B) Aus der Dynamik.

41. Aufgabe.

Ein auf einer schiefen Ebene AB (Fig. 47) liegender Körper vom Gewichte Q ist durch einen mit der Ebene AB parallel laufenden, über eine Rolle geführten Faden mit dem Gewichte P verbunden; es sollen die Gesetze der durch das Herabsinken des Gewichtes entstehenden Bewegung, mit Rücksicht auf die Reibung, welche zwischen dem Körper und der schiefen Ebene Statt findet, bestimmt werden.

Auflösung.

Ist α der Neigungswinkel der schiefen Ebene und μ der betreffende Reibungscoeffizient, so ist $Q\,Sin\,\alpha$ das relative Gewicht des Körpers und $Q\,Cos\,\alpha$ der normale Druck, folglich $\mu\,Q\,Cos\,\alpha$ der Betrag oder die Gröfse der Reibung. Die nöthige Kraft um den Körper über die schiefe Ebene hinauf zu ziehen ist demnach $K = Q\,Sin\,\alpha + \mu\,Q\,Cos\,\alpha$; ist daher $P > K$, so ist die bewegende Kraft $K' = P - Q\,Sin\,\alpha - \mu\,Q\,Cos\,\alpha$ und die bewegte Masse $M = P + Q$, folglich entsteht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung für welche die Beschleunigung (§. 146, Gl. 2)

$$G = \frac{K'}{M}\,g = \frac{P - Q\,Sin\,\alpha - \mu\,Q\,Cos\,\alpha}{P + Q}\,g$$

und womit sofort Alles gegeben ist; denn es ist z. B. der in der Zeit t zurückgelegte Weg $s = \frac{1}{2}\,G\,t^2$,
die dabei erlangte Endgeschwindigkeit $v = G\,t$ u. s. w.

Zusatz. Soll die Bewegung gleichförmig werden, so mufs $G = 0$ seyn, diefs gibt also $0 = P - Q\,Sin\,\alpha - \mu\,Q\,Cos\,\alpha$, woraus

$$\mu = \frac{P}{Q\,Cos\,\alpha} - tang\,\alpha$$

folgt, wenn nämlich (aufser Q) die Gröfsen P und α gegeben, oder

$$P = Q\,(Sin\,\alpha + \mu\,Cos\,\alpha)$$

wenn die Gröfsen μ und α gegeben, oder endlich

$$Sin\,\alpha = \frac{P \pm \mu \sqrt{[(1+\mu^2)\,Q^2 - P^2]}}{(1+\mu^2)\,Q}$$

wenn die Gröſsen P und μ gegeben sind

Anmerkung. Ist $Q\,Sin\,\alpha > P + \mu\,Q\,Cos\,\alpha$, so gleitet der Körper O mit gleichförmig beschleunigter Bewegung über die schiefe Ebene herab, und zwar ist die Beschleunigung:

$$G = \frac{Q\,Sin\,\alpha - P - \mu\,Q\,Cos\,\alpha}{P+Q}\,g.$$

Die Bewegung wird dabei gleichförmig, wenn $G = 0$ d. i.

$$Q\,Sin\,\alpha = P + \mu\,Q\,Cos\,\alpha \text{ oder } P = Q\,(Sin\,\alpha - \mu\,Cos\,\alpha) \text{ ist.}$$

42. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen das Gewicht P den Körper O vom Gewichte Q (Fig. 47) in der kürzesten Zeit über die schiefe Ebene AB, bei welcher die Höhe $BC = h$ gegeben ist, hinaufzieht.

Auflösung.

Wird auf die Reibung keine Rücksicht genommen, so ist, wenn $P > Q\,Sin\,\alpha$, die Beschleunigung:

$$G = \frac{P - Q\,Sin\,\alpha}{P+Q}\,g \text{ und } AB = \frac{h}{Sin\,\alpha}.$$

Wird demnach der Weg AB in der Zeit t zurückgelegt, so ist $AB = \frac{1}{2}\,G\,t^2$ oder $t = \sqrt{\left(\frac{2\,AB}{G}\right)}$, oder wenn man für AB und G die Werthe setzt, auch:

$$t = \sqrt{\left[\frac{2\,h\,(P+Q)}{g\,Sin\,\alpha\,(P - Q\,Sin\,\alpha)}\right]} \;..\; (1)$$

Da nun der Zähler dieses Bruches constant ist, so wird t am kleinsten, wenn der Nenner, oder der Factor $P\,Sin\,\alpha - Q\,Sin^2\,\alpha$ am gröſst ist; setzt man daher

$$z = P\,Sin\,\alpha - Q\,Sin^2\,\alpha,$$

so ist nach der Regel:

$$\frac{dz}{d\alpha} = P\,Cos\,\alpha - 2\,Q\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha = 0 \text{ und daraus}$$

$Cos\,\alpha = 0$ als die eine, und $Sin\,\alpha = \frac{P}{2\,Q}$ als die zweite Wurzel.

Der zweite Differenzialquotient

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = -P\,Sin\,\alpha - 2\,Q\,(-Sin^2\,\alpha + Cos^2\,\alpha)$$

ist für den erstern Werth, nämlich für $Cos\,\alpha = 0$, wofür $\alpha = 90^0$ und $Sin\,\alpha = 1$ ist, sofort $= 2\,Q - P$, dagegen für den zweiten Werth, d. i. für $Sin\,\alpha = \frac{P}{2\,Q}$, wie leicht zu sehen $= \frac{(P + 2\,Q)(P - 2\,Q)}{2\,Q}$.

Da nun, wenn α möglich seyn soll, $P \overline{\gtrless} 2\,Q$ seyn mufs, so ist für den letztern Werth, d. i. für $P < 2\,Q$, wofür $\alpha < 90^0$ ist, dieser zweite Differenzialquotient negativ, folglich dafür z ein Maximum.

Für $P = 2\,Q$ dagegen, wofür $\alpha = 90^0$, also $Cos\,\alpha = 0$ ist, wird dieser zweite Quotient und damit auch der dritte Differenzialquotient $= Cos\,\alpha\,(-P + 8\,Q\,Sin\,\alpha)$, Null und endlich der vierte Differenzialquotient $= P\,Sin\,\alpha + 8\,Q\,(Cos^2\alpha - Sin^2\alpha)$ dafür negativ, so, dafs auch für diesen Werth z ein Maximum oder t ein Minimum wird, d. h. die Zeit t wird am kleinsten, wenn $Sin\,\alpha = \frac{P}{2\,Q}$ ist, es mag dabei $P =$ oder $< 2\,Q$ seyn

Ohne Anwendung der Differenzialrechnung gelangt man zu demselben Resultate auch auf folgende Art.

Setzt man nämlich den gesuchten gröfsten Werth des obigen Nenners z, d. i. $P\,Sin\,\alpha - Q\,Sin^2\,\alpha = A$, so folgt daraus

$$Sin\,\alpha = \frac{P \pm \sqrt{(P^2 - 4\,A\,Q)}}{2\,Q};$$

soll nun α möglich seyn, so kann A höchstens so grofs werden, dafs $P^2 - 4\,A\,Q = 0$, d. i. $A = \frac{P^2}{4\,Q}$ wird, was sofort

$$Sin\,\alpha = \frac{P}{2\,Q} \,.\,. \quad (\gamma)$$

wie zuvor gibt.

Um aber den kleinsten Werth von t aus der Gleichung (1) zu erhalten, darf man nur für $Sin\,\alpha$ diesen gefundenen Werth $\frac{P}{2\,Q}$ setzen; dadurch erhält man:

$$t = \sqrt{\left[\frac{8\,h\,Q\,(P + Q)}{g\,P^2}\right]} \,.\,. \quad (2)$$

Ist aufserdem noch $P = 2\,Q$, also $\alpha = 90^0$, so wird dafür der kleinste Werth:

$$t = \sqrt{\left(\frac{6\,h}{g}\right)} \,.\,. \quad (3)$$

Zusatz. Ist φ jener Winkel der schiefen Ebene, bei welchem unter Beibehaltung derselben Höhe h, P mit Q im Gleichgewichte steht, also $P = Q\,Sin\,\varphi$ oder $\frac{P}{2\,Q} = \frac{1}{2}\,Sin\,\varphi$ ist; so hat man, wenn α jenen

Winkel der schiefen Ebene bedeutet, für welchen die Hubzeit t ein Minimum wird, zufolge der vorigen Bedingungsgleichung (γ),

$$Sin\,\alpha = \tfrac{1}{2}\,Sin\,\varphi.$$

Ist z. B. in Fig. 48 $AB = L$ und $A'B = l$, so ist, wegen $BC = h$ sofort $h = l\,Sin\,\varphi = L\,Sin\,\alpha$, folglich nach der vorigen Bedingungsgleichung $\frac{h}{L} = \frac{1}{2}\,\frac{h}{l}$ d. i. $L = 2\,l$.

