Einleitung.

Erstes Capitel.

Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

1. — Obwohl wir die Lehre von den Logarithmen, sowie andere mathematische Lehren, bei dem voraussetzen müssen, welcher sich dem Feldmessen unterziehen will, so so sei es für solche, die dasselbe nicht gerade zu als Fachbeschäftigung zu treiben denken, gestattet, hier eine kurze Uebersicht einer arithmetischen Disciplin aufzustellen, die zu den unentbehrlichsten Vorkenntnissen geodätischer Operationen gehört. Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, darf man nicht erwarten, eine systematische Behandlung dieses Gegenstandes zu finden und wir müssen zu einem gründlichern Studium auf andere mathematische Werke verweisen. Demnächst findet sich auch in den meisten logarithmischen Tafeln immer eine Belehrung über deren Gebrauch.

2. — **Erklärung.** Man nennt „Logarithmen" die arithmetische Reihe der natürlichen Zahlen, deren erstes Glied gleich Null, und die Glied für Glied einer geometrischen Zahlenreihe zugehört, welche mit der Einheit anfängt. Oder allgemeiner: der Logarithmus einer gewissen Zahl ist derjenige Exponent, womit eine ab-

solute von 1 verschiedene Zahl potenzirt werden muß, damit man diese bestimmte Zahl erhalte. Die beständige Zahl (den Dignand), welche man jener Potenzirung unterzieht, nennt man die Grundzahl (Basis) eines logarithmischen Systems; sie kann beliebig, nur größer als 1, sein und man hat sie allgemein 10 angenommen, weil diese Zahl die größte Bequemlichkeit gewährt.

Das logarithmetische System von der Grundzahl 10 ist sonach:

$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \ldots,$
woraus 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 ....
folgt.

Demnach ist 0 der Logarithmus der natürlichen Zahl 1,
1 " " " " " 10,
2 " " " " " 100,
3 " " " " " 1000,
4 " " " " " 10000,
5 " " " " " 100000
u. s. f.

In jedem logarithmischen System ist der Logarithmus von 1 gleich Null, der Logarithmus der Grundzahl gleich 1; und allgemein besteht der Logarithmus einer n-ziffrigen Zahl aus (n — 1) Einheiten.

3. — Die Rechnung mit Logarithmen erliegt in Folge ihrer Entstehungsart denselben Gesetzen der Rechnung mit Potenzen. Es ist nämlich in jedem lagorithmischen Systeme

1) $\lg. (a \cdot b \ldots x) = \lg. a + \lg. b + \lg. c + \ldots\ldots \lg. x;$
d. i. die Multiplication von n Zahlen verwandelt sich in eine Addition ihrer zugehörigen n Logarithmen.

2) $\lg. \frac{a}{b} = \lg. a - \lg. b;$
d. i. jede Division zweier Zahlen oder ein Quotient ist gleich dem Unterschied zwischen dem Logarithmus des Dividenten und des Divisors.

3) $\lg. (a^m) = m \cdot \lg. a;$
es ist nämlich der Logarithmus einer Potenz gleich dem Producte aus dem Exponenten in den Logarithmus des Dignanden.

4) $\lg. \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot \lg. a$;

d. h. der Logarithme einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicanden, dividirt durch den Wurzelexponenten.

5) Hat man a^m, so ist

$$m = \frac{\lg. m}{\lg. a}$$

oder: ein Exponent ist gleich dem Logarithmus des Exponenten dividirt durch den Logarithmus des Dignanden.

Nach diesen Sätzen hat man folglich, um

$$A : B = D : x$$

logarithmisch zu bilden:

$$\lg. x = \lg. B + \lg. D - \lg. A.$$

Auf gleiche Weise ist z. B.

$$\lg. \frac{\alpha \sqrt{a}}{\beta \sqrt{b}} = \lg. \alpha + \tfrac{1}{2} \lg. a - \lg. \beta - \tfrac{1}{2} \lg. b$$
$$= (\lg. \alpha - \lg. \beta) + \tfrac{1}{2} (\lg. a - \lg. b);$$

$$\lg. \sqrt[r]{\frac{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{b}}{\sqrt[q]{ab}}} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{n} \lg. a + \frac{1}{p} \lg. b - \frac{1}{q} \Big(\lg. a + \lg b \Big) \right];$$

$$\lg. \sqrt[5]{d \sqrt[4]{c \sqrt[3]{b \cdot \sqrt{a}}}} = \tfrac{1}{5} \left(\lg. d + \tfrac{1}{4} \left(\lg. c + \tfrac{1}{3} \left[\lg. b + \tfrac{1}{2} \lg. a \right] \right) \right).$$

