A) Aus der Statik.

1. Aufgabe.

Es sey AB (Fig. 1 und Fig. 2) eine steife gerade Linie, welche sich der Länge nach nicht verschieben läſst, wohl aber um jeden der beiden Puncte A und B frei drehen kann; wenn nun im Puncte C eine Kraft P normal auf AB wirkt, so soll der Druck bestimmt werden, welchen diese beiden Puncte A und B zu erleiden haben.

Auflösung.

Es sey x der gesuchte Druck auf den Punct A und y jener auf den Punct B, so ist, wenn der Angriffspunct C der Kraft, wie in Fig. 1, zwischen den beiden Auflagpuncten A und B liegt und man AB als einen um B drehbaren Hebel ansieht, die in A für das Gleichgewicht nöthige, nach aufwärts wirkende Kraft p aus der Relation (§. 73) $p \,.\, AB = P \,.\, BC$ zu bestimmen und da zugleich $x = p$ ist, so hat man

$$x = \frac{BC}{AB} \,.\, P$$

Eben so erhält man, wenn man AB als einen um A drehbaren Hebel ansieht,

$$y = \frac{AC}{AB} \,.\, P$$

Liegt dagegen der Angriffspunct C der Kraft P, wie in Fig. 2, in der Verlängerung von AB, so nehme man B für den Drehungspunct des Hebels AC und setze die in A für das Gleichgewicht nöthige Kraft $= p$; so ist $p \,.\, AB = P \,.\, BC$ und wegen $x = -p$ sofort

$$x = -\frac{BC}{AB} \,.\, P$$

d. h. der Druck findet nicht, wie im vorigen Falle in der Richtung der Kraft P oder nach abwärts, sondern nach aufwärts Statt.

Ferner ist der Druck in B, als Stützpunct des doppelarmigen Hebels AC, sofort:

$$y = P + p = P + \frac{BC}{AB}.p \text{ d. i.}$$

$$y = \frac{AC}{AB}.P$$

also dessen Richtung nach abwärts.

Anmerkung. Wie man sieht, darf man in der Auflösung des erstern Falles nur, wegen der entgegengesetzten Lage von BC, BC negativ oder mit entgegengesetztem Zeichen nehmen, um die Auflösung für den zweiten Fall zu erhalten. Es ist nämlich für beide Fälle

$$x = \pm \frac{BC}{AB}.P \text{ und } y = \frac{AC}{AB}.P$$

wobei von den doppelten Zeichen für den Fall 1 (Fig. 1) das obere, und für jenen 2 (Fig. 2) das untere gilt.

Fällt der Punct C auf jenen B, so ist wegen $BC = 0$ und $AC = AB$, sofort in beiden Fällen:

$$x = 0 \text{ und } y = P,$$

wie es seyn soll.

2. Aufgabe.

Auf die in den beiden Puncten A, B (Fig. 3) frei aufliegende gerade Linie AB und ihren Verlängerungen, wirken in den Puncten M, M', M''. . normal die Kräfte P, P', P''. . .; es soll wieder der Druck auf diese beiden Puncte A und B gefunden werden.

Auflösung.

Sieht man zuerst B und dann A als Drehungspunct des Hebels an, und bezeichnet die beziehungsweise in A und B nöthigen Kräfte zur Herstellung des Gleichgewichtes mit p und q; so hat man auf den Drehungspunct B bezogen (§. 32):

$$p.AB + P''.BM'' + P'''.BM''' = P.BM + P'.BM'$$

und auf den Punct A bezogen:

$$q.AB + P.AM = P'.AM' + P''.AM'' + P'''.AM'''$$

Aus diesen beiden Relationen folgt, wenn man den Druck auf den Punct A wieder durch x und jenen auf den Punct B durch y bezeichnet, wegen $x = p$ und $y = q$ sofort:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{P.BM + P'.BM' - P''.BM'' \quad P'''.BM'''}{AB} \\ y &= \frac{P'.AM' + P''.AM'' + P''' \; AM''' - P.AM}{A} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Durch Summirung dieser beiden Gleichungen folgt, wie es seyn soll: $x + y = P + P' + P'' \ldots$

Zusatz 1. Wirken eine oder mehrere dieser Kräfte nach entgegengesetzter Richtung, hier also aufwärts, so darf man diese Kräfte nur mit entgegengesetzten Zeichen in die vorigen Formeln einsetzen.

