D) Aus der Hydrodynamik.

66. Aufgabe.

In einem mit einer kleinen Bodenöffnung versehenen prismatischen Gefäſse AD (Fig. 72) befinden sich mehrere Flüssigkeiten, welche sich nicht mit einander vermischen, übereinander; es soll die Ausfluſszeit für alle diese Flüssigkeiten bestimmt werden.

Auflösung.

Es seyen von unten auf gezählt s, s', s''.. die specifischen Gewichte der einzelnen Flüssigkeitsschichten CE', EF', FG'.., A der constante Querschnitt des Gefäſses und a die Gröſse der Bodenöffnung; so ist während die unterste Schichte vom specifischen Gewichte s und der Höhe CE ausflieſst, der Druck gegen die Öffnung eben so groſs, als wenn anstatt der über der Schichte CE' stehenden Flüssigkeiten von den specifischen Gewichten s', s''.. und den Höhen EF, FG.. eine einzige Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s und der Höhe

$h = \frac{s'}{s} EF + \frac{s''}{s} FG + \frac{s'''}{s} GH + ..$ stände. Es handelt sich also zuerst bloſs darum, die Ausfluſszeit für die untere Schichte CE', d. i. die Zeit zu bestimmen, binnen welcher der Spiegel einer gleichartigen Flüssigkeit, welcher ursprünglich um die Höhe $H = CE + h$ über der Öffnung steht, um die Höhe h herabsinkt; diese Zeit ist aber (§. 335 und Nr. **163**):

$$t = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch die Ausfluſszeit für die nächste Schichte EF', wenn man für die darüber stehenden Flüssigkeiten wieder eine einzige homogene Flüssigkeit von dem specifischen Gewichte s' und der Höhe $h' = \frac{s''}{s'} FG + \frac{s'''}{s'} GH + ..$ annimmt und die Zeit bestimmt, in welcher der imaginäre Flüssigkeitsspiegel von der Höhe $H' = EF + h'$ auf jene h' herabsinkt; diese Zeit ist aber

$$t' = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}(\sqrt{H'} - \sqrt{h'}).$$

Fährt man auf diese Art fort die einzelnen Zeiten bis zur letzten oder obersten Schichte HB zu bestimmen, so erhält man zuletzt für die gesuchte Ausflufszeit aller Flüssigkeitsschichten:

$$T = t + t' + t'' + ..$$

67. Aufgabe.

Ein senkrechtes prismatisches, mit Wasser gefülltes Gefäfs besitzt sowohl im Boden, als auch in einer Seitenwand, und zwar in der halben Höhe, eine kleine Öffnung; es soll, wenn beide diese Öffnungen zu gleicher Zeit aufgemacht werden, die Ausleerungszeit für die obere Hälfte des Gefäfses gefunden werden.

Auflösung.

Es sey A der Querschnitt und $2h$ die Höhe des Gefäfses, ferner a die Gröfse oder Fläche jeder der beiden Öffnungen und x die Höhe des Wasserspiegels über der Mitte der obern Öffnung am Ende der Zeit t; so würde, wenn x constant bliebe, während einer Secunde aus der obern Öffnung die theoretische Wassermenge (§ 327) $a\sqrt{(2gx)}$ und aus der untern jene $a\sqrt{[2g(h+x)]}$ ausfliefsen Sucht man daher die Ausflufsmenge für die Zeit dt, binnen welcher x als constant angesehen werden kann, so ist diese

$$dM = a\,dt\sqrt{2gx} + a\,dt\sqrt{[2g(h+x)]}$$

und da auch $dM = A\,dx$ ist, so folgt, wenn man gleich dx und dt mit verschiedenen Zeichen einführt (weil x abnimmt während t zunimmt)

$$dt \,.\, a\sqrt{2g}\,[\sqrt{x} + \sqrt{(h+x)}] = -A\,dx \text{ und daraus}$$

$$dt = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{(h+x)}}.$$

Wird diese Gleichung von $x = 0$ bis $x = h$ integrirt, so erhält man für die gesuchte Ansleerungszeit der obern Hälfte des Gefäfses (bei Umkehrung der Grenzen):

$$t = \frac{A}{a\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{(h+x)}} = \frac{A}{a\sqrt{2g}}\int_0^h dx\left[\frac{\sqrt{(h+x)} - \sqrt{x}}{h}\right]$$

oder da das allgemeine Integral

$$\int dx\,[\sqrt{(h+x)} - \sqrt{x}] = \tfrac{2}{3}\,(h+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$$

ist, nach gehöriger Reduction:

$$t = \tfrac{4}{3}\,(\sqrt{2} - 1)\,\frac{A\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} \quad \text{oder nahe} = \cdot 552\,\frac{A}{\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

Zusatz Wäre blofs die untere Öffnung geöffnet worden, so würde sich diese obere Hälfte des Gefäfses erst während der Zeit

$$T = 2\,(\sqrt{2} - 1)\,\frac{A\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}}$$

entleert haben, es ist daher $t : T = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$.

68. Aufgabe.

Ein aus zwei prismatischen oder cylinderischen Theilen zusammengesetztes Gefäfs $ADEH$ (Fig. 73) besitzt bei O eine kleine Bodenöffnung; wenn nun das Gefäfs mit einer Flüssigkeit bis AB gefüllt wird, so soll die Zeit bestimmt werden, innerhalb welcher während des Ausfliefsens aus dieser Öffnung der Flüssigkeitsspiegel erstens in dem weitern Theile AD bis JK, und zweitens in dem engern Theile EH bis LM herabsinkt.

Auflösung.

So lange der Flüssigkeitsspiegel AB nicht unter CD herabsinkt, fliefst die Flüssigkeit genau so aus, als ob sich die Öffnung im Boden NR des Gefäfses $ANRB$ befände; erst wenn der Spiegel unter die Linie EF herabgesunken, kommt die Weite des kleinern oder engern Gefäfses in Betracht.

Setzt man daher den Querschnitt des obern, weitern Gefäfses $= A$, jenen des untern, engern $= A'$ und die Fläche der Ausflufsöffnung $= a$; so ist die Zeit, die der Flüssigkeitsspiegel bedarf, um von AB bis JK und CD zu sinken, beziehungsweise:

$$t' = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}\,(\sqrt{AN} - \sqrt{JN}) \quad \text{und} \quad t' = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}\,(\sqrt{AN} - \sqrt{CN})$$

so wie die Zeit, während welcher der Spiegel von CD oder EF bis LM herabgeht:

$$t'' = \frac{2A'}{a\sqrt{2g}}\,(\sqrt{GE} - \sqrt{GL}).$$

Es ist daher die Zeit, binnen welcher der Flüssigkeitsspiegel von AB bis LM herabsinkt $T = t' + t''$, d. i.

$$T = \frac{2}{a\sqrt{2g}}\,[A(\sqrt{AN} - \sqrt{CN}) + A'(\sqrt{EG} - \sqrt{LG})].$$

Für die ganze Entleerungszeit ist blofs $LG = 0$ zu setzen.

Zusatz. Bei der umgekehrten Lage des Gefäſses und der Ausfluſsöffnung im Boden AB, wäre eben so die Zeit, innerhalb welcher die Flüssigkeit von GH bis JK herabsinkt:

$$T' = \frac{2}{a\sqrt{2g}}[A(\sqrt{AC} - \sqrt{AJ}) + A'(\sqrt{AN} - \sqrt{AC})].$$

Die Entleerungszeit erhält man, wenn man in diesem Ausdrucke $AJ = 0$ setzt.

Ist z. B. $AC = CN = h$, so verhalten sich die Entleerungszeiten in diesen beiden Fällen $T : T' = A(\sqrt{2} - 1) + A' : A'(\sqrt{2} - 1) + A$, so, daſs wenn z. B. noch $A' = \frac{1}{2}A$ wäre, sofort $T : T' = 1{\cdot}828 : 2{\cdot}414$ Statt fände.

69. Aufgabe.

In der verticalen Wand eines mit Wasser beständig voll erhaltenen Gefäſses befindet sich eine rechteckige Oeffnung mit zwei horizontalen Seiten; es soll erstens die Ausfluſsmenge, zweitens der Ort der mittlern Ausfluſsgeschwindigkeit, und drittens für den Fall als die obere Kante der Oeffnung im Wasserspiegel liegt und die Summe der Seiten des Rechteckes eine constante Gröſse ist, jenes Verhältniſs der Seiten dieses Rechteckes bestimmt werden, für welches die Ausfluſsmenge ein Maximum wird.

Auflösung.

Es sey DE (Fig. 74) die verticale ebene Gefäſswand und zuerst allgemein die Oeffnung von der Horizontalen aa' und den beiden gegen die verticale Achse AD symmetrischen Curvenästen AMa und $AM'a'$ begrenzt; ferner sey $CD = h$, $CA = h'$ und für den unendlich schmalen horizontalen Streifen $M'm$ die Abscisse $AP = x$ und die Ordinate $PM = PM' = y$.

I. Dieſs vorausgesetzt ist die während der Zeit t aus dieser unendlich schmalen Oeffnung $M'm = 2y\,dx$ ausflieſsende Wassermenge

$$dM = 2ty\,dx\sqrt{[2g(h' + x)]},$$ folglich, wenn man integrirt:

$$M = 2t\sqrt{2g}\int_0^{h-h'} y\,dx\sqrt{(h' + x)} \quad . \ . \quad (1)$$

wobei für y der jedesmalige Werth $y = f(x)$ aus der Gleichung der betreffenden Curve AMa oder $AM'a'$ zu setzen ist.

