aufgehangen war; das Gewicht derselben betrug 2050 Gran. Das dritte Pendel endlich bestand einzig aus einer Messingröhre, an deren obern Theile unmittelbar die Rotationsachse angebracht war. Es ist also merkwürdig, dafs dieselbe Formel (μ) eben so gut für das erste Pendel, wobei ein nur 2 Zoll langer, an einem Faden aufgehangener Cylinder, als für das letztere Pendel pafst, welches aus einem 56 Zoll langen hohlen Cylinder bestand. Der für das zweite Pendel nach dieser Formel berechnete Werth von n weicht aus dem Grunde von dem beobachteten etwas ab, weil dabei die Pendelstange schon zu stark war, als dafs man ihre Masse und jene der sie umgebenden Flüssigkeitsfäden unberücksichtigt lassen könnte.

Weitere wichtige und interessante Bemerkungen über diesen Gegenstand findet man in der citirten Schrift von *Duchemin* (*Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides*) im Kapitel XI

Zusatz 1.

Ableitung der *Simpson*'schen Näherungsformel.

Um die in diesem Werke mehrere Male angewendete sogenannte *Simpson*'sche Regel auf eine einfache Weise abzuleiten, kann man folgenden geometrischen Weg einschlagen.

Bekanntlich beruht die Quadratur der ebenen Curven, d. h. die Bestimmung der krummlinigen ebenen Flächen auf der Entwicklung des bestimmten Integrales $\int_{x'}^{x''} y\,dx$, wobei y die der allgemeinen Abscisse x entsprechende Ordinate der betreffenden Curve, und x', x'' die den beiden äufsern Ordinaten, welche die zu bestimmende Fläche mit begrenzen, zugehörigen Werthe von x sind. Läfst sich nun y nicht als eine Function von x ausdrücken, oder ist die Curve nnr eine empirische, für welche die, gewissen Abscissen entsprechenden Ordinaten nur aus Beobachtungen gefunden wurden, oder ist endlich der Ausdruck $y\,dx$ überhaupt nicht integrabel; so mufs man zu Näherungsmethoden Zuflucht nehmen, nämlich die zu bestimmende Fläche durch nahe an einander liegende Ordinaten in schmale Trapeze, wovon eine Seite ein Theil der Curve ist, zerlegen und diese einzelnen Trapeze mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu berechnen suchen, indem dann ihre Summe sofort auch der näherungsweise Werth des obigen Integrales ist.

Man verfährt dabei am einfachsten, wenn man in allen diesen Fällen die betreffende Curve als eine gemeine oder Appollonische

Parabel ansieht und die bekannten Eigenschaften dieser Curve dabei gehörig benützt.

Um nämlich die von den beiden Ordinaten pm, $p'm'$ (Fig. 30) der Abscisse pp' und dem Bogen mam' der Curve AaD' begrenzte ebene Fläche näherungsweise zu bestimmen, denke man sich den Bogen mam' als einer gemeinen Parabel angehörig, welche durch die drei Puncte m, a, m' geht und wobei die Ordinate aq in der Mitte zwischen jenen pm und $p'm'$ liegen soll. Da jedoch die völlige Bestimmung der Parabel (Lehrb. II. §. 135) vier Bedingungen erfordert, so kann man noch als vierte Bedingung hinzufügen, daſs a der Scheitelpunct eines Durchmessers aq (Comp. §. 514) seyn soll.

Dieſs vorausgesetzt, wird (Comp. §. 516) die Sehne mm' durch die Ordinate aq im Puncte b halbirt und die zu mm' durch a gezogene parallele Gerade nan' bildet in diesem Puncte a eine Tangente an die Curve. Da nun bekanntlich das parabolische Segment $mam'm = \frac{2}{3}$ Parallelogramm mn', dieses also doppelt so groſs als die Fläche $mnam'n'$ ist; so hat man, wenn man das Trapez $pmbm'p' = A$, jenes $pnn'p' = B$, die parabolische Fläche $pmam'p' = F$ und das parabolische Segment $mam'm = f$ setzt, sofort $f = F - A = 2(B - F)$ und daraus:

$$3F = A + 2B \quad . \; . \quad (1)$$

Nun ist aber $A = (pm + p'm')pq$ und $B = (pn + p'n')pq$ oder wegen $aq = \frac{pn + p'n'}{2}$ auch $B = 2aq \times pq$, folglich, wenn man diese Werthe in der vorigen Relation (1) substituirt:

$F = \frac{pq}{3}(pm + p'm' + 4aq)$, oder wenn man $pp' = a$ setzt, auch:

$$F = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}(pm + p'm' + 4aq) \quad . \; . \quad (2)$$

