigonometrischer Berechnungen.

13. — 1. Beispiel. Die Hypotenuse $h = 1289$, der Winkel $B = 32^\circ\ 14'\ 6''$ sind gegeben; es sind die übrigen Stücke zu suchen.

$$C = 90^\circ - 32^\circ\ 14'\ 6'' = 57^\circ\ 45'\ 54''.$$

Nach Formel Nr. 1 ist

$$b = 1289 \cdot \text{Sin. } 32^\circ\ 14'\ 6''; \quad a = 1289 \cdot \text{Cos. } 32^\circ\ 14'\ 6''.$$

$$\begin{array}{rl} \text{lg.}\ .\ h & = 3{,}1102529 \\ \text{lg.}\ .\ \text{Sin. } B & = 9{,}7270473 - 10 \\ \hline \text{lg.}\ .\ b & = 2{,}8373002 \\ b & = 687{,}5435 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{lg.}\ .\ h & = 3{,}1102529 \\ \text{lg.}\ .\ \text{Csin. } B & = 9{,}9273023 - 10 \\ \hline \text{lg.}\ .\ a & = 3{,}0375552 \\ a & = 1090{,}323 \end{array}$$

Der Inhalt ist am einfachsten in dem halben Product der Catheten zu finden.

2. Beispiel. Die Catheten $a = 2007$, $b = 2459$ sind gegeben; so ist nach Formel Nr. 4

$$\text{Tg. } A = \frac{2007}{2459}; \ \text{lg. Tg. } A = \text{lg. } 2007 - \text{lg. } 2459 + 1$$

$$\begin{array}{rl} \text{lg. } 2007 & = 3{,}3025474 - 1 \\ \text{lg. } 2459 & = 3{,}3907585 \\ \hline & \ 0{,}9117889 - 1 \\ & + 10, \\ \hline \text{lg. Tg. } A & = 9{,}9117889 \\ A & = 39^\circ\ 13'\ 14{,}98''. \end{array}$$

$$B = 90^\circ - 39^\circ\ 13'\ 14{,}98'' = 50^\circ\ 46'\ 45{,}02''.$$

$$h = \frac{a}{\text{Sin. } A}; \text{lg. } h = \text{lg. } 2007 - \text{lg. Sin. } 39^\circ\ 13'\ 14{,}98''$$

$$\begin{array}{rl} \text{lg. } 2007 & = 3{,}3025474 \\ \text{lg. Sin. } 39^\circ\ 13' \ldots & = 9{,}8009307 - 10 \\ \hline \text{lg. } h & = 3{,}5016107 \\ h & = 3174{,}07. \end{array}$$

3. Beispiel. Es ist die Seite $a = 2789$ und die Winkel $A = 24^\circ\ 18'\ 12''$, $B = 36^\circ\ 14'\ 26''$ gegeben; man soll die übrigen Stücke berechnen. Nach Formel Nr. 5 ist

$$b = \frac{\text{Sin. } B \cdot a}{\text{Sin. } A}; \quad c = \frac{\text{Sin. } C \cdot a}{\text{Sin. } A}$$

$$C = 2\,R - (A + B) = 119^\circ\ 27'\ 22''$$

$$\begin{aligned} \text{lg. } a &= 3{,}4454485 \\ \text{lg. Sin. } B &= 9{,}7716426 \\ &\quad + 747 \\ \hline \text{lg. } (a \text{ Sin. } B) &= 13{,}2171658 \\ \text{lg. Sin. } A &= 9{,}6144409 \\ \hline \text{lg. } b &= 3{,}6027249; \quad b = 4006{,}13. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise findet man $c = 5900{,}55$.

