C) Aus der Hydrostatik.

52. Aufgabe.

Ein gleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 58) wird in eine Flüssigkeit vollständig und zwar so eingetaucht, dafs die eine Seite AC lothrecht, d. i. perpendikulär auf die Oberfläche NR zu stehen kommt; es soll das Verhältnifs der Pressungen bestimmt werden, welche die Flüssigkeit auf diese drei Seiten ausübt.

Auflösung.

Sind O, O', O'' die Halbirungs- also zugleich auch die Schwerpuncte der Seiten AC, AB, BC, und zieht man aus diesen Puncten auf die lothrechte Seite AC die Perpendikel OB, $O'D$, $O''E$; so liegen, wenn der Punct A den Spiegel NR der Flüssigkeit berührt, diese genannten Schwerpuncte um die Tiefen $AD = \frac{1}{4}AC$, $AO = \frac{1}{2}AC$ und $AE = \frac{3}{4}AC$ unter der Oberfläche NR der Flüssigkeit, so, dafs wenn man diese Tiefen beziehungsweise durch h, h', h'', die gesuchten Drücke auf die Seiten AB, AC, BC mit D, D', D'' bezeichnet und $AB = AC = BC = a$ setzt, sofort (§. 310)

$$D = \gamma a h,\ D' = \gamma a h',\ D'' = \gamma a h'', \text{ folglich}$$

$$D : D' : D'' = h : h' : h'' = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} : \tfrac{3}{4} = 1 : 2 : 3$$

Statt findet.

53. Aufgabe.

Das Rechteck AD (Fig. 59) wird vertical in eine Flüssigkeit so eingetaucht, dafs die Seite AB im Spiegel NR derselben liegt; es soll das Verhältnifs der Pressungen bestimmt werden, welche die Flüssigkeit auf die, durch die Diagonale BC entstehenden beiden Dreiecke ABC und BCD ausübt.

Auflösung.

Sind O und O' die Schwerpuncte dieser beiden Dreiecke ABC und BCD, so liegt der Punct O, die Ebene des Rechteckes AD mag vertical oder schief stehen, um $\frac{1}{3}AC$ und jener O' um $\frac{2}{3}AC$ unterm Spiegel NR der Flüssigkeit. Bezeichnet man daher die Fläche der beiden genannten Dreiecke durch F, die Seite AC mit h und die gesuchten Pressungen auf diese Dreiecke durch D und D', so ist $D = \gamma . F . \frac{1}{3}h$ und $D' = \gamma . F . \frac{2}{3}h$, mithin hat man:

$$D : D' = 1 : 2.$$

54. Aufgabe.

Ein Rechteck AD (Fig. 60) wird senkrecht in eine Flüssigkeit so eingetaucht, dafs die Seite AB im Spiegel der Flüssigkeit liegt; man soll in diesem Rechteck vom Winkelpunct B aus eine Gerade BE so ziehen, dafs sich die auf die beiden Flächen $ABEC$ und BED Statt findenden Pressungen wie $m:n$ verhalten.

Auflösung.

Es seyen, wenn BE die gesuchte Gerade ist, D, d und d' die Drücke oder Pressungen, welche die Flüssigkeit beziehungsweise auf die ganze Fläche $ABCD$ und ihre Theile BED und $ABCE$ ausübt; so ist der Bedingung der Aufgabe zufolge

$$d : d' = n : m \text{ oder } d : D = n : n + m.$$

Nun ist aber $d = \gamma . \frac{1}{2} BD . DE . \frac{2}{3} BD = \frac{1}{3} \gamma DE . BD^2$,

und $D = \gamma . AB . BD . \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \gamma AB . BD^2$,

folglich auch $n : n + m = \frac{1}{3} DE : \frac{1}{2} AB$,

woraus sofort $DE = \frac{3}{2} . \dfrac{n}{m+n} AB$

folgt.

Zusatz. Soll $m:n = 1:2$ seyn, so ist wegen $n = 2m$ sofort

$$DE = \frac{3}{2} . \frac{2m}{3m} AB = AB = DC,$$

also die Diagonale BC die gesuchte Theilungslinie (übereinstimmend mit dem Resultate der vorigen Aufgabe).

55. Aufgabe.

Das bis zur Seite AB (Fig. 61) vertical in eine Flüssigkeit eingetauchte Rechteck, ist durch eine mit AB parallele Gerade EF in zwei bestimmte Theile getheilt; es soll das Verhältnifs der Pressungen bestimmt werden, welches die Flüssigkeit auf diese beiden Theile ausübt.

Auflösung.

Es seyen D, d und d' die Pressungen, welche die Flüssigkeit beziehungsweise auf die Flächen AD, AF und ED ausübt; so ist

$$D:d=\tfrac{1}{2}\gamma AB.AC^2:\tfrac{1}{2}\gamma AB.AE^2=AC^2:AE^2$$

und daraus: $D-d:d=d':d=AC^2-AE^2:AE^2$.

Zusatz. Sollen die beiden Pressungen oder Drücke einander gleich seyn, so mufs wegen $d'=d$ auch $AC^2-AE^2=AE^2$, d. i. $AC=AE\sqrt{2}$ oder $AE:AC=1:\sqrt{2}$ Statt finden.

56. Aufgabe.

Es soll das Rechteck AD (Fig. 61) der vorigen Aufgabe durch eine mit AB parallel geführte Gerade EF in zwei Theile dergestalt getheilt werden, dafs sich die Pressungen auf die obere und untere Fläche AF und ED wie $m:n$ verhalten.

Auflösung.

Nach der vorigen Aufgabe ist $d:d'=AE^2:AC^2-AE^2$ und nach der gegenwärtigen Bedingung $d:d'=m:n$, folglich ist

$$AE^2:AC^2-AE^2=m:n \text{ oder } AE^2:AC^2=m:m+n\ .\ .\ (\alpha)$$

woraus sofort $AE=AC\sqrt{\left(\frac{m}{m+n}\right)}$ folgt.

