E) Aus der Aërostatik.

---

76. Aufgabe.

Es soll der in irgend einem Puncte N (Fig. 53′) einer schweren elastischen Flüssigkeit herrschende Druck bestimmt werden.

Auflösung.

Wirken auf zwei gleiche Quantitäten einer elastischen Flüssigkeit die Drücke oder Spannkräfte p und p', und nehmen diese Flüssigkeitsmengen dabei die Volumina Q und Q', so wie die Dichtigkeiten $\varDelta$ und $\varDelta'$ an; so hat man nach dem *Mariotte*'schen Gesetze (§. 437):

$$\frac{p}{p'} = \frac{Q'}{Q} = \frac{\Delta}{\Delta'} \; . \; . \quad (1)$$

Ist ferner das Gewicht der cubischen Einheit dieser Flüssigkeit unter dem Drucke $p = q$ und unter dem Drucke $p' = q'$; so ist (Nr. 54, Anmerk. 3) $q = g\varDelta$ und $q' = g\varDelta'$, folglich auch (Gleich. 1.):

$$\frac{q}{q} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{p}{p'} \text{ oder } p = \frac{p}{q'}\,q$$

und wenn man den Quotienten $\frac{p'}{q'} = k$ setzt, auch:

$$p = k\,q \; . \; . \quad (2)$$

Es sey nun der durch die Schwere auf die elastische Flüssigkeit im Puncte N' (Fig. 53′) hervorgebrachte und bekannte Druck auf die Flächeneinheit $= p'$, und der gesuchte Druck auf den Punct $N = p$, ferner sey AY eine durch N' gehende lothrechte Linie, NA horizontal $N'N = s$, W. $AN'N = \beta$, $YN' = z_1$, $YA = z$, $\varDelta$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit in m, q das Gewicht der cubischen Einheit in demselben Punct, also, wenn g die Beschleunigung der Schwere ist, $q = g\varDelta$, endlich sey a der unendlich kleine Querschnitt einer in der Richtung $N'N$ gedachten Flüssigkeitsröhre; so ist das Volumen dieser Röhre bei

$m = a\,ds$, folglich ihre Masse $= a\varDelta\,ds$ und ihr Gewicht $= ag\varDelta\,ds = aq\,ds$, als Druck im Puncte m nach verticaler Richtung. Zerlegt man diesen Druck nach mN' und eine darauf senkrechte, so ist der erstere $= aq\,Cos\,\alpha\,ds$, folglich der Druck auf die Flüssigkeitsröhre vom Querschnitt $a = a\int q\,Cos\,\alpha\,ds$ und auf die Flächeneinheit $= \int q\,Cos\,\alpha\,ds$.

Nun ist aber $p' = p + \int q\,Cos\,\alpha\,ds$, folglich wenn man diese Gleichung, in welcher p die einzige Variable ist, differenziirt: $0 = dp + q\,Cos\,\alpha\,ds$ und daraus $dp = -q\,Cos\,\alpha\,ds$, oder wegen (Gleich. 2) $q = \frac{p}{k}$ auch $dp = -\frac{Cos\,\alpha}{k}p\,ds$ d. i. $\frac{dp}{p} = -\frac{Cos\,\alpha}{k}ds$.

Diese Gleichung innerhalb der gehörigen Grenzen integrirt, gibt:

$$\int_{p'}^{p}\frac{dp}{p} = -\frac{Cos\,\alpha}{k}\int_0^s ds \text{ d. i. } lp - lp' = -\frac{Cos\,\alpha}{k}s$$

oder $l\frac{p}{p'} = -\frac{Cos\,\alpha}{k}s$ und wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, $\frac{p}{p'} = e^{-\frac{Cos\alpha}{k}s}$.

Setzt man $Cos\,\alpha = \frac{N'A}{s} = \frac{z - z_1}{s}$, so erhält man endlich

$$p = p'e^{-\frac{(z-z_1)}{k}} \;..\;(3) \quad\text{und}\quad z - z_1 = kl\frac{p'}{p} \;..\;(4)$$

Aus dieser Relation (3) folgt, dafs der Druck p nur von dem verticalen Niveauunterschiede $z - z_1$ der beiden Puncte N und N' abhängig, dieser also in allen Puncten einer und derselben horizontalen Ebene derselbe ist, oder dafs die Flächen von gleichem Niveau auch hier (wie es bei den tropfbaren Flüssigkeiten von geringer Ausdehnung der Fall) Horizontalebenen sind.

77. Aufgabe.

Es sollen die Gesetze für das Aufsteigen eines Luftballons mit Rücksicht auf die veränderliche oder abnehmende Dichtigkeit der Luft bestimmt werden.

Auflösung.

1. Setzt man voraus, dafs die Temperatur und hygroskopische Beschaffenheit der Luft durch die ganze Höhe, die der Ballon durchsteigt,

dieselbe sey, setzt das Gewicht der cubischen Einheit der Luft im Anfangspuncte der Bewegung $=q'$ und den in diesem Puncte herrschenden Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit $=p'$, bezeichnet durch q und p dieselben Grösen für eine Luftschichte, welche um die Höhe s über dem Anfangspuncte liegt, und welche der Ballon nach Verlauf der Zeit t erreichen soll; so hat man zuerst, wenn k einen constanten Erfahrungscoeffizienten bezeichnet (vorige Aufgabe, Gleichung 2) $p=kq$ und (vorige Aufgabe, Gleich. 3, wegen $z_1=0$ und $z=s$):

$p=p'e^{-\frac{s}{k}}$ oder wegen $p=kq$ und $p'=kq'$ auch:

$$q=q'e^{-\frac{s}{k}} \quad . \; . \quad (a)$$

Ist Q das Volumen und G das Gewicht des Ballons, so wirken auf ihn während er aufsteigt in jedem Augenblick der Widerstand R der Luft und das Gewicht G abwärts, dagegen der sogenannte Auftrieb qQ aufwärts. Man darf daher nur in der Gleichung (2) Nr. **262** $M=\frac{G}{g}$ und $P=qQ-G$, oder wenn man auch noch das Gewicht jener Luftquantität berücksichtigen will, welche sich während der Bewegung an den Ballon anhängt, statt G, $G+{\cdot}6\,qQ$ (folgende Aufgabe) setzen und berücksichtigen, dafs (Gleich. b, in Nr. **262**) $R=\alpha(1+\beta v)v^2$ und dabei, wenn A die gröfste Kreisfläche des kugelförmigen Ballons bezeichnet, $\alpha={\cdot}513\,\frac{Aq}{2g}=aq$ ist, wenn man nämlich den constanten Factor ${\cdot}513\,\frac{A}{2g}=a$ setzt, und dafs man die kleine Gröfse $\beta v=\frac{v}{1317}$ vernachlässigen, also $R=aqv^2$ setzen kann*).

Dadurch erhält man aus der genannten Formel (2):

$$ds=-\frac{G+{\cdot}6qQ}{g}\cdot\frac{v\,dv}{aqv^2-qQ+G} \qquad (1)$$

2. Aus dieser Relation (1) folgt fürs erste, dafs sich der Ballon mit beschleunigter Bewegung vom Boden erheben und mit einer solchen so lange fortsteigen wird, so lange die Resultante der nach aufwärts wirkenden Kräfte, nämlich $qQ-aqv^2-G$ positiv ist, indem dann auch ds positiv ausfällt. Kommt der Ballon in eine Höhe, für welche

*) Auch könnte man, um strenger zu verfahren, wie es in Nr. **263** geschehen, für $1+\beta v$ einen constanten Mittelwerth $B=1+\frac{1}{2}\beta(V+v)$ setzen, wobei v die Geschwindigkeit des Ballons für die Zeit $t=0$ und V jene für die beliebige Zeit t bezeichnet.

(a') $qQ - G = 0$ ist, oder befindet er sich gleich von vorne herein in einer solchen Höhe über dem Erdboden, so hat er kein Bestreben weiter zu steigen und bleibt sonach in Ruhe. Die gröfste Höhe, welche der Ballon erreichen kann, folgt daher aus der vorigen Bedingungsgleichung (a') aus welcher man zuerst $q = \frac{G}{Q}$ und wenn man diesen Werth in der Gleichung (a) substituirt, $\frac{G}{Qq'} = e^{-\frac{s}{k}}$ oder $l\frac{G}{Qq'} = -\frac{s}{k}$ und endlich:

$$s = k\,l\,\frac{Q\,q'}{G}\;.\;.\quad(b)$$

erhält.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, dafs im Augenblicke als der Ballon diesen durch die Relation (b) ausgedrückten Höhenpunct erreicht oder durchläuft, nicht blofs die Kraft $qQ - G = 0$, sondern auch noch der Widerstand der Luft aqv^2 von oben nach unten auf ihn einwirkt, so, dafs also der Ballon die Höhe s schon mit verzögerter Geschwindigkeit passirt und daher das Maximum der Geschwindigkeit in einen Punct fällt, welcher unterhalb der Höhe s liegt. Übrigens wird der Ballon diese Höhe s bis zu einem gewissen Puncte überschreiten, hierauf zurücksinken und so in immer enger werdenden Excursionen um diesen Höhenpunct oscilliren.

3. Ist die Geschwindigkeit v des Ballons überhaupt nur eine mäfsige, so wird der Widerstand der Luft aqv^2 gegen das Gewicht der vom Ballon verdrängten Luft qQ nur gering, und da v sehr bald einen mittlern Werth anzunehmen strebt, welcher sich bei der weitern Bewegung nur mehr sehr wenig ändert, so kann man in der im Nenner der obigen Formel (1) vorkommenden Differenz $aqv^2 - qQ = (av^2 - Q)q$ bei der auszuführenden Integration, ohne merklichen Fehler das Glied av^2 als constant behandeln und für v entweder jenen Werth v' setzen, welchen die Geschwindigkeit v am Ende der Zeit t erlangt, oder dafür auch den mittlern, zwischen 0 und v' liegenden Werth $\frac{1}{2}v'$ nehmen.

Dadurch wird, wenn man im erstern Falle v', im letztern $\frac{1}{2}v'$ mit c bezeichnet, in der genannten Formel (1):

$$v\,\mathrm{d}v = -\frac{g\,[(ac^2 - Q)\,q + G]\,\mathrm{d}s}{G + \cdot 6\,q\,Q}$$

Nun folgt aber aus der obigen Relation (b) $\frac{q'}{q} = e^{\frac{s}{k}}$ oder $s = k\,l\,\frac{q'}{q}$, also, wenn man s als eine Function von q betrachtet,

$$\mathrm{d}s = -k\,\frac{\mathrm{d}q}{q}\;.\;.\quad(c)$$

es ist daher, wenn man diesen Werth für ds in der vorigen Gleichung substituirt:

$$v\,\mathrm{d}v = \frac{g\,k\,[(a\,c^2 - Q)\,q + G]\,\mathrm{d}q}{q\,(G + \cdot 6\,Q\,q)}$$

und daraus $\int_0^v v\,\mathrm{d}v = \frac{g\,k}{\cdot 6\,Q}\int_{q'}^{q}\frac{[a\,c^2 - Q)\,q + G]\,\mathrm{d}q}{q\left(q + \frac{G}{\cdot 6\,Q}\right)}$.