II. Ist ferner H die mittlere Höhe, d. h. der Abstand jenes unendlich schmalen horizontalen Streifens der Oeffnung vom Wasserspiegel, in welchem das ausfliefsende Wasser die mittlere, d. i. jene Geschwindigkeit besitzt, welche nach der ganzen Höhe der Oeffnung in den sämmtlichen horizontalen Streifen Statt finden müfste, damit in derselben Zeit t wieder die nämliche Wassermenge M der Formel (1) ausfliessen würde; so folgt, da die Gröfse der ganzen Seitenöffnung $aMAM'a' = \int_0^{h-h'} 2y\,dx$ ist, die Bedingungsgleichung:

$$2t\sqrt{(2gH)}\int_0^{h-h'} y\,dx = 2t\sqrt{2g}\int_0^{h-h'} y\,dx\sqrt{(h'+x)} \text{ und daraus:}$$

$$\sqrt{H} = \frac{\int_0^{h-h'} y\,dx\sqrt{(h'+x)}}{\int_0^{h-h'} y\,dx} \quad .\ .\ (2)$$

Ist also die Oeffnung ein Rechteck von der Höhe $h - h' = a$ und der Breite $2y = b$, so folgt aus der Formel (1), wegen $\int dx\sqrt{(h'+x)} = \frac{2}{3}(h'+x)^{\frac{3}{2}}$ für die in der Zeit t ausfliefsende Wassermenge:

$$M = \tfrac{2}{3}bt\sqrt{2g}\left[(a+h')^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}\right] = \tfrac{2}{3}bt\sqrt{2g}\,(h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}) \text{ (§. 332)}$$

und aus der Formel (2) für die mittlere Höhe:

$$H = \frac{4}{9}\frac{(h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}})^2}{(h-h')^2}$$

Zusatz. Liegt die obere Kante des Rechteckes im Wasserspiegel, so ist $h' = 0$ und daher $M = \frac{2}{3}bht\sqrt{2gh}$ und $H = \frac{4}{9}h = \frac{4}{9}a$. (§. 331.)

III. Ist in diesem letztern Falle $b + h = a$ eine constante Gröfse und soll das Verhältnifs $\frac{b}{h}$ so bestimmt werden, dafs die Wassermenge $M = \frac{2}{3}bht\sqrt{2gh}$ am gröfsten wird; so hat man, da auch $z = bh^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}}(a-h) = ah^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{5}{2}}$ in diesem Falle ein Maximum seyn mufs, nach der Regel:

$$\frac{dz}{dh} = \frac{3}{2}ah^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}h^{\frac{3}{2}} = 0$$

und daraus, da die Wurzel $h^{\frac{1}{2}} = 0$ hier unbrauchbar ist, $3a - 5h = 0$ oder $h = \frac{3}{5}a$, und damit $b = a - h = \frac{2}{5}a$, so, dass $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$ wird. Da mit diesen Werthen von h und b der zweite Differenzialquotient negativ ausfällt, so entspricht dieses Verhältnifs von b zu h in der That einem Maximum von M und zwar ist

$$M_{\max} = \tfrac{4}{9} h^2 t \sqrt{2gh}.$$

70. Aufgabe.

Die theoretische Ausflufszeit aus horizontalen Bodenöffnungen für verschiedene durch Umdrehung um ihre verticale Achse entstandenen Gefäfse zu bestimmen, wenn dieselben mit Wasser gefüllt sind und kein weiterer Zufluss mehr Statt findet.

Auflösung.

Ist h die Höhe des Gefäfses und a^2 die horizontale Ausflufsöffnung, so ist (Nr. **164**) die gänzliche Ausflufszeit

$$T = \frac{\pi}{a^2 \sqrt{2g}} \int_0^h y^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad . \; . \; (\alpha)$$

I. Bildet das Gefäfs einen geometrischen Cylinder (oder ein Prisma) von der Grundfläche A^2, so ist $\pi y^2 = A^2$ und daher die theoretische Ausflufszeit:

$$T = \frac{2A^2}{a^2 \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad . \; . \; (1)$$

II. Bildet das Gefäfs einen abgekürzten Kegel (oder eine Pyramide) von den horizontalen Grundflächen A^2 und a^2, wobei A^2 der ursprüngliche Wasserspiegel ist, so wird, wenn R und r die Halbmesser dieser beiden Grundflächen bezeichnen, $y^2 = \left[r + \frac{(R-r)}{h} x \right]^2$ und daher nach allen Reductionen (und wenn a^2 nur klein gegen A^2 ist):

$$T = \frac{2}{15 a^2 \sqrt{2g}} (3A^2 + 4Aa + 8a^2) \sqrt{h} \quad (2)$$

Ist a^2 äufserst klein gegen A^2, so hat man sehr nahe

$$T = \frac{2A^2}{5a^2 \sqrt{2g}} \sqrt{h} \quad . \; . \; (2')$$

III. Bildet das Gefäfs denselben Kegel aber in der umgekehrten Lage, so wird $y^2 = \left(R - \frac{R-r}{h} x \right)^2$ und daher

$$T = \frac{2}{15 a^2 \sqrt{2g}} (8A^2 + 4Aa + 3a^2) \sqrt{h} \quad (3)$$

Ist wieder die Grundfläche a^2 gegen jene A^2 sehr klein, so kann man auch nahe $T = \frac{16\sqrt{h}}{15\,a^2\sqrt{2g}}$ .. (3′) setzen.

IV. Bildet das Gefäſs ein Paraboloid von den horizontalen Grundflächen A^2 und a^2 und ist A^2 der ursprüngliche Wasserspiegel, so ist, wenn wieder h die Höhe des Gefäſses, R der Halbmesser der gröſsern und r jener der kleinern Grundfläche ist,

$$y^2 = r^2 + px \text{ oder wegen } p = \frac{R^2 - r^2}{h} \text{ auch } y^2 = r^2 + \frac{R^2 - r^2}{h}x$$

und damit aus der Formel (α) nach einer einfachen Reduction:

$$T = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^2\sqrt{2g}}(A^2 + 2\,a^2)\sqrt{h} \ldots (4)$$

oder wenn $\frac{a}{A}$ sehr klein ist, nahe $T = \frac{2\,A^2\sqrt{h}}{3\,a^2\sqrt{2g}}$ . . . (4′)

V. Bildet das Gefäſs dasselbe Paraboloid, jedoch in der umgekehrten Lage, so wird $y^2 = R^2 - \frac{R^2 - r^2}{h}x$ und

$$T = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^2\sqrt{2g}}(2\,A^2 + a^2)\sqrt{h} \ldots (5)$$

und wenn $\frac{a}{A}$ ein sehr kleiner Bruch ist, $T = \frac{4\,A^2\sqrt{h}}{3a^2\sqrt{2g}}$ . . . (5′)

Bildet das Gefäſs eine Kugelzone von den horizontalen Grundflächen A^2 und a^2, wobei A^2 die gröſste Kreisfläche und der ursprüngliche Wasserspiegel ist; so hat man, wenn wieder h die Höhe des Gefäſses ist und R, r die Halbmesser der Kreisflächen A^2 und a^2 bezeichnen, $y^2 = R^2 - (h - x)^2$ und $h^2 = R^2 - r^2$, folglich

$$T = \frac{\pi}{a^2\sqrt{2g}}\left[2\,r^2 + \frac{14}{15}h^2\right]\sqrt{h} = \frac{2\,\pi}{15\,a^2\sqrt{2g}}[7\,R^2 + 8\,r^2]\sqrt{h} \text{ d. i.}$$

$$T = \frac{2}{15\,a^2\sqrt{2g}}(7A^2 + 8\,a^2)\sqrt{h} \ldots (6)$$

Für sehr kleine Werthe von $\frac{a}{A}$ kann man auch nahe

$$T = \frac{14\,A^2\sqrt{h}}{15\,a^2\sqrt{2g}} \ldots (6') \text{ setzen.}$$

VII. Für dieselbe Zone in umgekehrter Lage ist $y^2 = R^2 - x^2$ und

$$T = \frac{2}{5\,a^2\sqrt{2g}}(4\,A^2 + a^2)\sqrt{h} \ldots (7)$$

oder wenn $\frac{a}{A}$ sehr klein ist, $T = \frac{8\,A^2\sqrt{h}}{5\,a^2\sqrt{2g}}$ .. (7′)

VIII. Bildet das Gefäſs eine volle Kugel vom Halbmesser r, so ist wegen $y^2 = 2rx - x^2$ die Ausfluſszeit für die obere Halbkugel:

$$t = \frac{\pi}{a^2\sqrt{2g}} \int_r^{2r} (2r x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx = \frac{2\pi r^{\frac{5}{2}}}{15 a^2 \sqrt{2g}} (8\sqrt{2} - 7) \;.\;.\; (8)$$

und für die untere Halbkugel:

$$t' = \frac{\pi}{a^2\sqrt{2g}} \int_0^r (2r x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx = \frac{14\pi r^{\frac{5}{2}}}{15 a^2\sqrt{2g}} = \frac{14 A^2\sqrt{h}}{15 a^2\sqrt{2g}} \;.\;.\; (9)$$

daher für die ganze Kugel: $T = t + t' = \dfrac{16\pi\sqrt{2}\,.\,r^{\frac{5}{2}}}{15 a^2\sqrt{2g}} \;.\;.\; (10)$

(Nr. **166**)

IX. Befindet sich endlich die Oeffnung a^2 nicht im Scheitel, sondern in der Basis $A^2 = r^2\pi$ einer vollen Halbkugel, so ist $y^2 = r^2 - x^2$ und

$$T = \frac{\pi}{a^2\sqrt{2g}} \int_0^r dx\,(r^2 x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) = \tfrac{8}{5} \frac{\pi r^{\frac{5}{2}}}{a^2\sqrt{2g}} \;.\;.\; (11)$$

oder auch, wegen $h = r$

$$T = \tfrac{8}{5} \frac{A^2\sqrt{h}}{a^2\sqrt{2g}} \;.\;.\; (12)$$

Zusatz. Ist der Bruch $\frac{a}{A}$ sehr klein und haben A, a, h in den Formeln (1), (2′), (3′) , . (7′) dieselben Werthe, so verhalten sich die durch diese 7 Formeln ausgedrückten Entleerungs- oder Ausfluſszeiten beziehungsweise wie die Zahlen 15 : 3 : 8 : 5 : 10 : 7 : 12.

Die Ausleerungszeit für die obere Halbkugel durch den Scheitel der untern verhält sich zur Ausfluſszeit der untern Halbkugel durch dieselbe Oeffnung:

(8) : (9) oder $t : t' = (8\sqrt{2} - 7) : 7$ oder nahe wie 4·312 : 7;
dagegen, wenn sich die Oeffnung in der Basis dieser obern Halbkugel befände

(8) : (12) $= (8\sqrt{2} - 7) : 12$ oder nahe wie 4·312 : 12.