Zusatz 2. Wirken die Kräfte nicht normal, sondern unter ganz beliebigen Winkeln gegen die Achse oder Gerade AB, so darf man nur jede dieser Kräfte in zwei Seitenkräfte zerlegen, wovon die eine in die Richtung der Geraden AB fällt, und die andere darauf senkrecht ist; die letztern dieser Seitenkräfte sind dann die Kräfte $P, P', P'' \ldots$ der Formeln (A), während die erstern unberücksichtigt bleiben, wenn sich die Gerade AB der Länge nach nicht verschieben läfst, sonst aber die algebraische Summe die Gröfse und Richtung ihrer Resultante nach AB oder BA angibt.

Ist z. B. in der ersten Aufgabe, für welche hier $P = P'' = P''' = 0$ und $P' = P$ zu setzen ist, der Winkel unter welchem die Kraft P (Fig. 4) auf AB wirkt $= \alpha$; so erleidet die Achse AB von B gegen A einen Druck $= P \, Cos\, \alpha$, während die normal auf AB wirkende Kraft $= P \, Sin\, \alpha$ ist.

Von dieser letztern Kraft entsteht in A ein Druck normal auf AB:

$$x = \frac{BC}{AB} \cdot P \, Sin\, \alpha$$

und in B ein Druck: $$y = \frac{AC}{AB} \cdot P \, Sin\, \alpha,$$

während der von B nach A Statt findende Druck $P \, Cos\, \alpha$ ganz beliebig auf diese Puncte A und B vertheilt gedacht werden kann, sonach der Druck auf die beiden Puncte A und B in dieser Richtung ganz unbestimmt ist.

3. Aufgabe.

Mit der Achse AB (Fig. 5) ist im Puncte C der Arm CD senkrecht verbunden, und im Puncte D desselben wirkt die Kraft P parallel mit BA; es soll der in den Puncten A und B dadurch entstehende Druck bestimmt werden.

1. Auflösung.

Man ziehe die Verbindungslinie BD und verlängere dieselbe über D hinaus, schneide auf der Richtung der Kraft P das Stück $De = P$ ab, ziehe ei parallel zu CD und in parallel zu AB, so dafs dadurch (indem auch CD verlängert wird) das Rechteck en entsteht. Bringt man ferner, da dadurch das Gleichgewicht nicht gestört wird, auf den Punct D die beiden gleichen Kräfte Dn und Dm nach gerad entgegengesetzten Richtungen an, so kann man Di als Resultante der beiden Kräfte $De = P$ und $Dn = P \tang \alpha$ ansehen, welche sofort auf den Punct B unter dem Winkel $ABD = \alpha$ wirkt.

Schneidet man daher $Bk = Di$ ab und construirt durch den Punct k das Rechteck gf, so wird der Punct senkrecht auf AB nach abwärts mit der Kraft $Bf = Dn$, und nach der Richtung BA mit der Kraft $Bg = De = P$ gedrückt, während noch auf AB normal im Puncte C die Kraft $Dm = Dn$ aufwärts wirkt. Diese letztere Kraft bringt aber (Aufgabe 1) auf die Puncte A und B senkrecht auf AB und zwar nach aufwärts einen Druck hervor, welcher beziehungsweise durch

$$x = \frac{BC}{AB} . Dn = \frac{BC}{AB} . P \tang \alpha \quad \text{und} \quad y' = \frac{AC}{AB} . P \tang \alpha$$

ausgedrückt wird. Es ist daher der in A normal auf AB nach aufwärts Statt findende Druck

$$x = \frac{BC}{AB} . P \tang \alpha$$

und der im Puncte B nach abwärts entstehende Druck $y = Bf - y' = P \tang \alpha - \frac{AC}{AB} . P \tang \alpha$ d. i.