Zerlegt man den Bruch unterm zweiten Integralzeichen in die beiden Partialbrüche:

$$\frac{\cdot 6\,Q}{q} + \frac{a\,c^2 - Q - \cdot 6\,Q}{q + \frac{G}{\cdot 6\,Q}},$$ so erhält man

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g\,k}{\cdot 6\,Q}\left\{\int_{q'}^{q}\cdot 6\,Q\,\frac{\mathrm{d}q}{q} + (a\,c^2 - 1\cdot 6\,Q)\int_{q'}^{q}\frac{\mathrm{d}q}{q + \frac{G}{\cdot 6\,Q}}\right\}$$

oder, wenn man diese einfachen Integrationen ausführt und möglichst reducirt:

$$v^2 = 2gk\left[l\frac{q}{q'} + \frac{a\,c^2 - 1\cdot 6Q}{\cdot 6Q}\,l\left(\frac{\cdot 6\,Q\,q + G}{\cdot 6\,Q\,q' + G}\right)\right]$$

Setzt man, da dieser Werth von v der Endgeschwindigkeit nach Verlauf der Zeit t entspricht, nach der vorigen Bemerkung, im zweiten Theile dieser Gleichung wieder v statt c und löst dann die Gleichung nach v auf; so erhält man

$$v^2 = 2\,g\,k\,\frac{\frac{8}{3}\,l\left(\frac{\cdot 6\,Q\,q + G}{\cdot 6\,Q\,q' + G}\right) - l\,\frac{q}{q'}}{-1 + \frac{10}{3}\,g\,k\,\frac{a}{Q}\,l\left(\frac{\cdot 6\,Q\,q + G}{\cdot 6\,Q\,q' + G}\right)}$$

oder wenn man, um die natürlichen Logarithmen l in *Brigg*'sche *log.* zu verwandeln, Zähler und Nenner mit dem Modul $\cdot 4342945$ multiplicirt und zugleich berücksichtigt, dafs $q' > q$ ist:

$$v^2 = 2gk\,\frac{\frac{8}{3}\,log.\left(\frac{\cdot 6\,Q\,q' + G}{\cdot 6\,Q\,q + G}\right) - log.\,\frac{q'}{q}}{\cdot 4342945 + \frac{10}{3}\,g\,k\,\frac{a}{Q}\,log.\left(\frac{\cdot 6\,Q\,q' + G}{\cdot 6\,Q\,q + G}\right)} \qquad (2)$$

durch welche Gleichung also die Geschwindigkeit, so nahe als es hier nur immer nöthig ist, als eine Function der Gröfse q, d. i. des Gewichtes der cubischen Einheit der Luft in der Höhe s ausgedrückt erscheint.

Um also die Geschwindigkeit des Ballons in der Höhe s zu finden, mufs man zuerst den in dieser Höhe herrschenden Werth von q aus der obigen Gleichung (a) bestimmen und dann in die vorige Gleichung (2) substituiren. Es kann noch bemerkt werden, dafs (aus Gleichung a)

$l\frac{q'}{q} = \frac{s}{k}$, also $log.\ \frac{q'}{q} = \cdot 4342945\,\frac{s}{k}$ ist. Was endlich die Werthe von k und q' betrifft, so kann man für gewöhnliche, mit Wasserdampf geschwängerte Luft (welche bei 18° C. 850 Mal leichter als Wasser ist) nach Nr. **249** (Note) $k = 25932\,(1 + \cdot 004\,t)$ und (§. 439, α, wo man nach den Bemerkungen in Nr. **249** Note, genauer ·029585 statt ·03042 setzen kann) $q' = \cdot 029585\,\frac{b}{1 + \cdot 004\,t}$ setzen, wobei t die betreffende Temperatur nach der 100theiligen Skala und b den Barometerstand in W. Fuſs bezeichnet.

4. Um endlich auch die Höhe s, in welcher sich der Ballon am Ende der Zeit t befindet, durch diese Zeit, oder umgekehrt, auszudrücken, hat man wegen $dt = \frac{ds}{v}$, sofort

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v} \quad . \quad . \quad (3)$$

und da sich v als Function von s, für jeden beliebigen Werth von s nach der vorigen Bemerkung aus der Formel (2) bestimmen läſst, so kann man hier mit Vortheil zur Bestimmung dieses Integrales (3) die in Nr. **255** angegebene Näherungsformel (A) anwenden.

Theilt man z. B. die Differenz $s - 0$ in 4 gleiche Theile, setzt dieser Näherungsmethode zufolge $\frac{1}{v} = y$ und bezeichnet die Werthe, welche y für $s = 0,\ \frac{1}{4}s,\ \frac{1}{2}s,\ \frac{3}{4}s$ und s annimmt, der Reihe nach durch y_0, y_1, y_2, y_3, y_4; so hat man nach dieser genannten Formel:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v} = \frac{s}{12}\,(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + y_4) \quad (4)$$

dabei ist der gröſste Werth, welchen man der Gröſse s geben kann, durch die obige Relation (b) gegeben.

Anmerkung. Da für $s = 0$ auch $v = 0$ und daher y_0 Unendlich, also diese Formel (4) unbrauchbar wird, so muſs man diese Rechnung erst für die bereits eingeleitete Bewegung des Ballons beginnen, und z B. die Zeit von dem Augenblicke an zählen, in welchem der Ballon bereits eine, wenn auch noch so kleine Geschwindigkeit erhalten hat. Setzt man z. B voraus, daſs sich der Ballon bereits um 1 Fuſs über den Aufsteigpunct erhoben habe, so wird man die Zeit aus der Formel $t = \int_1^s \frac{ds}{v}$ bestimmen, indem man ohnehin nur Werthe erhält, welche bloſs annähernd richtig sind.

Beispiel. Es habe z. B. ein sphärischer Ballon ein Volumen von 10000 Kubikfuſs und im gefüllten und ausgerüsteten Zustand ein Gewicht von $604\frac{1}{2}$ Pfund, der Barometerstand sey 2·3124 Fuſs und die mittlere Tem-

peratur der Luft $15^{\circ}C.$; so ist die gröfste Kreisfläche $A = 561{\cdot}169$,
$a = {\cdot}513 \frac{A}{2g} = {\cdot}513 \times \frac{561{\cdot}169}{62} = 4{\cdot}6432$, $q' = {\cdot}064541$ und
$k = 25932 \times 1{\cdot}06 = 27487{\cdot}92$, folglich damit aus Relat. (b) sehr nahe $s = 1800$ Fufs als gröfste Höhe, in welcher der Ballon allmählig zur Ruhe kommt. In dieser Höhe ist (wenn auch hier die Temperatur mit 15° angenommen wird) $q = {\cdot}0604496$.

Theilt man nun zur Bestimmung der Zeit, nach der *Simpson*'schen Formel diese Höhe s in 8 gleiche Theile (man kann dabei ohne Fehler $\frac{1800}{8}$ statt $\frac{1800-1}{8}$ nehmen) und berechnet t annähernd nach der Formel:

$$t = \int_{1}^{1800} \frac{ds}{v} = \frac{1800}{24}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7, + y_8)$$

so findet man für $s = 1$ aus der Relation (a) d. i. aus

$\log q = \log q' - \frac{s}{k} \log e$ (wobei $\log q' = {\cdot}8098325 - 2$ und $\log e = {\cdot}4342945$) $q = {\cdot}0645382$ und damit aus der Formel (2): $v = 1{\cdot}1919$, also damit den reciproken Werth $y_0 = \frac{1}{v} = {\cdot}8391$ Verfährt man auf dieselbe Weise mit den Werthen von $s = \frac{1800}{8} = 225$,

$2.\frac{1800}{8} = 450$, $3.\frac{1800}{8} = 675$ u. s. w. bis $s = 8.\frac{1800}{8} = 1800$; so erhält man der Reihe nach folgende Werthe:

für	wird		
$s = 1$,	$q = {\cdot}0645382$,	$v = 1{\cdot}1919$,	$y_0 = {\cdot}8391$
$= 225$	$= {\cdot}0640143$	$= 10{\cdot}2446$	$y_1 = {\cdot}0977$
$= 450$	$= {\cdot}0634925$	$= 10{\cdot}4131$	$y_2 = {\cdot}0960$
$= 675$	$= {\cdot}0629749$	$= 10{\cdot}2125$	$y_3 = {\cdot}0980$
$= 900$	$= {\cdot}0624615$	$= 9{\cdot}9033$	$y_4 = {\cdot}1010$
$= 1125$	$= {\cdot}0619537$	$= 9{\cdot}5460$	$y_5 = {\cdot}1047$
$= 1350$	$= {\cdot}0614472$	$= 9{\cdot}1417$	$y_6 = {\cdot}1094$
$= 1575$	$= {\cdot}0609463$	$= 8{\cdot}7030$	$y_7 = {\cdot}1149$
$= 1800$	$= {\cdot}0604496$	$= 8\,2353$	$y_8 = {\cdot}1214$

und damit wird aus der vorigen Formel nahe $t = 242\frac{1}{2}$ Secunde oder etwas über 4 Minuten, welche der Ballon braucht, um in eine Luftschichte zu gelangen, die in runder Zahl um 300 Klafter über dem Aufsteigepunct des Ballons liegt.

Die hier gerechneten Werthe von v bestätigen das in der vorigen Anmerkung über die Bewegung des Ballons Gesagte vollkommen, und man sieht, dafs der Ballon jene, um 1800 Fufs über dem Aufsteigepunct gelegene Luftschichte anfangs noch mit einer Geschwindigkeit von etwas über 8 Fufs passirt, um hierauf wieder bis in diese zurückzukehren.

Setzt man in der obigen Relation (c) für ds den Werth $v\,dt$, so erhält man $dt = -\frac{k}{v}\frac{dq}{q}$, daher, wenn man v als constant ansieht:

$$t = -\frac{k}{v}\int_{q'}^{q}\frac{dq}{q} = \frac{k}{v}\int_{q}^{q'}\frac{dq}{q} = \frac{k}{v}\,l\,\frac{q'}{q}.$$

Nimmt man für q' jenen Werth, welcher der Höhe von 1800 Fufs entspricht, so ist $l\frac{q'}{q} = (\cdot 8098325 - 2) \quad (\cdot 7813935 - 2) = \cdot 0284390.$

Würde man nun für v den mittlern Werth nehmen, welcher der vorigen Reihe von $v = 10\cdot 24$ bis $v = 8\cdot 22$ entspricht, d. i.

$v = \frac{76\cdot 3975}{8} = 9\cdot 55$ setzen, so würde man annähernd $t = 188\frac{1}{2}$ Secunden für die Zeit finden, welche der Ballon braucht, um von der Höhe von 225 Fufs auf jene von 1800 Fufs zu gelangen, so, dafs er für die ersten 225 Fufs (die Zeit für den ersten Fufs nicht gerechnet) nahe $242\frac{1}{2} - 188\frac{1}{2} =$ 54 Secunden benöthigte.

78. Aufgabe.

Die Schwingungszeit eines Kugelpendels zu bestimmen, welches in einem widerstehenden Mittel, z. B. in der Luft, oder im Wasser schwingt.

Auflösung.

1. Bezeichnet man überhaupt, ohne Rücksicht auf die Form des Pendels, dessen Volumen mit Q und Dichtigkeit mit δ, so wie die Dichtigkeit des betreffenden Mittels, in welchem das Pendel schwingt, durch Δ; so ist die absolute Masse des Pendels $= Q\delta$, dagegen dessen relative Masse, deren Gewicht die Bewegung des Pendels in der Flüssigkeit bewirkt (α) . . $M = Q(\delta - \Delta)$ *).