Anmerkung. Ohne Rücksicht auf die Bedingungen des Maximum und Minimum, also ohne Beziehung des Winkels α auf die Gröfsen P und Q, folgt aus (1) für $\alpha = 90°$ sofort:

$$t = \sqrt{\frac{2\,h\,(P+Q)}{g\,(P-Q)}}$$

wobei offenbar weder ein Maximum noch ein Minimum möglich ist, weil sich, wenn P ohne Ende zunimmt, die Zeit t ohne Ende dem Werthe (für den freien Fall von P) von $t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$, und wenn P sich ohne Ende dem Werthe von Q nähert, die Zeit t fortwährend zunimmt und zuletzt unendlich grofs wird.

Ist jedoch der Winkel α nicht im voraus gegeben, sondern ist es frei gelassen den Körper Q über eine schiefe Ebene oder vertical zu heben und frägt man nur, wie diefs in der kürzesten Zeit geschehen könne; so geben die obigen Relationen hierauf die Antwort und zwar sagen sie aus, dafs wenn $P < 2\,Q$ ist, diese Bedingung nur bei jener schiefen Ebene möglich wird, für welche $Sin\,\alpha = \frac{P}{2\,Q}$ ist, wofür dann die nöthige Zeit in (2) gegeben, dafs diese Bedingung jedoch, wenn $P = 2\,Q$ ist, nur durch das verticale Heben, also durch gar keine schiefe Ebene zu erreichen sey, in welchem Falle diese kürzeste Zeit durch die Gleichung (3) bestimmt ist, und dafs endlich wenn $P > 2\,Q$, diese Bedingung weder durch eine schiefe Ebene, noch durch das verticale Heben zu erreichen sey.

43. Aufgabe.

Ein Körper fällt von einer so bedeutenden Höhe herab, dafs man dabei die Anziehungskraft der Erde nicht mehr (wie diefs in gewöhnlichen Fällen annähernd geschieht) als constant ansehen kann, sondern diese nach dem Gesetze in Rechnung gebracht werden mufs, nach welchem diese Kraft genau so abnimmt wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunct der Erde zunimmt; es soll die Geschwindigkeit bestimmt werden, welche der fallende Körper erlangt hat, nachdem er durch eine gewisse Höhe gefallen ist.

Auflösung.

Ist A (Fig. 49) der Punct, von wo aus der Körper fällt, C der Mittelpunct der Erde, also AC eine lothrechte Linie, welche die Oberfläche der Erde im Puncte B schneidet und P jener Punct der Geraden AC, in welchem sich der fallende Körper am Ende der Zeit t befindet; so sey der Halbmesser der Erde $CB = r$, die Höhe $BA = h$, das Stück $AP = x$ und die Distanz $CP = z$, ferner sey, wie immer, g die beschleunigende Kraft der Schwere an der Oberfläche der Erde, dagegen φ ihre Intensität im Puncte P, d. h. in der Entfernung CP. Diefs vorausgesetzt, hat man zuerst nach dem ausgesprochenen Gesetze:

$$\varphi : g = r^2 : z^2$$

und daraus $$\varphi = \frac{r^2}{z^2} g \quad . . \quad (m)$$

Nun ist aber φ während der unendlich kleinen Zeit dt als constant anzusehen, so, dafs während dieser Zeit die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, folglich hat man nach den bekannten Relationen, wenn v die Geschwindigkeit bezeichnet, die der fallende Körper im Puncte P, d. i. am Ende der Zeit t besitzt:

$$dv = \varphi\, dt = \frac{g r^2}{z^2} dt \text{ oder auch } v\, dv = \frac{g r^2}{z^2} v\, dt,$$

oder wegen $v\, dt = dx$, auch $v\, dv = g r^2 \frac{dx}{z^2}$ und wegen $z = r + h - x$

endlich: $$v\, dv = g r^2 \frac{dx}{(r + h - x)^2},$$

aus welcher Gleichung durch Integration ganz einfach

$$\frac{v^2}{2} = g r^2 . \frac{1}{r + h - x} + C$$

folgt.

Da nun für $x = 0$ auch $v = 0$ ist, so erhält die unbestimmte Constante den Werth $C = -\frac{g r^2}{r + h}$ und damit ist

$$v^2 = 2 g r^2 \left(\frac{1}{r + h - x} - \frac{1}{r + h} \right)$$

oder $$v = r \sqrt{\left[\frac{2 g x}{(r + h)(r + h - x)} \right]} \quad (1)$$

Für $x = AB = h$ folgt daraus für die erlangte Geschwindigkeit

$$v = r \sqrt{\frac{2 g h}{r (r + h)}} = \sqrt{\left(\frac{r}{r + h} \right)} . \sqrt{2 g h} . \quad (2)$$

Zusatz. Diese Geschwindigkeit ist also, des Factors $\sqrt{\left(\frac{r}{r+h} \right)}$

wegen, kleiner, als wenn die Schwerkraft durch die ganze Höhe h constant geblieben wäre. Ist die Fallhöhe h so unbedeutend, dafs man h gegen r auslassen kann, so geht die vorige Formel (2) in die gewöhnliche von $v=\sqrt{2gh}$ über, welcher die Voraussetzung zum Grunde liegt, dafs die Schwerkraft durch diese geringe Fallhöhe h als eine constant wirkende Kraft angesehen werden könne.

44. Aufgabe.

Es soll für die vorhergehende Aufgabe die Fallzeit t bestimmt werden.

Auflösung.

Setzt man wieder wie vorhin CB (Fig. 49) $=r$, $AP=x$, dagegen $CA=a$, so ist nach der vorigen Relation (m) die Intensität der Schwerkraft im Puncte P:

$$\varphi=\frac{gr^2}{(a-x)^2}$$

folglich da nach Relat. (1) in Nr. **55**, $\varphi=\frac{dv}{dt}$ und nach Relat. (2) derselben Nr. auch $\varphi=\frac{d^2x}{dt^2}$ ist, sofort

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2\,dx$, so erhält man:

$$\frac{2\,dx\,.\,d^2x}{dt^2}=\frac{2gr^2\,dx}{(a-x)^2} \text{ d. i. } \frac{d.(dx^2)}{dt^2}=2gr^2\frac{dx}{(a-x)^2}$$

oder da dt constant ist, auch:

$$d.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=d.\left(\frac{2gr^2}{a-x}\right)$$

und daraus durch Integration, und da auch $\frac{dx}{dt}=v$ ist:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=v^2=\frac{2gr^2}{a-x}+C.$$

Zur Bestimmung der Constanten C hat man, da für $x=0$ auch $v=0$ wird, $0=\frac{2gr^2}{a}+C$, folglich $C=-\frac{2gr^2}{a}$ und damit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2gr^2\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a}\right)=\frac{2gr^2}{a}\,.\,\frac{x}{a-x}.$$

Diese Gleichung gibt: $\quad dt=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\,.\,\frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}\;.\;.\quad(\beta)$

und daraus folgt durch Integration:

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{(a-x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

oder wegen $a - x = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}$ auch

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{\left(\frac{a}{2}-x\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{\frac{a}{2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}}.$$

Nun ist ganz einfach [man darf nur $ax - x^2 = z$ setzen und auf die bekannte Weise (Comp. §. 790) verfahren]

$$\int\frac{\left(\frac{a}{2}-x\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \sqrt{(ax-x^2)}$$ und (Comp. §. 778)

$$\int\frac{\frac{a}{2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{a}{2}\,arc\,Sin\left(\frac{2x-a}{a}\right) = \frac{a}{2}\,arc\,Cos\left(\frac{a-2x}{a}\right)$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt und gehörig reducirt:

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{(ax-x^2)} + \frac{a}{2}\,arc\,Cos\left(\frac{a-2x}{a}\right)\right] \quad (1)$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ ist.

Zusatz 1. Durch Vergleichung der obigen Differenzialgleichung (β) mit jener (1) in der 21. Aufgabe ersieht man, dafs, wenn man über CD eine halbe Cycloide construirt, deren Scheitel in A und Ursprung in D liegt, wobei CD auf AC perpendikulär ist, und durch den Punct P die Ordinate MP gezogen wird, sofort $MP = t\sqrt{\frac{2gr^2}{a}}$ ist, so, dafs also die Ordinate MP dieser Cycloide die Zeit angibt, welche der Körper braucht, um durch die entsprechende Abscisse AP zu fallen, und umgekehrt.