$$y = \frac{BC}{AB} . P \tang \alpha.$$

Setzt man $\tang \alpha = \frac{CD}{BC}$, so wird auch

$$x = \frac{CD}{AB} . P \quad \text{und} \quad y = \frac{CD}{AB} P$$

so, dafs also diese beiden Drücke der Gröfse nach einander gleich, der Richtung nach aber einander entgegengesetzt sind.

Was endlich den in der Längenrichtung der Achse AB Statt findenden Druck $Bg = P$ betrifft, so kann man sich diesen als auf die beiden Puncte A und B ganz willkürlich vertheilt vorstellen, indem der auf diese einzelnen Puncte entfallende Druck unbestimmt ist.

2. Auflösung.

Zieht man durch den Punct A (Fig. 6) AE parallel zu CD und denkt sich den Durchschnittspunct E als Angriffspunct der Kraft P, so wie A als Drehungspunct des Winkelhebels EAB, an dessen Endpunct B zur Herstellung des Gleichgewichtes die senkrecht auf AB nach aufwärts wirkende Kraft y nothwendig seyn soll; so hat man nach statischen Gesetzen:

$P.AE = y.AB$ und daraus, wegen $AE = CD$, sofort

$$y = \frac{CD}{AB}.P$$

als Druck auf den Punct B senkrecht auf AB, und zwar nach abwärts.

Der Drehungspunct A erleidet denselben Druck, als wenn die beiden Kräfte P und y, mit ihren ursprünglichen Richtungen parallel, in diesem Puncte angebracht wären; es findet daher in diesem Puncte A ein senkrecht auf AB und zwar nach aufwärts gerichteter Druck

$$x = y = \frac{CD}{AB}.P$$

und ein von B gegen A gerichteter Druck $= P$ Statt, welcher wieder auf einen, oder auf beide Puncte A und B vertheilt gedacht werden kann.

Anmerkung. Wie man sieht, hat die Entfernung des Punctes C von den beiden Puncten A und B auf die Gröfse und Richtung des Druckes keinen Einflufs und es bleibt immer $x.AB = P.CD$.

Zusatz. Wirkt die Kraft P nicht parallel mit BA, sondern bildet ihre Richtung, welche immer noch in der durch AB und CD gehenden Ebene liegen soll, mit AB den Winkel α; so erhält man durch Zerlegung der Kraft P in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte, wovon die eine nach DE, d. i. parallel mit BA wirkt, ganz einfach,

für den Druck auf A nach aufwärts: $x = \frac{CD \, Cos\, \alpha - CD \, Sin\, \alpha}{AB}.P$

für den Druck auf B nach abwärts: $y = \frac{CD\, Cos\, \alpha + AC\, Sin\, \alpha}{AB}.P$

und für den Druck auf A und B in der Längenrichtung von B gegen A:

$$z = P\, Cos\, \alpha.$$

4. Aufgabe.

Eine gewichtlose, unbiegsame horizontale Ebene RS (Fig. 7) ist in den drei Puncten A, B, C unterstützt und im Puncte M mit dem Gewichte P belastet; es soll der Druck bestimmt werden, welcher auf jeden der drei Stützpuncte Statt findet.