Bezeichnet man ferner das Moment der Trägheit des Pendels in der betreffenden Flüssigkeit und auf die Schwingungsachse bezogen durch $\mathfrak{M}$, so ist, da die absolute Masse $Q\delta$ des Pendels von der Flüssigkeitsmasse $Q'\Delta$ begleitet wird, wenn nämlich Q' das Volumen dieser Masse bezeichnet, dessen Werth allgemein in der 75. Aufgabe, durch die Relation (m) gegeben ist, sofort $\mathfrak{M}$ gleich der Summe der Trägheitsmomente beider Massen $Q\delta$ und $Q'\Delta$. Nun ist, wenn a den Abstand

*) Es ist nämlich $Q\delta g$ das Gewicht des Pendels im leeren Raume, folglich, weil $Q\Delta g$ das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist, sofort $Q(\delta - \Delta)g$ das Gewicht des Pendels in der betreffenden Flüssigkeit.

des Schwerpunctes des Pendels von der Schwingungsachse, und $Q \delta m^2$. das Moment der Trägheit des Pendels in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct mit der Schwingungsachse parallele Ache bezeichnet, fürs Erste das Moment der Trägheit der Masse $Q \delta$ gleich $Q \delta (a^2 + m^2)$. Um ferner das Moment der Trägheit $\mathfrak{M}'$ der Masse $Q' \Delta$ zu finden, kann man annehmen, dafs, so wie es bei der geradlinigen Bewegung der Fall, auch bei der kreisförmigen Bewegung, das Volumen Q des Pendels, von jenem Q' der Flüssigkeit so umgeben werde, dafs beide Volumina dieselbe Achse und denselben Mittelpunct der Figur haben; dann ist, wenn $(Q + Q') \Delta m'^2$ das Moment der Trägheit der Masse $(Q + Q') \Delta$ in Beziehung auf eine durch den gemeinschaftlichen Schwerpunct gehende, mit der Schwingungsachse parallele Achse bezeichnet, sofort

$$\Delta (Q + Q') (a^2 + m'^2) = \Delta Q (a^2 + m^2) + \mathfrak{M}'$$

folglich $$\mathfrak{M}' = \Delta (Q + Q') (a^2 + m'^2) - \Delta Q (a^2 + m^2).$$

Mit diesen Werthen ist endlich das gesuchte Moment der Trägheit des Pendels in der betreffenden Flüssigkeit genommen, wenn man noch der Kürze halber

$$\frac{a^2 + m'^2}{a^2 + m^2} = c \text{ und } \frac{\Delta}{\delta} = f \text{ setzt, sofort}$$

$$\mathfrak{M} = \delta (a^2 + m^2) [(1 - f) Q + cf (Q + Q')]$$

oder, da a gegen die Dimensionen der Volumina Q und $Q + Q'$, folglich auch gegen m und m' gewöhnlich so grofs sind, dafs man ohne Fehler $c = 1$ setzen kann, auch

$$\mathfrak{M} = \delta (a^2 + m^2) (Q + f Q') \quad . \; . \; . \quad (1)$$

2. Geht man jetzt speziell auf das Kugelpendel über und nimmt an, dafs die Kugel, deren Durchmesser $= D$ und gröfste Kreisfläche $\frac{1}{4} D^2 \pi = F$ seyn soll, an einem so dünnen (undehnbaren) Faden aufgehangen sey, dafs man dessen Gewicht und Widerstand unberücksichtigt lassen kann, setzt ferner nicht gar zu kleine Schwingungsbögen voraus, in welchem Falle man den Widerstand des Mittels dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional zu setzen pflegt; so kann man nach *Duchemin* (74. Aufgabe, 2. Auflösung, Relat. 1) den Widerstand der Kugel bei der kreisförmigen Bewegung (da dieser bei der geradlinigen Bewegung 73. Aufgabe, 2. Auflösung, $= \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g}$ ist) durch

$$R = \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g} \left[1 + \frac{3{\cdot}2488\, z}{k (a - s)} \right]$$

ausdrücken, wobei (74. Aufgabe, 2. Beispiel)

$z = \frac{1}{2} D$, $s = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{D}{2} = \frac{2}{3} \frac{D}{\pi}$, $k = 1{\cdot}2824$ (§. 359) $\gamma = g\Delta$ das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit, und a der Abstand des Mittelpunctes der Kugel von der Drehungs- oder Schwingungsachse ist. Mit diesen Werthen wird auch, wenn man, was hier hinreichend ist, überall nur 4 Decimalstellen beibehält:

$$R = {\cdot}00650\, \gamma D^2 v^2 \left(1 + \frac{1{\cdot}2667\, D}{a - {\cdot}2122\, D}\right) \;.\;.\quad (2)$$

3. Um nun die Differenzialgleichung für die Bewegung dieses Pendels aufzustellen, hat man zuerst für die kreisförmige Bewegung (Aufgabe 48, Gleich. 1) die Relation:

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = \int (xY - yX)\, dm,$$

wobei die Rotationsachse in die Coordinatenachse der z fällt, und X, Y die beschleunigenden Kräfte bezeichnen, welche parallel mit den Achsen der x und y auf das Massenelement dm einwirken. Nimmt man im vorliegenden Falle die Achse der y in lothrechter Richtung und zwar im Sinne der Schwere, so wird, da g die Intensität der Schwere bezeichnet, sofort $X = o$ und $Y = g$, folglich

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = g \int x\, dm,$$

oder wenn man die Abscisse des Schwerpunctes des Pendels durch x_1 und dessen gesammte Masse durch M_1 bezeichnet, wodurch (Nr. **33**) $\int x\, dm = x_1 M_1$ wird, auch

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = g\, M_1 x_1.$$

Bildet der Pendelfaden im Augenblicke als die Oscillation beginnt, mit der Verticalen oder der Ebene der yz den Winkel α und am Ende der Zeit t jenen φ, so ist die Winkelgeschwindigkeit des Schwerpunctes in diesem Augenblicke $w = -\frac{d\varphi}{dt}$, also dessen absolute Geschwindigkeit $v = aw = -a\frac{d\varphi}{dt}$, und daher wegen $x_1 = a\, Sin\, \varphi$, auch

$$-\mathfrak{M} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\, a\, M_1\, Sin\, \varphi.$$

Mit Rücksicht jedoch auf den Widerstand, welchen das Pendel zu überwinden hat, mufs man in dieser Gleichung fürs Erste statt der absoluten Masse M_1 die relative M [aus (α)] und ferner $gM\, Sin\, \varphi - R$ statt $gM\, Sin\, \varphi$ setzen, indem es eigentlich diese Differenz ist, welche hier die bewegende Kraft des Pendels bildet. Dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in die nachstehende oder gesuchte **Differenzialgleichung der Bewegung:**

$$-\mathfrak{M}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=(gM\,Sin\,\varphi-R)\,a$$

oder was dasselbe ist, in jene:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{agM}{\mathfrak{M}}Sin\,\varphi+\frac{aR}{\mathfrak{M}}\;.\;.\quad(3)$$

4. Diese letztere Gleichung mit $2d\varphi$ multiplicirt und integrirt, gibt

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2agM}{\mathfrak{M}}Cos\,\varphi+\frac{aR}{\mathfrak{M}}\varphi+C$$

wobei C die unbestimmte Constante bezeichnet; um diese zu bestimmen, bemerke man, daſs für $t=0$ erstlich $\varphi=\alpha$ und dann auch $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}=0$ seyn muſs, so, daſs also

$$o=\frac{2agM}{\mathfrak{M}}Cos\,\alpha+\frac{aR}{\mathfrak{M}}\alpha+C \text{ oder } C=-\frac{2agM}{\mathfrak{M}}Cos\,\alpha-\frac{aR}{\mathfrak{M}}\alpha$$

folglich

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2g\,\frac{aM}{\mathfrak{M}}(Cos\,\varphi-Cos\,\alpha)+\frac{aR}{\mathfrak{M}}(\varphi-\alpha)\;.\;.\quad(4)$$

ist.

Aus dieser Gleichung läſst sich die Winkelgeschwindigkeit des Pendels (d. i. von dessen Schwerpunct) in jedem Augenblicke, je nach der Position seines Schwerpunctes bestimmen.

Zusatz. Reducirt sich die Kugel auf ihren Mittelpunct, also die Masse M_1 auf einen materiellen Punct und setzt man den Widerstand des Mittels $R=0$; so erhält man das einfache, im leeren Raume schwingende Pendel. Da nun für diesen Fall $M_1=M$ und $\mathfrak{M}=Ma^2=Q\delta a^2$ ist, so folgt aus der obigen Relation (1), wegen $Q'=0$ sofort auch $m=0$ und damit erhält man, aus der vorigen Gleichung (4), da auch $R=0$ ist,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=2\,g\,\frac{aM}{Ma^2}(Cos\,\varphi-Cos\,\alpha) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2=\frac{a}{2g(Cos\,\varphi-Cos\,\alpha)} \text{ d. i. } dt=-\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(Cos\,\varphi-Cos\,\alpha)}}.$$

Nun ist, da man für kleine Schwingungsbögen die vierten und höhern Potenzen von φ und α vernachlässigen kann,

$Cos\,\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2}$ und $Cos\,\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2}$, folglich

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(Cos\,\varphi - Cos\,\alpha)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2}\right)}}$$

und daher, wenn man diesen Werth substituirt und integrirt:

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}}\int_\alpha^0 \frac{d\;\varphi}{\sqrt{(\alpha^2-\varphi^2)}} = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2-\varphi^2)}}$$

und wegen $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2-\varphi^2)}} = arc\,Sin\,\frac{\varphi}{\alpha}$, auch $t = \sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}$

so, daſs also die Schwingungszeit des einfachen Pendels, im leeren Raume

$$T = 2\,t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \text{ wird (Nr. } \mathbf{59}\text{)}.$$

5. Geht man auf die Gleichung (3) zurück und substituirt für $\boldsymbol{R}$ den Werth aus der Relation (2), setzt aber darin Kürze halber:

$$\cdot 006508\,D^2\left(1 + \frac{1{\cdot}2667\,D}{a - {\cdot}2122\,D}\right) = \mu \quad . \quad . \quad (s)$$

also $\boldsymbol{R} = \mu\,v^2$; so erhält man, wegen $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{a d\varphi}{dt}$ sofort:

$$\frac{d\;\varphi}{dt^2} = -\frac{a g M}{\mathfrak{M}}\,Sin\,\varphi + \frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}}\,\frac{d\varphi^2}{dt^2} \quad . \quad . \quad (5)$$

oder, wenn man durchaus mit $2\,d\varphi$ multiplicirt, auch

$$2\,d\varphi\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\,\frac{a g M}{\mathfrak{M}}\,Sin\,\varphi\,d\varphi + \frac{2\,a^3\mu}{\mathfrak{M}}\,\frac{d\varphi^2}{dt^2}\,d\varphi.$$