Zusatz 2. Für $x = AB = h$ folgt aus der Gleichung (1) für die Fallzeit durch die Höhe h, wenn man zugleich auch für a seinen Werth $r + h$ setzt:

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r+h}{2g}}\left[\sqrt{rh} + \frac{r+h}{2}\,arc\,Cos.\left(\frac{r-h}{r+h}\right)\right] \quad (2)$$

Ist die Fallhöhe h sehr klein gegen den Erdhalbmesser r, so kann man $\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r+h}{2g}}.\sqrt{rh} = \sqrt{\frac{h}{2g}}$ und $arc\,Cos\left(\frac{r-h}{r+h}\right) =$

$$arc\,Sin\sqrt{\left[1-\left(\frac{r-h}{r+h}\right)^2\right]} = arc\,Sin\left(\frac{\sqrt{4rh}}{r+h}\right) = arc\,Sin\left(2\sqrt{\frac{h}{r}}\right)$$

oder wegen $arc\,Sin\,X = X + \frac{1.X^3}{2.3} + \frac{1.3.X^5}{2.4.5} + ..$ wenn man

$x = 2\sqrt{\frac{h}{r}}$ setzt und in der Reihe alle höhern Potenzen dieses kleinen Bruches ausläſst, also $arc\,Sin\left(2\sqrt{\frac{h}{r}}\right) = 2\sqrt{\frac{h}{r}}$ setzt, sofort

$$\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r+h}{2g}}\cdot\frac{r+h}{2}\,arc\,Cos\left(\frac{r-h}{r+h}\right) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r}{2g}}\cdot\frac{r}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{h}{r}} = \sqrt{\frac{h}{2g}}$$

folglich $\quad t = \sqrt{\frac{h}{2g}} + \sqrt{\frac{h}{2g}} = 2\sqrt{\frac{h}{2g}}$ d. i. $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (3)

setzen, welche Formel sofort mit jener für die Fallzeit durch die Höhe h übereinstimmt, wenn dabei die Schwere als eine constante Kraft angesehen wird, indem aus dieser Relation (3) jene $h = \frac{1}{2}gt^2$ folgt.

Zusatz 3. Die in diesen beiden letzten Aufgaben entwickelten Formeln gelten nur in so lange, als der Körper oder materielle Punct nicht in das Innere der Erde eindringt, weil dann ein anderes Anziehungsgesetz eintritt und die Schwerkraft (40. Aufgabe, Anmerk.) nur mehr der ersten Potenz der Entfernung des materiellen Punctes vom Mittelpunct der Erde, und zwar direct proportional ist.

Nimmt man nun für diesen letztern Fall an, daſs der Körper von dem Puncte B (Fig. 49) der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit Null zu fallen anfängt, und daſs man, wenn der Körper durch die Höhe BP' gefallen ist, den Abstand des Punctes P' in entgegengesetzter Richtung, nämlich von C gegen A zählt und $CP' = x$ setzt; so hat man, wenn wieder φ die Intensität der Schwerkraft im Puncte P' und g jene in B ist, nach diesem Gesetze:

$$\varphi : g = x : r \text{ also } \varphi = \frac{g}{r}x$$

und daher (Nr. **55**) auch $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{r}x,$

weil t zunimmt, wenn x abnimmt, oder, wenn man wieder mit $2\,dx$ multiplicirt: $\quad d.\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{r}x\,dx.$

Diese Gleichung integrirt, gibt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = C - \frac{gx^2}{r} = v^2 \quad (\text{wegen } \frac{dx}{dt} = v)$$

oder da für $x = r$ die Geschwindigkeit $v = 0$ seyn soll, wodurch die Constante $C = gr$ wird, auch:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{r}(r^2 - x^2).$$

Aus dieser Gleichung folgt zuerst:

$$v = \sqrt{\left[\frac{g}{r}(r^2 - x^2)\right]} \quad (4)$$

und dann $$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$
oder wenn man integrirt:
$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot arc\ Cos. \frac{x}{r} \quad (5)$$
wozu keine Constante kommt, weil für $x = r$, $t = 0$ ist.

Wird diese Gleichung (aus $x = arc\ Cos\ y$ folgt nämlich $y = Cos\ x$) nach x aufgelöst, so erhält man:
$$\frac{x}{r} = Cos\ t\sqrt{\frac{g}{r}} \quad \text{oder} \quad x = r\ Cos\ t\sqrt{\frac{g}{r}} \quad (6)$$
die Gleichung (4) zeigt, dafs v am gröfsten für $x = 0$ wird, und zwar ist dafür $$v = \sqrt{rg};$$
ferner, dafs für $x = -r$, $v = 0$, d. h. die Geschwindigkeit im untern Endpunct B' des Durchmessers eben so grofs als im Anfangspunct B desselben ist. Da sich der Körper oder materielle Punct von B' aus wieder eben so gegen B hinbewegt, als von B gegen B', so wird er in ganz gleiche ohne Ende fortdauernde Schwingungen zwischen den Endpuncten des Durchmessers BB' versetzt. Da endlich die Geschwindigkeit v von der z w e i t e n Potenz von x abhängt, so wird diese für $+\alpha$ und $-\alpha$, d. i. für zwei Positionen, welche vom Mittelpunct C gleich weit abstehen, wie z. B. in den Puncten P' und P'' (wenn $CP' = CP''$) gleich grofs.

Die Gleichung (5) zeigt, dafs der Körper oder materielle Punct, um von der Oberfläche der Erde B bis zum Mittelpunct C zu fallen, die Zeit $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, folglich, um eine der genannten Oscillationen von B bis B' zu vollenden, die Zeit $T = 2t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ braucht, welche (Nr. **59**) mit der Schwingungszeit des einfachen K r e i s p e n d e l s von der Länge r zusammenfällt. Für zwei Epochen, welche von diesem Zeitmomente (in welchem der materielle Punct im Mittelpunct C ist) gleich weit entfernt sind, sind auch die Längenentfernungen vom Mittelpuncte gleich grofs.

A n m e r k u n g. Auch diese Formeln gehen in jene für die gleichförmig beschleunigte Bewegung über, wenn man den Fallraum $h = r - x$ als sehr klein gegen den Abstand CP' vom Mittelpuncte, also die Anziehungskraft nahezu als constant ansieht. Denn da unter dieser Voraussetzung aus (4), wegen $r^2 - x^2 = (r + x)(r - x) = h(r + x)$ und $x = r - h = r$ gesetzt werden kann:
$$v = \sqrt{\left(\frac{g}{r} \cdot h \cdot 2r\right)} = \sqrt{2gh};$$
ferner folgt aus (6), wenn man den Cosinus in die bekannte Reihe auflöst,

$$x = r\left[1 - \frac{g t^2}{1.2 r} + \frac{g^2 t^4}{1.2.3.4 r^2} - ..\right] = r - \frac{g t^2}{2},$$

wenn man nämlich die folgenden Glieder, mit Potenzen von r im Nenner als verschwindend ausläſst, daher ist

$$h = r - x = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

45. Aufgabe.

Es befinde sich in einer verticalen Ebene die Cycloide BAC (Fig. 50) deren Basis BC horizontal liegt und Scheitel A den tiefsten Punct bildet; dieſs vorausgesetzt, soll die Zeit für das Herabgehen eines schweren Punctes in dieser Curve bestimmt werden, wenn die Bewegung ohne Reibung Statt findet.

Auflösung.

Beginnt der schwere Punct seine Bewegung im Puncte L der Cycloide, so ziehe man durch diesen Punct die Horizontale LL', welche die verticale Achse AD im Puncte A' schneidet, und setze für irgend einen unterhalb L liegenden Punct M der Curve, $AP = x$ und Bog. $AM = s$, ferner $AA' = h$ und den Durchmesser des Erzeugungskreises $AD = NT = 2r$; so ist die Geschwindigkeit, welche der schwere Punct in M erlangt:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[2g(h-x)]}, \text{ woraus}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g} \cdot \sqrt{(h-x)}} \quad .. \quad (a)$$

folgt. Ist aber MT die Tangente und MN die Normale im Puncte M der Cycloide, ferner in dem Elementardreieck Mmn, $Mm = ds$ und $mn = dx$, so ist (aus den beiden ähnlichen Dreiecken Mnm und MTO) $Mm : mn = MT : TO$ oder $ds : dx = \sqrt{2rx} : x$ (wegen $MT^2 = TO \times TN$) folglich $ds = \frac{dx\sqrt{2rx}}{x}$ und wenn man diesen Werth in der vorigen Relation (a) substituirt und berücksichtigt, daſs dx und dt verschiedene Zeichen erhalten müssen (indem x abnimmt, wenn t zunimmt), auch:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}}$$

oder wenn man von $x = h$ bis $x = 0$ integrirt und gleich die Grenzen umkehrt:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}}$$

und da das allgemeine Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{(hx - x^2)}} = arc\,Sin\left(\frac{2x \quad h}{h}\right)$ ist, sofort $t = \sqrt{\frac{r}{g}}\,[arc\,Sin\,1 - arc\,Sin - 1] = \sqrt{\frac{r}{g}}\,.\,2\,arc\,Sin\,1$, d. i.

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (1)$$

als Fallzeit in der krummen Linie LMA durch den Bogen LM. Da aber diese Zeit von der Höhe $AA' = h$ ganz unabhängig ist, so folgt, dafs, wenn mehrere schwere Puncte von verschiedenen Puncten der Cycloide gleichzeitig ausgehen, diese sämmtlich in derselben Zeit im tiefsten Puncte A der Curve anlangen. Aus diesem Grunde heifst die Cycloide auch *Tautochrone*, oder Curve gleicher Schwingungsdauer.