Halbirt man ferner auch noch pq und qp' in β und β', und zieht durch die Halbirungspuncte die Ordinaten $\beta\alpha$ und $\beta'\alpha'$, so ist, wenn man $pq = qp' = a'$ setzt, auf dieselbe Weise, die Fläche:

$pmaq = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(mp + aq + 4\alpha\beta)$ und die Fläche

$qam'p' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(aq + m'p' + 4\alpha'\beta')$, folglich:

$$F = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}(mp + aq + 4\alpha\beta + aq + m'p' + 4\alpha'\beta') = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2}[mp + m'p' + 4(\alpha\beta + \alpha'\beta') + 2aq]$$

oder wegen $a' = \frac{a}{2}$, und wenn man die Ordinaten pm, $\beta\alpha$ . . $p'm'$ der Reihe nach mit y_0, y_1 . . y_4 bezeichnet, auch:

$$F = \frac{a}{3.4}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + y_4)$$

eine Formel, welche sich leicht fortsetzen läſst, im Falle man die Intervalle $p\beta, \beta q$ .. abermals halbiren, d. i. die ursprüngliche Basis pp' in 8, und durch fortgesetztes Halbiren noch weiter in 16, 32 u. s. w. gleiche Theile theilen will.

Theilt man dagegen jedes der beiden vorigen Intervalle $pq = qp'$ in 3 gleiche Theile, bezeichnet die aufeinander folgenden Theilungspuncte mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so wie die durch die Puncte p oder 0, 1, 2 .. 6 oder p' gezogenen Ordinaten der Reihe nach durch $y_0, y_1 \,..\, y_6$ und setzt die Gröſse der Intervalle $0, 1 = 1, 2 = .. = 5, 6 = a''$; so hat man nach der durch die Relation (2) ausgedrückten Regel für die Flächen der aufeinander folgenden Trapeze oder Streifen der Reihe nach:

$$\frac{a''}{3.2}(y_0 + y_2 + 4y_1),\ \frac{a''}{3.2}(y_2 + y_4 + 4y_3),\ \frac{a''}{3.2}(y_4 + y_6 + 4\,y_5)$$

folglich, wenn man diese Flächen summirt, sofort, wegen $a'' = \frac{a}{3}$:

$$F = \frac{a}{3.6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

Man sieht aus der bisherigen Entwicklung, daſs wenn man die Basis $pp' = a$ überhaupt nur in eine gerade Anzahl, z. B. in $2n$ gleiche Theile theilt, sofort allgemein

$$F = \frac{a}{3.2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + .. + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

ist und daſs man die gesuchte Fläche F um so genauer erhält, je gröſser n ist.

Setzt man die Summe der beiden äuſsern Ordinaten $y_0 + y_{2n} = S_{2n}$, jene der durch die ungeraden Theilungspuncte gehenden: $y_1 + y_3 + .. + y_{2n-1} = S_{2n-1}$ und die Summe der durch die geraden Theilungspuncte gehenden Ordinaten (wobei die letzte sofort ausgeschlossen ist) $y_2 + y_4 + .. + y_{2n-2} = S_{2n-2}$; so ist auch:

$$F = \frac{a}{3.2n}(S_{2n} + 4S_{2n-1} + 2S_{2n-2}).$$

Da nun aber nach der einleitenden Bemerkung diese Fläche nichts anderes als das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ ist, wenn man nämlich die den Ordinaten y_0 und y_{2n} entsprechenden Abscissen durch x' und x'' bezeichnet; so hat man endlich wegen $a = x'' - x'$, als einen Näherungswerth von beliebiger Genauigkeit:

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x''-x'}{3.2n}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$
$$= \frac{x''-x'}{3.2n}(S_{2n}+4S_{2n-1}+2S_{2n-2})$$

wobei es sich also nur darum handelt, die Differenz $x''-x'$ in eine beliebige, jedoch gerade Anzahl ($=2n$) gleicher Theile zu theilen, die durch die Theilungspuncte 0, 1, 2 .. $2n$ gedachten Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$ zu berechnen oder durch Beobachtung zu bestimmen, und in die vorige Formel, welche eben die *Simpson*'sche ist und um so genauere Resultate gibt, je gröſser man $2n$ nimmt, zu substituiren.

Zusatz 2.

Die in vielen Fällen eben so brauchbare (und in §. 173 gleichfalls angewendete) Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)]+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots$$
$$\ldots+f[a+(n-1)\delta]\Big]\delta$$

wobei $\delta = \frac{b-a}{n}$ und n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, läſst sich auf folgende Weise ableiten.