Zusatz. Für $m=n$ wird wieder wie in der vorigen Aufgabe

$$AE=AC\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ oder } AC=AE\sqrt{2}.$$

57. Aufgabe.

Das vorige Rechteck AD (Fig. 61) durch mit AB parallele Linien in n Theile so zu theilen, dafs die Pressungen, welche die Flüssigkeit auf die einzelnen Theile oder horizontalen Streifen ausübt, alle einander gleich werden.

Auflösung.

Ist ED der n^{te} oder unterste Streifen, so ist nach der Proportion (α) der vorigen Aufgabe $AC^2:AE^2=n:n-1$, folglich:

$$AE = AC\sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \text{ und } EC = AC - AE = AC\left[1 - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right]$$

d. i.
$$EC = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n}} AC \; . \; . \quad (1)$$

Setzt man im Zähler dieser Formel (1) für n nach und nach $n-1$, $n-2$... so erhält man die entsprechenden Höhen der verschiedenen Streifen oder Theile, diese von unten nach aufwärts gezählt.

So ist z. B. für $n = 4$, d. i. wenn die Höhe AC des Rechteckes in 4 Theile von der genannten Beschaffenheit getheilt werden soll, in Fig. 61, *a* $CE = \cdot 134\, AC$, $EE' = \cdot 159\, AC$, $E'E'' = \cdot 207\, AC$ und endlich $AE'' = \cdot 500\, AC$.

58. Aufgabe.

Ein hohler gerader Kegel ABC (Fig. 62) ist in eine Flüssigkeit so eingetaucht, daſs dessen Achse CD gegen den Horizont oder Spiegel NR unter dem Winkel $AEC = \alpha$ geneigt ist und der Endpunct A des Durchmessers AB der Basis in diesem Flüssigkeitsspiegel liegt; es soll jener mit der Basis parallele Querschnitt MM' des Kegels gefunden werden, in welchem der Druck am gröſsten ist.

Auflösung.

Da sich der Druck irgend eines Querschnittes MM' wie die Gröſse desselben und die Tiefe dessen Schwer- oder Mittelpunctes unter dem Spiegel NR verhält, so läſst sich hier, indem die Querschnitte abnehmen, wenn die Tiefe ihrer Schwerpuncte zunimmt, im Voraus vermuthen, daſs in irgend einem dieser Querschnitte der Druck am gröſsten ist.

Es sey nun OP das vom Mittelpunct O des gesuchten Querschnittes MM' auf die Oberfläche der Flüssigkeit NR gezogene Perpendikel, also eine Verticallinie, $CD = h$, $AD = BD = r$, $CO = x$ und $EC = ED + DC = \frac{r}{tang\, \alpha} + h = a$; so hat der durch O mit der Basis AB parallel geführte Querschnitt die Fläche (aus $F : r^2 \pi = CO^2 : CD^2$) $F = \left(\frac{CO}{CD}\right)^2 r^2 \pi = \frac{x^2}{h^2} r^2 \pi$ und es ist daher der auf diesen Querschnitt ausgeübte Druck $z = \gamma F . PO$, oder, wenn man für F den Werth setzt und berücksichtigt, daſs $PO = EO . Sin\, \alpha = (a - x)\, Sin\, \alpha$ ist, auch

$$z = \frac{\gamma r^2 \pi\, Sin\, \alpha}{h^2} (a x^2 - x^3).$$

Da nun z ein Maximum werden soll, so hat man nach der Regel:

$$\frac{dz}{dx} = A(2ax - 3x^2) = 0 \text{ und daraus } x = 0 \text{ und } x = \tfrac{2}{3}a.$$

Da nun mit diesen Werthen der zweite Differenzialquotient

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A(2a - 6x)$$

beziehungsweise positiv und negativ ausfällt, so entspricht der erstere (wenn man sich den Kegel über die Spitze C hinaus fortgesetzt denkt) einem Minimum und der letztere einem Maximum von z. Dieser gröfste Druck oder Werth von z ist sofort

$$Z = \tfrac{4}{27}\gamma \frac{r^2 a^3 \pi \sin\alpha}{h^2}.$$

Zusatz. Ist die Achse des Kegels vertical und die Spitze C nach abwärts gerichtet (liegt also die Basis AB im Spiegel der Flüssigkeit), so ist $\alpha = 90^0$ und $a = h$, folglich $x = \tfrac{2}{3}h$ und $Z = \tfrac{4}{27}\gamma\pi r^2 h$.

59. Aufgabe.

Zwei ganz gleiche Cylinder A und B (Fig. 63) vom specifischen Gewichte $2s$ sind mittelst eines über eine Rolle C geführten Fadens miteinander verbunden und dabei jeder in eine Flüssigkeit, und zwar A in eine, deren Dichtigkeit im Verhältnifs der Tiefe, vom Spiegel an gerechnet, zunimmt, und B in eine Flüssigkeit getaucht, deren Dichtigkeit durchaus $= s$ ist. Wenn nun bei irgend einer Stellung dieser Cylinder das Gleichgewicht besteht und hierauf der Cylinder B um eine gewisse Tiefe weiter herabgezogen wird (wodurch also der Cylinder A, da er in die weniger dichte Schichte der betreffenden Flüssigkeit kommt, relativ schwerer wird), so ist die Frage, um wie viel dieser Cylinder B verlängert werden mufs, damit durch das zunehmende Gewicht desselben das Gleichgewicht wieder hergestellt werde.

Auflösung.