Ferner verhalten sich die Ausleerungszeiten einer Halbkugel, einmal durch den Scheitel und dann durch die Basis:

(9) : (11) = 7 : 12

u. s. w.

71. Aufgabe.

In der verticalen Seitenwand eines mit Wasser beständig voll erhaltenen Gefäſses befinden sich zwei ganz gleiche, jede von einer Parabel, deren Achse vertical ist, und der gröſsten Doppelordinate begrenzte Oeffnung, und zwar liegt bei der einen der Scheitel und bei der andern Oeffnung die Basis oder Doppelordinate im Wasserspiegel; es soll das Verhältniſs zwischen den Ausfluſsmengen aus diesen beiden Seitenöffnungen bestimmt werden.

Auflösung.

I. Nimmt man in der Tiefe x unterm Wasserspiegel einen unendlich schmalen horizontalen Streifen von der Höhe dx, so ist für die erste Oeffnung die Breite dieses Streifens $2y = 2\sqrt{px}$, also die per Secunde aus dieser schmalen Oeffnung $2y\,dx$ ausflieſsende Wassermenge $dM = 2\,y\,dx\sqrt{2gx}$, so daſs also die in einer Secunde aus der ganzen Oeffnung von der Höhe h ausflieſsende Wassermenge

$$M = 2\sqrt{2pg}\int_0^h x\,dx = h^2\sqrt{2pg} \text{ ist.}$$

II. Für die zweite Oeffnung ist dagegen $dM' = 2y\,dx\sqrt{[2g(h-x)]}$, folglich

$$M' = 2\sqrt{2pg}\int^h dx\sqrt{(hx - x^2)}.$$

Nun ist (Comp. §. 809)

$$\int dx\sqrt{(hx - x^2)} = -\tfrac{1}{4}(h - 2x)\sqrt{(hx - x^2)} + \tfrac{1}{8}h^2 \, arc\,Sin\left(\frac{2x-h}{h}\right)$$

und da der algebraische Theil für beide Grenzen verschwindet, sofort

$$\int^h dx\sqrt{(hx - x^2)} = \frac{h^2}{8}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{h^2}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{h^2}{8}\pi, \text{ folglich}$$

$$M' = \frac{h^2}{4}\pi\sqrt{2pg}.$$

das gesuchte Verhältniſs ist daher $M : M' = 1 : \frac{\pi}{4} = 4 : \pi$.

Anmerkung. Befinden sich die Seitenöffnungen anstatt in einer verticalen, in einer schiefen Wand, welche mit dem Horizont den Neigungswinkel α bildet, so muſs man überall statt der verticalen Höhe der Öffnung h, jene $\frac{h}{Sin\,\alpha}$ setzen.

72. Aufgabe.

Die Ausfluſszeit für die Seitenöffnung *ABD* (Fig. 75) eines geraden geometrischen Kegels zu finden, dessen Achse vertical und Spitze nach abwärts gekehrt ist.

Auflösung.

Es sey die Höhe des Kegels $AC = h$, die Seite oder Kante $AE = AB = l$, der Halbmesser der Basis $EC = CF = r$, der Neigungswinkel $CAF = CAB = \alpha$, die obere Breite der Oeffnung $BD = b$, die Abscisse $AP = x$, $Pp = \mathrm{d}x$ und PM perpendikulär auf AC; so ist $AM = x\, Sec\, \alpha$ und $Mm = \mathrm{d}x\, Sec\, \alpha$, ferner $AB : BD = AM : MM'$ oder $l : b = x\, Sec\, \alpha : MM'$, woraus $MM' = \frac{b\, Sec\, \alpha}{l}\, x$ folgt; endlich ist die unendlich kleine Ausflufsöffnung $Mm' = MM' \,.\, Mm = \frac{b\, Sec^2\, \alpha}{l}\, x\, \mathrm{d}x$ die wir Kürze halber wieder durch a bezeichnen wollen.

Ist der Wasser- oder überhaupt Flüssigkeitsspiegel von C bereits bis P' gesunken und setzt man diese variable Höhe $AP' = z$, so fliefst, wenn der Spiegel auf dieser Höhe erhalten wird, während einer Secunde aus der unendlich kleinen Oeffnung $Mm' = a$ die Wassermenge (wenn man nämlich für die betreffende Flüssigkeit Wasser nimmt):

$$\mathrm{d}M = a\sqrt{[2g(z-x)]} = -\frac{b\, Sec^2\, \alpha}{l}\sqrt{2g}\,.\, x\, \mathrm{d}x\sqrt{(z-x)}\ ^{*})$$

folglich aus der bis ab, d. i. zum Wasserspiegel reichenden Seitenöffnung Aab die Wassermenge, wenn man Kürze halber den constanten Factor

$$\frac{b\, Sec^2\alpha}{l}\sqrt{2g} = A \text{ setzt:}$$

$$M = -A\int_z^0 x\, \mathrm{d}x\sqrt{(z-x)} = A\int_0^z x\, \mathrm{d}x\sqrt{(z-x)} = \tfrac{4}{15} A z^{\frac{5}{2}}$$

aus, weil (wie leicht zu finden) das allgemeine Integral

$$\int x\, \mathrm{d}x\sqrt{(z-x)} = \tfrac{2}{3}(z-x)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{5} z(z-x)^{\frac{3}{2}} \text{ ist.}$$

Da nun aber z nur während der unendlich kleinen Zeit $\mathrm{d}t$ constant bleibt, so ist die während dieser Zeit aus der genannten Seitenöffnung Aab ausfliefsende theoretische Wassermenge

$$\mathrm{d}M = \tfrac{4}{15} A z^{\frac{5}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Da ferner während dieser Zeit der Wasserspiegel von der Höhe z auf jene $z - \mathrm{d}z$ herabsinkt und diese unendlich dünne Wasserschichte das Volumen $\mathrm{d}M' = Z\, \mathrm{d}z$ besitzt, wenn Z den durch P' geführten horizontalen Querschnitt des Kegels bezeichnet, also (aus $r^2\pi : Z = h^2 : z^2$)

---

*) $\mathrm{d}M$ und $\mathrm{d}x$ erhalten entgegengesetzte Zeichen, weil M zunimmt, wenn x abnimmt.

$Z = \frac{r^2\pi}{h^2} z^2$ folglich auch $dM' = \frac{r^2\pi}{h^2} z^2 dz$ ist; so hat man, da $dM = dM'$ seyn mufs, sofort (wenn man wieder berücksichtigt, dafs dt und dz entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen):

$$\tfrac{4}{15} A z^{\frac{5}{2}} dt = -\frac{r^2\pi}{h^2} z^2 dz \text{ oder } dt = -\tfrac{15}{4} \frac{r^2\pi}{Ah^2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

und daraus folgt für die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht (wenn man gleich die Grenzen umkehrt):

$$t = \tfrac{15}{4} \frac{r^2\pi}{Ah^2} \int_{h'}^{h} z^{-\frac{1}{2}} dz = \tfrac{15}{4} \frac{r^2\pi}{Ah^2} 2(\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

oder wenn man für A den Werth wieder herstellt:

$$t = \tfrac{15}{2} \cdot \frac{\pi r^2 l}{b h^2 \sqrt{2g} \,.\, Sec^2 \alpha} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

Setzt man für $\frac{r}{h}$ den Werth $tang\,\alpha$ und für $\frac{tang^2\alpha}{Sec^2\alpha}$ den gleichgeltenden Werth $Sin^2\alpha$, so erhält der vorige Ausdruck für t auch die Form

$$t = \frac{15\pi l \, Sin^2\alpha}{2b\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'}).$$

Endlich hat man für die ganze Entleerungszeit T, wegen $h' = 0$:

$$T = \frac{15\pi l \, Sin^2\alpha}{2b\sqrt{2g}} \sqrt{h} = \frac{15\pi r \, Sin\,\alpha}{2b\sqrt{2g}} \sqrt{h}.$$

73. Aufgabe.

Den Widerstand zu bestimmen, welchen eine Kugel bei der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. im Wasser oder in der Luft erleidet.

1. Auflösung

a) nach der gewöhnlichen Theorie.

Es sey DA' (Fig. 49) die Richtung, nach welcher sich der Mittelpunct C der Kugel vom Halbmesser r mit der Geschwindigkeit v bewegt, und $A'BEB'$ ein durch diese Richtung EA' gelegter gröfster Kreis, ferner seyen für einen beliebigen, im Umfange dieses gröfsten Kreises genommenen Punct M, $CP = x$ und $PM = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten, so wie W. $MCA' = \alpha$ und endlich für den, diesem unendlich nahe liegenden Punct m, $Mm = ds$, $Pp = dx$ und $mn = dy$; so ist auch $x = r\,Cos\,\alpha$ und $y = r\,Sin\,\alpha$.

Der bei der angenommenen Bewegung auf die Flächeneinheit Statt findende normale Widerstand ist (§. 359):

$$p = k\gamma \frac{v^2}{2g} \; . \; . \quad (a)$$

wobei γ das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit, z. B. des Wassers oder der Luft, und k den aus der auf S. 326 (des Comp.) aufgestellten Tabelle zu nehmenden Erfahrungscoeffizienten bezeichnet.

Diese auf den Punct M parallel mit $A'E$ wirkende Kraft p zerlegt sich in eine nach der Richtung der Normale MC und in eine darauf senkrechte, nach der Richtung des Elementes Mm, wovon die erstere $p' = p \, Cos \, \alpha$, und die letztere für unsere Untersuchung nicht weiter zu beachten ist.

Zerlegt man ferner auch noch diese nach MC wirkende Kraft p' in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte nach den Richtungen CE und CB', so ist die erstere $p'' = p' \, Cos \, \alpha = p \, Cos^2 \alpha$ und die letztere $= p' \, Sin \, \alpha$, welche jedoch, wenn man auf den mit M im untern Quadranten $A'B'$ symmetrisch liegenden Punct übergeht, von einer eben so grofsen nach CB wirkenden Kraft aufgehoben wird, also hier ebenfalls nicht weiter in Betracht kommt.