Wird diese Differenzialgleichung integrirt und

$$\int \frac{d\varphi^2}{dt^2}\,d\varphi = y, \text{ also } \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{dy}{d\varphi}$$

gesetzt, so erhält man ganz einfach:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2\,a g M}{\mathfrak{M}}\,Cos\,\varphi + \frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}}\,y,$$

als eine l i n e ä r e Gleichung der ersten Ordnung, diese nimmt die Form

$$dy - \frac{2\,a^3\mu}{\mathfrak{M}}\,y\,d\varphi = 2\,\frac{agM}{\mathfrak{M}}\,Cos\,\varphi\,d\varphi$$

oder, wenn man

$$-\frac{2\,a^3\mu}{\mathfrak{M}} = \boldsymbol{P} \text{ und } \frac{2\,a g M}{\mathfrak{M}}\,Cos\,\varphi = \boldsymbol{Q} \text{ setzt, jene}$$

$$dy + \boldsymbol{P}\,y\,d\varphi = \boldsymbol{Q}\,d\varphi$$

an, welche sich ganz einfach (Comp. §. 847) integriren läſst. Es ist nämlich das allgemeine Integral

$$y = e^{-\int P\,d\varphi}\left(\int e^{\int P\,d\varphi}\,\boldsymbol{Q}\,d\varphi + \boldsymbol{C}\right)$$

oder wegen $\int P\,d\varphi = -\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}}\int d\varphi = -\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}}\varphi = -\mu'\varphi$, wenn man nämlich $\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} = \mu'$ setzt, auch

$$y = e^{\mu'\varphi}\left(\frac{2agM}{\mathfrak{M}}\int e^{-\mu'\varphi}\,Cos\,\varphi\,d\varphi + C\right) =$$

$$Ce^{\mu'\varphi} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}}e^{\mu'\varphi}\int e^{-\mu'\varphi}\,Cos\,\varphi\,d\varphi.$$

Setzt man zur Bestimmung dieses letztern Integrals $e^{-\mu'} = a$, so wird $\int e^{-\mu'\varphi}\,Cos\,\varphi\,d\varphi = \int a^\varphi\,Cos\,\varphi\,d\varphi$, und da $\int a^\varphi\,Cos\,\varphi\,d\varphi = \frac{a^\varphi}{1+l^2a}(la\,.\,Cos\,\varphi + Sin\,\varphi$ ist*), so hat man, wegen $la = -\mu'$:

$$\int e^{-\mu'\varphi}\,Cos\,\varphi\,d\varphi = \frac{e^{-\mu'\varphi}}{1+\mu'^2}(Sin\,\varphi - \mu'\,Cos\,\varphi)$$

folglich ist, wenn man substituirt und reducirt:

$$y = Ce^{\mu'\varphi} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}}\;\frac{1}{1+\mu'^2}(Sin\,\varphi - \mu'\,Cos\,\varphi).$$

Wird diese Gleichung nach φ differenziirt und setzt man für $\frac{dy}{d\varphi}$ wieder den Werth $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$ zurück, so erhält man endlich die Gleichung

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = C\mu'e^{\mu'\varphi} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}}\,.\,\frac{1}{1+\mu'^2}(Cos\,\varphi + \mu'\,Sin\,\varphi)$$

als erstes Integral der obigen Differenzialgleichung (5) in endlicher Form.

Zur Bestimmung der Constante C hat man für $\varphi = \alpha$ sofort $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, folglich $\quad 0 = C\mu'e^{\mu'\alpha} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}}\frac{1}{1+\mu'^2}(Cos\,\alpha + \mu'\,Sin\,\alpha)$

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 814) $\int Xa^x\,dx = \frac{Xa^x}{la} - \frac{1}{la}\int X'a^x\,dx$, und dabei $X' = \frac{dX}{dx}$, folglich $\int a^\varphi\,Cos\,\varphi\,d\varphi = \frac{a^\varphi\,Cos\,\varphi}{la} + \frac{1}{la}\int a^\varphi\,Sin\,\varphi\,d\varphi =$ $\frac{a^\varphi\,Cos\,\varphi}{la} + \frac{1}{la}\left[\frac{a^\varphi\,Sin\,\varphi}{la} - \frac{1}{la}\int a^\varphi\,Cos\,\varphi\,d\varphi\right]$ und daraus

$$\int a^\varphi\,Cos\,\varphi\,d\varphi\left(1+\frac{1}{l^2a}\right) = \frac{a^\varphi}{l^2a}(la\,.\,Cos\,\varphi + Sin\,\varphi) \text{ oder endlich}$$

$$\int a^\varphi\,Cos\,d\varphi = \frac{a^\varphi}{1+l^2a}(la\,.\,Cos\,\varphi + Sin\,\varphi).$$

oder $$\mu' C = -\frac{2agM}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{1}{1+\mu'^2} (Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha)\, e^{-\mu'\alpha}$$

es ist daher, wenn man diesen Werth substituirt, allgemein für jeden beliebigen Zeitmoment:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2agM}{(1+\mu'^2)\mathfrak{M}} \left[Cos\,\varphi + \mu' Sin\,\varphi - (Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha)\, e^{-\mu'(\alpha-\varphi)} \right] \quad \ldots (6)$$

6. Für den tiefsten Punct hat man aus dieser letzten Gleichung wegen $\varphi = 0$:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2agM}{(1+\mu'^2)\mathfrak{M}} \left[1 - (Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha)\, e^{-\mu'\alpha} \right]$$

als Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunctes des Pendels in diesem Puncte, welche sofort kleiner als in jenem Falle ist, in welchem das Pendel im leeren Raume schwingt.

Das Pendel steigt also mit dieser verminderten Geschwindigkeit auf der andern Seite bis auf eine Höhe, welche um etwas kleiner als jene ist, von welcher es herabgegangen. Bezeichnet man den entsprechenden, entgegengesetzten Winkel von φ durch $-\alpha_1$, so muſs dafür $\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\alpha_1}{dt} = 0$, folglich, wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung (6) substituirt:

$$Cos\,\alpha_1 - \mu' Sin\,\alpha_1 = (Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha)\, e^{-\mu'(\alpha+\alpha_1)}$$

oder auch

$$(Cos\,\alpha_1 - \mu' Sin\,\alpha_1)\, e^{\mu'\alpha_1} = (Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha)\, e^{-\mu'\alpha} \text{ seyn.}$$

Entwickelt man die Exponentialgröſsen nach Potenzen von μ', läſst aber schon die zweite Potenz dieser sehr kleinen Gröſse aus, so erhält man:

$$(Cos\,\alpha_1 - \mu' Sin\,\alpha_1) + (Cos\,\alpha_1 - \mu' Sin\,\alpha_1)\, \alpha_1 \mu' =$$
$$(Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha) - (Cos\,\alpha + \mu' Sin\,\alpha)\, \alpha \mu' \text{ *)}$$

oder, wenn man nach μ' ordnet, näherungsweise:

$$Cos\,\alpha_1 - (Sin\,\alpha_1 - \alpha_1 Cos\,\alpha_1)\, \mu' = Cos\,\alpha + (Sin\,\alpha - \alpha\, Cos\,\alpha)\, \mu'$$

Da nun der, dieser Gleichung entsprechende Werth von α_1 nur sehr wenig kleiner als α ist, so setze man $\alpha_1 = \alpha - \delta$ und vernachlässige die Glieder in δ^2 und $\mu'\delta$, so erhält man:

$$\delta\, Sin\,\alpha = 2\mu' (Sin\,\alpha - \alpha\, Cos\,\alpha)$$

---

*) Es ist nämlich nach der bekannten Reihe von $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$ sofort $e^{\mu'\alpha_1} = 1 + \alpha_1 \mu'$ und $e^{-\mu'\alpha} = 1 - \alpha\mu'$ zu setzen.

mithin, wenn man daraus δ bestimmt und den Werth in die vorhergehende Relation setzt:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu'}{Sin\,\alpha}(Sin\,\alpha - \alpha\,Cos\,\alpha),$$

als jenen Werth des Winkels φ, welcher am Ende der ersten Schwingung Statt findet. Sind unbeschadet der gemachten Voraussetzung (von nicht zu kleinen Schwingungen) die Oscillationen noch so klein, daſs man die vierten und höheren Potenzen von α vernachlässigen kann; so geht der vorige Ausdruck über in den einfacheren:

$$\alpha_1 = \alpha - \tfrac{2}{3}\mu'\alpha^2 \;.\;. \quad (7)$$

bezeichnet α_2 den Winkel der zweiten halben Schwingung, so wird α_2 aus α_1 eben so, wie α_1 aus α gefunden; es ist nämlich

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \tfrac{2}{3}\mu'\alpha_1^2 \;.\;. \quad (8)$$

und eben so ist $\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{2}{3}\mu'\alpha_2^2$ u. s. w.

7. Um endlich die irgend einem Winkel φ entsprechende Schwingungszeit t zu finden, müſste man den aus der Gleichung (6) zu bestimmenden Werth von t integriren; da es sich jedoch hier nur um kleine Schwingungsbögen handelt, so kann man sich dafür eine hinreichend genaue convergente Reihe, und zwar auf folgende Weise verschaffen.

Da nämlich φ eine Function von t und α ist, welche sich für $\alpha = 0$ auf Null reduciren muſs, so kann man

$$\varphi = \varphi_1\alpha + \varphi_2\alpha^2 + \varphi_3\alpha^3 + \;.\;. \quad (9)$$

setzen, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ von α unabhängige Coeffizienten bezeichnen. Aus dieser Annahme folgt, wenn man durchaus die dritte und höhern Potenzen von α ausläſst:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \alpha^2\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \alpha^2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \text{ und}$$

$$Sin\,\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \;.\;. = \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2.$$

Substituirt man diese Werthe für $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ und $Sin\,\varphi$ in der obigen Gleichung (5), ordnet beiderseits nach Potenzen von α und setzt dann die gleichnamigen (weil von α unabhängigen) Coeffizienten einander gleich, so erhält man

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{agM}{\mathfrak{M}} \text{ und } \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{agM}{\mathfrak{M}}\varphi_2 \;. \quad (10)$$

Wird die erste dieser beiden Gleichungen, in welcher wir der Kürze wegen

$$\frac{agM}{\mathfrak{M}} = A \;.\;. \quad (11)$$

setzen wollen, mit $2d\varphi_1$ multiplicirt und dann integrirt, so erhält man

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = C - A\varphi_1^2.$$

Zur Bestimmung der unbestimmten Constanten bemerke man überhaupt, dafs, damit für $t=0$ auch $\frac{d\varphi}{dt}=0$ und $\varphi=\alpha$ seyn kann, sofort (wie aus Relat. 9 folgt) erstlich die Anfangswerthe von $\varphi_2, \varphi_3 \ldots$ so wie $\frac{d\varphi_2}{dt}, \frac{d\varphi_3}{dt} \ldots$ dafür sämmtlich Null seyn müssen, dagegen $\varphi_1 = 1$ und $\frac{d\varphi_1}{dt}=0$ werden mufs. Es ist daher

$$C = A, \text{ mithin } \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = A(1-\varphi_1^2) \text{ d. i.}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{(1-\varphi_1^2)}} = dt\sqrt{A},$$

folglich, wenn man abermals integrirt:

$$arc. Sin\,\varphi_1 = t\sqrt{A} + C$$

und nach der vorigen Bemerkung $arc. Sin\,1 = C = \frac{\pi}{2}$, mithin

$$arc. Sin\,\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + t\sqrt{A}$$

oder $$\varphi_1 = Sin\left(\frac{\pi}{2} + t\sqrt{A}\right) = Cos\,t\sqrt{A} \;.\;.\; (12)$$

daraus folgt $\frac{d\varphi_1}{dt} = -\sqrt{A}\,.Sin\,t\sqrt{A}$ und $\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = A\,Sin^2\,t\sqrt{A}$ so, dafs mit diesem letztern Werthe, die zweite der vorigen Gleichungen (10) übergeht in jene

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}}A\,Sin^2\,t\sqrt{A} - A\varphi_2 \;.\;.\; (13)$$

oder auch in die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + A\varphi_2 = \frac{a^3\mu}{2\mathfrak{M}}A(1 - Cos\,2\,t\sqrt{A})$$

Wird diese Gleichung (13) integrirt und werden die Constanten dabei so bestimmt, dafs für $t=0$ sowohl $\varphi_2 = 0$ als auch $\frac{d\varphi_2}{dt}=0$ wird; so erhält man

$$\varphi_2 = \frac{B}{2A} + \frac{B}{6A}Cos\,2\,t\sqrt{A} - \tfrac{2}{3}\frac{B}{A}\,Cos\,t\sqrt{A}\,{}^{*)} \;.\;.\; (14)$$

wenn man nämlich noch Kürze halber $\frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}}A = B$, also $\frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} = \frac{B}{A}$ setzt.