Es sey a die Grundfläche und b die Höhe eines jeden der beiden Cylinder, und in der ursprünglichen oder ersten Lage des Gleichgewichts c der Abstand der obern Basis des Cylinders A von der Oberfläche der betreffenden Flüssigkeit. Ist ferner h die Tiefe, in welcher das specifische Gewicht dieser nämlichen Flüssigkeit $= s$ ist, so erhält man das specifische Gewicht s' in der Tiefe x (aus der Proportion $s : s' = h : x$, der Bedingung der Aufgabe zufolge) $s' = \frac{s}{h}x$.

Das Gewicht jedes der beiden Cylinder ist, im leeren Raume gewogen $= 2\gamma a b s$ (wobei γ, wie hier durchaus, das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers bezeichnet) und das Gewicht des vom Cylinder A in der ersten oder ursprünglichen Lage verdrängten Flüssigkeit

$$\int_c^{b+c} \gamma a s' \, dx = \gamma a \int_c^{b+c} \frac{s}{h} x \, dx = \frac{\gamma a s}{h} \left[\frac{(b+c)^2 - c^2}{2} \right] = \frac{\gamma a s}{2h} (b^2 + 2bc)$$

so, daſs also dabei die Spannung des Faden DA nämlich

$$S = 2\gamma a b s - \frac{\gamma a s}{2h} (b^2 + 2bc) \quad . \; . \quad (1)$$

ist.

Geht nun in der zweiten Position der beiden Cylinder, für welche das Gleichgewicht hergestellt werden soll, der Abstand c in den kleinern c' über, so wird die Spannung desselben Fadenstückes DA eben so:

$$S' = 2\gamma a b s - \frac{\gamma a s}{2h} (b^2 + 2bc') \quad . \; . \quad (2)$$

seyn, welche sofort um $S' - S = \frac{\gamma a b s}{h} (c - c')$ gröſser als die vorige ist.

Was ferner die Spannung des Fadentheiles EB betrifft, so ist diese in der ersten oder ursprünglichen Lage, in welcher der Cylinder B noch seine anfängliche Länge b besitzt, sofort:

$$S_1 = 2\gamma a b s - \gamma a b s = \gamma a b s,$$

dagegen in der zweiten Lage, in welcher der Cylinder die Höhe b' besitzen soll: $S'_1 = 2\gamma a b' s - \gamma a b' s = \gamma a b' s$,
folglich um $S'_1 - S_1 = \gamma a s (b' - b)$ gröſser als in der ursprünglichen Lage des Gleichgewichtes. Da nun aber, wenn das Gleichgewicht auch in der zweiten Position bestehen soll, diese Zunahmen der Spannungen beiderseits einander gleich seyn müssen, so hat man die Bedingungsgleichung $S' - S = S'_1 - S_1$, oder wenn man substituirt und dann daraus $b' - b$ bestimmt, für die gesuchte Verlängerung des Cylinders B:

$$b' - b = \frac{b}{h} (c - c').$$

60. Aufgabe.

Wie tief sinkt ein durch Umdrehung erzeugtes Paraboloid ABD (Fig. 64) in eine Flüssigkeit ein, deren specifisches Gewicht n Mal so groſs als jenes des festen Körpers ist, wenn dabei die Achse AC vertical und der Scheitel A nach aufwärts gekehrt ist?

Auflösung.

Ist MEM' jener Querschnitt des Paraboloides bis zu welchem dasselbe in die gegebene Flüssigkeit einsinkt, und setzt man $AC = a$ und $AO = x$; so ist der Bedingung der Aufgabe zufolge:

$$\text{Vol.}\,MM'BD : \text{Vol.}\,ABD = 1 : n$$

oder

$$\text{Vol.}\,AMEM' : \text{Vol.}\,ABD = n - 1 : n.$$

Setzt man in diese Proportion für die Volumina die entsprechenden Werthe, d. i. wenn $BC = R$ und $MO = r$ ist, Vol. $AMEM' = \frac{1}{2}\pi r^2 x$ und Vol. $ABFD = \frac{1}{2}\pi R^2 a$, so erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$r^2 x : R^2 a = n - 1 : n$$

oder wegen $r^2 = px$ und $R^2 = pa$, wenn p der Parameter der erzeugenden Parabel ist, auch

$$px^2 : pa^2 = n - 1 : n \quad \text{d. i.} \quad x : a = \sqrt{(n-1)} : \sqrt{n}$$

woraus sofort

$$x = a\sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \quad \text{oder} \quad CO = a - x = a\left[\frac{\sqrt{n} - \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n}}\right]$$

folgt.

61. Aufgabe.

Ein Kubikzoll eines Metalles, dessen specifisches Gewicht $= s$ ist, wird in einen hohlen geometrischen Kegel verwandelt; es soll dabei jenes Verhältniſs zwischen der Höhe und dem Halbmesser der Basis gefunden werden, für welches, wenn man den Kegel in reines Wasser mit der Spitze abwärts einsenkt, die im Stande des Gleichgewichtes Statt findende eingetauchte Fläche ein Minimum wird.

Auflösung.

Setzt man für den bis zum Querschnitt DE (Fig. 65) in das Wasser einsinkenden Kegel ABC, $AO = r$, $CO = x$, $CP = z$ und $DP = r'$; so ist zuerst $r : r' = x : z$, also der Halbmesser jenes Querschnittes, bis zu welchem der Kegel einsinkt, $r' = \frac{rz}{x}$.

Das vom Kegel dadurch verdrängte Wasser beträgt daher:

$$\tfrac{1}{3} r'^2 \pi . CP = \tfrac{1}{3}\pi r^2 . \frac{z^3}{x^2}$$

folglich ist dessen Gewicht, wenn man den Zoll als Einheit nimmt und γ für das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser gelten läſst $= \frac{1}{3}\gamma\pi r^2 \frac{z^3}{x^2}$.

Zufolge der Bedingung der Aufgabe ist das Gewicht des Kegels $= \gamma s$, folglich muſs für das Gleichgewicht

$$\tfrac{1}{3}\gamma\pi r^2 \frac{z^3}{x^2} = \gamma s$$

seyn, woraus sofort

$$z = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\left(\frac{3s}{\pi r^2}\right)} \dots \quad (a)$$

folgt.