Läſst man die Gröſse $x=a$ nach und nach um die kleine Gröſse δ zunehmen, also x allmählig in a, $a+\delta$, $a+2\delta$ .. $a+n\delta=b$ übergehen, so, daſs zwischen den beiden Grenzwerthen a und b $n-1$ Werthe oder Zwischenglieder liegen, und setzt man das allgemeine Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

also das besondere:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \quad .\ . \quad (1)$$

so hat man, wenn a in $a+\delta$ übergeht, nach dem *Taylor*'schen Theorem:

$$F(a+\delta) = F(a)+\frac{d.F(a)}{da}\delta+\frac{d^2.F(a)}{da^2}\frac{\delta^2}{1.2}+\frac{d^3.F(a)}{da^3}\frac{\delta^3}{1.2.3}+\ldots$$

Setzt man Kürze halber

$$\frac{d.f(x)}{dx}=f'(x),\quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2}=f''(x) \text{ u. s. w.}$$

so ist wegen $F(x)=\int f(x)\,dx$ sofort $\frac{d.F(x)}{dx}=f(x)$, also auch:

$\frac{d.F(a)}{da} = f(a)$, und eben so $\frac{d^2.F(a)}{da^2} = f'(a)$, $\frac{d^3.F(a)}{da^3} = f''(a)$ u. s. w. fort, so, daſs also der vorige Ausdruck auch die Form annimmt:

$$F(a+\delta) = F(a) + f(a).\delta + f'(a).\frac{\delta^2}{1.2} + f''(a).\frac{\delta^3}{1.2.3} + \ldots$$

Analog mit diesem Ausdrucke erhält man für die folgenden Werthe:

$$F(a+2\delta) = F(a+\delta) + f(a+\delta).\delta + f'(a+\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

$$F(a+3\delta) = F(a+2\delta) + f(a+2\delta).\delta + f'(a+2\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

. . . .

$$F(a+n\delta) = F[a+(n-1)\delta]. + f[a+(n-1)\delta].\delta + f'[a+(n-1)\delta].\frac{\delta^2}{1.2} +$$

Werden diese Reihen addirt, so erhält man, wegen $a + n\delta = b$ sofort:

$$(2)\ F(b) - F(a) = \Sigma f(a+i\delta).\delta + \Sigma f'(a+i\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \Sigma f''(a+i\delta)\frac{\delta^3}{1.2.3} + \ldots$$

wobei i der Reihe nach $= 0, 1, 2 \ldots (n-1)$ zu setzen ist, so, daſs z. B. $\Sigma f(a+i\delta) = f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f[a+(n-1)\delta]$ wird.

Nimmt man ferner nach und nach $f(x), f'(x) \ldots$ statt $F(x)$ und $f'(x), f''(x) \ldots$ statt $f(x)$, so erhält man eben so:

$$f(b) - f(a) = \Sigma f'(a+i\delta).\delta + \Sigma f''(a+i\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

$$f'(b) - f'(a) = \Sigma f''(a+i\delta).\delta + \Sigma f'''(a+i\delta).\frac{\delta^2}{1.2} + \ldots$$

$$f''(b) - f''(a) = \Sigma f'''(a+i\delta).\delta + \ldots$$

Vernachlässigt man nun die dritten und höhern Potenzen der kleinen Gröſse δ, so kann man zufolge der vorstehenden Relationen in der obigen Gleichung (2) statt

$$\Sigma f'(a+i\delta).\frac{\delta^2}{2} \text{ setzen: } [f(b) - f(a)]\frac{\delta}{2} - [f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{4}$$

und statt $\Sigma f''(a+i\delta).\frac{\delta^3}{6}$ setzen: $[f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{6}$

(während Alles folgende nach der gemachten Voraussetzung wegfällt).

Dadurch geht aber die genannte Gleichung (2) in die folgende über:

$$F(b) - F(a) = \Sigma f(a+i\delta).\delta + [f(b) - f(a)]\frac{\delta}{2} - [f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{12}$$

oder es ist (Relat. 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{\tfrac{1}{2}[f(a) + f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + f[a+(n-1)\delta]\right\}\delta - [f'(b) - f'(a)]\frac{\delta^2}{12} \ldots \quad (A)$$

Dieser Ausdruck gibt das gesuchte Integrale um so genauer, je kleiner $\delta = \frac{b-a}{n}$, d. i. je größser n ist, und je langsamer sich die Function $f(x)$ zwischen ihren Grenzen a und b ändert.

In den meisten Fällen wird man das letzte in δ^2 multiplicirte Glied auslassen können, wodurch diese Formel (A) in die einfachere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \tfrac{1}{2}[f(a)+f(b)] + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + f[a+(n-1)\delta] \right\} \delta \quad . \quad . \quad (B)$$

übergeht, so, dafs diese letztere Formel nur die speciellen Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben seyn können, ohne dafs die Form dieser Function $f(x)$ selbst gegeben oder bekannt zu seyn braucht.