---

*) Setzt man nämlich indefs $\varphi_2 = y$, $t = x$ und $\frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}}A = B$, so erhält die genannte, zu integrirende Gleichung die Form:

Setzt man diese für φ_1 und φ_2 gefundenen, in den Relationen (12) und (14) ausgedrückten Werthe in die (aus 9 folgende) Gleichung

---

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = B\,Sin^2 x \sqrt{A},$$

oder, wenn man $x\sqrt{A} = \alpha$, also $dx = \frac{d\alpha}{\sqrt{A}}$ setzt, auch:

$$A\frac{d^2y}{d\alpha^2} + Ay = B\,Sin^2 \alpha,$$

oder, wenn man $\frac{B}{A} = a$ und x statt α setzt, endlich

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = a\,Sin^2 x \;.\;. \quad (a)$$

Um nun diese Gleichung zu integriren, setze man:

$$y = Yz \;.\;. \quad (b)$$

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = Y\frac{dz}{dx} + z\frac{dY}{dx} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = Y\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dY}{dx}\frac{dz}{dx} + z\frac{d^2Y}{dx^2} \;.\;. \quad (c)$$

Dieser Werth in der Gleichung (a) substituirt, gibt, wenn man noch

$$a\,Sin^2 x = X \;.\;. \quad (d)$$

setzt, sofort:
$$\left(\frac{d^2z}{dx^2} + z\right)Y + 2\frac{dY}{dx}\frac{dz}{dx} + z\frac{d^2Y}{dx^2} = X.$$

Bestimmt man nun, was, wie wir sehen werden, immer möglich ist z so, daſs

$$\frac{d^2z}{dx^2} + z = 0 \;.\;. \quad (e)$$

wird, so geht die vorige Gleichung über in

$$2\frac{dY}{dx}\frac{dz}{dx} + z\frac{d^2Y}{dx^2} = X,$$

oder, wenn man
$$\frac{dY}{dx} = Y' \;.\;. \quad (f)$$

setzt, wodurch $\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{dY'}{dx}$ wird, in jene

$$\frac{dY'}{dx} + \frac{2}{z}\frac{dz}{dx}Y' = \frac{X}{z}$$

oder endlich, wenn man

$$\frac{2}{z}\frac{dz}{dx} = P \text{ und } \frac{X}{z} = Q \;.\;. \quad (g)$$

setzt, wobei P und Q bekannte (oder leicht zu bestimmende) Functionen von x sind, in die Gleichung

$$\frac{dY'}{dx} + PY' = Q \;.\;. \quad (h)$$

Hat man aus dieser Gleichung Y' gefunden, so folgt aus jener (f):

$\varphi = \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2$, so erhält man nach einer einfachen Reduction und wegen $\dfrac{B}{A} = \dfrac{a^3\mu}{\mathfrak{M}}$, die Gleichung:

$$Y = \int Y' \mathrm{d}x + C \text{ und dann ist (Relat. } a)$$

$$y = Yz = z\left[\int Y'\mathrm{d}x + C\right] \ . \ . \ (i)$$

Um nun zuerst z aus der Relation (e) zu finden, multiplicire man diese Gleichung mit $2\mathrm{d}z$, so folgt nachdem man integrirt hat

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + z^2 = c_1 \text{ oder } \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(c_1 - z^2)}} = \mathrm{d}x$$

wobei c_1 die unbestimmte Constante ist. Wird diese letztere Gleichung abermals integrirt, so erhält man

$$arc\, Sin \frac{z}{\sqrt{c_1}} = x + c_2$$

oder, da für $x = 0$ auch $z = 0$ seyn mufs, folglich die Constante $c_2 = 0$ ist, auch $arc\, Sin \dfrac{z}{\sqrt{c_1}} = x$ oder $\dfrac{z}{\sqrt{c_1}} = Sin\, x$ d. i.

$$z = \sqrt{c_1}\, Sin\, x \ . \ . \ (k)$$

Aus dieser Gleichung folgt $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \sqrt{c_1}\, Cos\, x$ und daher aus (g):

$$P = 2\, Cot\, x \text{ und (mit Rücksicht auf die Relation } d)$$

$$Q = \frac{a}{\sqrt{c_1}}\, Sin\, x.$$

Es ist also $\int P\mathrm{d}x = 2\int \mathrm{d}x\, Cot\, x = 2\, l\, Sin\, x$, und wenn man $e^{\int P\,\mathrm{d}x} = e^{l\, Sin^2 x} = w$ setzt, wegen $w = Sin^2 x$, sofort $e^{\int P\,\mathrm{d}x} = Sin^2 x$ und $e^{-\int P\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{Sin^2 x}$, folglich ist weiters:

$$\int Q e^{\int P\,\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \frac{a}{\sqrt{c_1}}\int Sin^3 x\, \mathrm{d}x = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}}(2\, Cos x + Cos x\, Sin^2 x) + C$$

(Comp. §. 820, Form. 7). Nun folgt aus der Relation (h), wie oben (Comp. §. 847) $Y' = e^{-\int P\,\mathrm{d}x}\left(\int Q e^{\int P\,\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C\right)$, also ist, wenn man diese eben gefundenen Werthe substituirt:

$$Y' = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}}\left(\frac{2\, Cos\, x}{Sin^2 x} + Cos\, x\right) + \frac{C}{Sin^2 x}$$

und daher

$$Y = \int Y' \mathrm{d}x = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}}\int\left(\frac{2\, Cos\, x\, \mathrm{d}x}{Sin^2 x} + Cos x\, \mathrm{d}x\right) + \int \frac{C\mathrm{d}x}{Sin^2 x} \text{ d. i.}$$

$$Y = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}}\left(Sin\, x - \frac{2}{Sin\, x}\right) - C.Cot\, x.$$

$$\varphi = \left(\alpha - \frac{2}{3}\frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}}\alpha^2\right) Cos\, t\sqrt{A} + \frac{\mu a^3}{2\mathfrak{M}}\alpha^2 + \frac{\mu a^3}{6\mathfrak{M}}\alpha^2 Cos\, 2\, t\sqrt{A}\ . \quad (15)$$

wobei noch μ den in (s) (Absatz 5.) angegebenen Werth hat und (Relat. 11) $A = \frac{a g M}{\mathfrak{M}}$ ist.

8. Wegen $v = -a\frac{d\varphi}{dt}$ ist, wenn man die vorige Gleichung (15) nach t differenziirt und den Quotienten $\frac{d\varphi}{dt}$ bestimmt, sofort:

$$v = a\sqrt{A}.\left(\alpha - \frac{2}{3}\frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}}\alpha^2\right) Sin\, t\sqrt{A} + \frac{\mu a^4}{3\mathfrak{M}}\alpha^2\sqrt{A}\,.\, Sin\, 2\, t\sqrt{A}\,.. \quad (16)$$

Da am Ende einer jeden Oscillation oder Schwingung $v = 0$ ist, so erhält man für diese Momente aus der vorigen Gleichung, wenn man $2\, Sin\, t\sqrt{A}\,.\, Cos\, t\sqrt{A}$ statt $Sin\, 2\, t\sqrt{A}$ setzt und mit $\alpha\, a\sqrt{A}$ abkürzt:

$$0 = \left(1 - \frac{2}{3}\frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}}\alpha + \frac{2}{3}\frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}}\alpha\, Cos\, t\sqrt{A}\right) Sin\, t\sqrt{A}.$$

Da nun α ein sehr kleiner Winkel ist, so kann der erste dieser beiden Factoren nicht Null seyn, dagegen wird es der zweite Factor und zwar für die Werthe von $t\sqrt{A} = 0,\ \pi,\ 2\,\pi\,..\,n\,\pi$; es folgt also, dafs das Zeitintervall T zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Geschwindigkeiten Null, d. i. die Schwingungszeit T oder die Dauer einer vollen Schwingung erhalten wird, wenn man $T\sqrt{A} = \pi$ setzt

---

Endlich folgt mit diesen Werthen von z und Y aus der Relation (i):

$$y = -\frac{a}{3}(2 - Sin^2 x) - C\sqrt{c_1}\, Cos\, x.$$

Zur Bestimmung der Constanten C und c_1 hat man, da für $x = 0$ sowohl $y = 0$ als auch $\frac{dy}{dx} = 0$ seyn mufs, die beiden Bedingungsgleichungen $0 = \frac{2a}{3} - C\sqrt{c_1}$ und $0 = 0$, folglich ist aus der erstern

$C\sqrt{c_1} = \frac{2a}{3}$ und damit, wenn man auch gleich $Sin^2 x = \frac{1 - Cos\, 2x}{2}$ setzt und gehörig reducirt:

$$y = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} Cos\, 2x - \frac{2a}{3} Cos\, x.$$

Stellt man endlich die Werthe für a, x, y wieder her, d. i. setzt man $\frac{B}{A}$ statt a, $t\sqrt{A}$ statt x und φ_2 statt y; so erhält man die oben angegebene Integralgleichung (14):

$$\varphi_2 = \frac{B}{2A} + \frac{B}{6A} Cos\, 2\, t\sqrt{A} - \frac{2}{3}\frac{B}{A} Cos\, t\sqrt{A}.$$

(indem man z. B. $t\sqrt{A}$ von $(n-1)\pi$ bis $n\pi$ nehmen kann), wodurch man $T=\frac{\pi}{\sqrt{A}}$, oder wenn man für A den Werth aus Relat. (11) herstellt, d. i. $A=\frac{agM}{\mathfrak{M}}$ setzt, auch:

$$T=\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{agM}} \quad . \, . \quad (17)$$

erhält.

Zusatz. Schwingt dasselbe Pendel im leeren Raume, so haben $\mathfrak{M}$ und M dieselbe Bedeutung wie in §. 170 und das dortige d ist hier $=a$, folglich ist, wenn für den leeren Raum $\mathfrak{M}$ und M in $\mathfrak{M}'$ und M' übergehen, die Schwingungszeit im leeren Raume:

$$T'=\pi\sqrt{\frac{\mathfrak{M}'}{agM'}},$$

und da, wie man aus den Relationen (1) und (α) ersieht $\mathfrak{M}>\mathfrak{M}'$ und $M<M'$ ist, so folgt, das der Widerstand des Flüssigen auf die Schwingungszeit eines zusammengesetzten Pendels keinen andern Einfluſs hat, als daſs das Moment der Trägheit desselben etwas gröſser und dessen Gewicht (gM) etwas kleiner, dadurch also die Schwingungsdauer T selbst etwas gröſser als jene T' wird.