1. Auflösung.

Bezeichnet man den gesuchten Druck auf den Punct A mit x, jenen auf B mit y und den Druck auf C mit z, nimmt ferner die Verbindungslinie AB zur Momentenachse und bezeichnet die für das Gleichgewicht in dem Puncte C normal auf die Ebene RS nach aufwärts anzubringende Kraft durch p; so hat man, wenn CD und ME senkrecht auf AB gezogen werden,

$$p\,CD = P.ME \text{ oder } p = \frac{ME}{CD}.P,$$

folglich, da der Gröfse nach $z = p$ ist, auch

$$z = \frac{ME}{CD}.P.$$

Da sich die Flächen der beiden Dreiecke ABC und ABM, von einerlei Grundlinien wie ihre Höhen verhalten, also $\frac{ME}{CD} = \frac{\Delta ABM}{\Delta ABC}$ Statt findet, so ist auch

$$z = \frac{\Delta ABM}{\Delta ABC}.P.$$

Ganz analog damit erhält man auch für die Pressungen in den Puncten B und A, wenn man beziehungsweise AC und BC zu Momentenachsen nimmt:

$$y = \frac{\Delta ACM}{\Delta ABC}.P \text{ und } x = \frac{\Delta BCM}{\Delta ABC}.P.$$

Zusatz 1. Es ist also $x + y + z = P$ und

$$x:y:z = \Delta BCM : \Delta ACM : \Delta ABM.$$

Zusatz 2. Fällt der Punct M mit dem Schwerpunct des Dreieckes zusammen, so ist wegen $\Delta BCM = \Delta ACM = \Delta ABM$ auch

$$x = y = z = \tfrac{1}{3}P.$$

Fällt der Punct M in eine der drei Verbindungs- oder Umfangslinien des Dreieckes ABC, z. B. in jene AB; so wird, wegen $\Delta ABM = 0$ auch $z = 0$ und wenn z. B. m der Punct ist, mit welchem M zusammenfällt, sofort

$$x:y = \Delta BCm : \Delta ACm = Bm : Am$$

weil diese beiden Dreiecke einerlei Höhe haben.

Fällt endlich zugleich auch der Punct C in diese Verbindungslinie AB, so werden die sämmtlichen Dreiecke Null und daher folgt aus den allgemeinen Werthen

$$x = \tfrac{0}{0},\ y = \tfrac{0}{0},\ z = \tfrac{0}{0},$$

zum Beweis, dafs der Druck auf die drei Unterstützungspuncte einer in einem Puncte belasteten geraden unbiegsamen Linie unbestimmt ist, oder die Vertheilung des Druckes P auf diese 3 Puncte auf unzählige Arten geschehen kann.

2. Auflösung.

Setzt man (Fig 8) $MA=a$, $MB=b$, $MC=c$ und die Winkel $AMB=\alpha$, $AMC=\beta$, $BMC=\gamma$, wobei also $\gamma=360^0-(\alpha+\beta)$ ist, bezeichnet ferner wie zuvor, die Drücke, welche die Puncte A, B, C durch das in M angebrachte Gewicht P erleiden, beziehungsweise mit x, y, z; so hat man fürs erste:

$$x+y+z=P \quad (1)$$

und dann, wenn man AM als Momentenachse nimmt, da die Kräfte y und z in Beziehung auf diese Achse im Gleichgewichte stehen müssen, auch, wenn BD und CE perpendikulär auf AM gezogen werden:

$$y.BD=z.CE \text{ d. i. } y.b\,Sin\,\alpha=z.c\,Sin\,\beta \quad (2)$$

Eben so folgt, wenn man BM als Momentenachse gelten läſst:

$$x.a\,Sin\,\alpha=z.c\,Sin\,\gamma \quad (3)$$

Aus diesen 3 Gleichungen (1), (2), (3) erhält man ganz einfach, wenn man noch Kürze halber

$$ab\,Sin\,\alpha+ac\,Sin\,\beta+bc\,Sin\,\gamma=N \text{ setzt:}$$

$$x=\frac{bc\,Sin\,\gamma}{N}P,\quad y=\frac{ac\,Sin\,\beta}{N}P,\quad z=\frac{ab\,Sin\,\alpha}{N}P.$$

Dabei ist, wie sich von selbst versteht, $Sin\,\gamma=-Sin(\alpha+\beta)$.