Da die Projection der zwischen den beiden durch MP und mp gehenden Parallelkreisen liegenden Kugelzone auf die durch BB' senkrecht auf die Richtung der Bewegung EA' gelegten gröfsten Kreisebene $dF = 2\pi y \, dy$ ist, so hat diese eben genannte unendlich schmale Kugelzone bei der angenommenen Bewegung einen Widerstand zu überwinden, welcher durch die Formel $dR = p'' \, dF = p \, Cos^2 \alpha \, . \, dF$, oder wenn man für p den obigen Werth aus (a) und für dF den vorigen Werth setzt, durch

$$dR = 2\pi k \frac{\gamma v^2}{2g} Cos^2 \alpha \, . \, y \, dy$$

ausgedrückt werden kann.

Da nun $Cos \, \alpha = \frac{x}{r}$ und für den vorliegenden Fall $x^2 + y^2 = r^2$, also $Cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^2}$ ist, so hat man, wenn dieser Werth für $Cos^2 \alpha$ substituirt und dann innerhalb der Grenzen von $y = 0$ bis $y = r$ integrirt wird, für den Widerstand, welchen die vordere Hälfte, also auch die ganze Kugel bei der angenommenen Bewegung erleidet, den Ausdruck:

$$R = 2\pi k\gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r y\,dy(r^2 - y^2) = 2\pi k\gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^4}{4}$$

d. i. wenn man zugleich die gröfste Kreisfläche $\pi r^2 = F$ setzt:

$$R = \tfrac{1}{2} k\gamma F \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$

Zusatz. Da für einen gleichseitigen Cylinder von derselben Grundfläche F, welcher sich mit der Geschwindigkeit v nach der Richtung seiner Achse bewegt (§. 359, Relat. r)

$$R = k\gamma F \frac{v^2}{2g}$$

ist, wobei k den nämlichen Werth wie in der vorigen Formel (1) besitzt, so folgt, dafs die Kugel bei ihrer Bewegung nur halb so viel Widerstand als ein herum beschriebener Cylinder zu erleiden hat, welcher sich mit derselben Geschwindigkeit und in dem nämlichen Mittel, nach der Richtung seiner Achse bewegt.

Aus der oben angezogenen Tabelle (§. 359) folgt für den Widerstandscoeffizienten, wegen $\frac{l}{d} = 1$ aus der letzten Rubrik $k = 1{\cdot}2824$; dabei ist, je nachdem die Bewegung im Wasser oder in der Luft Statt findet, beziehungsweise $\gamma = 56{\cdot}4$ und (§. 466, da man den sehr kleinen Bruch $\frac{v}{1317}$ gegen die Einheit auslassen kann) $\gamma = q = \frac{{\cdot}000525\,b}{1 + {\cdot}004\,t} \times 56{\cdot}4$ zu setzen, wobei b den Barometer- und t den Thermometerstand bezeichnet. Nimmt man als mittleren Werth (von $b = {\cdot}76^m$ und $t = 18^0\,C.$) $q = \frac{56{\cdot}4}{850}$, so wird der Zahlenwerth für Wasser:

$$\frac{k\gamma}{2g} = \frac{1{\cdot}2824 \times 56{\cdot}4}{62} = 1{\cdot}1666$$

und jener für die Luft:

$$\frac{kq}{2g} = \frac{1{\cdot}2824 \times 56{\cdot}4}{62 \times 850} = {\cdot}0013725.$$

Der Widerstand einer Kugel von der gröfsten Kreisfläche F, welche sich geradlinig mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist also endlich nach dieser Theorie, wenn die Bewegung im Wasser geschieht:

$$R = {\cdot}5833\,F v^2 \text{ Pfund}$$

und wenn sie in der Luft Statt findet:

$$R = {\cdot}0006862\,F v^2 \text{ Pfund}$$

wobei der W. Fufs und das W. Pfund als Einheiten zum Grunde liegen.

Anmerkung. Wie aus §. 466 erhellet, gilt diese letztere Formel nur für Geschwindigkeiten von $v < 1317$ Fufs, indem nur dafür in dem vorigen

Ausdrucke von $R = \frac{1}{2} . k q' F \frac{v^2}{2g}$, das Gewicht von 1 Kubikfufs Luft $q' = q\left(1 + \frac{v}{1317}\right)$ oder, wenn man $\frac{v}{1317}$ gegen 1 auslassen kann, $q' = q = \frac{\cdot 000525\, b}{1 + \cdot 004\, t}\gamma$ gesetzt werden kann, sonst aber, d. i. für $v > 1317$ F. $q' = 2q$ gesetzt werden mufs.

2. Auflösung

b) nach der Annahme von Duchemin.

1. Da die Beobachtungen und Versuche gezeigt haben, dafs die gewöhnliche Theorie, nach welcher der Widerstand oder der Druck auf die vordere Fläche einer Ebene (in der Richtung der Bewegung genommen), welche sich im ruhigen Wasser nach einer schiefen Richtung bewegt, einfach dem Sinus des Einfallswinkels proportional ist, die Widerstände für einen von krummen Flächen begrenzten Körper etwas zu grofs gibt, so kommt man der Wahrheit näher und zwar in der That sehr nahe, wenn man der Entwicklung folgende, von *Duchemin* aufgestellte Hypothese zum Grunde legt.

Ist nämlich allgemein AB' (Fig. 52′) die Erzeugungslinie irgend einer krummen convexen Oberfläche, welche den vordern Theil eines Körpers begrenzt, der sich z. B. im ruhigen Wasser nach der durch den Mittelpunct O der Figur gehenden Richtung OA bewegt, ferner BB' der Durchschnitt der gröfsten auf OA perpendikulären Querschnittsfläche F, v die Geschwindigkeit der Bewegung, Δ die Dichtigkeit des Wassers oder der betreffenden Flüssigkeit überhaupt, und für irgend einen Punct M der Erzeugungslinie $OP = x$, $PM = y$, $B'M = s$ und $MM_1 = ds$; so mufs man nach der Annahme von *Duchemin*, um den Beobachtungen zu genügen, für den auf die Flächeneinheit im Puncte M Statt findenden Druck p setzen:

$$p = \frac{\Delta v^2 \, Sin^3 \varphi}{Sin^2 \varphi'},$$

wobei φ der Einfallswinkel des Elementes MM_1 im Puncte M und φ' jener des Elementes im Puncte A mit der Bewegungsachse AO bezeichnet.

2. Ist nun der Körper ein Rotationskörper und AO dessen Achse, so beschreibt das Curvenelement $MM_1 = ds$ bei der Erzeugung des Körpers, eine Zone vom Halbmesser y, deren Projection auf den durch BB' gehenden auf der Achse AO perpendikulären gröfsten Querschnitt F gleich $2\pi y\, dy$ ist. Diese Zone hat demnach bei der erwähnten

Bewegung nach der Richtung AO einen Druck zu erleiden, welcher durch $2\pi p y \, dy = 2\pi \Delta v^2 y \, dy \frac{Sin^3 \varphi}{Sin^2 \varphi'}$, oder wegen $Sin\,\varphi = \frac{dy}{ds}$, durch $\frac{2\pi\Delta v^2}{Sin^2\varphi'} y \frac{dy^4}{ds^3}$ ausgedrückt wird.

Setzt man den Durchmesser des gröfsten Querschnitts $BB' = a$, drückt die in der cubischen Einheit der Flüssigkeit enthaltene Masse Δ durch das Gewicht γ aus, setzt nämlich (Nr. **54**, Anmerk. 3) $\Delta = \frac{\gamma}{g}$ und nimmt für den Widerstandscoeffizienten k wieder den dem Verhältnifs von $\frac{AA'}{BB'}$ entsprechenden Werth aus der Tabelle in §. 359; so erhält man für den gesuchten Widerstand R auf den ganzen Körper:

$$R = \frac{2\pi k \gamma}{Sin^2\varphi'} \frac{v^2}{2g} \int_{\frac{a}{2}}^{0} y \frac{dy^4}{ds^3} \text{*)} \quad . \; . \quad (1)$$

Was dabei den Werth von $Sin\,\varphi'$ betrifft, so wird dieser aus dem allgemeinen Werth $Sin\,\varphi = \frac{dy}{ds}$, nämlich aus der Gleichung der Erzeugungscurve erhalten, wenn man diesen Quotienten auf den Punct A bezieht, so, dafs $Sin\,\varphi' = \frac{dy'}{ds'}$ wird, wenn man die allgemeinen Werthe x, y, s für den Punct A mit einem Striche bezeichnet; es kann daher auch

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \left(\frac{ds'}{dy'}\right)^2 \int_{\frac{a}{2}}^{0} y \frac{dy^4}{ds^3} \quad . \; . \quad (1')$$

gesetzt werden.

3. Geht die krumme Oberfläche in den e b e n e n gröfsten Querschnitt F durch BB' über, so wird für alle Puncte derselben $dy = ds$ und $Sin\,\varphi' = \frac{dy'}{ds'} = 1$, folglich der Widerstand:

---

*) Es hat also der Widerstand oder der Druck, welchen die Flüssigkeit auf die Flächeneinheit irgend eines Punctes der Vorderfläche des bewegten Körpers ausübt, das Gewicht einer Flüssigkeitssäule zum Mafse, deren Höhe der doppelten, der Geschwindigkeit des Körpers entsprechenden Fallhöhe gleich ist, multiplicirt mit dem Cubus des Sinus des Einfallswinkels des Elementes der Erzeugungslinie der vordern Fläche des Körpers in dem betreffenden Puncte, und dividirt durch das Quadrat des Sinus des Einfallswinkels jenes Elementes dieser Erzeugungslinie, welches an der Achse des Körpers liegt.

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \int_0^{\frac{a}{2}} y\, dy = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{a^2}{8}$$

oder wegen $F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi$ als Grundfläche des Cylinders, auch:

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

(vergleiche §. 359) wie es seyn soll.