4. Beispiel. Es sind gegeben die Seiten $a = 305{,}9$ $b = 216$ und der eingeschlossene Winkel $C = 63^\circ\ 10'$, so hat man nach Formel Nr. 6.

$$\text{Tg. } \tfrac{1}{2}\,(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \text{Ctg. } \tfrac{1}{2}\,C$$

$a - b = 89{,}9$; $a + b = 521{,}9$; Ctg. $\frac{1}{2}\,C = 31^\circ\ 35'$

$$\begin{aligned} \text{lg. } 89{,}9 &= 1{,}9537597 \\ \text{lg. } 521{,}9 &= 2{,}7175873 \\ \hline \text{lg. Differenz} &= 0{,}2361724 - 1 \\ \text{lg. Ctg. } 31^\circ\ 35' &= 10{,}2112639 - 10 \\ \hline \text{lg. Tg. } \tfrac{1}{2}\,(A - B) &= 0{,}4474363 - 1 \\ \tfrac{1}{2}\,(A - B) &= 15^\circ\ 39'\ 6''. \end{aligned}$$

Daher $A = \frac{1}{2}\,(A + B) + \frac{1}{2}\,(A - B) = 58^\circ\ 25' + 15^\circ\ 39'\ 6'' = 74^\circ\ 4'\ 6''$

und $B = \frac{1}{2}\,(A + B) - \frac{1}{2}\,(A - B) = 58^\circ\ 25' - 15^\circ\ 39'\ 6'' = 42^\circ\ 45'\ 54''$

$$c = \frac{216 \cdot \text{Sin. } 63^\circ\ 10'}{\text{Sin. } 42^\circ\ 45'\ 54''} = 283{,}86.$$

Der Inhalt ist nach Formel Nr. 7

$$\frac{216 \cdot 305{,}9 \cdot \text{Sin. } 63^\circ\ 10'}{2} = 29479{,}9.$$

5. Beispiel. Man kennt die Seiten $b = 1965$, $c = 1248$ und den eingeschlossenen Winkel $A = 32^\circ\ 6'\ 4''$; es sollen die unbekannten Stücke mit Anwendung eines Hülfswinkels gefunden werden.

Man setze

$$\text{Tg. } \varphi = \frac{2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} A \sqrt{bc}}{b - c};\ a = \frac{b - c}{\cos \varphi}$$

$$\begin{aligned}
\text{lg. } b &= 3{,}2933626 \\
\text{lg. } c &= 3{,}0962146 \\
\hline
\text{lg. } bc &= 6{,}3895772 \\
\text{lg. } \sqrt{bc} &= 3{,}1947886 \\
\text{lg. } 2 &= 0{,}3010300 \\
\text{Sin. } \tfrac{1}{2} A &= 9{,}4416722 \\
\text{Dec. Erg. lg. } (b-c) &= 7{,}1444808 - 10 \\
\hline
\text{lg. Tg. } \varphi &= 10{,}0819716,
\end{aligned}$$

daher $\varphi = 50^\circ\ 22'\ 31{,}33''$.

Ferner ist:

$$\begin{aligned}
\text{lg. } b - c &= 2{,}8555192 \\
\text{lg. Cos. } \varphi &= 9{,}8046539 \\
\hline
\text{lg. } a &= 3{,}0508653
\end{aligned}$$

und $a = 1124{,}25$.

Nach Formel 7 ist nun

$$\text{Sin. } B = \frac{b \text{ Sin. } A}{a};\ \text{Sin. } C = \frac{c \text{ Sin. } A}{a},$$

wodurch für $B = 111^\circ\ 44'\ 54{,}76''$

und für $C = 36^\circ\ 9'\ 1{,}32''$

erhalten wird.

6. **Beispiel.** Die Seiten eines Dreiecks sind $a = 65$, $b = 56$, $c = 28$, man soll die Winkel finden.