Anmerkung. Dieselben Werthe erhält man auch ganz einfach aus den Werthen der vorigen Auflösung, wenn man dort (Compend. §. 57) $\Delta ABM=\frac{1}{2}ab\,Sin\,\alpha$, $\Delta ACM=\frac{1}{2}ac\,Sin\,\beta$, $\Delta BCM=\frac{1}{2}bc\,Sin\,\gamma$ und $\Delta ABC=\frac{1}{2}(ab\,Sin\,\alpha+ac\,Sin\,\beta+bc\,Sin\,\gamma)$ setzt.

Zusatz. Für $\alpha=\beta=180^0$ tritt der vorhin erwähnte Fall ein, in welchem die 3 Puncte A, B, C mit dem Angriffspunct M der Kraft P in einer geraden Linie liegen und wobei der auf diese 3 Puncte vertheilte Druck P ganz unbestimmt ist, also diese letztere so gestellte Aufgabe unzählig viele Auflösungen, die allerdings innerhalb gewisser Grenzen liegen, zuläſst. Eine dieser Auflösungen erhält man, wie bereits bemerkt, indem man in den vorigen Werthen von x, y, z die Winkel $\alpha=\beta=180^0$ setzt; es wird dadurch, wegen $Sin\,\gamma=-Sin(\alpha+\beta)=-Sin\,2\alpha=2\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha$ und $Sin\,\beta=Sin\,\alpha$ sofort, wenn man gleich mit $Sin\,\alpha$ dividirt:

$$x=\frac{-2bc\,Cos\,\alpha}{ab+ac-2bc\,Cos\,\alpha}P,$$

oder wegen $Cos\,\alpha=Cos\,180^0=-1$, auch:

$$x=\frac{2bcP}{ab+ac+2bc}$$

Eben so ist $y = \frac{acP}{ab + ac + 2bc}$ und $z = \frac{abP}{ab + ac + 2bc}$

Anmerkung. Geht man auf die 3 Grundgleichungen (1), (2), (3) zurück; so gehen sie in dem vorliegenden speciellen Falle über in
$x + y + z = P$, $y\,b\,Sin\,180^\circ = 2c\,Sin\,180^\circ$, $x\,a\,Sin\,180^\circ = z\,c\,Sin\,0$.

Da aber diese beiden letztern Gleichungen identisch sind und sonach nur Eine ausmachen, indem jede $0 = 0$ wird, so bestehen in der That nur zwei Gleichungen, aus denen sich also die 3 Unbekannten x, y, z nicht vollkommen bestimmen lassen.

Es bestehen nämlich, wenn man in Fig. 9 $AM = a$, $MB = b$ und $MC = c$ setzt, für das Gleichgewicht der 4 Kräfte P, x, y, z (§. 33 u. Nr. 20) nur die beiden Relationen:

$$x + y + z = P \quad (\alpha) \quad \text{und} \quad ax = by + cz \quad (\beta)$$

Da nun sowohl y als auch z Null seyn kann, so sind die Grenzen, innerhalb welcher die sämmtlichen Werthe von x, y, z liegen und diesen beiden Bedingungsgleichungen entsprechen, folgende:

für x: $\frac{Pc}{a+c}$ und $\frac{Pb}{a+b}$

für y: 0 und $\frac{Pa}{a+b}$

für z: $\frac{Pa}{a+c}$ und 0.