Auf gleiche Weise ist:

$$\lg. \left(8^4 \sqrt[5]{\tfrac{93}{94}} \right)^6 = 6 \left(4 \lg. 8 + \frac{\lg. 93 - \lg. 94}{5} \right).$$

4. — Nach der (§. 2) gegebenen Erläuterung über Entstehung der Logarithmen scheinen die natürlichen Zahlen 2, 3, 4 . . . . 9; 11, 12, 13 . . . . 99; 101, 102, 103 . . . . . 999 rc. der Logarithmen zu ermangeln; daß dieses nicht der Fall ist, kann man sich bald überzeugen, wenn man das logarithmische System aus zwei Reihen, der arithmetischen 0, 1, 2, 3, 4 . . . . und der geometrischen 1, 10, 100 . . . . entstanden betrachtet. Dann schaltet man zwischen den ersten Gliedern der geometrischen Reihe die Mittelglieder 2, 3, 4 . . . . 9 (acht Glieder)

und ebensoviel zwischen den 0 und 1 der arithmetischen Reihe ein: so müssen die interpolirten Glieder, welche in gleichen Stellen stehen, nothwendig dieselbe Beziehung gegen einander haben, welche in den ursprünglichen Reihen Statt fand; und es müssen sonach diejenigen Zahlen, die zwischen 0 und 10 liegen, den Logarithmus 0 + einem (Decimal-) Bruch haben.

Man nennt die ganze Zahl eines Logarithmus die Kennziffer, Characteristik, die Decimalstellen die Mantisse.

5. — Eine Eigenthümlichkeit der Logarithmen ist, daß natürliche Zahlen, die aus einerlei geltenden Ziffern in derselben Ordnung folgend bestehen, auch gleiche Decimalen im Logarithmus haben; daß also, z. B., den Zahlen

1945, 19450, 19450000 . . . . .
1,945, 19,45, 194,5 . . . . .
0,1945, 0,01945, 0,00001945 . . . .

derselbe Logarithmus in Bezug auf die Mantisse zukommt. Es wird nur die Kennziffer sich ändern; denn da 1945 zwischen 1000 und 10,000 liegt, so gebührt ihr der Logarithmus 3 + einem Bruch; 1,945 liegt zwischen 1 und 10, daher ihr Logarithmus gleich 0 + einem Bruch. Dieser Bruch muß aber bei beiden Zahlen derselbe sein, denn es ist, wenn wir die Mantisse mit m bezeichnen:

$$1{,}945 = \tfrac{1945}{1000}$$

$\lg. \tfrac{1945}{1000}$ aber gleich $\lg 1945 - \lg. 1000$,

$$\begin{array}{r} \text{d. i. } 3 + m \\ -\ 3{,}0000000 \\ \hline 0 + m \end{array}$$

Ebenso liegt 0,01945 unter Null und ist gleich

$\tfrac{1945}{100000}$. Es ist aber

$$\lg. \tfrac{1945}{100000} = \lg. 1945 - \lg. 100000 = (3 + m) - 5{,}0000\ldots$$
$$= 3 - 5 + m = -2 + m.$$

In diesem Falle erhalten wir dann die negative Kennziffer — 2, welche anzeigt, daß die gegebene Zahl ein echter (Decimal-) Bruch ist, mit soviel Nullen links vor den geltenden Ziffern, als die Kennziffer negative Einheiten enthält, eingeschlossen die Stelle der Ganzen. Einen solchen Logarithmus mit negativer Kennziffer schreibt man aber

(0, + m) — 2 . *).

6. — Wegen dieser Eigenschaft wird die Angabe der Kennziffern in den logarithmischen Tafeln überflüssig und bestimmt sich stets nach dem Satz:

daß die Characteristik soviel Einheiten hat weniger eine, als die Ganzen der Zahl Stellen haben.