Für das einfache Pendel dagegen wird in beiden Fällen $\mathfrak{M}=Ma^2$, folglich die Schwingungszeit in dem widerstehenden Mittel

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

eben so groſs, wie im leeren Raume, so, daſs also der Widerstand der Luft oder der Flüssigkeit überhaupt auf die Dauer einer ganzen Schwingung bei diesem Pendel keinen Einfluſs hat.

Gleichwohl wird durch diesen Widerstand die Zeit vergröſsert, welche das Pendel braucht um den tiefsten Punct zu erreichen, d. i. bis $\varphi=0$ wird; bezeichnet man nämlich diese Zeit durch t', so hat man aus der Relation (15):

$$0=\left(\alpha-\frac{2}{3}\frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}}\alpha^2\right)Cos\, t'\sqrt{A}+\frac{\mu a^3}{2\mathfrak{M}}\alpha^2+\frac{\mu a^3}{6\mathfrak{M}}\alpha^2\, Cos\, 2\, t'\sqrt{A}.$$

Da nun, wie man sieht, der kleinste Werth von $t'\sqrt{A}$, welcher dieser Gleichung Genüge leistet, sehr wenig von $\frac{\pi}{2}$ abweicht, so setze man

$$t'\sqrt{A}=\frac{\pi}{2}+\delta$$

wobei δ eine so kleine Gröſse ist, daſs man δ^2 und $\alpha\delta$ vernachlässigen kann. Dadurch erhält man:

$$Cos\, t' \sqrt{A} = Cos\,(90^0 + \delta) = -Sin\,\delta = -\delta$$

und $$Cos\, 2\, t' \sqrt{A} = Cos\,(180^0 - 2\,\delta) = -Cos\, 2\,\delta = 1,$$

folglich nach der vorigen Gleichung:

$$0 = -\alpha\delta + \frac{\mu\, a^3}{2\,\mathfrak{M}}\alpha^2 - \frac{\mu\, a^3}{6\,\mathfrak{M}}\alpha^2$$

und daraus $$\delta = \frac{\mu\, a^3}{2\,\mathfrak{M}}\alpha - \frac{\mu\, a^3}{6\,\mathfrak{M}}\alpha = \tfrac{1}{3}\frac{\mu\, a^3}{\mathfrak{M}}\alpha,$$

also damit

$$t' = \left(\frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{\mu\, a^3}{\mathfrak{M}}\alpha\right)\sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{A}}\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{\mu\, a^3 \alpha}{\pi\,\mathfrak{M}}\right) \;.\; . \quad (n)$$

oder da für das einfache Pendel $\mathfrak{M} = M a^2$ und $\frac{1}{A} = \frac{\mathfrak{M}}{a g M} = \frac{a}{g}$ ist, endlich dafür

$$t' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{\mu\, a\, \alpha}{\pi M}\right)$$

während im leeren Raume $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ ist.

Setzt man den vorigen, in (n) ausgedrückten Werth von t' in die obige Gleichung (16) von v, so erhält man, da man nahe

$$Sin\, t' \sqrt{A} = Sin\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{\mu\, a^3 \alpha}{\pi\,\mathfrak{M}}\right)\frac{\pi}{2} = 1 \text{ und}$$

$Sin\, 2\, t' \sqrt{A} = Sin\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{\mu\, a^3 \alpha}{\pi\,\mathfrak{M}}\right)\pi = 0$ setzen kann, sofort nahe genug die Geschwindigkeit im tiefsten Puncte:

$$v = a\sqrt{\frac{a g M}{\mathfrak{M}}} \cdot \left(1 - \tfrac{2}{3}\frac{\mu\, a^3}{\mathfrak{M}}\alpha\right)\alpha,$$

während diese im leeren Raume durch

$$v = a\,\alpha\sqrt{\frac{a g M}{\mathfrak{M}}}$$

und für das einfache Pendel (wegen $\mathfrak{M} = M a^2$) durch:

$$v = \alpha\sqrt{a g} \;.\; . \quad (k)$$

ausgedrückt würde.

Bezeichnet man endlich den Winkel φ für das Ende der ersten Schwingung durch $-\alpha_1$, welcher Werth sofort der Zeit $t\sqrt{A} = \pi$ entspricht, so erhält man aus der Gleichung (15) nach einer einfachen Reduction:

$$\alpha_1 = \alpha - \tfrac{4}{3}\frac{\mu\, a^3}{\mathfrak{M}}\alpha^2 \;.\; . \quad (18)$$

welcher Ausdruck mit jenem in Relation (7) $\left(\text{wegen } \mu' = \frac{2\, a^3 \mu}{\mathfrak{M}}\right)$ vollkommen übereinstimmt.

Anmerkung. Der vorige Ausdruck für den Winkel α_1 ist den Versuchen zufolge aus dem Grunde etwas zu groſs, weil die Geschwindigkeit des

Pendels im Anfange und am Ende einer jeden Schwingung sehr klein ist und in diesen Momenten auch noch der von der Zähigkeit der Flüssigkeit herrührende Widerstand in Rechnung gebracht werden mufs. Nach *Duchemin* mufs man, um den Beobachtungen des kugelförmigen Pendels im Wasser und in der Luft annähernd zu genügen, statt des obigen Coeffizienten $\frac{4}{3} = 1{\cdot}33$, jenen $1{\cdot}5486$ nehmen, also

$$\alpha_1 = \left(1 - 1{\cdot}5486\,\frac{\mu\, a^3\, \alpha}{\mathfrak{M}}\right)\alpha \;. \;. \quad (19)$$

setzen.

Beispiel 1. Bei einem Versuche von *Dubuat* über die Schwingungen des Kugelpendels im Wasser, war für die erste Schwingung $D = 2{\cdot}645$ Zoll, $a = 36\,637$ Zoll, $\frac{\delta}{\Delta} = 11{\cdot}057$ und $a\alpha = 12$ Zoll. Nun ist für die Kugel überhaupt $Q = \frac{1}{6}\pi D^3$ und (75. Aufgabe, Relat. q) $Q' = \frac{1}{10}\pi D^3$ oder $\frac{Q'}{Q} = {\cdot}6$, und in der Relation (1) d. i. in $\mathfrak{M} = Q\,\delta\,(a^2 + m^2)\left(1 + f\,\frac{Q'}{Q}\right)$ sofort $m^2 = \frac{2}{5}\,\frac{D^2}{4} = \frac{1}{10}D^2$ (Nr. 79) und $f = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{11{\cdot}057}$; es wird also nach der vorigen Formel (19), wenn man darin für μ den Werth aus der Relation (s) (in 5.) und dabei $\gamma = g\,\Delta = 30{\cdot}2\,\Delta$ setzt, weil hier das französische Fufsmafs zum Grunde liegt, sofort

$$\alpha_1 = \left[1 - \frac{1{\cdot}5486 \times {\cdot}00650 \times 30{\cdot}2\, D^2 a^3 \alpha}{Q\,(a^2 + m^2)\left(1 + f\,\frac{Q'}{Q}\right)}\,\frac{\Delta}{\delta}\left(1 + \frac{1{\cdot}2667\, D}{a - {\cdot}2122\, D}\right)\right]\alpha$$

und wenn man diesen Ausdruck berechnet:

$$\alpha_1 = {\cdot}24670 \text{ oder } a\,\alpha_1 = 9{\cdot}0381 \text{ Zolle.}$$

Die Beobachtung gibt dafür $a\,\alpha_1 = 9{\cdot}25$ Zoll, so, dafs also der berechnete Werth bei dieser Gröfse des niedersteigenden Bogens von $\alpha = 18^\circ\,46'$ um ·212 Zoll kleiner als der beobachtete ist, während diese Formel die Beobachtungsresultate für kleinere Bögen von α, wie z. B. von 6° abwärts, sehr genau wieder gibt. *Duchemin* findet für dasselbe Beispiel: $a\,\alpha_1 = 8{\cdot}995$ Zoll, welcher Werth jedoch schon aus dem Grunde etwas unrichtig ist, weil er in m^2 den Durchmesser mit dem Halbmesser verwechselt und $m^2 = \frac{2}{5}D^2$ statt $\frac{2}{5}r^2$ setzt.

Beispiel 2. Bei einem andern von *Dubuat* angestellten Versuche, wobei die Schwingungen des Kugelpendels in der Luft Statt fanden, war $D = 4{\cdot}0416$ Zoll, $a = 36{\cdot}535$ Zoll und $\frac{\delta}{\Delta} = 11{\cdot}33$. Für den Werth von $a\,\alpha = 12$ Zoll gab die Beobachtung $a\,\alpha_1 = 10{\cdot}00$ Zoll und die Rechnung $10{\cdot}005$ Zoll, was also eine sehr gute Übereinstimmung nachweiset.

9. Nimmt man den Widerstand des Flüssigen blofs der ersten Potenz oder der einfachen Geschwindigkeit des Pendels proportional an, so stimmen die berechneten Werthe mit den beobachteten nur so lange überein, als die Schwingungsbögen kleiner als 20 Minuten sind, Man nähert sich jedoch der Wahrheit weit mehr, wenn man den vollständigen Ausdruck des Widerstandes anwendet, in welchem nämlich ein Glied, welches der zweiten Potenz, und ein Glied vorkömmt, welches der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Mit Rücksicht auf den Umstand, dafs der Widerstand bei mehreren unmittelbar aufeinander folgenden Pendelschwingungen etwas gröfser als bei der gleichförmigen, continuirlichen Kreisbewegung ist, setzt *Duchemin* diesen Widerstand:

$$R = \mu g \alpha (A a \alpha + B \sqrt{a g})$$

wobei μ den in der obigen Relation (*s*) ausgedrückten Werth, (Relat. *k*) $\alpha\sqrt{ag}$ die gröfste Geschwindigkeit, welche das einfache Pendel von der Länge a im leeren Raume (im tiefsten Punct) erlangt und endlich A und B zwei Constanten bezeichnen.

Die Differenzialgleichung für die Bewegung des Pendels ist unter dieser Voraussetzung (nach der obigen Relation 3):

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{ag}{\mathfrak{M}} \left[M \, Sin\, \varphi - \mu\alpha (A a \alpha + B\sqrt{ag})\right] \quad . \; . \; (\alpha)$$

woraus man für den aufsteigenden Bogen α_1, d. i. für den Werth von $-\varphi$ am Ende der ersten Schwingung und für die Dauer T dieser Schwingung beziehungsweise erhält:

$$\alpha_1 = \alpha \left[1 - \frac{2\mu}{M}(A a \alpha + B\sqrt{ag})\right] \quad . \; . \; (\beta)$$

und

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{a g M}} \quad . \; . \; (\gamma)$$

wenn man nämlich den Schwingungswinkel α so klein voraussetzt, dafs man ohne Fehler schon die vierte Potenz von α und φ vernachlässigen kann*).