Die Mantelfläche des ganzen Kegels ist $= r\pi\sqrt{(r^2+x^2)}$ und da sich ähnliche Flächen wie die Quadrate ähnlicher Seiten verhalten, so ist, wenn man die eingetauchte Mantelfläche $DEC = y$ setzt:

$$r\pi\sqrt{(r^2+x^2)} : y = x^2 : z^2$$

woraus, wenn man y bestimmt und für z seinen Werth aus der Relation (a) setzt, sofort nach allen Reductionen

$$y = r\pi \sqrt[3]{\frac{9s^2}{\pi^2 r^4}} . x^{-\frac{2}{3}} \sqrt{(r^2+x^2)} \text{ folgt.}$$

Setzt man Kürze halber den constanten Factor dabei $= A$ und quadrirt diese Gleichung, so erhält man auch

$$y' = y^2 = A^2 \left(r^2 x^{-\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right).$$

Soll nun y ein Minimum werden, so wird es auch für denselben entsprechenden Werth von x das Quadrat davon, d. i. $y' = y^2$ seyn müssen und man hat nach der Regel:

$$\frac{dy'}{dx} = A^2 \left(-\tfrac{4}{3} r^2 x^{-\frac{7}{3}} + \tfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) = 0$$

und daraus $x = r\sqrt{2}$, welcher Werth in der That einem Kleinsten entspricht, indem damit der zweite Differenzialquotient positiv ausfällt.

Das gesuchte Verhältniſs von $AO : OC$ ist daher:

$$r : x = 1 : \sqrt{2}.$$

Mit diesem Werthe von x (als die im Kreise der Basis AB eingeschriebenen regelmäſsigen Viereckseite) erhält man für die Tiefe der Einsenkung aus der Relation (a):

$$z = \sqrt[3]{\left(2r^2 . \frac{3s}{\pi r^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6s}{\pi}}.$$

62. Aufgabe.

Auf einen bis zu einer gewissen Tiefe in eine Flüssigkeit eintauchenden Körper wird ein Gewicht so aufgelegt, daſs der Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit und jener des schwimmenden Körpers in eine und dieselbe Verticallinie fallen; es soll die durch das aufgelegte Gewicht bewirkte Einsenkung des Körpers bestimmt werden.

Auflösung.

I. Es sey X (Fig. 66) das variable in D aufgelegte Gewicht, bei welchem der Körper bis zum Querschnitt MM' einsinkt, wofür $AP = x$ seyn mag. Für $X = 0$ soll das Einsinken bis zum Querschnitt bb', wofür $Ac = a$, und für $X = P$, bis zum Querschnitt BB' Statt finden, wofür $cC = z$, also $AC = a + z$ seyn soll; endlich sey die Fläche des Querschnitts $MM' = Z$. Diefs vorausgesetzt, wird, wenn X um $\mathrm{d}X$ zunimmt, auch das Einsinken, d. i. x um $\mathrm{d}x$ zunehmen und das Volumen des dabei einsinkenden Körperelementes ist $\mathrm{d}V = Z\,\mathrm{d}x$, so wie das Gewicht des dadurch verdrängten Wassers $= \gamma s\,\mathrm{d}V = \gamma s Z\,\mathrm{d}x$, wenn nämlich wieder s das specifische Gewicht der Flüssigkeit und γ das Gewicht einer cubischen Einheit Wasser bezeichnet. Für das Gleichgewicht hat man also $\mathrm{d}X = \gamma s Z\,\mathrm{d}x$, oder wenn man integrirt:

$$\int_0^P \mathrm{d}X = \gamma s \int_a^{a+z} Z\,\mathrm{d}x \quad \text{d. i.} \quad P = s\gamma \int_a^{a+z} Z\,\mathrm{d}x \quad . \quad . \quad (1)$$

II. Ist der betreffende Körper durch Rotation um die verticale Achse AD entstanden, so geht die vorige Formel, wegen $Z = y^2\pi$, wobei $y = PM = PM'$ die der Abscisse $AP = x$ entsprechende Ordinate in der erzeugenden Curve AMB ist, über in

$$P = \gamma s \pi \int_a^{a+z} y^2\,\mathrm{d}x \quad . \quad . \quad (2)$$

1) Für einen Cylinder vom Halbmesser r ist $y = r$, folglich aus (2);

$$P = \gamma s \pi r^2 \int_a^{a+z} \mathrm{d}x = \gamma s \pi r^2 z = \gamma s A z$$

wenn man nämlich die Basis oder den constanten Querschnitt des Cylinders durch A bezeichnet, so, dafs also

$$z = \frac{P}{\gamma s A} \text{ ist.}$$

Ist für das Gewicht P' die Einsenkung $= z'$, so ist eben so $z' = \dfrac{P'}{\gamma s A'}$, folglich

$$z : z' = P : P'.$$

Uebrigens gilt dasselbe für jeden prismatischen Körper, dessen Querschnitte constant und $= A$ sind.

2) Für einen geraden Kegel, dessen Achse vertical und Spitze nach abwärts gekehrt ist, folgt, wenn r den Halbmesser der Grundfläche

und h die Höhe des Kegels bezeichnet $x:y=h:r$, also $y=\frac{r}{h}x$ und aus (2):

$$P=\gamma s\pi\frac{r^2}{h^2}\int_a^{a+z}x^2\,dx=\frac{\gamma s\pi r^2}{3h^2}(3a^2z+3az^2+z^3)$$

aus welcher Gleichung z zu bestimmen ist.