Bei einem echten Decimalbruch aber

ist die Characteristik stets Null; dem Logarithmus der geltenden Ziffern (als ganze Zahl betrachtet), hängt man rechts soviel negative Einheiten an, als dem Bruch (incl. der ganzen Stelle) linker Hand Nullen vorstehen.

Umgekehrt reicht es hin, bei einer zu dem Logarithmus einer gefundenen natürlichen Zahl soviel Stellen für die Ganzen abzuschneiden, als die logarithmische Characteristik Einheiten + 1 besitzt; bei einer negativen Characteristik aber der gefundenen natürlichen Zahl linker Hand soviel Nullen vorzusetzen, als diese Kennziffer Einheiten enthält, und die erste Null durch ein Comma abzuschneiden, um die Stelle der Ganzen zu bezeichnen.

7. — Die Logarithmen würden an sich nicht die Rechnungen erleichtern, wenn sie jedesmal berechnet werden müßten und nicht in Tafeln gesammelt wären, die ein leichtes Nachschlagen gestatten. Die ersten, jedoch unvollkommenen logarithmischen Tafeln gab Mich. Stifel 1544, ihm folgten John Nepper und Jobst Byrg, deren Logarithmen jedoch von den unseren verschieden sind. Henry

---

*) Die meisten französischen Mathematiker brauchen eine andere Bezeichnung, und nehmen in Bildung der Logarithmen durch Fortsetzung der geometrischen und arithmetischen Reihen abwärts folgenden Gang:

geometrische Reihe 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ...
arithmetische " 0, —1, —2, —3, —4, ...

setzen dann

1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ . . .
0, 10—1, 10—2, 10—3, 10—4, . . .

woraus entsteht:

1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, . . .
0, 9, 8, 7, 6, ...

Demnach erhalten die Brüche 0,5; 0,05; 0,005 . . . . die Kennziffern 9, 8, 7, welche sie zum Unterschied durch $\bar{9}$, $\bar{8}$, $\bar{7}$ bezeichnen.

Briggs berechnete zuerst eine Tafel unserer gemeinen Logarithmen (die man nach ihm auch Brigg'sche Log. nennt) für die Zahlen von 1 bis 20,000 und von 90,000 bis 100,000 auf 14 Bruchstellen im Jahr 1624. Adrian Vlacq ergänzte dieselbe. Diese auf 10 Decimalstellen berechneten Tafeln wurden allgemein gebraucht, bis sie in vervollkommneter Einrichtung und auf 10 Stellen berechnet, durch die von Vega (Thesaurus logar. completus etc. Fol. 1793) und von Callet (Tables portat. de Logar. etc. Paris, 1795), welche die Logarithmen bis 108000 auf 8 Stellen enthalten und sehr reichhaltig sind, verdrängt wurden. Vega's logarithmisch trigonometrisches Handbuch, 4. Leipzig. Stereotypausgabe, ist das am meisten gebrauchte Werk, sehr bequem eingerichtet und enthält in den neueren Ausgaben auch die von Gauß zuerst berechneten Tafeln, vermittelst deren man aus den gegebenen Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe und ihres Unterschieds finden kann. Ein Menge von andern herausgegebenen Tafeln können wir hier übergehen, da die meisten nur Abkürzung in den Decimalstellen geben, in dem System nicht verschieden sind und oft die Bequemlichkeit des Vega'schen Handbuchs nicht erreichen. In Frankreich sind die von Callet und Lalande die gebräuchlichsten. Die Letzteren haben nur 5 Decimalen und gehen von 1 bis 10,000.

Der Gebrauch der logarithmischen Tafeln muß zur Fertigkeit eingeübt werden und ist gewöhnlich jeder Sammlung als Einleitung beigegeben, worauf hier um so eher verwiesen werden kann, da deren Anwendung bereits in den bessern elementaren Unterrichtsanstalten gelehrt wird und bei dem angehenden Geometer vorausgesetzt werden muß.

Zweites Capitel.

Die wichtigsten Sätze der Trigonometrie.

8. — Die Grundlage der Feldmeßkunst bleibt immer die Geometrie, und sie ist in frühern Zeiten für allein hinreichend gehalten worden, ein Stück Terrain in Grund zu legen und zu berechnen. Auch genügen deren