---

*) Multiplicirt man nämlich die obige Differenzialgleichung (α) mit $2\,d\varphi$, integrirt und bestimmt die Constante so, dafs für $\varphi = \alpha$ der Quotient $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ wird, so erhält man ganz einfach:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \left[(Cos\,\varphi - Cos\,\alpha) - \frac{\mu}{M}\alpha(A a \alpha + B\sqrt{ag})(\alpha - \varphi)\right]$$

oder, wenn man nach der obigen Bemerkung $Cos\,\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ und $Cos\,\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ setzt, auch:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{agM}{\mathfrak{M}} \left[\alpha^2 - \varphi^2 - \frac{2\mu}{M}\alpha(A a \alpha + B\sqrt{ag})(\alpha - \varphi)\right] \quad . \; . \; (\omega)$$

Setzt man für die n^{te} Schwingung:

$$\alpha_n = \alpha \left[1 - n . \frac{2\mu}{M} (A a \alpha + B \sqrt{ag}) \right] ^{*)} \ldots \quad (\delta)$$

und bestimmt die Constanten A und B dieser Formel aus den *Borda*'schen Versuchen, so erhält man $A = \frac{1}{1 \cdot 846} = \cdot 54171$ und $B = \frac{1}{42 \cdot 039} = \cdot 02379$.

Anmerkung. Bei den hier erwähnten *Borda*'schen Versuchen bestanden die Schwingungen des Kugelpendels in der Luft in 12 aufeinander folgenden

---

Am Ende der ersten Schwingung ist $\varphi = -\alpha_1$ und $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, folglich

$$0 = \frac{agM}{\mathfrak{M}} (\alpha + \alpha_1) \left[\alpha - \alpha_1 - \frac{2\mu}{M} \alpha (A a \alpha + B \sqrt{ag}) \right]$$

und wenn man mit dem Factor $\frac{agM}{\mathfrak{M}} (\alpha + \alpha_1)$, welcher nicht Null werden kann, abkürzt und α_1 bestimmt, sofort:

$$\alpha_1 = \alpha \left[1 - \frac{2\mu}{M} (A a \alpha + B \sqrt{ag}) \right].$$

Was ferner die Schwingungszeit T betrifft, so folgt zuerst, wenn man der Kürze wegen $\frac{2\mu\alpha}{M} (A a \alpha + B \sqrt{ag}) = q$ und $\sqrt{\frac{agM}{\mathfrak{M}}} = N$ setzt, aus der vorigen Gleichung (ω) (da $d\varphi$ und dt verschiedene Zeichen erhalten müssen):

$$N dt = \frac{-d\varphi}{\sqrt{[\alpha^2 - \varphi^2 - q(\alpha - \varphi)]}}.$$

Ferner ist (Lehrb. I.I. S. 312, Form. 2'):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + bx - cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \, arc \, Sin \frac{2cx - b}{\sqrt{(4ac + b^2)}} + C$$

folglich, da hier $a = \alpha^2 - q\alpha$, $\beta = q$ und $c = 1$ ist, sofort:

$$Nt = C - arc \, Sin \left[\frac{2\varphi - q}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4q\alpha + q^2)}} \right] = C - arc \, Sin \left(\frac{2\varphi - q}{2\alpha - q} \right).$$

Um die Constante C zu bestimmen, hat man, da für $\varphi = \alpha$, $t = 0$ ist, $C = arc \, Sin \, 1 = \frac{\pi}{2}$, folglich allgemein $Nt = \frac{\pi}{2} - arc \, Sin \left(\frac{2\varphi - q}{2\alpha - q} \right)$ und da für $\varphi = -\alpha_1 = q - \alpha$ die Zeit $t = T$ wird, sofort:

$$NT = \frac{\pi}{2} - arc \, Sin \left[\frac{-(2\alpha - q)}{2\alpha - q} \right] = \frac{\pi}{2} + arc \, Sin \, 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Aus dieser Relation folgt endlich, wenn man für N den Werth wieder herstellt:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{agM}}.$$

*) Indem man nämlich nach der Relat. (β) $\alpha_1 = \alpha - q$, $\alpha_2 = \alpha_1 - q = \alpha - 2q$ u. s. w. nimmt.

Perioden und zwar jede aus 1800 Schwingungen, d. h. es wurden die Schwingungsbögen nach jeder solchen, 1 Stunde dauernden Periode beobachtet und zwar war dabei $D = 1{\cdot}347$ Zoll, $a = 144$ Zoll, $\frac{\delta}{\Delta} = 17600$ und $n = 1800$; der Bogen betrug beim Beginn des Versuches 120 Minuten und dieser nahm allmählig so ab, dafs er am Ende jeder der 12 Perioden oder Stunden der Reihe nach die Werthe annahm: 61·2, 35·4, 21·9, 14·1, 9·4, 6·3, 4·1, 2·7, 1·8, 1·2, ·8, ·5 Minuten, so, dafs also, wenigstens für die spätern Werthe sehr nahe $\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{2}{3}$ ist.

Die obige Formel gibt (nach der Berechnung von *Duchemin*) für die abnehmenden Werthe des Winkels α beziehungsweise 60·55, 35·50, 22·03, 14·18, 9·15, 6·04, 3·97, 2·64, 1·76, 1·17, ·78, ·52 Minuten, woraus die hinlängliche Übereinstimmung mit den Beobachtungsresultaten hervorgeht.

Diese entwickelte Formel (δ) pafst jedoch nicht blofs für so kleine Schwingungsbögen, wie sie bei den vorstehenden *Borda*'schen Versuchen vorkommen, sondern sie ist auch noch für gröfsere Bögen hinreichend genau. Denn bestimmt man daraus die Schwingungszahl n, so erhält man:

$$n = \frac{\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha}\right) M}{2\mu\,(A a \alpha + B \sqrt{ag})}.$$

Nach den Versuchen von *Dubuat* mit dem bereits oben erwähnten Kugelpendel, wobei $D = 2{\cdot}645$, $a = 36{\cdot}637$ und $a\alpha = 12$ Zoll war, und welches er in der Luft schwingen liefs, waren, wenn die Kugel in der Luft 2348 Gran wog, $31\frac{2}{3}$, wenn das Gewicht doppelt so grofs war, 63, und wenn das Gewicht des Pendels 3 Mal so grofs war, 95 aufeinander folgende Schwingungen nothwendig, um einen Bogen von $a\alpha = 12$ auf jenen $a\alpha_n = 10$ Zoll (d. i. von $\alpha = 18^\circ 46'$ auf nahe $\alpha_n = 15^\circ 38'$) herab zu bringen.

Nach der vorigen Formel erhält man, wegen $\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, für diese 3 Versuche beziehungsweise $n = 31{\cdot}59$, $63{\cdot}17$ und $94{\cdot}76$, so, dafs sich also auch bei diesen bedeutend gröfseren Schwingungsbögen noch eine genügende Übereinstimmung zeigt, man daher mit Recht schliefsen darf, dafs der Ausdruck für den Widerstand der Flüssigkeit bei solchen Pendelschwingungen aus zwei Gliedern bestehen mufs, wovon das eine dem Quadrate und das andere der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Schlufsbemerkung. Die hier behandelte Aufgabe dient natürlich auch zur sogenannten Reduction der in der Luft oder im Wasser angestellten Pendelversuche auf den leeren Raum, d. h. zur Bestimmung der Länge des einfachen Pendels, welches im leeren Raume eben so schwingt, d. i. dieselbe Schwingungsdauer besitzt, wie das betreffende zusammengesetzte Pendel in der Luft oder im Wasser.

Das gewöhnliche Verfahren bei dieser Reduction beruht auf dem hydrostatischen oder *Archimed*'schen Satze, dafs jeder in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper eben so viel von seinem Gewichte verliert, als das Gewicht des von ihm verdrängten Flüssigkeitsvolumen beträgt. Sind nämlich L und l die Längen der einfachen Pendeln, welche ihre Schwingungen beziehungsweise im leeren Raume und in der Flüssigkeit in derselben Zeit oder synochron mit dem zusammengesetzten Pendel in dieser Flüssigkeit machen, ferner P und p die Gewichte des Pendels in der Flüssigkeit und der von dem Pendel verdrängten Flüssigkeit; so hat man nach diesem Verfahren $L:l = P+p:P$ und daraus:

$$L = \left(\frac{P+p}{P}\right)l \;.\;. \quad (\alpha')$$

Dubuat, welcher zuerst auf die Unzulänglichkeit dieses Verfahrens und darauf aufmerksam machte, dafs man dabei auf die das Pendel begleitende Flüssigkeitsmasse Rücksicht nehmen müsse, setzt dafür:

$$L = \left(\frac{P+np}{P}\right)l \;.\;. \quad (\beta')$$

wobei n ein Erfahrungscoeffizient, jedoch immer gröfser als die Einheit ist. Aus seinen zahlreichen Versuchen, welche er mit Kugelpendeln aus verschiedenen Massen, von verschiedenen Durchmessern und Längen (die Kugeln an feinen Fäden aufgehangen) vornahm, ergibt sich als Mittelwerth $n = 1{\cdot}585$, während aus drei andern von *Dubuat* mit solchen Pendeln gemachten Beobachtungen, die er in der Luft schwingen liefs, als Mittelwerth $n = 1{\cdot}560$ hervorgeht. Übrigens bemerkt *Dubuat*, dafs die einzelnen Werthe, welche diese Mittelwerthe von n geben, für dieselbe Kugel mit der Länge, und bei derselben Länge mit der Abnahme des Durchmessers etwas zunehmen

Bessel folgert aus seinen scharfsinnigen Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels (Berlin, 1828), dafs man

$$L = \frac{a^2 + m^2 + (n-1)\,a^2 f}{a(1-f)} \;.\;. \quad (\gamma')$$

setzen müsse, wobei (nach der frühern Bezeichnung) a der Abstand des Schwerpunctes des zusammengesetzten Pendels von der Rotationsachse, $a^2 + m^2$ das Moment der Trägheit des Pendels in Beziehung auf diese Achse dividirt durch dessen Masse, $f = \frac{\Delta}{\delta}$ das Verhältnifs der Dichtigkeit der Flüssigkeit und der absoluten Dichtigkeit des Pendels, und endlich n einen durch die Beobachtung zu bestimmenden Coeffizienten bezeichnet. Übrigens bemerkt *Bessel*, dafs man bei der Anwendung dieser Formel auf seine Versuche $(a^2 + m^2)f^2 = a^2 f^2$ setzen, diese also, wegen $\frac{a^2+m^2}{a} = l$ auf die Form der *Dubuat*'schen Formel (β') bringen könne.

Bessel fand aus den Versuchen mit zwei Kugeln, wovon die eine aus Elfenbein, die andere aus Messing bestand, und die er an einem, im Verhältnifs ihres Durchmessers sehr langen Drahte aufgehangen in der Luft schwingen liefs, $n = 1{\cdot}9454$, während er aus den Versuchen mit der Messingkugel, die er im Wasser und in der Luft schwingen liefs, $n = 1{\cdot}602$, wenn das Pendel nahezu die Länge des Secundenpendels hatte, dagegen $n = 1{\cdot}648$, wenn dasselbe ungefähr 3 Mal so lang war.

Endlich beweist *Bessel* in einer zweiten Abhandlung (vom J. 1832), dafs der Coeffizient n von der Dichtigkeit des Pendels unabhängig sey.