4. Ist die Erzeugungslinie AMB' eine **gerade Linie**, so beschreibt diese bei ihrer Umdrehung um die in der Richtung der Bewegung $A'A$ liegenden Achse OA einen **geraden Kegel**. Setzt man dafür den Halbmesser der Grundfläche $OB' = r$ und die Höhe $OA = h$, so ist die Gleichung der Erzeugungslinie (wenn O der Ursprung der Coordinaten ist):

$$y = \frac{r}{h}(h - x)$$

folglich $\frac{dy}{dx} = -\frac{r}{h}$, $ds = \frac{dx}{h}\sqrt{(r^2 + h^2)}$ und

$\frac{dy}{ds} = \frac{dy'}{ds'} = Sin\,\varphi' = Sin\,\varphi = -\frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}}$, mithin nach der obigen Formel (1):

$$R = -2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{r^2 + h^2}{r^2} \int_r^0 \frac{r^3}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\, y\, dy \quad \text{d. i.}$$

$R = r^2 \pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}}$ d. i. wegen $r^2\pi = F$ und $\frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}} = Sin\,\varphi$ wobei φ den Einfallswinkel der Kanten (mit der Achse des Kegels) bildet, sofort:

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g}\, Sin\,\varphi.$$

Der Widerstand eines Cylinders von derselben Grundfläche F und derselben Länge h, welcher sich mit der nämlichen Geschwindigkeit v nach der Richtung seiner Achse bewegt, wird bei demselben Werth von k durch

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

ausgedrückt, welches zugleich auch der Widerstand des eben betrachteten Kegels für dessen Grundfläche ist, d. h. wenn bei der angenommenen Bewegung anstatt der Spitze die Grundfläche vorausgeht. Bezeichnet man diesen letztern Widerstand durch R', so ist

$$R : R' = Sin\,\varphi : 1,$$

was auch mit den Erfahrungen ganz gut übereinstimmt.

5. Ist die Erzeugungslinie AB' ein Viertelkreis, die krumme Oberfläche also eine Halbkugel; so ist die Gleichung dieser Curve, die Coordinaten vom Mittelpunct O aus gezählt,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Daraus folgt, wegen $ds = dy\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$ sofort $\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{r}$ und da im Puncte A $y = 0$ ist, auch

$Sin\,\varphi' = \frac{dy'}{ds'} = \frac{r}{r} = 1$, so, daſs wenn man diese Werthe in der vorigen Formel (1) substituirt und $a = 2r$ setzt, der Widerstand der Halbkugel:

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \int_r^0 y\,dy \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \tfrac{1}{5} r^5$$

d. i.

$$R = \tfrac{2}{5} \pi k \gamma r^2 \frac{v^2}{2g} = \tfrac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad . . \quad (s)$$

wird.

Nimmt man für k den entsprechenden Werth, d. i. für das Verhältniſs $\frac{AA'}{BB'} = 1$, so gilt derselbe Ausdruck auch für die ganze Kugel, so, daſs wenn man den Widerstand des herumbeschriebenen Cylinders, welcher sich unter denselben Umständen in der Richtung seiner Achse bewegt, durch R' bezeichnet, sofort, wegen $R' = k \gamma F \frac{v^2}{2g}$ (vorige Relat. a)

$$R = \tfrac{2}{5} R' \text{ ist.}$$

Anmerkung 1. Dieses mit den Beobachtungen und Versuchen sehr gut übereinstimmende Resultat weicht also von dem vorigen, durch die gewöhnliche Theorie erhaltenen, in so weit ab, als man dort $R = \frac{2}{4} R'$, folglich den Widerstand um $\frac{1}{10} R'$ gröſser gefunden hat.

Anmerkung 2. Wird der vordere Theil eines Rotationskörpers, welcher sich in der Richtung seiner Achse im ruhigen Wasser oder in der Luft bewegt, von einer concaven Fläche begrenzt, wie eine solche z. B. durch die Umdrehung der Curve DB' oder $B'DB$ um die Bewegungsachse $A'D$ (Fig. 52') erzeugt wird; so muſs man nach *Duchemin*, um den Beobachtungsresultaten zu entsprechen, den Druck auf die Flächeneinheit durch

$$p = \Delta v^2 \left(\frac{dx + dy}{ds}\right)$$

also den Widerstand des ganzen Körpers durch

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \int_0^{\frac{a}{2}} y\,dy \left(\frac{dx + dy}{ds}\right) \quad . . \quad (2)$$

ausdrücken, wobei wieder der Werth von k aus der Tabelle in §. 359 für das Verhältnifs des Durchmessers $BB' = a$ und der Länge OA' zu nehmen ist.

Sucht man z. B. diesen Widerstand für eine kreisförmige concave Vorderfläche, nimmt zu diesem Ende DO zur Abscissenachse und D zum Anfangspunct der rechtwinkeligen Coordinaten; so hat man

$y^2 = 2rx - x^2$, und wenn Bog. $DB' = \varphi^0$ ist, sofort $\frac{a}{2} = r \, Sin \, \varphi$ und

$F = \frac{a^2}{4}\pi = \pi r^2 Sin^2 \varphi$.

Bezeichnet man den variabeln Werth des Mittelpunctswinkels für irgend einen Punct N durch α, so ist $y = r \, Sin \, \alpha$, $dy = r \, Cos \, \alpha \, d\alpha$, $\frac{dx}{ds} = Sin \, \alpha$ und $\frac{dy}{ds} = Cos \, \alpha$, folglich wird das vorige Integrale

$$\int_0^{\frac{a}{2}} y \, dy \left(\frac{dx + dy}{ds}\right) = \int_0^{\varphi} r^2 \, Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha \, (Sin \, \alpha + Cos \, \alpha) \, d\alpha$$

oder ausgeführt (Comp. §. 820, Form. 1.)

$$= \frac{r^2}{3}(1 + Sin \, \varphi - Sin \, \varphi \, Cos^2 \varphi - Cos^3 \varphi) = \frac{r^2}{3}(1 + Sin^3 \varphi - Cos^3 \varphi)$$

so, dafs also endlich wegen $\pi r^2 = \frac{F}{Sin^2 \varphi}$ sofort

$$R = \tfrac{2}{3} k \gamma F \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1 + Sin^3 \varphi - Cos^3 \varphi}{Sin^2 \varphi}\right) \text{ wird.}$$

Sucht man jenen Werth von φ, wofür der Widerstand R am gröfsten wird, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$Sin^3 \varphi + 3 \, Sin^2 \varphi \, Cos \, \varphi + 2 \, Cos^3 \varphi - 2 = 0$$

woraus man nahe $\varphi = 61^0 \, 38'$ findet. Dafür wird der Pfeil OD nahe genug $= \frac{1}{2} r$.

74. Aufgabe.

Den Widerstand zu bestimmen, welchen ein um eine Achse rotirender Körper in einem widerstehenden Mittel zu überwinden hat.

1. Auflösung.

a) nach der gewöhnlichen Theorie.

1. Es sey C (Fig. 76) der Durchschnittspunct der auf der Ebene der Tafel senkrechten Rotationsachse, $MC = \rho$ das von irgend einem Puncte M der Vorderfläche des Körpers auf diese Achse gefällte Perpendikel, ab die Durchschnittslinie der durch dieses Perpendikel und die

Rotationsachse gelegten Ebene mit dem Flächenelement in M, welches man in allen Fällen als eben ansehen kann und hier durch dF bezeichnet werden soll; ferner sey Mm ein in der Ebene dieses Elementes auf ab errichtetes Perpendikel und mn senkrecht auf CM, so ist $mMC = \alpha$ der Neigungswinkel dieses Flächenelementes mit der genannten durch CM gehenden Achsenebene, und nm die Richtung, nach welcher sich das Flächenelement dF in dem Augenblicke der gegenwärtigen Lage und zwar mit der Geschwindigkeit $v = \rho w$ bewegt, wenn w die constante Winkelgeschwindigkeit des rotirenden Körpers bezeichnet.

Diefs vorausgesetzt, ist die Projection des Elementes dF auf die Achsenebene $= dF . Cos\, \alpha$ und daher, wenn sich der Widerstand hier eben so, wie bei der geradlinigen Bewegung ausdrücken läfst und β den betreffenden Widerstandscoeffizienten bezeichnet, sofort der gesuchte Widerstand auf das Element dF der Vorderfläche (§. 359):

$$dq = \beta\, v^2\, Cos\, \alpha\, dF = \beta\, \rho^2\, w^2\, Cos\, \alpha\, dF.$$

Zerlegt man diese, in der Richtung mn wirksame Kraft dq in zwei aufeinander senkrechte, wovon die eine dp normal auf das Flächenelement, so ist $dp = dq . Cos\, \alpha$, während die zweite, mit diesem Elemente parallel, für die gesuchte Wirkung verloren geht.

Aus diesem normalen Drucke dp entsteht aber eine in der Richtung mn wirksame Kraft $dr = dp . Cos\, \alpha$ und ein mit der Achsenebene paralleler Druck dp', welcher jedoch von der Achse aufgehoben wird.

Da nun das statische Moment dieser Kraft dr in Beziehung auf die Rotationsachse $= \rho\, dr$ oder, wenn man für dr, dp und dq die vorigen Werthe substituirt:

$$dM = \beta\, \rho^3\, w^2\, Cos^3 \alpha\, dF$$

ist, so erhält man für das statische Moment des Gesammtwiderstandes, welchen die Vorderfläche des rotirenden Körpers erleidet, den Ausdruck:

$$M = \beta\, w^2 \int \rho^3\, Cos^3 \alpha\, dF \quad . \; . \quad (1)$$

wobei das Integrale, je nach der Form und Ausdehnung des Körpers, innerhalb der betreffenden Grenzen zu nehmen ist.

Zusatz 1. Da dieses Integrale für irgend einen bestimmten oder gegebenen Körper eine constante Gröfse bildet, so folgt, dafs das Moment des Widerstandes dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

Zusatz 2 Ist der betreffende Körper ein Rotationskörper und findet die Schwingung oder Kreisbewegung um dessen Achse Statt, so ist für alle Elemente der Winkel $\alpha = 90^0$ und daher:

$\int \rho^3 Cos^3\alpha\, dF = 0$, woraus sofort folgt, dafs runde Körper, wie z. B. Kugeln, cylinderische Wellen, Radkränze u. dgl. bei ihrer Rotation oder Achsendrehung (z. B. in der Luft) keinen Widerstand erfahren*).

2. Fallen die sämmtlichen Elemente der Vorderfläche in eine gemeinschaftliche Achsenebene, so wird dafür der Winkel $\alpha = 0$ und daher das Moment des Widerstandes:

$$M = \beta w^2 \int \rho^3 dF \, . \, . \quad (2)$$

Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn sich das Rechteck $A'B$ (Fig. 77) um eine Achse RS dreht, welche in der Ebene des Rechteckes und mit den Seiten AB und $A'B'$ parallel liegt.