Nach Formel 8 ist:

$$\text{Cos. } \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(56+28+65)(56+28-65)}{56 \cdot 28}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{149 \cdot 19}{56 \cdot 28}}$$

$$\begin{aligned}
\text{lg. } 149 &= 2{,}1731863 \\
\text{lg. } 19 &= 1{,}2787536 \\
\text{Dec. E. } 56 &= 8{,}2518120 - 10 \\
\text{Dec. E. } 28 &= 8{,}5528420 - 10 \\
\hline
&\ 0{,}2565939 \\
\hline
2)&\ 0{,}1282969 \\
\text{lg. } 2 &= 0{,}3010300 \\
\hline
\text{Cos. } \frac{A}{2} &= 0{,}8272669 - 1,
\end{aligned}$$

also $\frac{A}{2} = 47^\circ\ 47'\ 26''$

und $A = 95^\circ\ 34'\ 52''$

Auf gleiche Weise findet sich $C = 25^o\ 23'\ 12''$, daher ist $B = 59^o\ 1'\ 56''$.

7. Beispiel. Die Seite $a = 125{,}67$, die Summe der Seiten $b + c = s = 152{,}39$ und der Winkel $A = 49^o\ 37'\ 48''$ sind gegeben, man soll die übrigen Stücke finden.

$B + C = 2\,R - A$; man wird daher die Winkel einzeln finden, wenn man $B - C$ kennt.

Man setze diese Differenz $= \varphi$, so ist

$$B = (R - \tfrac{1}{2} A) + \tfrac{1}{2} \varphi$$

und $C = (R - \frac{1}{2} A) - \frac{1}{2} \varphi$.

Dadurch ergiebt sich

$$b = \frac{a \cdot \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A} = \frac{a \text{ Cos. } \frac{1}{2} (A + \varphi)}{\text{Sin. } A}$$

(weil das Complement von B
$= R - (R - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \varphi) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \varphi$)

$$\text{und } c = \frac{a \cdot \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A} = \frac{a \cdot \text{Cos} \frac{1}{2} (A - \varphi.}{\text{Sin. } A}$$

Es ist daher

$$s = \frac{a\,[\text{Cos. } \frac{1}{2} (A + \varphi) + \text{Cos. } \frac{1}{2} (A - \varphi)].}{\text{Sin. } A}$$

Nach Formel 31 ist aber

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} (A + \varphi) + \text{Cos. } \tfrac{1}{2} (A - \varphi) = 2 \text{Cos. } \tfrac{1}{2} A \cdot \text{Cos. } \tfrac{1}{2} \varphi$$

und nach Formel 13

$$\text{Sin. } A = 2 \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} A \cdot \text{Cos. } \tfrac{1}{2} A$$

$$\text{Folglich } \frac{2\, a \text{ Cos. } \frac{1}{2} A \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} \varphi}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2} A \cdot \text{Cos. } \frac{1}{2} A} = s.$$

Reducirt man auf φ, so ist

$$\text{Cos. } \tfrac{1}{2} \varphi = \frac{s \cdot \text{Sin. } \frac{1}{2} A}{a}.$$

Hieraus erhält man φ und in

$R - \frac{1}{2} (\alpha - \varphi)$, und $R - \frac{1}{2} (\alpha + \varphi)$

die beiden zu suchenden Winkel

$$\begin{aligned}
\text{lg. } s &= 2{,}1829565 \\
\text{lg. Sin. } \tfrac{1}{2} A &= \underline{9{,}6229283} \\
&\ 11{,}8058848 \\
\text{lg. } a &= \underline{2{,}0992316} \\
\text{lg. Cos. } \tfrac{1}{2} \varphi &= 9{,}7066532 \\
\tfrac{1}{2} \varphi &= 59^o\ 24'\ 28{,}3'' \\
\varphi &= 118^o\ 48'\ 56{,}6'',
\end{aligned}$$

daraus folgt:

$B = 65^\circ\, 11'\, 6'' + 59^\circ\, 24'\, 28{,}3'' = 124^\circ\, 35'\, 34{,}3''$
$C = 65^\circ\, 11'\, 6'' - 59^\circ\, 24'\, 28{,}3'' = 5^\circ\, 46'\, 37{,}7''$