Zusatz. Da der schwere Punct dieselbe Zeit zum Steigen durch den Bogen AL', wie zum Fallen durch jenen LA braucht, so ist die für eine Oscillation von L bis L' nöthige Zeit $T = 2t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, und zwar bleibt diese Zeit genau dieselbe, wenn die Oscillationen anstatt von L aus, von irgend einem andern Puncte M der Curve aus beginnen und daher nicht LAL', sondern überhaupt MAM' der Schwingungsbogen ist.

Für einen kleinen Bogen AM fällt die Cycloide mit dem entsprechenden Bogen des Krümmungskreises für den Scheitel A zusammen, und da dessen Halbmesser für diesen Scheitelpunct $= 4r$ [gleich der doppelten Normale (Comp. §. 728)] ist, so hat man, wenn dieser Halbmesser $= l$ gesetzt wird,

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

als Schwingungszeit im Kreispendel, für kleine Schwingungsbögen (vergl. Nr. **59**).

Anmerkung. Beim Herabsinken eines schweren Punctes durch einen kleinen Kreisbogen MT vom Halbmesser l, ist $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, dagegen durch die entsprechende Sehne MT (§. 148) $t' = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$, also ist

$$t : t' = \frac{\pi}{2} : 2 = \cdot785 : 1.$$

46. Aufgabe.

Die Linie des schnellsten Falles zu finden.

Auflösung.

Es seyen M, M', M'' (Fig. 51) drei unendlich nahe liegende Puncte der gesuchten Curve, so wie die lothrechten Abstände der Puncte M und M' von der durch jenen Punct gezogenen horizontalen Abscissenachse AX, von welchem der schwere Punct seine Bewegung ohne Geschwindigkeit beginnt, $PM = y$ und $P'M' = y'$; so ist die Zeit des Herabsinkens von M nach M'' (Relat. *a* der vorigen Aufgabe):

$$t' = \frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}} \quad . \quad . \quad (m)$$

Ist aber, wie verlangt wird, diese Zeit t' ein Minimum für alle Wege, welche das Bewegliche, um von M nach M'' abwärts zu kommen, einschlagen kann; so darf die durch eine Verschiebung des Punctes M' in horizontaler Richtung, z. B. von M' nach R, wobei $M'R$ gegen die Längen MM' und $M'M''$ unendlich klein ist, unter Weges zugebrachte Zeit nur eine Änderung erleiden, welche hinsichtlich der vorigen Zeit t' in (m) unendlich klein ist. Nun ist die Zeit für den Weg MRM'' sehr nahe

$$t'' = \frac{MR}{\sqrt{2gy}} + \frac{RM''}{\sqrt{2gy'}},$$

wobei der Fehler, welchen man begeht, unendlich abnimmt, wenn sich R dem Puncte M' ohne Ende nähert. Es muſs also, da t'' von t' nur um unendlich wenig verschieden seyn soll,

$$\frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}} = \frac{MR}{\sqrt{2gy}} + \frac{RM''}{\sqrt{2gy'}}$$

oder

$$\frac{MM' \quad MR}{\sqrt{y}} = \frac{RM'' - M'M''}{\sqrt{y'}}$$

Statt finden.

Zieht man RN perpendikulär auf MM' und $M'N'$ perpendikulär auf $M''R$, so läſst sich für MR die Projection MN (welche bekanntlich nur um unendlich wenig von der Linie selbst abweicht) und statt $M'M''$ die Projection $M''N'$ setzen; dadurch wird im ersten Theil der vorigen Gleichung der Zähler $MM' - MR = M'N = M'R\, Cos\,.\, SM'N$, und im zweiten Theil $RM'' - M'M'' = RN' = RM'\, Cos\, S'RM'' = RM' \times Cos\,.\, S'M'M''$, so, daſs also diese Gleichung übergeht in

$$\frac{Cos.\, SM'N}{\sqrt{y}} = \frac{Cos.\, S'M'M''}{\sqrt{y'}}.$$

Setzt man nun, da MM', $M'M''$ zwei aufeinander folgende Elemente der Curve und $M'Q$, $M'Q''$ ihre Horizontalprojectionen (auf die Achse der x) sind, $MM' = ds$, $M'M'' = ds'$, $M'Q = dx$ und $M'Q'' = dx'$;

so erhält man $Cos.\, S\, M'\, N = \frac{M'Q}{MM'} = \frac{dx}{ds}$, $Cos.\, S'M'M'' = \frac{M'Q''}{M'M''} = \frac{dx'}{ds'}$ und daher, wenn man diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{dx'}{ds'} \cdot \frac{1}{\sqrt{y'}}$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dafs in jedem Puncte der gesuchten Curve der Ausdruck $\frac{dx}{ds\sqrt{y}}$ constant ist, eine Eigenschaft, welche bekanntlich der Cycloide oder gemeinen Radlinie zukömmt*).

Die gemeine Cycloide wird daher dieser Eigenschaft wegen auch *Brachystochrone* oder Curve des schnellsten Falles genannt. (Eigentlich gehört dieses, zuerst von *Johann Bernoulli* im J. 1696 aufgeworfene Problem, in das Gebiet der Variationsrechnung, m. s. Lehrb. Bd. III. S. 585.)

47. Aufgabe.

Das Moment der Trägheit eines homogenen Ellipsoides in Beziehung auf eine der Hauptachsen zu bestimmen.

Auflösung.

Die Gleichung des in Fig. 52 dargestellten Ellipsoides, in welchem die Hauptachsen $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ und $CC' = 2c$ sind, und wobei die rechtwinkeligen Achsen der x, y, z mit diesen Achsen der Figur zusammenfallen, ist (Lehrb. III. S. 431):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

folglich, wenn man das Moment der Trägheit zuerst in Beziehung auf

---

*) Ist nämlich a der Halbmesser des Erzeugungskreises der Cycloide, so ist (Comp. §.726, III. S. 219) bei dieser Bezeichnung $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$ und $ds = \sqrt{2a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(2a - y)}}$, daher $\frac{dx}{ds\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} \times \frac{\sqrt{(2a - y)}}{dy\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, also constant.

Oder es ist in Fig. 50, wenn man für irgend einen Punct M der Cycloide $BN = x$, $NO = y$ und Bog. $BM = s$ setzt, $Mn : Mm = NO : MN$ oder wegen $MN = \sqrt{(2r \cdot NO)} = \sqrt{2ry}$, auch $dx\ ds = y : \sqrt{2ry} = \sqrt{y} : \sqrt{2r}$, woraus sofort wieder $\frac{dx}{ds\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$ folgt.

die Achse der z (als Umdrehungsachse) sucht, die durch den Punct m gehende zur Achse der z parallele Ordinate

$$mn = z = c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$ oder die Doppelordinate

$$nn' = 2c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Das Volumen eines Prisma von der Grundfläche $dx\,dy$ (Fig. 52′) und dieser Höhe nn' ist daher, wenn man das Volumen des ganzen Ellipsoides mit V bezeichnet:

$$d^2V = 2c\,dx\,dy\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

da ferner dieses Prisma (als materielle gerade Linie, welche mit der Achse der z parallel ist) von der Umdrehungsachse den Abstand $Om = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ hat, so ist dessen Moment der Trägheit, wenn man das Volumen gleich für die Masse gelten läfst und das Moment der Trägheit des Ellipsoides mit μ bezeichnet:

$$d^2\mu = (x^2 + y^2)\,d^2V,$$

oder, wenn man substituirt:

$$\mu = 2c\int\!\!\int(x^2 + y^2)\,dx\,dy\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} \text{ d. i.}$$

$$\mu = 2c\int\!\!\int x^2\,dx\,dy\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + 2c\int\!\!\int y^2\,dx\,dy\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$
$$= A + B.$$

Da nun x und y von einander unabhängig sind, so hat man für das erstere Integral A, wenn man zuerst nach y integrirt, dabei also x als constant ansieht, für das allgemeine Integral (Comp. §. 801, 2):

$$\int dy\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} = \tfrac{1}{2}y\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \tfrac{1}{2}b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \times$$
$$\text{arc. Sin}\left(\frac{ay}{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}\right);$$

da jedoch dieses Integrale zwischen den Grenzen von $y = PM$ bis $y = PM'$ (Fig. 52′) d. i. von $y = +b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ bis $y = -b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ genommen werden mufs, so geht dasselbe, wenn man gehörig substituirt und reducirt, über in

$$\frac{b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\pi + \frac{b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\pi = \frac{b\pi}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Mit diesem Werthe wird nun

$$A = 2c\int\frac{b\pi}{2}x^2\,dx\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und zwar mufs dieses Integrale von $x = -a$ bis $x = +a$ (d i. von OA bis OA') genommen werden. Diefs gibt ganz einfach

$$A = b\,c\,\pi \left[\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{5}\right)\right] = \tfrac{4}{15}\,a^3\,b\,c\,\pi$$

oder da das Volumen des Ellipsoides $V = \frac{4}{3}\pi\,a\,b\,c$ ist, auch $A = \frac{1}{5}Va^2$, und da man hier das Volumen statt der Masse genommen hat, endlich $A = \frac{1}{5}Ma^2$, wenn man nämlich die homogene Masse des Ellipsoides durch M bezeichnet.