Zieht man nämlich durch den Schwerpunct O des Rechteckes die Gerade CD senkrecht auf die Achse RS und setzt $CO = e$, $AB = b$, $ED = a$, $CP = x$ und $Pp = dx$; so geht der vorige Ausdruck (2) für diesen speciellen Fall, wegen $\rho = x$ und $dF = b\, dx$ über in:

$$M = \beta w^2 b \int_{e-\frac{a}{2}}^{e+\frac{a}{2}} x^3 dx = \tfrac{1}{4} b \beta w^2 \left[\left(e + \frac{a}{2}\right)^4 - \left(e - \frac{a}{2}\right)^4 \right]$$

oder, wenn man entwickelt, reducirt und bemerkt, dafs $ab = F$ ist, auch:

$$M = \beta w^2 F e \left(e^2 + \frac{a^2}{4}\right) \, . \, . \quad (3)$$

Erstreckt sich die Fläche des Rechteckes bis zur Achse, so, dafs $A'B'$ mit RS zusammenfällt, so wird wegen $CO = e = \frac{a}{2}$, sofort das Moment des Widerstandes:

$$M = \tfrac{1}{4} \beta F a^3 w^2 \, . \, . \quad (4)$$

Was den Widerstandscoeffizienten β anbelangt, so kann man unter der gemachten Voraussetzung, dafs nämlich der Widerstand bei der Kreisbewegung jenem bei der geradlinigen Bewegung gleich sey, sofort

$$\beta = \frac{k\gamma}{2g} \, . \, . \quad (n)$$

setzen, wobei γ das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit, g die Beschleunigung der Schwere (folglich $\frac{\gamma}{g} = \Delta$ die

---

*) Es wird nämlich hier durchaus von jenem geringen Widerstande abstrahirt, welcher durch die blofse Adhäsion, oder wenn man es so nennen will, Reibung des widerstehenden Mittels an der Oberfläche des Körpers entsteht.

Dichtigkeit oder die in der cubischen Einheit enthaltene Masse) und $k = 1{\cdot}254$ den in §. 359 für dünne Platten angegebenen Erfahrungscoeffizienten (welcher nicht bloſs für das Wasser oder die Luft, sondern nach *Duchemin* für alle Flüssigkeiten überhaupt gilt) bezeichnet.

Will man den Widerstand selbst, und zwar auf den Mittelpunct der Fläche bezogen bestimmen, so hat man, wenn dieser Widerstand durch $\mathfrak{R}$ bezeichnet wird, wegen $M = \mathfrak{R}e$ aus den beiden Gleichungen (3) und (4) beziehungsweise

$$\mathfrak{R} = k\gamma F \frac{w^2}{2g}\left(e^2 + \frac{a^2}{4}\right) \;.\;. (5) \text{ und } \mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} k\gamma F a^2 \frac{w^2}{2g} \;.\;. (6)$$

Ist z. B. bei diesem Rechteck $a = 2$, $b = 1$, $e = 4$ Fuſs, und bewegt sich dieser Flügel im Wasser mit einer Winkelgeschwindigkeit von $w = 1$ Fuſs; so erhält man nach den Formeln (3) und (5), wegen $\gamma = 56{\cdot}4$ und $g = 31$:

$$M = 155{\cdot}176 \text{ und } \mathfrak{R} = 38{\cdot}794 \text{ Pfund.}$$

Findet dagegen dieselbe Bewegung in der Luft Statt und nimmt man für das Gewicht derselben den mittleren Werth von $\gamma = \frac{56{\cdot}4}{850}$, so wird dafür

$$M' = \frac{155{\cdot}176}{850} = {\cdot}18256 \text{ und } \mathfrak{R}' = \frac{38{\cdot}794}{850} = {\cdot}04564 \text{ Pfund.}$$

3. Bezieht man allgemein den rotirenden Körper auf 3 rechtwinkelige Coordinatenachsen AX, AY, AZ (Fig. 78) und läſst eine derselben, z. B. die Achse der y mit der Rotationsachse zusammen fallen, setzt für irgend einen Punct M der Vorderfläche des Körpers die Coordinaten $AP = x$, $Pm = y$ und $mM = z$, läſst x und y um dx und dy zunehmen, construirt in der Ebene der xy das unendlich kleine Rechteck $dx\,dy = nn'$ und legt durch die vier Seiten desselben, senkrecht auf die Ebene der xy, die vier Ebenen; so schneiden diese auf der Oberfläche des Körpers im Puncte M das Flächenelement dF ab, dessen Projection auf die Ebene der xy das eben genannte Rechteck $dx\,dy$ ist.

Die im Puncte M an die Fläche des Körpers gezogene Normale MN schneidet die Ebene der xy in einem Puncte N, wofür (Comp. §. 739) die Coordinaten sind $AQ = x' = x + \left(\frac{dz}{dx}\right) z$ und $QN = y' = y + \left(\frac{dz}{dy}\right) z$, während die Länge der Normale durch

$$MN = a = z\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]} \text{ ausgedrückt wird.}$$

Ist ferner α der Neigungswinkel des Flächenelementes dF gegen die Ebene der xy, folglich auch der Winkel, welchen die auf diese beiden Ebenen gezogenen Normalen a und z miteinander einschliefsen, so ist $Cos\,\alpha = \frac{z}{a}$, folglich $dx\,dy = dF\,.\,Cos\,\alpha$ oder $dF = a\,\frac{dx\,dy}{z}$.

Da der Druck der Luft, oder der betreffenden Flüssigkeit überhaupt, auf das Flächenelement dF in der Richtung der Normale MN Statt findet, so kann man sich diesen Druck, mit Beibehaltung der genannten Richtung, von M nach N verlegt denken; dadurch erscheint die Ebene der xy für das in N gedachte Element dF als eine Achsenebene, welche mit diesem Elemente den Winkel α bildet, wofür $Cos\,\alpha = \frac{z}{a}$ ist, wobei die Entfernung des Elementes von der Rotationsachse $\rho = x' = x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z$ und endlich dessen Projection auf diese Achsenebene $dF\,.\,Cos\,\alpha = \frac{z}{a}\,dF = dx\,dz$, folglich $dF = \frac{a}{z}\,dx\,dz$ ist.

Man hat daher nach dem allgemeinen Ausdrucke (1) für das statische Moment des Widerstandes, wenn man berücksichtigt, dafs hier eine doppelte Integration, und zwar eine nach y, die andere nach x eintreten mufs:

$$M = \beta\,w^2 \iint x'^3\,Cos^3\,\alpha\,dF = \beta\,w^2 \iint \left[x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z\right]^3 . \frac{z^3}{a^3} . \frac{a}{z}\,dx\,dy$$

d. i.
$$M = \beta\,w^2 \iint \frac{z^2}{a^2}\,dx\,dy \left[x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z\right]^3 \;.\;.\; (7)$$

Will man die Normale a eliminiren, so darf man nur dafür den vorhin angegebenen Werth substituiren, und man erhält

$$M = \beta\,w^2 \iint \frac{dx\,dy \left[x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z\right]^3}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \;.\;.\; (8)$$

Beispiel. Schwingt z. B eine Kugel vom Halbmesser r um eine Achse, welche von ihrem Mittelpuncte um die Gröfse e absteht, so ist die Gleichung der Kugeloberfläche, wenn man den Mittelpunct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten nimmt (Comp. §. 596)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Benützt man, weil hier die Normale $a = r$ constant ist, die Formel (7), bestimmt also aus der Gleichung der Kugel den Differenzialquotienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$; so erhält man ganz einfach $x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z = 0$ und damit aus der genannten Formel (7), in welcher man $e+x$ statt x setzen mufs (und wegen $z^2=r^2-x^2-y^2$):

$$M=\beta w^2 \frac{e^3}{r^2}\iint dx\, dy\, (r^2-x^2-y^2).$$

Integrirt man nun zuerst nach y und zwar innerhalb der Grenzen von $-y$ bis $+y$, so erhält man

$$\int_{-y}^{+y} dy\,(r^2-x^2-y^2)=2\int_0^y dy\,(r^2-x^2-y^2)=2\left[(r^2-x^2)\,y-\tfrac{1}{3}y^3\right]$$

wobei $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ ist. Mit diesem Werthe folgt weiters:

$$M=\beta w^2 \frac{e^3}{r^2}2\int_{-r}^{+r} dx\left[(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$\tfrac{2}{3}\beta w^2 \frac{e^3}{r^2}\int_{-r}^{+r} dx\,(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}=\tfrac{4}{3}\beta w^2 \frac{e^3}{r^2}\int_0^r dx\,(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Nun ist (nach der Reductionsformel C im Comp. §. 799)

$$\int dx\,(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}=\left[\frac{r^2-x^2}{4}+\frac{3r^2}{8}\right]x\sqrt{(r^2-x^2)}+\frac{3r^4}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}},$$

folglich, wegen $\int\frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=Arc\ Sin\ \frac{x}{r}$ und da der erste Theil dieses Integrales für beide Grenzen, d. i. sowohl für $x=0$ als auch für $x=r$ verschwindet, dagegen der zweite Theil in $Arc\ Sin\ \frac{r}{r}=\frac{\pi}{2}$ übergeht, sofort

$$M=\tfrac{4}{3}\beta w^2\frac{e^3}{r^2}\times\tfrac{3}{8}r^4\frac{\pi}{2}$$

oder wenn man die Geschwindigkeit des Mittelpunctes mit v bezeichnet, wodurch $v=ew$ wird, so wie wegen $r^2\pi=F$ und (Relat. (n) in 2) $\beta=\frac{k\gamma}{2g}$, auch:
$$M=\tfrac{1}{2}ke\gamma F\frac{v^2}{2g};$$
endlich folgt daraus für den Widerstand $\mathfrak{R}$, diesen auf den Mittelpunct der Kugel bezogen, wegen $M=\mathfrak{R}e$:

$$\mathfrak{R}=\tfrac{1}{2}k\gamma F\frac{v^2}{2g}.$$

Zusatz. Diese Relation mit jener (m) in der vorigen Aufgabe (erste Auflösung) verglichen, zeigt, dafs nach der gewöhnlichen Theorie der Widerstand der Kugel bei der kreisförmigen Bewegung jenem bei der geradlinigen Bewegung genau gleich ist, wenn bei der erstern der Mittelpunct dieselbe Geschwindigkeit v hat, welche bei der letztern Bewegung die sämmtlichen Puncte der Kugel besitzen.