3) Für ein Paraboloid mit vertikaler Achse und abwärts gekehrtem Scheitel ist $y^2=px$, folglich

$$P=\gamma s\pi p\int_a^{a+z}x\,dx=\frac{\gamma s\pi p}{2}(2az+z^2)$$

woraus wieder z bestimmt werden muss. Es ist hier ganz einfach, wenn man die quadratische Gleichung nach z auflöst:

$$z=-a+\sqrt{\left(a^2+\frac{2P}{\gamma s\pi p}\right)}$$

Anmerkung. Hier wie in allen diesen Fällen hängt der Werth a vom ursprünglichen Gewichte des eintauchenden Körpers ab und kann derselbe durch Versuche gefunden werden. Will man jedoch a durch Rechnung finden, so sey G das Gewicht des Körpers, folglich ist, da das Volumen des Theiles $bAb'=\frac{1}{2}(bc)^2.\pi.Ac=\frac{1}{2}pa.\pi.a=\frac{1}{2}\pi pa^2$, also $\frac{1}{2}\gamma s\pi pa^2$ das Gewicht der von demselben verdrängten Flüssigkeit ist, sofort $G=\frac{1}{2}\gamma s\pi pa^2$ und daraus $a=\sqrt{\left(\frac{2G}{\gamma s\pi p}\right)}$, welchen Werth man noch einfacher aus dem vorigen Werthe von z erhält, wenn man, wie es in der Ordnung, $z=a$, $a=0$ und $P=G$ setzt.

4) Für einen geraden Cylinder DGC (Fig. 67), welcher als Basis die von der Parabel begrenzte Ebene DCE besitzt, hat man, wenn a) die Kanten DF, EG horizontal sind und der Scheitel C nach abwärts liegt, $Z=2y'l$, wenn $DF=EG=l$ ist, oder wegen $y=\sqrt{px}$, auch $Z=2l\sqrt{p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}$. Mit diesem Werthe folgt aus der ursprünglichen Relation (1):

$$P=2\gamma sl\sqrt{p}\int_a^{a+z}x^{\frac{1}{2}}\,dx=\tfrac{4}{3}\gamma sl\sqrt{p}\,.\left[(a+z)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right]$$

aus welcher Gleichung sofort z bestimmt werden muſs.

Liegt dagegen b) der Scheitel wie in Fig. 67, a nach aufwärts, und ist die Höhe $CF=b$, so muſs man in dem vorigen Ausdruck $y=\sqrt{[p(b-x)]}$ setzen.

5) Liegen bei dem vorigen parabolischen Cylinder die Grundflächen DEC horizontal, stehen also die Kanten DF, EG vertical; so bildet die Querschnittsfläche Z ein parabolisches Segment und

zwar ist $Z = \frac{2}{3} b c$, wenn $CF = b$ und $DE = c$ ist. (Fig. 67, a). Es folgt daher wieder aus Relation (1):

$$P = \tfrac{2}{3} \gamma s b c \int_{a}^{a+z} dx = \tfrac{2}{3} \gamma s b c z$$

und daraus $z = \dfrac{3P}{2\gamma s b c}$.

Zusatz. Taucht der Körper oder das Gefäfs vom Gewichte G ursprünglich bis auf die Tiefe AB (Fig. 68) in die Flüssigkeit ein und wird dasselbe durch ein Gegengewicht X bis MM' gehoben; so darf man, um diese Höhe $AM = z$ zu bestimmen, in der obigen Relation (1) nur z und P negativ nehmen.

So ist z. B. für ein cylindrisches oder prismatisches Gefäfs vom Querschnitt A, wie diefs bei Gasometern vorkömmt, nach dem 1. Beispiel

$$X = \gamma s A z$$

oder wenn man, um das Gewicht G des Gefäfses in die Formel zu bringen, die Höhe desselben $AC = h$ setzt, wodurch $G = \gamma s A h$ wird, auch

$$X = G \frac{z}{h},$$

so, dafs also das Gegengewicht X genau so wie die Höhe AM zunimmt, für $z = 0$ ebenfalls Null und für $z = h$ gleich G wird.

63. Aufgabe.

In einem Gefäfse befinden sich zwei verschiedene Flüssigkeiten, die sich mit einander nicht vermischen, eine über der andern, und zwar hat die Obere, als die leichtere, das spezifische Gewicht s und die untere oder schwerere jenes s'; wenn nun ein fester Körper vom specifischen Gewichte $\sigma > s$ und $< s'$ in diese Flüssigkeiten eingetaucht wird, so wird er, sobald das Gleichgewicht eingetreten, zum Theil in der einen, und zum Theil in der andern Flüssigkeit schwimmen, es soll das Verhältnifs angegeben werden, in welchem die beiden, in diese Flüssigkeiten eintauchenden Theile des Körpers zu einander stehen.

Auflösung.

Es sey v das Volumen jenes Theiles des Körpers, welcher in die obere oder leichtere, und v' jener Theil, welcher in die untere oder schwerere Flüssigkeit eintaucht; so folgt unmittelbar für das Gleichgewicht

$$vs + v's' = (v + v')\sigma$$

oder $\quad v(\sigma - s) = v'(s' - \sigma)$ d. i. $v : v' = s' - \sigma : \sigma - s$

und daraus folgt auch noch, wenn man das Volumen des Körpers $v + v' = V$ setzt:

$$v : V = s' - \sigma : s' - s$$

und $$v' : V = \sigma - s : s' - s \quad . \quad . \quad (a)$$

64. Aufgabe.

Ein Körper vom Volumen V und dem specifischen Gewichte σ schwimmt einmal zum Theil im Wasser, zum Theil in der Luft, und ein zweites Mal im Wasser und leeren Raume; es soll das Verhältnifs angegeben werden, in welchem in diesen beiden Fällen die in das Wasser tauchenden Theile zu einander stehen.

Auflösung.