Will man die Seiten b und c entwickeln, ohne sich der ebengenannten Winkel zu bedienen, so ist

$$b = \frac{\text{Cos} \frac{1}{2} (A + \varphi) \cdot a}{\text{Sin. } A} = \frac{\text{Cos. } 84^\circ\, 13'\, 22{,}3'' \cdot 125{,}67,}{\text{Sin. } 49^\circ\, 37'\, 48''}$$

$$\begin{aligned} \text{lg. Cos. } 84^\circ \ldots\ldots &= 9{,}0029540 \\ \text{lg. } a &= 2{,}0992316 \\ &\overline{11{,}1020856} \text{ und} \\ \text{lg. Sin. } A &= 9{,}8818851 \\ \text{lg. } b &= \overline{1{,}2202005} \\ b &= 16{,}603 \end{aligned}$$

$$c = \frac{a\, \text{Cos. } \frac{1}{2}(A - \varphi)}{\text{Sin. } A} = \frac{125{,}67 \cdot \text{Cos. } 34^\circ\, 35'\, 34{,}3'' \text{ *)}}{\text{Sin. } 49^\circ\, 37'\, 48''}$$

$$\begin{aligned} \text{lg. Cos. } (\varphi - A) &= 9\,9155081 \\ \text{lg. } a &= 2{,}0992316 \\ &\overline{12{,}0147397} \\ \text{lg. Sin. } A &= 9{,}8818851 \\ \text{lg. } c &= \overline{2{,}1329546} \\ c &= 135{,}81. \end{aligned}$$

8. Beispiel. Es sei ein Winkel $A = 113^\circ\, 20'\, 54''$ gebildet von den Seiten b und c und die Projection der Seiten $b = n = 53$, $c = m = 247$ auf a gegeben; der Fußpunct der Normalen aus der Spitze A sei F, und die Normale $= x$.

Nach Formel 2 ist: $m = x \cdot \text{Tg. } M$ und $n = x\, \text{Tg. } N$ (wenn M und N die den gleichnamigen Projectionen gegenliegenden Theile des Winkels A bezeichnen); sonach

$$m : n = \text{Tg. } M : \text{Tg. } N$$

und nach Formel 6

$$m + n : m - n = \text{Tg. } M + \text{Tg. } N : \text{Tg. } M - \text{Tg. } N.$$

Es ist aber $\text{Tg. } M + \text{Tg. } N = \dfrac{\text{Sin. } (M + N)}{\text{Cos. } M \cdot \text{Cos. } N}$

und $\text{Tg. } M - \text{Tg. } N = \dfrac{\text{Sin. } (M - N)}{\text{Cos. } M \cdot \text{Cos. } N}$

folglich $m + n : m - n = \text{Sin. } (M + N) : \text{Sin. } (M - N) = \text{Sin. } A : \text{Sin. } (M - N)$

---

*) Es ist nämlich $A - \varphi = -(\varphi - A)$ und $\text{Cos} - (\varphi - A) = \text{Cos } (\varphi - A)$ nach §. 11).

und $\text{Sin.}\,(M - N) = \frac{(m - n)\,\text{Sin. }A}{m + n}$

oder da $M = R - B$ und $N = R - C$, daher $M - N = C - B$

$$\text{Sin.}\,(C - B) = \frac{(m - n)\,\text{Sin. }A}{m + n};$$

mittelst welcher Differenz die Winkel gefunden werden.

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \text{lg. }(m-n) = \text{lg. }194 = & 2{,}2878017 \\ \text{lg. Sin. }A = & \underline{9{,}9628958} \\ & 12{,}2506975 \\ \text{lg. }m + n & \underline{2{,}4771213} \\ & 9{,}7735762 \end{array}$$

$$C - B = 36^0\ 25'\ 15{,}25'',$$

daher

$$\frac{66^0\ 39'\ 6''}{2} + \frac{36^0\ 25'\ 15{,}25}{2} = 51^0\ 32'\ 10{,}62'' = C$$

und $\frac{66^0\ 39'\ 6''}{2} - \frac{36^0\,25'\,15{,}25''}{2} = 15^0\,6'\,55{,}37'' = B,$

woraus die Seiten c und b nach Formel 5 leicht gefunden werden können.