Das zweite Integrale B des obigen Ausdruckes u erhält man offenbar aus jenem A ganz einfach, wenn man darin x und y, dann gleichzeitig a und b mit einander verwechselt; dadurch wird $B = \frac{1}{5}Mb^2$ und daher ist das gesuchte Moment der Trägheit des Ellipsoides in Beziehung auf die Achse der z:

$$\mu = \tfrac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

Eben so erhält man (durch blofses Vertauschen der Buchstaben) dieses Moment der Trägheit in Beziehung auf die Achsen der x und y, respective: $\mu' = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2)$ und $\mu'' = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$.

Zusatz. Für $a = b = c$ erhält man als Moment der Trägheit der Kugel vom Halbmesser a, welche sich um einen Durchmesser als Achse dreht:

$$\mu = \mu' = \mu'' = \tfrac{2}{5}Ma^2$$

wie es seyn soll (Nr. **78**).

Setzt man die Dichte der Kugel $= \delta$, so ist auch:

$$\mu = \tfrac{8}{15}\pi\,\delta\,a^5$$

48. Aufgabe.

Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht eines um eine Achse rotirenden Körpers zu finden.

Auflösung.

Die in Nr. **21**, Anmerk. 2 aufgestellten allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht eines freien Systemes von fest miteinander verbundenen Puncten, gehen, wenn das System aus irgend einem festen Körper gebildet wird, über in die folgenden:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2}\,dm = \int X\,dm,\quad \int \frac{d^2y}{dt^2}\,dm = \int Y\,dm,\quad \int \frac{d^2z}{dt^2}\,dm = \int Z\,dm$$

$$\int \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2}\,dm = \int (xY - yX)\,dm$$

$$\int \frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2}\,dm = \int (z\,X - x\,Z)\,dm$$
$$\int \frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2}\,dm = \int (y\,Z - z\,Y)\,dm$$

Nimmt man nun die Rotationsachse des betreffenden Körpers zu einer der 3 rechtwinkeligen Coordinatenachsen, z. B. zur Achse der z, so genügt (man vergl. die Anmerk. in Nr. **21**) die einzige Gleichung:

$$\int \frac{x\,d^2y \quad y\,d^2x}{dt^2}\,dm = \int (x\,Y - y\,X)\,dm$$

und zwar ist dieses die allgemeine Gleichung der Bewegung eines Körpers um die Achse der z.

Ist ferner, wenn man eine ungleichförmige Rotationsbewegung voraussetzt, w die Winkelgeschwindigkeit am Ende der Zeit t und r die Länge des aus dem Elemente des Körpers dm auf die Rotationsachse z gefällten Perpendikels; so ist $v = r\,w$ die absolute Geschwindigkeit des Elementes dm am Ende der Zeit t; zerlegt man diese in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten v' und v'' nach AX und AY (Fig. 53), so erhält man, wenn m die Projection des Elementes dm auf die Ebene der $x\,y$ ist und durch diesen Punct die Gerade Am und darauf in derselben Ebene NN' perpendikulär gezogen wird, welche die Achsen AX und AY unter den Winkeln α und β (Fig. 53') schneiden mag, sofort, weil die Rotationsgeschwindigkeit v mit NN' parallel ist:

$$v' = v \operatorname{Cos}\alpha = v \cdot \frac{m\,n}{Am} \quad \text{und} \quad v'' = v \operatorname{Cos}\beta = v \cdot \frac{A\,n}{A\,m}$$

oder wegen $v = r\,w$, $Am = r$, $An = x$ und $mn = -y$ auch:

$$v' = -\,y\,w \text{ und } v'' = x\,w.$$

Da nun aber auch $v' = \dfrac{dx}{dt}$ und $v'' = \dfrac{dy}{dt}$ ist, so erhält man durch Gleichsetzung dieser Werthe:

$$\frac{dx}{dt} = -\,w\,y,\quad \frac{dy}{dt} = w\,x \text{ und noch außerdem } x^2 + y^2 = r^2.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit y, die zweite mit x multiplicirt und dann subtrahirt, so entsteht

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = w\,(x^2 + y^2) = r^2\,w \text{ oder } x\,dy - y\,dx = r^2\,w\,dt.$$

Diese Gleichung differenziirt gibt, da x, y, w Functionen von t, dagegen r und dt constant sind, wenn man abkürzt:

$$x\,d^2y - y\,d^2x = r^2\,dw\,dt.$$

Da nun dw für alle Elemente dm des Körpers denselben Werth behält, also bei der Integration nach dm constant ist, so hat man:

$$\int \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2}\,dm = \frac{dw}{dt}\int r^2 dm$$

so, daſs also die obige Gleichung (α) in die folgende

$$\frac{dw}{dt}\int r^2\,dm = \int (xY - yX)\,dm \quad (\beta)$$

übergeht. Da aber ferner das Integrale $\int r^2 dm$ nichts anderes als das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die angenommene Rotationsachse ist, so erhält man endlich, wenn dieses Moment mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet wird:

$$\mathfrak{M}\frac{dw}{dt} = \int (xY - yX)\,dm \quad (1)$$

woraus sich sofort dw für irgend eine Position des Körpers bestimmen läſst.

49. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein auf einer schiefen Ebene AB (Fig. 54) liegendes gerades Prisma, dessen Längenkanten auf der verticalen Ebene ABC perpendikulär stehen, durch den bloſsen Einfluſs der Schwere, eher um eine dieser Kanten umstürzt, als über die schiefe Ebene herabgleitet.

Auflösung.

Es sey O der Schwerpunct des Prisma, also auch des Querschnittes ab desselben, welcher aus einem verticalen, durch diesen Punct O geführten Schnitt entsteht, Q das Gewicht des Prisma, α der Neigungswinkel der schiefen Ebene AB, OD perpendikulär auf AB, und wenn O mit dem Puncte E, um welchen das Umstürzen möglich ist (d. h. durch welchen die betreffende Kante geht), verbunden wird, W. $DOE = i$, und endlich μ der betreffende Reibungscoeffizient; so entstehen, wie bekannt, aus dem Gewichte Q zwei durch den Schwerpunct O wirksame Kräfte $P = Q \, Sin\, \alpha$ und $P' = Q \, Cos\, \alpha$, wovon die erstere mit AB parallel und die letztere darauf senkrecht ist. Da man nun den Betrag der Reibung $\mu P'$ als eine durch den Schwerpunct O wirksame, der Kraft P gerade entgegengesetzte Kraft ansehen kann (Nr. 61, Anm. 2, 8.), so folgt, daſs das Prisma, wenn es nicht umstürzt, eine gleitende Bewegung über die schiefe Ebene anfängt, sobald $P > \mu P'$ d. i.

$Q\, Sin\, \alpha > \mu\, Q\, Cos\, \alpha$ oder

$$tang\, \alpha > \mu \;.\;.\; (1)$$ ist.

Damit jedoch ein Umstürzen um den Punct E (im Querschnitt ab) oder eine drehende Bewegung des Prisma um diesen Punct eintrete, mufs, auf den Punct E bezogen, das stat. Moment der Kraft P gröfser als jenes der Kraft P', d. i $P.OD > P'.DE$, nämlich $OD\,.\,Q \sin\alpha > DE\,.\,Q \cos\alpha$, oder $\tan\alpha > \frac{DE}{OD}$, und wegen $\frac{DE}{OD} = \tan i$, endlich

$$\tan\alpha > \tan i \quad . \quad . \qquad (2)$$

d. i. $\alpha > i$ seyn.

Ist also der Reibungscoeffizient μ so klein, dafs $\mu < \tan\alpha$, (nach 1) und doch noch $\tan\alpha < \tan i$ (nämlich die Bedingung 2 nicht erfüllt), also auch $\mu < \tan i$ ist; so wird der Körper eher gleitend über die schiefe Ebene fortrücken, als zum Umstürzen kommen.

Ist dagegen der Winkel i sehr klein, wie z. B. bei einem Cylinder, einer Kugel u. s. w. (wobei, wenn die Berührung zwischen absolut harten und glatten Flächen, also nur in einem geometrischen Puncte D Statt fände, sogar $i = 0$ wäre), so kommt der Körper schon bei dem geringsten Neigungswinkel α der schiefen Ebene in eine wälzende Bewegung.

Nimmt der Winkel i zu, so kann der Körper nur gleitend über die schiefe Ebene herabgehen, so lange $\tan\alpha$ zwischen der kleinern Grenze μ und der gröfsern $\tan i$ liegt; so wie aber $\alpha > i$ wird, so stürzt der Körper auch bei diesem gröfsern Werth von i um.