Es sey der in das Wasser einsinkende Theil des Körpesr im erstern Falle gleich v_1 und im letztern $= v_2$, so ist nach der Relation (a) der vorigen Aufgabe, im erstern Falle, wenn s das specifische Gewicht der Luft und s' jenes des Wassers bezeichnet:

$$\frac{v_1}{V} = \frac{\sigma - s}{s' - s}$$

und im zweiten Falle, wegen $s = 0$: $\dfrac{v_2}{V} = \dfrac{\sigma}{s'}$.

Es ist daher

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sigma}{s'} \cdot \frac{s' - s}{\sigma - s}$$

besteht der betreffende Körper z. B. aus einem Stück Eschenholz vom specifischen Gewicht $\cdot 904$, so ist, wegen $\sigma = \cdot 904$, $s' = 1$ und wenn man für die Luft $s = \cdot 00125$ setzt:

$$\frac{v_2}{v_1} = 1\cdot 0001.$$

65. Aufgabe.

Es soll das Mafs oder die Gröfse der **Stabilität** eines **Schiffes** bestimmt werden.

Auflösung.

I. Es bezeichne DEZ (Fig. 69) den gröfsten Querschnitt des Schiffes, welcher durch den Schwerpunkt O desselben senkrecht auf die Längenachse geführt wird, AB die Schwimmlinie, wenn das Schiff aufrecht schwimmt, und $A'B'$ diese Linie, wenn das Schiff durch eine kleine Drehung oder Schwankung in die in der Zeichnung dargestellte schiefe Lage gebracht wird. Ist o der Schwerpunct des verdrängten Wassers in der ursprünglichen oder aufrechten, und o' dieser Punct in der schiefen Lage des Schiffes; so sucht (§. 320) die im Puncte O senkrecht nach abwärts wirkende Kraft G (gleich dem Gewicht des Schiffes) und die im Puncte o' vertical nach aufwärts wirkende Kraft $P = G$, d. h. das Kräftenpaar $P = G$, die ursprüngliche Lage des Schiffes wieder herzustellen, wenn nämlich das Metacentrum F höher als der Schwerpunct O des Schiffes liegt.

Da aber, wenn FJ perpendikulär auf die Richtung der Kräfte P gezogen wird, das Moment S dieses Kräftenpaares P nach einem bekannten Satze $S = G \,.\, FJ$ ist*), so dient dasselbe zugleich als Mafs für die Gröfse der Stabilität. Setzt man die Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunct des Schiffes, d. i. $OF = a$, und den Drehungswinkel $ACA' = \alpha$, so wird auch die Grösse der Stabilität:

---

*) Bekanntlich läfst sich zu zwei gleichen parallelen Kräften, welche auf eine gerade Linie nach entgegengesetzten Richtungen wirken, d. i. zu einem sogenannten Kräftenpaar P (§. 21) keine dritte Kraft, wohl aber ein zweites Kräftenpaar Q finden, welches mit dem erstern im Gleichgewichte steht. Um nämlich die Bedingung fürs Gleichgewicht zu finden, sey in Fig. I. das Kräftenpaar P in den Puncten BB' und jenes Q in den Puncten CC' der Geraden AD in derselben Ebene angebracht. Fällt man aus irgend einem Puncte A dieser Geraden auf die Richtungen dieser vier Kräfte die Perpendikel AD, AE und setzt $DD' = a$ und $EE' = b$; so besteht das Gleichgewicht, wenn (Nr. 20, Anmerkung 2)
$P \,.\, AD + Q \,.\, AE' = P \,.\, AD' + Q\; AE$ oder $P(AD - AD') = Q(AE - AE')$
d. i. wenn die Relation $Pa = Qb$
Statt findet, d. h. das Kräftenpaar P ist mit jenem Q im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft in ihren Abstand von der Gegenkraft bei dem einen Kräftenpaar eben so grofs wie bei dem andern ist, oder da man das Product Pa das Moment des Kräftenpaares P, so wie jenes Qb das Moment des Kräftenpaares Q nennt, wenn die Momente der beiden Kräftenpaare einander gleich sind.

$$S = G\, a\, Sin\, \alpha \; . \; . \; . \quad (1)$$

wobei man jedoch den kleinen Winkel α als eine constante Grösse, die bei der Beurtheilung von S nicht mit in Anschlag kommt, zu betrachten hat.

II. Um diese Entfernung oder den Faktor a dieser Formel näher zu bestimmen, bemerke man, dass durch den Uebergang des Schiffes aus der aufrechten in die schiefe Lage, der Schwerpunct o des verdrängten Wassers nach o' rückt und sich der keilförmige Raum ACA' aus dem Wasser heraus, dagegen der eben so grosse BCB' in das Wasser hineinzieht, so als ob die Drehung um die durch C gehende Längenachse Statt gefunden hätte, wodurch sonach der Auftrieb auf der einen Seite um die Grösse einer im Schwerpuncte c des Dreieckes ACA' angreifenden Kraft p vermindert, dagegen auf der andern Seite des Punctes C durch eine im Schwerpunct c' des Dreieckes BCB' angreifende, eben so grosse Kraft p vergrössert wird.

Der in o wirksame Auftrieb P sammt dem Kräftepaar p wird also durch den in o' wirksamen Auftrieb P ersetzt, so, dass wenn man sich in o' eine nach abwärts wirkende gleiche Gegenkraft P angebracht denkt, diese mit dem in o wirksam gedachten Auftrieb P und dem genannten Kräftepaar p, folglich mit andern Worten, die beiden Kräftenpaare $P = G$, in o und o' angebracht, und p in c und c' angebracht, sofort mit einander im Gleichgewichte seyn müssen. Diess gibt nach dem bekannten Satze der Momente (vergleiche die vorige Note), wenn Fi perpendikulär auf die durch o gehende Verticale ist,

$$P \,.\, Fi = p \,.\, rr'.$$

Ist aber der Querschnitt des eingetauchten Theiles $AZB = A'ZB' = F$, jener des Theiles $ACA' = BCB' = f$, ferner der horizontale Abstand der beiden Schwerpuncte c, c' der Dreiecke ACA' und BCB' d. i. $rr' = b$, und der Horizontalabstand der beiden Schwerpuncte c, c' des verdrängten Wassers, d. i. die Horizontalprojection des Weges, welchen der Schwerpunct o bei dem Neigen des Schiffes beschreibt, nämlich $Fi = c$; so geht die vorige Bedingungsgleichung, wegen $P : p = F : f$, in jene $Fc = fb$ über, woraus sofort

$$c = \frac{bf}{F}, \quad \text{und} \quad oF = \frac{c}{Sin\, \alpha} = \frac{bf}{F\, Sin\, \alpha} \quad \text{folgt.}$$