9. **Beispiel.** Die drei Seiten eines Dreiecks $a = 56$, $b = 65$, $c = 28$ sind gegeben, die Winkel zu finden.

Nach Formel 8 ist

$$\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(56 + 28 + 65)\,(56 + 28 - 65)}{56\,.\,28}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{149\,.\,19}{56\,.\,28}}$$

$$\begin{array}{rl} \text{lg. }149 = & 2{,}1731863 \\ \text{lg. }19 = & \underline{1{,}2787536} \\ & 3{,}4519399 \\ - & \underline{3{,}1953460} \\ & 0{,}2565939 \\ 2) & \overline{0{,}1282969} \\ \text{lg. }2 = & \underline{0{,}3010300} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{lg. }56 = & 1{,}7481880 \\ \text{lg. }28 = & \underline{1{,}4471580} \\ & 3{,}1953460 \end{array}$$

$$\text{lg. Cos.}\frac{B}{2} = 0{,}8272669 - 1$$

$$+\ 10,$$

$$\frac{B}{2} = 47^0\ 47'\ 26{,}4''$$

$$B = 95^0\ 34'\ 52{,}8''$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(65+56+28)(65+56-28)}{65\cdot 56}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{149\cdot 93}{65\cdot 56}}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\text{lg. } 149 = & 2{,}1731863 & \text{lg. } 65 = & 1{,}8129134 \\
\text{lg. } 93 = & 1{,}9684829 & \text{lg. } 56 = & 1{,}7481880 \\
\hline
& 4{,}1416692 & & 3{,}5611014 \\
- & 3{,}5611014 & & \\
\hline
& 0{,}5805678 & & \\
\hline
2) & 0{,}2902839 & & \\
\text{lg. } 2 = & 0{,}3010300 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{lg. Cos.}\frac{C}{2} = 0{,}9892539 - 1 + 10,$$

$\frac{C}{2} = 12^\circ\ 41'\ 36{,}5''$ und $C = 25^\circ\ 23'\ 13''$.

Folglich $A = 2\ R - (95^\circ\ 34'\ 52{,}8'' + 25^\circ\ 23'\ 13'') = 59^\circ\ 1'\ 54{,}2''$.

10. Beispiel. Der Inhalt eines Dreiecks sei $q = 4588\ \square$R., der Winkel $A = 48^\circ\ 30'$, $B = 71^\circ\ 21'$; folglich $C = 60^\circ\ 9'$. Es sollen die Seiten gefunden werden.

Nach Formel 5 ist $q = \frac{c^2\ \text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B}{2\ \text{Sin. } C}$

woraus folgt:

$$c = \sqrt{\frac{2q \cdot \text{Sin. } C}{\text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } B}}$$

$$b = \sqrt{\frac{2q \cdot \text{Sin. } B}{\text{Sin. } A \cdot \text{Sin. } C}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2q \cdot \text{Sin. } A}{\text{Sin. } B \cdot \text{Sin. } C}}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\text{lg. } q = & 3{,}6616234 & \text{lg. Sin. } A = & 9{,}8744561 - 10 \\
\text{lg. } 2 = & 0{,}3010300 & \text{lg. Sin. } B = & 9{,}9765745 - 10 \\
\text{lg. Sin. } C = & 9{,}9381851 - 10 & & \overline{0{,}8510306 - 1} \\
\hline
& 3{,}9008385 & & \\
& 0{,}8510306 + 1 & & \\
\hline
& 4{,}0498079 & & \\
2) & \overline{\qquad\qquad} & & \\
\text{lg. } b = & 2{,}0249039 & & \\
b = & 105{,}9. & &
\end{array}$$

Auf gleiche Weise erhält man $b = 115{,}69$ und $a = 289{,}51$.