Aus den von dem englischen Capitän *Sabine* unter dem gewöhnlichen und unter einem sehr geringen Drucke der Atmosphäre angestellten Versuchen ergab sich, dafs die Anzahl der Schwingungen seines Pendels in 24 Stunden im leeren Raume, um 10·36 gröfser als in der gewöhnlichen Luft gewesen, während dieser Überschufs nach der gewöhnlichen, oben angegebenen Regel (Gleich. a') der Reduction nur 6·26 betragen haben würde. Dieser Versuch bezieht sich auf ein sphärisches Secundenpendel und gibt $n = \frac{10{\cdot}36}{6{\cdot}26} = 1{\cdot}655$.

Noch auffallender ergibt sich die Unzulässigkeit der gewöhnlichen Reductionsmethode aus den Versuchen von *Baily* (London, 1832), indem sie zeigen, dafs diese Correction in gewissen Fällen 27 Mal zu klein ist. Diese Versuche geben für ein Kugelpendel von denselben Dimensionen, wie das *Bessel*'sche war, $n = 1{\cdot}751$ und für das Mittel aus den Versuchen mit 3 Kugeln von verschiedenen Durchmessern $n = 1{\cdot}778$.

Mehrere Gelehrte, und darunter auch der berühmte *Poisson*, waren geneigt, den Satz, welcher aus den *Bessel*'schen Beobachtungen hervorzugehen schien, aufzustellen, dafs der Gewichtsverlust, welchen ein Pendel in einer Flüssigkeit erfährt, während der Bewegung gröfser als in der Ruhe sey. Allein *Duchemin* bemerkt mit Recht, dafs diefs nach dem neuern Stande der Wissenschaft beurtheilt, auf einer Täuschung beruht und dafs man die durch die Versuche constatirte Zunahme der Schwingungsdauer des Pendels, einer Ursache zuschreiben müsse, welche unter die zur Strömung der Flüssigkeit von dem vordern nach dem hintern Theile des Körpers erforderlichen Bedingungen gehört und sofort in der Erhaltung der Form des Fadenbündels oder der Masse der den bewegten Körper umgebenden Flüssigkeitsfäden, folglich in der gemeinschaftlichen Bewegung dieser Masse mit jener des Körpers besteht.

Aus dem 1. Absatze dieser Aufgabe folgt für die relative Masse des Pendels $M = Q\delta(1-f)$
und für die Summe der Trägheitsmomente der absoluten Masse des Pendels und der dasselbe begleitende Flüssigkeitsmasse

$$\mathfrak{M} = Q\delta(a^2+m^2)\left[1-f+cf\left(1+\frac{Q'}{Q}\right)\right]$$

wobei $f = \frac{\Delta}{\delta}$ und $c = \frac{a^2+m'^2}{a^2+m^2}$, also wenig von der Einheit verschieden, wenn a gegen m und m' bedeutend grofs sind.

Da nun die Länge L des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten dieselbe Schwingungsdauer besitzt (§. 170), aus der Formel $L = \frac{\mathfrak{M}}{aM}$ bestimmt wird, so ist, wenn man für $\mathfrak{M}$ und M die vorigen Werthe setzt:

$$L = \frac{a^2 + m^2}{a(1-f)} \left[1 - f + cf\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)\right] \; . \quad (\delta')$$

aus welcher Formel sofort folgt, dafs die das Pendel begleitende Flüssigkeitsmasse Q' die Länge des einfachen Pendels um die Gröfse

$$\frac{a^2 + m^2}{a(1-f)} f \left[c\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right) - 1\right]$$

vermehrt, weil, wenn man diese Masse Q' unberücksichtigt läfst und daher nur, nach der gewöhnlichen Reductionsmethode, den Gewichtsverlust des Pendels in der Flüssigkeit in Rechnung bringt, sofort:

$$L = \frac{a^2 + m^2}{a(1-f)} \text{ ist.}$$

Man sieht leicht, dafs wegen $l = \frac{a^2 + m^2}{a}$ und $f = \frac{p}{P + p}$, diese Formel (δ') mit jener (β') des *Dubuat* übereinstimmt, wenn man $n = c\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)$ setzt. Kann man nun, unter den erwähnten Bedingungen näherungsweise $c = 1$ setzen, so ist ebenfalls annähernd $n = 1 + \frac{Q'}{Q}$ und daher z. B. für das Kugelpendel, wegen (75. Aufgabe, Relat. r) $\frac{Q'}{Q} = {}^{\cdot}6$, sofort $n = 1{\cdot}6$.

Um jedoch den Beobachtungsresultaten noch besser zu entsprechen und weil eigentlich $1 + \frac{Q'}{Q}$ mit dem Factor c, welcher etwas gröfser als die Einheit ist, multiplicirt werden sollte, setzt *Duchemin* für das Kugelpendel:

$$n = c\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right) = 1{\cdot}0625\left(1 - \frac{s}{a}\right)^2\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)$$

wobei s die in der 74. Aufgabe (2. Auflösung) angegebene Bedeutung hat und für die Kugel (Beispiel 2. der genannten Aufg.) $= \frac{2D}{3\pi}$ ist; mit diesem Werthe und wegen $\frac{Q'}{Q} = {}^{\cdot}6$ wird also für dieses Pendel:

$$n = 1{\cdot}7\left(1 - \frac{2D}{3\pi a}\right)^2 \; . \; . \quad (\varepsilon)$$

Auf gleiche Weise setzt er für einen Cylinder, welcher seiner Länge nach aufgehangen ist:

$$n = c\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right) = 1{\cdot}075\left[1 + \frac{Q'}{Q}\left(1 - \frac{s}{f}\right)^2\right]$$

oder da für den Cylinder vom Durchmesser D und der Länge b, $\frac{Q'}{Q} = {}^{\cdot}75\left(\frac{b}{D}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $s = \frac{1}{4}b$ ist, sofort:

$$n = 1{\cdot}075\left[1 + {}^{\cdot}75\left(\frac{b}{D}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{b}{4a}\right)^2\right] \quad . \; . \quad (\mu)$$

Die Formel (ε) enthält in der That die von *Dubuat* für das Kugelpendel gefundenen Consequenzen, daſs nämlich der Werth von n desto kleiner ist, je gröſser bei derselben Länge des Pendels die Kugel, dagegen für dieselbe Kugel desto gröſser wird, je länger das Pendel ist. Diese Formel gibt z. B. für $a = 1$ Meter und für Kugeln von den Durchmessern $D = {}^{\cdot}027$, $^{\cdot}054$, $^{\cdot}081$, $^{\cdot}108$ und $^{\cdot}135$ Meter beziehungsweise $n = 1{\cdot}681$, $1{\cdot}661$, $1{\cdot}642$, $1{\cdot}623$ und $1{\cdot}604$, woraus sofort folgt, daſs die Veränderungen des Durchmessers der Kugel auf die Werthe von n für das Secundenpendel wenig Einfluſs haben.

Liegen hingegen die Werthe von $\frac{D}{a}$ zwischen sehr weiten Grenzen, so variiren diese Werthe von n ziemlich stark, wie eine Vergleichung der folgenden nach dieser Formel berechneten und von *Dubuat* beobachteten Werthe zeigt.

Für den Durchmesser der Kugeln = 6·67 Zoll und den Pendellängen von 9·178, 14·894, 55·5, 125·42 und 219·46 Zoll, sind die Werthe von n beziehungsweise nach den Beobachtungen 1·27, 1·394, 1·654, 1·664 und 1·674, dagegen nach der vorigen Formel 1·216, 1·392, 1·614, 1·662 und 1·678.

Für den Durchmesser von 6·625 Zoll und der Länge von 96·08 Zoll ist nach der Beobachtung und Berechnung beziehungsweise $n = 1{\cdot}63$ und 1·651. Dabei wurden die 5 ersten Versuche im Wasser, der 6te in der Luft angestellt.

Was endlich die Formel (μ) für das Cylinderpendel betrifft, so zeigen die folgenden Zahlen die genaue Übereinstimmung der nach dieser Formel berechneten mit den von *Baily* mit solchen Pendeln, die er in der Luft schwingen lieſs, beobachteten Werthe.

Länge b der Cylinder	Durchmesser D der Cylinder	Werthe von a	Werthe von n	
			beobachtet	berechnet
Zoll	Zoll	Zoll		
2·06	2·06	39	1·860	1·860
4·00	2·06	39	2·032	2·141
56·40	1·50	28·20	2·318	2·311

Dabei war der Cylinder des erstern Pendels aus Messing und an einem Metalldrahte von $\frac{1}{70}$ Zoll Durchmesser aufgehangen. Der Cylinder des zweiten Pendels bestand aus einem messingenen hohlen Cylinder, welcher mit Blei ausgegossen und an einem Messingdrahte von ·185 Zoll Durchmesser aufgehangen war; das Gewicht derselben betrug 2050 Gran. Das dritte Pendel endlich bestand einzig aus einer Messingröhre, an deren obern Theile unmittelbar die Rotationsachse angebracht war. Es ist also merkwürdig, dafs dieselbe Formel (μ) eben so gut für das erste Pendel, wobei ein nur 2 Zoll langer, an einem Faden aufgehangener Cylinder, als für das letztere Pendel pafst, welches aus einem 56 Zoll langen hohlen Cylinder bestand. Der für das zweite Pendel nach dieser Formel berechnete Werth von n weicht aus dem Grunde von dem beobachteten etwas ab, weil dabei die Pendelstange schon zu stark war, als dafs man ihre Masse und jene der sie umgebenden Flüssigkeitsfäden unberücksichtigt lassen könnte.

Weitere wichtige und interessante Bemerkungen über diesen Gegenstand findet man in der citirten Schrift von *Duchemin* (*Recherches experimentales sur les lois de la résistance des fluides*) im Kapitel XI

Zusatz 1.

Ableitung der *Simpson*'schen Näherungsformel.

Um die in diesem Werke mehrere Male angewendete sogenannte *Simpson*'sche Regel auf eine einfache Weise abzuleiten, kann man folgenden geometrischen Weg einschlagen.

Bekanntlich beruht die Quadratur der ebenen Curven, d. h. die Bestimmung der krummlinigen ebenen Flächen auf der Entwicklung des bestimmten Integrales $\int_{x'}^{x''} y \, dx$, wobei y die der allgemeinen Abscisse x entsprechende Ordinate der betreffenden Curve, und x', x'' die den beiden äufsern Ordinaten, welche die zu bestimmende Fläche mit begrenzen, zugehörigen Werthe von x sind. Läfst sich nun y nicht als eine Function von x ausdrücken, oder ist die Curve nnr eine empirische, für welche die, gewissen Abscissen entsprechenden Ordinaten nur aus Beobachtungen gefunden wurden, oder ist endlich der Ausdruck $y\,dx$ überhaupt nicht integrabel; so mufs man zu Näherungsmethoden Zuflucht nehmen, nämlich die zu bestimmende Fläche durch nahe an einander liegende Ordinaten in schmale Trapeze, wovon eine Seite ein Theil der Curve ist, zerlegen und diese einzelnen Trapeze mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu berechnen suchen, indem dann ihre Summe sofort auch der näherungsweise Werth des obigen Integrales ist.

Man verfährt dabei am einfachsten, wenn man in allen diesen Fällen die betreffende Curve als eine g e m e i n e o d e r A p p o l l o n i s c h e