Anmerkung. Nimmt man an, dafs die Berührung einer Kugel mit einer Ebene wirklich nur in einer unendlich kleinen Fläche Statt findet, d. h. setzt man voraus, dafs die Kugel und Ebene vollkommen hart und glatt sind, ohne jedoch dabei eine gleitende Reibung auszuschliefsen, so ist der Widerstand der wälzenden oder rollenden Reibung auf einer horizontalen Ebene gleich Null und eine horizontale, durch den Schwerpunct oder Mittelpunct der homogenen Kugel wirkende Kraft, setzt die Kugel in eine wälzende Bewegung, bei welcher sehr bald die Geschwindigkeit des berührenden Punctes $= 0$ und die Bewegung, je nachdem die Kraft eine momentane oder constante ist, gleichförmig oder gleichförmig beschleunigt wird, d. h. die drehende Bewegung des untersten Punctes nach rückwärts (im gröfsten Kreisbogen) genau dieselbe Geschwindigkeit, wie der Mittelpunct nach horizontaler Richtung vorwärts besitzt, eine Bewegung, welche *Euler* die vollkommene Wälzung nennt, um sie von der gemischten Wälzungsbewegung zu unterscheiden, welche dann Statt findet, wenn bei der Wälzung zugleich auch ein Gleiten eintritt und der unterste Punct nicht die Geschwindigkeit Null besitzt, also der Wälzungsbogen gröfser oder kleiner als der vom Mittelpunct zurückgelegte Weg ist.

Wird die Kugel auf eine schiefe Ebene gelegt, so fängt (durch das Gewicht der Kugel) sogleich die Wälzung an und *Euler* war Anfangs der Meinung, daſs dabei die fortschreitende Bewegung stets gröſser als die wälzende seyn müsse und die vollkommene Wälzung (wobei sich der jedesmalige Berührungspunct eben so schnell im Bogen rückwärts bewegt, als der Mittelpunct fortschreitet) hier niemals Statt finde. Dem wurde jedoch von *Dan. Bernoulli* und durch die Experimente von *Krafft* widersprochen, so daſs *Euler* diese Meinung dahin abänderte, daſs die beschleunigende Kraft, welche die Kugel über die schiefe Ebene herabtreibt, allerdings das Bestreben habe, dem jedesmaligen Berührungspunct statt der Geschwindigkeit Null (wie sie bei vollkommener Wälzung Statt hat) eine gröſsere fortrückende Bewegung zu ertheilen, daſs diese jedoch bei nicht zu groſser Neigung der schiefen Ebene, stets durch die Reibung, welche das Fortgleiten aufhält, unterdrückt wird. Bei einem gröſseren Neigungswinkel, bei welchem die gleitende Reibung nicht mehr hinreicht um das Fortrücken gänzlich zu hemmen, entstehe dann eine gemischte Wälzungsbewegung, bei welcher der Wälzungsbogen kleiner als der vom Mittelpunct zurückgelegte Weg ist. Bei einem Neigungswinkel von $\alpha = 90^0$ hört endlich die Wälzung gänzlich auf und es findet nur eine fortschreitende Bewegung Statt.

50. Aufgabe.

Es wird einer, auf einer horizontalen Ebene liegenden homogenen Kugel, eine rotirende Bewegung um einen horizontalen Durchmesser, und gleichzeitig auch ihrem Mittelpuncte eine fortschreitende Bewegung in horizontaler, auf diesem Durchmesser perpendikulären Richtung mitgetheilt; es sollen die Gesetze dieser zusammengesetzten Bewegung bestimmt werden, wenn dabei auch auf die Reibung Rücksicht genommen wird.

Auflösung.

I. Stellt die Figur (Fig. 55) einen Schnitt der Kugel und der horizontalen Ebene mit einer auf der Rotationsachse perpendikulären (also verticalen) Ebene vor, so bewegt sich der Mittelpunct der Kugel C auf der Geraden AB, welche durch C mit der Geraden DE (als Durchschnitt dieser verticalen mit der horizontalen Ebene) parallel läuft.

Es sey in einem Augenblicke, nämlich am Ende der Zeit t, in welchem die Berührung der Kugel mit der horizontalen Ebene im Puncte M Statt findet, der Abstand des Mittelpunctes C von einem festen Puncte A der Geraden AB, nämlich $AC = x$, also die Geschwindigkeit des Punctes C nach CB in diesem Zeitmomente $v = \frac{dx}{dt}$, ferner sey in demselben Augenblicke w die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um ihre Rotationsachse, welche als positiv oder negativ angesehen werden soll, je nachdem die Rotation in der durch den Pfeil angedeuteten, oder in entgegengesetzter Richtung Statt findet, endlich sey für denselben Zeitmoment u die absolute Geschwindigkeit des Punctes M und $CM = r$ der Halbmesser der Kugel; so hat man zuerst:

$$u = v + rw = \frac{dx}{dt} + rw \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Je nachdem nun dieser Ausdruck positiv oder negativ ausfällt, bewegt sich der Punct M gegen E oder D, und dabei ist die in diesem Puncte nach entgegengesetzter Richtung von u Statt findende Reibung beziehungsweise nach D oder E gerichtet. Ist $u = 0$, also der jedesmalige Berührungspunct M in der Ruhe, so rollt die Kugel ohne zu gleiten (vollkommene Wälzung) und die dabei entstehende Reibung ist die der zweiten Art, nämlich die sogenannte rollende oder wälzende.

II. Diefs vorausgesetzt, sey Q das Gewicht und M die Masse der Kugel, μ der Reibungscoefficient, also μQ der Betrag der Reibung in der Richtung ME oder MD, ferner g die Beschleunigung der Schwere, daher (Nr. **54**, Anmerk. 3) $M = \frac{Q}{g}$ die Masse der Kugel und Mk^2 ihr Moment der Trägheit (in der allgemeinen Form, welche für alle Körper von der Masse M gilt, Nr. **67**) in Beziehung auf ihre Rotationsachse. Nimmt man nun an, dafs u positiv, also die Reibung μQ gegen MD gerichtet sey, so sind die Gleichungen für die fortschreitende und rotirende Bewegung beziehungsweise (Nr. **56**) $M \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu Q$ oder wgen $\frac{Q}{M} = g$ (und weil man sich die Masse der Kugel in ihrem Mittelpunct vereinigt, und die Kraft durch diesen Punct parallel mit ihrer Richtung wirkend denken kann)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g \quad . \quad . \quad (1)$$

und (da man sich bei dieser Rotation die Rotationsachse als fest denken kann) vorige Aufgabe, Relat. (1), wegen $Y = 0$, $y = -r$, $X = -\mu \frac{Q}{M}$, $m = M$ und $\mathfrak{M} = Mk^2$ sofort:

$$Mk^2 . \frac{dw}{dt} = -\int r\mu \frac{Q}{M} dM = -r\mu \frac{Q}{M} M \quad . \quad . \quad (m)$$

d. i.

$$k^2 . \frac{dw}{dt} = -\mu r g$$

oder da für die Kugel das Moment der Trägheit (Nr. **79**) $\mathfrak{M} = \frac{2}{5} M r^2$, also $k^2 = \frac{2}{5} r^2$ ist, auch:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{5}{2} \frac{\mu}{r} g \quad . \; . \quad (2)$$

Werden diese beiden Gleichungen (1) und (2) integrirt, so erhält man aus (1) wegen $d.\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\mu g dt$ sofort

$$\frac{dx}{dt} = C - \mu g t \quad . \; . \quad (\beta)$$

und aus (2):

$$w = C' - \frac{5}{2} \frac{\mu}{r} g t \quad . \; . \quad (\gamma)$$

dabei bezeichnen die Constanten C und C' beziehungsweise die Anfangsgeschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und w im Puncte A (für $t = 0$). Aus der obigen Gleichung (α) erhält man mit diesen Werthen:

$$u = C + r C' = \frac{7}{2} \mu g t \quad . \; . \quad (\delta)$$

III. Da nun der gemachten Annahme zufolge die Constante $C + r C'$ positiv ist, so bleibt auch u während einer gewissen Zeit $t = T$ positiv, wird am Ende derselben Null und hierauf negativ. Diese Zeit T folgt aber aus der Bedingungsgleichung

$$0 = C + r C' - \frac{7}{2} \mu g T \text{ und zwar ist}$$

$$T = \frac{2}{7} \frac{(C + r C')}{\mu g} \quad . \; . \quad (\varepsilon)$$

Während dieser Zeitperiode T bestehen die beiden Werthe von (β) und (γ) wirklich und die beiden Bewegungen der Kugel (die fortschreitende und rotirende) sind gleichförmig verzögert.

IV. Am Ende der Zeit $t' = \frac{C}{\mu g}$ wird $\frac{dx}{dt} = 0$ und wenn $t' < T$ was für $\frac{C}{\mu g} < \frac{2}{7} \frac{(C + r C')}{\mu g}$ d. i. für

$$C < \frac{2}{5} r C' \quad . \; . \quad (n)$$

Statt findet, wird $\frac{dx}{dt}$ über die Zeit t' hinaus negativ, so, daſs sich der Mittelpunct C der Kugel von C gegen A zurückbewegt.