2. Auflösung

b) nach Duchemin.

Nach den Beobachtungen und Versuchen von *Duchemin* findet jedoch bei der kreisförmigen Bewegung, durch den Einfluſs der Centrifugalkraft, welche durch die Reaction der umgebenden ruhigen Flüssigkeit aufgehoben werden muſs, ein gröſserer Widerstand als unter übrigens gleichen Umständen bei der geradlinigen Bewegung Statt, und er findet, daſs wenn R den Widerstand bei der geradlinigen, und R' jenen bei der kreisförmigen Bewegung bezeichnet und der Mittelpunct der Figur dieselbe Geschwindigkeit v besitzt, welche bei der erstern Bewegung Statt findet, sofort (§. 359, Anmerk. 2)

$$R' = R\left[1 + \frac{3{\cdot}2488\,z}{k(a-s)}\right] \quad . \; . \quad (1)$$

gesetzt werden müsse, wobei k den vorigen (in der Relation n angegebenen) Erfahrungscoeffizienten, a den Abstand des Mittelpunctes O der Figur des auf dem beschriebenen Kreisbogen normalen gröſsten Querschnitts F des Körpers von der Rotationsachse, und s den Abstand desselben Punctes O vom Schwerpuncte o jenes Theiles der Fläche F, welche vom Mittelpuncte O aus gegen die Rotationsachse zu liegt, und endlich z eine lineare Gröſse bezeichnet, welche die Dicke der parallel zur vordern Fläche des Körpers abgelenkten Wasserfäden ausdrückt; dabei ist für einen Rotationskörper, wenn D der Durchmesser des gröſsten, auf der Richtung der Bewegung normalen Querschnittes F, und φ der Einfallswinkel des nächsten an der Achse des Körpers liegenden Elementes der Vorderfläche bezeichnet, wobei jedoch vorausgesetzt wird, daſs diese Achse zur Richtung der Bewegung parallel ist:

$$z = \tfrac{1}{2} D \,Sin\, \varphi,$$

dagegen für jeden andern Körper $z = \frac{1}{2}\sqrt{F} \,.\, Sin\, \varphi$.

Beispiel 1. So wäre z. B. für das vorige Rechteck, in welchem $F = 2$, $a = 4$ und $v = 4$ ist, wegen $\varphi = 90^0$, $s = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} = {\cdot}707$, und $k = 1{\cdot}254$, sofort

$$\frac{3{\cdot}2488\,z}{k(e-s)} = \frac{3{\cdot}2488 \times {\cdot}707}{1{\cdot}254 \times 3{\cdot}5} = {\cdot}523$$

folglich nach dieser Relation (1):

$$R' = 1{\cdot}523\,R.$$

Bewegt sich dieses Rechteck geradlinig, in einer auf seiner Ebene perpendikulären Richtung mit 4 Fuſs Geschwindigkeit im ruhigen Wasser, so ist (§. 359) $R = 1{\cdot}254 \times 56{\cdot}4 \times 2 \times \frac{16}{62} = 36{\cdot}5$ und daher

$$R' = 1{\cdot}523 \times 36{\cdot}5 = 55{\cdot}59 \text{ Pf.}$$

während oben nach der gewöhnlichen Theorie für diesen Widerstand nur $\mathfrak{R} = 38{\cdot}8$ Pf. gefunden wurde, so, dafs also hier nahe

$$R' = 1{\cdot}4\,\mathfrak{R} \text{ ist.}$$

Beispiel 2. Bei einem der von ***Borda*** angestellten Versuche, um den Widerstand einer im ruhenden Wasser sich kreisförmig bewegenden Kugel zu finden, betrug (Alles in französischem Mafs und Gewicht ausgedrückt) der Durchmesser der Kugel 59 Linien, der Abstand des Mittelpunctes der Kugel von der Drehungsachse 4, und die Geschwindigkeit dieses Punctes $\frac{32\pi}{83{\cdot}17}$ Fufs; diefs gibt auf das W. Mafs bezogen (wobei das Verhältnifs von $1^{\text{P.F}} = 1{\cdot}2764^{\text{W.F}}$ zum Grunde liegt) für den Durchmesser $D = \frac{60{\cdot}631'''}{144} = {\cdot}4210'$, die gröfste Kreisfläche $F = {\cdot}139236^{\square'}$, die Geschwindigkeit des Mittelpunctes $v = 1{\cdot}24215'$, die lineare Gröfse $z = \frac{1}{2} D \operatorname{Sin} 90^0 = {\cdot}210525'$, den Abstand des Mittelpunctes der Kugel von der Drehungsachse $a = 4{\cdot}1106'$ und den Abstand desselben Punctes vom Schwerpunct des Halbkreises (§. 50) $s = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{D}{2} = {\cdot}08935'$.

Mit diesen Werthen geht die Formel (I) über in

$$R' = 1{\cdot}13263\, R,$$

wobei R den Widerstand bezeichnet, welchen dieselbe Kugel bei der geradlinigen Bewegung im ruhigen Wasser erfährt, wenn dabei die Geschwindigkeit $1{\cdot}24215$ Fufs beträgt.

Nun ist aber nach der vorigen Aufgabe (2. Auflösung, Relat. s)

$$R = \tfrac{2}{5} k\gamma F \frac{v^2}{2g} = \tfrac{2}{5} \times 1{\cdot}2824 \times 56{\cdot}4 \times {\cdot}139236 \times \frac{(1{\cdot}24215)^2}{62}$$

$$\text{d. i.} \quad R = {\cdot}10258 \text{ Pf.}$$

folglich

$$R' = 1{\cdot}13263\, R = {\cdot}116187 \text{ Pfund.}$$

Zusatz. Drückt man diesen Widerstand in Pariser Pfunden (nach der Relation von $100^{\text{P.Pf.}} = 87{\cdot}41^{\text{W.Pf.}}$) aus, so erhält man $R' = {\cdot}132922$ Par. Pf., während der ***Borda***'sche Versuch dafür ${\cdot}1242$ Par. Pf. gegeben hat.

Anmerkung. *Duchemin* findet nach seiner Berechnung (er nimmt jedoch von k nur zwei Decimalstellen, in welchem Falle wir $R = {\cdot}10239$ W. Pf. und $R' = {\cdot}13267$ Par. Pf. gefunden hätten) $R' = {\cdot}1265$.

Für die Geschwindigkeiten von $v = {\cdot}42598$, ${\cdot}59574$, ${\cdot}85376$, $1{\cdot}2087$, $1{\cdot}7016$, $2{\cdot}4154$ Pariser Fufs, geben die Beobachtungen für den Widerstand

R' beziehungsweise ·0155, ·0310, ·0621, ·1242, ·2483, ·4966 Par. Pfund, während *Duchemin* nach der genannten Formel ·0156, ·0311, ·0626, ·1265, ·2517, ·5076 P. Pf. findet.

75. Aufgabe.

Die Zeit zu bestimmen, in welcher eine Kugel, welche spezifisch schwerer als Wasser ist, in dieser Flüssigkeit von einer gegebenen Höhe herabfällt.

Auflösung.

Es sey D der Durchmesser und δ die Dichtigkeit der Kugel, also ihre Masse $M = \frac{1}{6}\pi D^3 \delta = \frac{2}{3} DF\delta$, wenn man nämlich wieder die gröſste Kreisfläche mit F bezeichnet. Da der Widerstand, welchen die Kugel bei ihrer Bewegung im ruhigen Wasser erfährt (Aufgabe 63, Relat. s) $R = \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g}$ ist, so wird die auf sie einwirkende verzögernde (oder negative beschleunigende Kraft, nach Nr. **56**) durch $\frac{R}{M} = \frac{3}{5}\frac{k\gamma}{D\delta}\frac{v^2}{2g}$ oder wenn p das Gewicht der cubischen Einheit der Kugel im leeren Raume ist, wegen $\delta = \frac{p}{g}$ auch durch

$$\frac{R}{M} = \frac{3}{10}\frac{k\gamma}{Dp} v^2$$

ausgedrückt, wobei (Nr. **359**) $k = 1{\cdot}2824$ und $\gamma = 56{\cdot}4$ ist, wenn man den Wiener Fuſs und das W. Pfund zum Grunde legt.

Das Gewicht der Kugel ist im leeren Raume $= \frac{2}{3} DFp$ und im Wasser $P = \frac{2}{3} DF(p - \gamma)$, also ihre beschleunigende Kraft:

$G' = \frac{P}{M} g = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g$ und da ihr die verzögernde Kraft $\frac{R}{M}$ entgegenwirkt, so bleibt noch als beschleunigende Kraft:

$$(b) \;\ldots\; G = G' - \frac{R}{M} = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{3}{10}\frac{k\gamma}{Dp} v^2.$$

Nun ist aber auch (Nr. **56**, Anmerk.) die beschleunigende Kraft $(c) \;..\; G = \frac{dv}{dt}$ und auſserdem (Nr. **51**) $ds = v\,dt$, folglich, wenn man gehörig substituirt:

$$dt = \frac{dv}{\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{3}{10}\frac{k\gamma}{Dp} v^2} \text{ und } ds = \frac{v\,dv}{\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{3}{10}\frac{k\gamma}{Dp} v^2} \;{}^{*})$$

---

*) Diese beiden Ausdrücke erhält man auch ganz einfach aus der Relation (a)

Setzt man Kürze halber $\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)g=a$ und $\frac{3}{10}\frac{k\gamma}{Dp}=\frac{a}{b^2}$, so erhält man durch Integration von o bis t für t, von o bis v für v und von o bis s für s, sofort

$$t=\frac{b^2}{a}\int_0^v\frac{dv}{b^2-v^2} \text{ und } ds=\frac{b^2}{a}\int_0^s\frac{v\,dv}{b^2-v^2}$$

oder (Comp. §. 767 und 762):

$$t=\frac{b}{2a}\,logn.\left(\frac{b+v}{b-v}\right) \text{ und } s=\frac{b^2}{2a}\,logn.\left(\frac{b^2}{b^2-v^2}\right)$$