Nun ist, um auf die obige Relation (1) zurückzukommen, der Factor $a = OF = Oo + oF$ oder, wenn man die Entfernung der beiden Schwerpuncte O und o des Schiffes und verdrängten Wassers in der aufrechten Stellung des Schiffes, d. i. $Oo = e$ setzt und für oF den eben gefundenen Werth substituirt, auch

$$a = e + \frac{bf}{F \, Sin\, \alpha}, \text{ folglich damit } S = G\left(e \, Sin\, \alpha + \frac{bf}{F}\right) \;.\;.\; (2)$$

Ist nun der Drehungswinkel α sehr klein, so kann man $Sin\, \alpha = \alpha$. und für die Flächen der beiden schmalen Dreiecke $ACA' = BCB'$, wenn man die Breite des Schiffes $AB = A'B' = B$ setzt, $f = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} B . \frac{1}{2} B \varphi = \frac{1}{8} B^2 \varphi$, so wie $rr' = b = 2 . \frac{2}{3} \frac{B}{2} = \frac{2}{3} B$ setzen; dadurch wird der vorige Ausdruck $S = G\left(\frac{B^3}{12 F} + e\right)\alpha$ oder im Falle der Schwerpunct o unter jenem O fällt, wodurch e negativ wird, auch $S = G\left(\frac{B^3}{12 F} - e\right)\alpha$, folglich ist allgemein das Mafs der Stabilität:

$$S = G\left(\frac{B^3}{12 F} \pm e\right)\alpha \;.\;.\; (3)$$

Die Stabilität des Schiffes ist daher um so gröfser, je breiter das Schiff ist, je tiefer der Schwerpunct des Schiffes unter jenem des verdrängten Wassers liegt und je gröfser dessen Gewicht ist.

Liegt der Schwerpunct O über jenem o, wird nämlich e negativ, so hat das Schiff für $e > \frac{B^3}{12 F}$, wodurch S negativ ist, keine Stabilität, ist dagegen $e = \frac{B^3}{12 F}$ also $S = o$, so schwimmt das Schiff im sogenannten indifferenten Gleichgewicht.

Zusatz 1. Für ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Querschnitt AE (Fig. 70) die Breite $AB = b$ und Höhe $AD = h$ hat und wofür die Tiefe der Einsenkung $FD = c$ ist, hat man $F = bc$ und $e = Oo = -\left(\frac{h-c}{2}\right)$, folglich nach der Formel (3) für das Mafs der Stabilität:

$$S = G\left(\frac{b^3}{12 bc} - \frac{h}{2} + \frac{c}{2}\right)$$

oder wenn $n:1$ das Verhältnifs zwischen dem specifischen Gewicht des Parallelopipedes und jenem der betreffenden Flüssigkeit ist, wodurch $c = nh$ wird, auch

$$S = G\left[\frac{b^2}{12 nh} - \frac{h}{2}(1-n)\right].$$

Soll $S=o$ werden, so mufs $\frac{b^2}{12nh}=\frac{(1-n)h}{2}$ Statt finden, woraus $n^2-n=-\frac{b^2}{6h^2}$ oder $n=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{b^2}{6h^2}\right)}$ . . . (s) folgt.

Für $\frac{b^2}{6h^2}<\frac{1}{4}$, d. i. $\frac{b}{h}<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ erhält n zwei Werthe, für welche das indifferente Gleichgewicht eintritt; so ist z. B. für $h=b$ sofort

$$n=\tfrac{1}{2}\pm\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ d. i. } n=\cdot 7887 \text{ und } n=\cdot 2113.$$

Ist n sehr klein, also das specifische Gewicht des Körpers gegen jenes der Flüssigkeit gering, so ist auch $\frac{b^2}{12nh}>\frac{1}{2}h(1-n)$ und es schwimmt der Körper mit Stabilität, wobei AB horizontal ist.

Ist $\frac{b}{h}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ d. i. $b:h=\sqrt{3}:\sqrt{2}$, so gibt es nur einen Werth für n, nämlich $n=\frac{1}{2}$, bei welchem das Parallelopiped ohne Stabilität oder im indifferenten Gleichgewichte schwimmt. Für $\frac{b}{h}>\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ gibt es dagegen gar keinen Werth von n, für welchen dieses Gleichgewicht eintreten kann, sondern der Körper schwimmt bei allen Werthen seines specifischen Gewichtes mit Stabilität, so lange dieses Gewicht nur kleiner als jenes der Flüssigkeit ist, und zwar in aufrechter Stellung.

Zusatz 2. Die obige Formel (2) kann auch dazu dienen, die verschiedenen Lagen eines Körpers zu finden, bei welchen er im indifferenten Gleichgewichte schwimmt; man darf nämlich darin nur $S=o$ setzen und die entstehende Gleichung nach α auflösen.