Dieser letztere Fall tritt z. B. bei einer Billardkugel ein, wenn man diese so trifft, daſs sie sehr schnell um einen horizontalen Durchmesser in der Richtung des Pfeiles (Fig. 55) rotirt und sich gleichzeitig ihr Mittelpunct, jedoch nur langsam von C gegen B vorwärts bewegt, so, daſs beide obige Constanten C und C' positiv sind und der Bedingung (n) Genüge leisten. Bei dieser rotirenden und fortschreitenden Bewegung der Kugel erschöpft aber die am Billardtuche Statt findende Reibung sehr bald diese letztere Bewegung, während die rotirende noch fortbestehen bleibt und daher die von M gegen D wirkende Reibung (welche man sich in den Mittelpunct C transferirt und von C gegen A wirksam denken kann) die Kugel von C gegen A zurückführt.

V. Hat die Kugel im Anfange, d. i. wenn der Punct C noch in A ist, keine rotirende Bewegung, ist also $C' = 0$, oder ist noch allgemeiner $C > \frac{2}{5} r C'$, so wird die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ nicht früher als jene u gleich Null, folglich kann der Mittelpunct C nicht zurückgehen. Übrigens hat in allen Fällen der Berührungspunct M nach Verlauf der Zeit T keine Geschwindigkeit mehr, so, daſs die gleitende Reibung verschwindet und die Kugel ohne zu gleiten fortrollt; dabei werden die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und w allmählig constant oder nehmen nur mehr sehr wenig ab (indem der Betrag der rollenden Reibung gleich Null ist). Man erhält ihre Werthe aus den Relationen (β) und (γ), wenn man $t = T$ setzt, und zwar ist:

$$\frac{dx}{dt} = C - \tfrac{2}{7} C - \tfrac{2}{7} r C' = \frac{5C - 2rC'}{7}$$

und

$$w = C' - \tfrac{5}{7} \frac{C}{r} - \tfrac{5}{7} C' = \frac{2rC' - 5C}{7r}.$$

Zusatz. Die obigen Gleichungen (1) und (2) gelten auch noch für andere durch Umdrehung erzeugte Körper, jedoch mit den betreffenden Werthen von k^2; so ist z. B. für einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis, welcher sich um seine geometrische Achse dreht, $k^2 = \frac{1}{2} r^2$ u. s. w.

Anmerkung. In der hier behandelten Aufgabe, in welcher die Rotationsachse parallel mit der horizontalen Ebene und senkrecht auf die Richtung der Bewegung ist, welche von A nach B Statt findet, können folgende 3 Fälle eintreten:

1) Es kann die Wälzung eine vollkommene seyn, nämlich der Punct M im Bogen MF eben so viel zurückgehen als der Mittelpunct C nach der Richtung CB vorwärts geht; dann ist die Geschwindigkeit des jedesmaligen Berührungspunctes im Augenblicke der Berührung gleich Null.

2) Es kann der Punct M eine schnellere drehende Bewegung nach rückwärts (d. i. gegen MF) als der Mittelpunct C nach vorwärts haben; in diesem Falle nimmt die Beschleunigung der Rotationsbewegung durch die Reibung allmählig ab und es tritt sehr bald eine vollkommene Wälzung ein.

3) Rotirt der Körper in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung von M gegen F', so wird die rotirende Bewegung (mit der vollkommenen Wälzung verglichen) vermindert und diese kann unter gewissen Umständen sogar in die entgegengesetzte übergehen; es kann aber auch (wie bereits in dem Beispiele der Billardkugel bemerkt) der nach CB fortgehende Körper umkehren und die entgegengesetzte Richtung CA annehmen.

51. Aufgabe.

Eine homogene Kugel vom Halbmesser CM (Fig. 56) wird auf eine schiefe Ebene AB gelegt, es soll mit Rücksicht auf die Reibung das Gesetz bestimmt werden, nach welchem diese Kugel über die schiefe Ebene hinabrollt.

Auflösung.

I. Es stelle die Figur einen verticalen Schnitt der Kugel und schiefen Ebene durch den Mittelpunct C vor und es sey der Neigungswinkel der schiefen Ebene $ABD = \alpha$, ferner nach Verlauf einer gewissen Zeit t, C der Ort des Mittelpunctes und M jener des Berührungspunctes der Kugel mit der schiefen Ebene, folglich $CM = r$ perpendikulär auf AB, weiters sey in demselben Zeitmomente v die Geschwindigkeit des Mittelpunctes nach CE parallel mit AB und w die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um einen horizontalen Durchmesser als Rotationsachse, wobei diese als positiv gelten soll, wenn die Rotation in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung Statt hat; so ist die in diesem Augenblicke Statt findende absolute Geschwindigkeit des Punctes M:

$$u = v - rw$$

oder wegen $v = \frac{dx}{dt}$, wenn man nämlich irgend einen Punct A' der durch C mit AB geführten Parallelen zum Anfangspuncte nimmt und $A'C = x$ für das Ende der Zeit t setzt, auch:

$$u = \frac{dx}{dt} - rw \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Ist ferner Q das Gewicht der Kugel, also $M = \frac{Q}{g}$ ihre Masse, Mk^2 wieder ihr Moment der Trägheit in Beziehung auf einen Durchmesser, und μ der Reibungscoeffizient für die Kugel und schiefe Ebene; so hat man, wenn das Gewicht Q in zwei Seitenkräfte q und q' nach CE und CM zerlegt wird, sofort $q = Q \, Sin \, \alpha$ und $q' = Q \, Cos \, \alpha$, folglich $\mu q'$ die aus der Reibung entstehende, nach der Richtung MA wirkende Kraft (welche man wieder, Nr. **61**, Anmerk. 2, in 8. mit MA parallel in den Schwerpunct C transferiren, also nach der Richtung CA' wirkend annehmen kann).

Die Resultante aus den auf den Mittel- oder Schwerpunct C der Kugel wirkenden bewegenden Kräften ist daher die nach der Richtung CE wirkende Kraft $p = q - \mu q'$, d. i.

$$p = Q(Sin\,\alpha - \mu\,Cos\,\alpha),$$

welche positiv, Null oder negativ wird, je nachdem beziehungsweise der Reibungscoeffizient $\mu <=> tang\,\alpha$, oder wenn μ gegeben ist, für den Neigungswinkel der schiefen Ebene, $tang\,\alpha >=< \mu$ ist.

Für die progressive Bewegung hat man daher (Nr. **56**):

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = p = Q(Sin\,\alpha - \mu\,Cos\,\alpha) \text{ oder wegen } \frac{Q}{M} = g:$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(Sin\,\alpha - \mu\,Cos\,\alpha) \;.\;.\; (1)$$

und für die rotirende Bewegung derselben [vorige Aufg., Relat. (m), wobei w nach der hier angenommenen Bedeutung mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist]:

$$Mk^2 . \frac{dw}{dt} = r\mu q' = r\mu Q\,Cos\,\alpha$$

oder wegen $k^2 = \frac{2}{5}r^2$ und $\frac{Q}{M} = g$, auch:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{5}{2}\frac{\mu}{r}g\,Cos\,\alpha \;.\;.\; (2)$$

durch Integration der beiden Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = C + gt(Sin\,\alpha - \mu\,Cos\,\alpha) \;.\;.\; (\beta)$$

$$w = C' + \frac{5}{2}\frac{\mu}{r}gt\,Cos\,\alpha \;.\;.\; (\gamma)$$

und mit diesen Werthen aus der obigen Gleichung (α):

$$u = C - rC' + gt(Sin\,\alpha - \tfrac{7}{2}\mu\,Cos\,\alpha) \;.\;.\; (\delta).$$

Läſst man die beiden Bewegungen in dem Augenblicke beginnen, in welchem sich der Mittelpunct C im Anfangspuncte A', in welchem nämlich $t = 0$ ist, befindet, so werden die Constanten C und C' gleich Null und es ist nach Verlauf der Zeit t die absolute Geschwindigkeit des betreffenden Berührungspunctes M in der Richtung MB:

$$u = gt(Sin\,\alpha - \tfrac{7}{2}\mu\,Cos\,\alpha) \;.\;.\; (\varepsilon)$$

dagegen die Geschwindigkeit des Mittelpunctes C nach der Richtung CE (aus β):

$$v = gt(Sin\,\alpha - \mu\,Cos\,\alpha) \;.\;.\; (\lambda)$$

so, daſs also der Unterschied $v - u = \frac{5}{2}\mu gt\,Cos\,\alpha$ ist.

Soll nun u positiv seyn, so mufs (aus ε) $Sin\,\alpha > \frac{7}{2}\mu\, Cos\,\alpha$, d. i. *a)* $tang\,\alpha > \frac{7}{2}\mu$, oder wenn α gegeben, $\mu < \frac{2}{7}\, tang\,\alpha$ seyn, dagegen wird u Null, wenn

b) $tang\,\alpha = \frac{7}{2}\mu$ oder $\mu = \frac{2}{7}\, tang\,\alpha$ ist.

II. Der jedesmalige Berührungspunct M gleitet also im erstern Falle von M gegen B abwärts, so, dafs so lange gleichzeitig die Rotation der Kugel Statt findet (welche nur, wie die Relat. (γ) zeigt, für $\mu = 0$, oder für $\alpha = 90^0$ verschwindet) eine gemischte Bewegung eintritt; im zweiten Falle dagegen, in welchem der Berührungspunct M genau so viel im Bogen zurückweicht als der Mittelpunct C nach CE fortrückt, findet eine vollkommene Wälzung Statt. (Aufg. 49, Anm.)