Setzt man $\frac{b+v}{b-v}=A$, so ist $\frac{2at}{b}=logn.\,A$ . . (α) und

$$v=b\left(\frac{A-1}{A+1}\right), \text{ so wie } s=\frac{b^2}{a}\,logn.\left(\frac{A+1}{2\sqrt{A}}\right).$$

Ist A eine sehr grofse Zahl, so kann man A statt $A+1$ setzen wodurch man $s=\frac{b^2}{a}\,logn.\,\frac{1}{2}\sqrt{A}=\frac{b^2}{a}\,(logn.\,A-logn.\,2)$ und daraus $logn.\,A$ oder (Relat. α) $\frac{2at}{b}=\frac{2as}{b^2}+2\,logn.\,2$, d. i. wenn man die Werthe a und b wieder herstellt und $logn.2=2{\cdot}3026\;log.\,2$ setzt, um nämlich den natürlichen Logarithmus in den Tafel-Logarithmus zu verwandeln, endlich:

$$t=\left(s+\frac{10}{3}\frac{Dp}{k\gamma}\times 2{\cdot}3026\;log\,2\right)\sqrt{\left[\frac{3k\gamma}{10D(p-\gamma)g}\right]} \quad . . . (2)$$

Beispiel. Unter den von *Newton* über den Fall von Kugeln im Wasser angestellten Versuchen, hatte eine der Kugeln einen Durchmesser von ·84224 englische Zolle und im destillirten Wasser gewogen ein Gewicht von 77 Gran (Troygewicht), die Fallhöhe im Wasser betrug 112 Zoll und die beobachtete Fallzeit 4 Secunden.

Da das Gewicht eines Londoner Kubikfufs destillirten Wassers 76 Pfund (Troygewicht) beträgt, so wiegt eine Kugel dieser Flüssigkeit von 5 engl. Zoll Durchmesser nahe genug 16600 Gran. Bezeichnet man daher allgemein das Gewicht einer solchen Flüssigkeitskugel von D Zoll Durchmesser mit q' und das Gewicht der festen Kugel bei gleichem Durchmesser, im destillirten Wasser gewogen, mit q; so hat man $q'=\frac{D^3}{(5)^3}\,16600$ Gran und $\frac{p}{\gamma}=\frac{q+q'}{q'}$. Mit diesem Werthe wird in der

---

in Nr. 261, aus welcher $\frac{dv}{dt}=\frac{P}{M}-\frac{Q}{M}$ folgt und wobei $\frac{P}{M}=G'\left(1-\frac{\gamma}{p}\right)g$ und $\frac{Q}{M}=\frac{R}{M}=\frac{3}{10}\frac{k\gamma}{Dp}v^2$ zu setzen ist.

vorigen Formel (2) der Bruch $\frac{\gamma}{p-\gamma}=\frac{1}{\frac{p}{\gamma}-1}=\frac{q'}{q}$ und daher wegen

$s=112$, $D=\cdot 84224$, $k=1\cdot 2824$ und $g=12\times 31$ sofort

$$t=4\cdot 035 \text{ Secunden},$$

welches Resultat mit jenem der Beobachtung sehr genau übereinstimmt.

Anmerkung. *Duchemin*, welcher diese Formel überhaupt auf 8 solche Beobachtungen anwendet, findet dafür den etwas gröſsern Werth von 4·10 Sec.

Die Beobachtungs- und Rechnungsresultate dieser *Newton*'schen Versuchsreihe sind folgende:

Die Durchmesser der Kugel waren ·84224, ·81296, ·99868, 1·00010, 1·00010, ·99970, ·99970, 1·00990 Zolle; ihre Gewichte im Wasser beziehungsweise 77, $5\frac{1}{16}$, $7\frac{1}{8}$, $21\frac{1}{2}$, $79\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $140\frac{3}{4}$, $4\frac{3}{8}$ Gran; die Fallhöhen 112, 112, 182, 182, 182, 182, 182, 182 Zoll; die beobachteten Fallzeiten 4, 15, $24\frac{7}{8}$, $14\frac{5}{8}$, 8, $25\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, $31\frac{3}{4}$ und die berechneten 4·01, 14·89, 25·00, 14·42, 7·53, 26·20, 5·69, 32·26 Secunden.

Zusatz. *Duchemin* bemerkt mit Recht, daſs ungeachtet der sehr guten Übereinstimmung dieser Rechnungs- mit den Beobachtungsresultaten, gleichwohl die obige Formel (2) nicht alle Umstände der Aufgabe umfasse, indem sich diese Formel nur auf den bei der gleichförmigen Bewegung vorkommenden Widerstand bezieht, bei welcher nämlich der Körper und die ihn umgebenden Flüssigkeitsfäden nach der durchlaufenen Linie eine constante Geschwindigkeit besitzen, während es sich hier um eine veränderliche Bewegung handelt, wobei die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit $t+dt$ die Gröſse $v+dv$ erlangt.

Der Erfahrung zu Folge bestehen die den in Bewegung befindlichen Körper umgebenden Flüssigkeitsfäden aus Molecülen, welche in beständiger fortrückender Bewegung begriffen sind, deren Anzahl aber gleichwohl in jedem Augenblicke dieselbe ist, und deren Strömung so angesehen werden kann, als fänden sie in schmalen, an dem beweglichen Körper befestigten Kanälen Statt. Was nun die Anzahl dieser Molecülen betrifft, so findet *Duchemin*, daſs bei dieser veränderlichen Bewegung das Volumen Q' der Masse der Flüssigkeitsfäden, welche sich mit dem Körper mit fortbewegt, wenn dieser ein Rotationskörper ist, durch die Formel

$$Q'=z\left[\tfrac{2}{5}F+\cdot 26\, b\sqrt{F}+\frac{2\pi}{Sin^2\varphi'}\int_{\frac{a}{2}}^{o} y\,\frac{dy^4}{ds^3}\right] \quad (m)$$

ausgedrückt werden könne, wobei die darin vorkommenden Gröſsen dieselbe Bedeutung wie in den Formeln (1) (73. Aufgabe, 2. Auflös. und 74. Aufgabe, 2. Auflös.) haben; die dort nicht vorkommende Gröſse b bezeichnet hier die Länge jenes Cylinders (wenn überhaupt ein solcher vorhanden), welcher den Vordertheil des Rotationskörpers vom Hintertheil trennt (für eiue Kugel z. B. ist $b = o$) und dessen Achse in der Richtung der Bewegung liegt.

Bezeichnet Q das Volumen des bewegten Körpers, δ seine Dichtigkeit, $\varDelta$ jene der Flüssigkeit und R den Widerstand bei der gleichförmigen Bewegung des Körpers; so reducirt sich die obige hier angewendete Relation (b), wenn man zugleich für G den Werth aus (c), d. i. $G = \frac{dv}{dt}$ setzt, auch auf die Form $\left(\text{wegen } \frac{\gamma}{p} = \frac{\Delta}{\delta}\right)$:

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{R}{M} \text{ oder wegen } M = Q\,\delta \text{ auf jene}$$

$$Q\,\delta\,\frac{dv}{dt} = (\delta - \varDelta)\,Q\,g - \text{R}.$$

Duchemin findet nun, daſs man statt dieser Relation, für die veränderliche verticale Bewegung setzen müsse:

$$(Q\,\delta \pm Q'\varDelta)\frac{dv}{dt} = \pm\, Q\,(\delta - \varDelta)\,g - R \quad (n)$$

wobei sich von den doppelten Zeichen das obere auf die beschleunigte, und das untere auf die verzögerte Bewegung bezieht.

Wird dieser Ausdruck für die erstere Bewegung, und zwar auf eine Kugel vom Durchmesser D angewendet, so hat man wegen $Q = \frac{1}{6}\pi D^3$, $F = \frac{1}{4}\pi D^2$, $Sin\,\varphi' = 1$, $b = o$ und (S. 499) $2\pi \int_{\frac{D}{2}}^{o} y \frac{dy^4}{ds^3} = \frac{2}{5} F$, nach der vorigen Formel (m):

$$(q) \;.\;.\; Q' = \tfrac{1}{10}\pi D^3, \text{ also } \frac{Q'}{Q} = {\cdot}6 \;.\;.\; (r)$$

und damit aus der Relation (n), als den genauern Werth für die Fallzeit, wenn man wieder statt den Massen $\varDelta$ und δ die Gewichte r und p setzt:

$$t = \left[s + \frac{10\,D\,(p + {\cdot}6\,\gamma)}{3\,k\,\gamma} \times 2{\cdot}3026\;log\,2\right] \sqrt{\left[\frac{3\,k\,\gamma}{10\,D\,(p - \gamma)\,g}\right]}.$$

Indem man also die durch die beschleunigte Bewegung mit fortgerissene Flüssigkeit in Betracht zieht, erscheint die Fallzeit um den Ausdruck ${\cdot}6 \times \frac{10\,D}{3\,k} \times 2{\cdot}3026\;log\,2 \sqrt{\left[\frac{3\,k\,\gamma}{10\,D\,(p-\gamma)\,g}\right]}$ gröſser als der nach der obigen Formel (2).

Diese Vergröfserung beträgt jedoch bei den vorhin angeführten 8 Versuchen nach der Berechnung *Duchemin*'s beziehungsweise nur ·032, ·116, ·147, ·085, ·044, ·154, ·033, ·192 Secunden, welche Bruchtheile sofort ohne Fehler noch vernachlässigt werden können.

Indefs ist der Einflufs dieser Masse der Flüssigkeitsfäden bei dünnen Platten, welche sich in einer auf ihren Ebenen senkrechten Richtung bewegen, viel bedeutender, indem dafür, wenn a die Dicke und F die Fläche derselben bezeichnet,

$$\frac{Q'}{Q} = \cdot 13 + \cdot 7 \, \frac{\sqrt{F}}{a},$$

also z. B. für $F = 4$ und $a = \frac{1}{100}$ sofort $\frac{Q'}{Q} = 14{\cdot}13$, nämlich über 23 Mal gröfser als im vorigen Falle wird.