So ist z. B. für ein Parallelopiped von der Breite $AB=a$ (Fig. 71) und Einsenkung $FD=c$ die Fläche $FDEG=F'DEG'=F=ac$, so wie jene $OFF'=OGG'=f=\frac{1}{2}OF.FF'$ oder wegen $OF=\frac{1}{2}a$ und $FF'=\frac{1}{2}a\,tang\,\alpha$ auch $f=\frac{1}{8}a\,tang\,\alpha$; ferner ist, wenn c und c' wieder die Schwerpuncte dieser rechtwinkligen Dreiecke bezeichnen, und ca auf OF und cr so wie ab auf NR perpendikulär sind, sofort $ac=\frac{1}{3}FF'=\frac{1}{6}a\,tang\,\alpha$ und $Oa=\frac{2}{3}OF=\frac{1}{3}a$, folglich ist der Horizontalabstand des Schwerpunctes c von O d. i.

$$Or=Ob+br=Oa.Cos\,\alpha+ac.Sin\,\alpha=\tfrac{1}{3}a\,Cos\,\alpha+\tfrac{1}{6}a\,Sin\,\alpha\,tang\,\alpha$$

und sonach der Horizontalabstand beider Schwerpuncte c und c' von einander, d. i. $rr'=b=\frac{2}{3}a\,Cos\,\alpha+\frac{1}{3}a\frac{Sin^2\alpha}{Cos\,\alpha}$.

Mit diesen Werthen erhält man aus der genannten Bedingungsgleichung, in welcher, da hier der Schwerpunct o des verdrängten

Wassers tiefer als jener O des Körpers liegt, e negativ zu nehmen, also

$$0 = \frac{bf}{F} - e \, Sin\, \alpha \text{ zu setzen ist, sofort}$$

$$0 = \tfrac{1}{8} \frac{a^2 \, tang\, \alpha}{ac} \cdot \frac{a}{3} \left(2 \, Cos\, \alpha + \frac{Sin^2 \alpha}{Cos\, \alpha} \right) - e \, Sin\, \alpha$$

oder

$$Sin\, \alpha \left[\frac{a^2}{24\,c} \left(1 + \frac{1}{Cos^2 \alpha} \right) - e \right] = o \text{ oder wegen } \frac{1}{Cos^2 \alpha} = 1 + tang^2 \alpha$$

auch:

$$Sin\, \alpha \left[\frac{a^2}{24\,c} (2 + tang^2 \alpha) - e \right] = o.$$

Aus dieser Gleichung folgt als die eine Wurzel $Sin\, \alpha = 0$ und als zweite Wurzel $\quad tang\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{24\,c\,e}{a^2} - 2 \right)}$;

von diesen beiden Werthen entspricht der erstere (wofür $\alpha = 0$) dem aufrechten und der letztere dem schiefen Schwimmen.

Dieser letztere Fall ist jedoch nur möglich, wenn $\frac{24\,c\,e}{a^2} > 2$ d. i. $\frac{ce}{a^2} > \frac{1}{12}$, oder wenn die Höhe des Parallelopipedes $= h$ und dessen specifisches Gewicht $= s$, wodurch, da das specifische Gewicht des Wassers $= 1$ ist, $c = sh$ und $e = \frac{h - c}{2} = \frac{h}{2}(1 - s)$ wird, wenn die Bedingung $\frac{h^2}{a^2} > \frac{1}{6\,s\,(1 - s)}$ Statt findet.

Für $\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{6\,s\,(1 - s)}$ wird $tang\, \alpha = o$, also abermals $\alpha = 0$, so, dafs auch in diesem Falle das Parallelopiped aufrecht schwimmt.

Ist z. B. $h = a$, und $s = \frac{1}{2}$, so wird

$$tang\, \alpha = \sqrt{\left(\frac{12\,s\,(1 - s)\,h^2}{a^2} - 2 \right)} = 1, \text{ daher } \alpha = 45^0.$$

Im letztern Falle ist für denselben Werth von $s = \frac{1}{2}$:

$$\frac{h^2}{a^2} = \tfrac{2}{3}, \text{ also } \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

was sofort auch aus der obigen Relation (s) im Zusatz 1 folgt, indem für diesen Werth von $\frac{h}{a} \left(\text{dort } \frac{h}{b} \right)$ die Verhältnifszahl $n = \frac{1}{2}$ wird.

D) Aus der Hydrodynamik.

66. Aufgabe.

In einem mit einer kleinen Bodenöffnung versehenen prismatischen Gefäfse AD (Fig. 72) befinden sich mehrere Flüssigkeiten, welche sich nicht mit einander vermischen, übereinander; es soll die Ausflufszeit für alle diese Flüssigkeiten bestimmt werden.

Auflösung.

Es seyen von unten auf gezählt s, s', s''.. die specifischen Gewichte der einzelnen Flüssigkeitsschichten CE', EF', FG'.., A der constante Querschnitt des Gefäfses und a die Gröfse der Bodenöffnung; so ist während die unterste Schichte vom specifischen Gewichte s und der Höhe CE ausfliefst, der Druck gegen die Öffnung eben so grofs, als wenn anstatt der über der Schichte CE' stehenden Flüssigkeiten von den specifischen Gewichten s', s''.. und den Höhen EF, FG.. eine einzige Flüssigkeit vom specifischen Gewichte s und der Höhe $h = \frac{s'}{s} EF + \frac{s''}{s} FG + \frac{s'''}{s} GH + \ldots$ stände. Es handelt sich also zuerst blofs darum, die Ausflufszeit für die untere Schichte CE', d. i. die Zeit zu bestimmen, binnen welcher der Spiegel einer gleichartigen Flüssigkeit, welcher ursprünglich um die Höhe $H = CE + h$ über der Öffnung steht, um die Höhe h herabsinkt; diese Zeit ist aber (§. 335 und Nr. **163**):

$$t = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch die Ausflufszeit für die nächste Schichte EF', wenn man für die darüber stehenden Flüssigkeiten wieder eine einzige homogene Flüssigkeit von dem specifischen Gewichte s' und der Höhe $h' = \frac{s''}{s'} FG + \frac{s'''}{s'} GH + \ldots$ annimmt und