III. Dafs endlich im gegenwärtigen Falle u nicht auch negativ seyn, d. i. der Punct M nicht mehr zurückweichen kann, als der Mittelpunct C vorwärts geht, ist leicht einzusehen, weil die Reibung wohl das Abwärtsgleiten der Kugel verzögern oder selbst ganz aufheben, niemals aber eine Bewegung nach entgegengesetzter Richtung, d. i. ein Aufwärtsschieben der Kugel bewirken kann.

Ist also $tang\,\alpha < \frac{7}{2}\mu$, so wird dabei nichts anderes, als was bei $tang\,\alpha = \frac{7}{2}\mu$, d. i. nur eine vollkommene Wälzung bewirkt. Man kann daher sagen, dafs für einen Neigungswinkel α, von jener Grenze angefangen, bei welcher das Herabrollen der Kugel überhaupt beginnen kann (Aufgabe 49) bis zu jener Gröfse, wofür $tang\,\alpha = \frac{7}{2}\mu$ ist, immer eine vollkommene Wälzung, dagegen für noch gröfsere Werthe von α, ein Abwärtsgleiten des Berührungspunctes M, d. i. eine gemischte Bewegung eintritt, welche endlich bei $\alpha = 90^0$ in eine blofs gleitende übergeht.

IV. In jenen Fällen, in welchen die Kugel mit vollkommener Wälzung herabgeht, in welchen also $tang\,\alpha$ nicht gröfser als $\frac{7}{2}\mu$, nämlich $u = 0$ ist, folgt aus Relation (ε) $\mu\, Cos\,\alpha = \frac{2}{7}\, Sin\,\alpha$ und wenn man diesen Werth in der Relation (λ) substituirt, so erhält man für die Geschwindigkeit des Mittelpunctes C:

$$v = \tfrac{5}{7}\, g\, t\, Sin\,\alpha \quad . \quad . \quad (m)$$

und für den in der Zeit t zurückgelegten Weg:

$$x = \tfrac{5}{7} \cdot \tfrac{1}{2}\, g\, t^2\, Sin\,\alpha,$$

während ohne Reibung, d. i. für $\mu = 0$ die Endgeschwindigkeit $V = g\, t\, Sin\,\alpha$ und der zurückgelegte Weg $X = \frac{1}{2}\, g\, t^2\, Sin\,\alpha$ wäre.

V. So lange daher der Neigungswinkel α innerhalb der in *III.* angeführten Grenzen liegt, hat die Gröfse der Reibung auf die Zeit, binnen welcher die Kugel auf der schiefen Ebene (bei vollkommener Wälzung) einen gewissen Weg x zurücklegt, gar keinen Einfluſs, und es verhält sich der Weg x, welcher bei dem Vorhandenseyn irgend einer Reibung (ob gröſser oder kleiner) von der Kugel oder ihrem Mittelpuncte in einer bestimmten Zeit t zurückgelegt wird, zu dem Wege X, welcher bei vollkommen glatten Oberflächen von der Kugel in derselben Zeit t zurückgelegt würde, d. i.

$$x : X = \tfrac{5}{7} : 1 = 5 : 7,$$

eben so verhalten sich auch die Endgeschwindigkeiten nach der Zeit t in diesen beiden Fällen, d. i. $v : V = 5 : 7$.

Übrigens folgt von selbst, daſs die Gröſse der Reibung μ wenigstens in so weit dabei Einfluſs hat, als dadurch der obere Grenzwerth von α (nämlich aus $tang\,\alpha = \frac{7}{2}\mu$) bestimmt wird, bis zu welchem noch die vollkommene Wälzung Statt findet.

Ist z. B. der Reibungscoeffizient $\mu = \frac{1}{10}$, so erhält man für diesen Grenzwerth $\alpha = 19^0\,17'\,24''$, dagegen bei $\mu = \frac{1}{3}$, dafür $\alpha = 49^0\,24'$ und es würde in diesem letztern Falle die Kugel über alle Ebenen, bei welchen die Neigunswinkel von beinahe Null angefangen, bis $\alpha = 49^0\,24'$ mit vollkommener Wälzung herabgehen.

VI. Für absolut glatte Flächen würde $\mu = 0$ und die Geschwindigkeit des Mittelpunctes C (Relation λ):

$$v = g\,t\,Sin\,\alpha,$$

so wie jene des Berührungspunctes M (Relation ε):

$$u = g\,t\,Sin\,\alpha,$$

folglich $v = u$, so, daſs also in diesem Falle, wie es seyn soll (und wie auch aus der Relat. γ folgt, indem für $\mu = 0$ und $C' = 0$ auch $w = 0$ wird) gar keine Rotation der Kugel Statt finden, sondern diese wie jeder andere Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung über die schiefe Ebene herabgleiten würde.

Zusatz. Die vorige Relation (m) in *IV.* läſst sich auch durch folgende Betrachtungen ableiten.

Rollt ein Cylinder oder eine Kugel auf der schiefen Ebene AB (Fig. 57) herab, so wird die Bewegung des Punctes n, welcher für den untersten Punct a des Durchmessers ab den Mittelpunct des Schwunges bildet, durch die in a Statt findende Reibung in nichts gestört, weil eine in a auf ab perpendikulär wirkende Kraft nichts weiteres als eine Drehung des Punctes a um diesen Punct n hervorbringt. Nach einer unendlich kleinen Zeit wird der Durchmesser ab im Allgemeinen die Lage $a'b'$ angenommen haben, so, dafs also der Mittelpunct c durch die im Puncte a Statt findende Reibung um die Gröfse $nn' - cc'$ zurückgehalten worden, während $cc' - aa'$ die Zunahme oder eigentlich die Gröfse der Rotation angibt (indem die Rotation $aa' = cc'$ gleich Null ist).

Es verhält sich also die aus der Reibung entstehende Verzögerung des Mittelpunctes c zu der durch das Gleiten verminderten Rotation (nach der Richtung des Pfeils), wie cn zu ca, man hat nämlich

$$(nn' - cc') : (cc' - aa') = cn : ca.$$

Sobald aber die vollkommene Wälzung eingetreten, ist $aa' = 0$ und daher

$$(nn' - cc') : cc' = cn : ca \quad \text{oder} \quad nn' : cc' = an : ac.$$

Ist nun wieder v die Geschwindigkeit des Mittelpunctes c in diesem Augenblicke, d. i. am Ende der Zeit t, und v' jene des Punctes n, also $v' = Gt = gt\, Sin\, \alpha$; so ist der in der Zeit dt zurückgelegte Weg $cc' = v\, dt$ und jener $nn' = v'\, dt = gt\, dt\, Sin\, \alpha$, folglich, wenn man diese Werthe in der letzten Proportion substituirt und dann v bestimmt:

$$v = \frac{ac}{an}\, gt\, Sin\, \alpha.$$

Nun ist aber für die Kugel vom Halbmesser r der Abstand des Mittelpunctes des Schwunges n vom Endpunct a des Durchmessers (§. 170) $an = \frac{7}{5} r$, mithin $\frac{ac}{an} = \frac{5}{7}$ und daher

$$v = \tfrac{5}{7}\, gt\, Sin\, \alpha,$$

welches sofort die erwähnte Relation (m) ist.

Anmerkung. Man kann offenbar statt der Kugel jeden andern runden Körper annehmen, welcher durch den mittlern (in der halben Länge geführten) Querschnitt in zwei gleiche symmetrische Längenhälften getheilt wird, wenn man nur jedes Mal für k^2 den entsprechenden Werth setzt.

So ist z. B. für einen geraden Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Halbmesser $= r$ ist, $k^2 = \frac{1}{2} r^2$, folglich die Grenze des Neigungswinkels α bis zu welcher immer noch die vollkommene Wälzung Statt findet, aus $tang\, \alpha = \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) \mu$, sofort $tang\, \alpha = 3\mu$, so, dafs also für das obige Beispiel von $\mu = \frac{1}{10}$ hier nahe $\alpha = 16^\circ 42'$ würde, während für die Kugel dieser Grenzwerth über 19° betrug, mithin, unter übrigens gleichen Umständen, der Cylinder eher als die Kugel zu gleiten anfängt. Für $\mu = \frac{1}{3}$, wird hier $\alpha = 45^\circ$.

Ferner beträgt der Weg des Mittelpunctes oder eigentlich der Achse des Cylinders während der Zeit t, nach der allgemeinen Formel:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{r^2 + k^2}\right) g t^2 \, Sin\, \alpha,$$

für den Cylinder sofort

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} g t^2 \, Sin\, \alpha$$

und die Endgeschwindigkeit:

$$v = \tfrac{2}{3} g t \, Sin\, \alpha,$$

während bei der Kugel statt dem Bruche $\frac{2}{3}$ jener $\frac{5}{7}$ steht, so, dafs also der Cylinder mehr als die Kugel zurückbleibt u. s. w.