Drückt man zwei von den 3 Gröfsen x, y, z durch die dritte, z. B. x, y durch z aus, so erhält man:

$$x = \frac{bP + (c-b)z}{a+b} \quad \text{und} \quad y = \frac{aP - (a+c)z}{a+b}$$

so, dafs also, wenn für z ein innerhalb der eben angegebenen betreffenden Grenzen liegender Werth angenommen wird, die beiden übrigen Gröfsen vollkommen bestimmt sind; so ist z. B. für $z = 0$ sofort:

$$x = \frac{bP}{a+b} \quad \text{und} \quad y = \frac{aP}{a+b}.$$

Eine ähnliche Unbestimmtheit, wie sie hier in Beziehung auf die 3, in einer geraden Linie liegenden Puncte vorkömmt, findet auch Statt, wenn eine unbiegsame, in einem Puncte belastete Ebene, in mehr als 3 Puncten unterstützt, und der Druck auf jeden dieser Puncte gesucht wird.

Übrigens mufs bemerkt werden, dafs die hier erörterte Unbestimmtheit sogleich verschwindet, wenn man der geraden Linie (oder in dem eben angeführten Falle der Ebene) eine, wenn auch noch so geringe Biegsamkeit, wie diefs in der Wirklichkeit immer der Fall ist, zugesteht. (Man sehe die Anmerk. zur 38. Aufgabe.)

5. Aufgabe.

Ein Sparren oder Balken, welcher hier durch eine steife gerade Linie AB (Fig 10) dargestellt wird, lehnt sich, während er sich zugleich auf den horizontalen Boden CR stützt, an eine verticale Wand CS in der Art, dafs er selbst in einer verticalen (auf CR und CS perpendikulären) Ebene liegt und mit dem Horizonte den Winkel $ABC = \alpha$ bildet; wenn nun in irgend einem Puncte M dieses Balkens ein Gewicht P aufgehängt wird, so soll unter der Voraussetzung, dafs der Balken selbst kein Gewicht hat und weder am Boden CR noch an der Wand CS irgend eine Reibung Statt findet, sowohl der horizontale Schub als auch der verticale Druck des Balkens gegen die Wand CS und den Boden CR bestimmt werden.

Auflösung.

Es sey $AM = a$ und $BM = b$, so entsteht von der lothrecht wirkenden Last P auf die beiden Puncte A und B nach derselben Richtung ein Druck, welcher (§. 20) für den Punct A durch $p = \frac{b}{a+b} P$ und für den Punct B durch $q = \frac{a}{a+b} P$ ausgedrückt wird.

Schneidet man daher $AD = p$ ab und construirt das Parallelogramm EF, so ist die Seitenkraft $AF = AD \, Cot \, \alpha = p \, Cot \, \alpha$ und jene $AE = \frac{AD}{Sin \, \alpha} = \frac{p}{Sin \, \alpha}$.

Verlängert man ferner AB, schneidet auf der Verlängerung $BG = AE$ ab und construirt das Rechteck HJ, so ist

$BJ = BG \, Sin \, \alpha = \frac{p}{Sin \, \alpha} Sin \, \alpha = p$ und $BH = BG \, Cos \, \alpha = \frac{p}{Sin \, \alpha} Cos \, \alpha = p \, Cot \, \alpha$.

Es ist also der horizontale Schub gegen die Wand in A:

$$S = AF = p \, Cot \, \alpha = \frac{b}{a+b} P \, Cot \, \alpha$$

und der verticale Druck gegen den Boden in B:

$$D = q + BJ = q + p = P.$$

Aufserdem ist der Schub, mit welchem der Balken am Boden CR nach horizontaler Richtung auszuweichen sucht:

$$BH = AF = S = \frac{b}{a+b} P \, Cot \, \alpha,$$

also eben so grofs wie in A gegen die Wand.

Ist M der Halbirungspunct von AB, also $b=a$, so ist der horizontale Schub: $S=\frac{1}{2}P\,Cot\,\alpha$.

Anmerkung. Es mufs also, um das Gleichgewicht herzustellen, in B eine horizontale, von H gegen B wirkende Kraft S angebracht werden.

Für $\alpha=90^0$ ist $S=0$ und für $\alpha=0$ wird S unendlich grofs, weil da keine Reibung angenommen wird, keine, auch noch so grofse Kraft im Stande ist, den Sparren horizontal gegen die Wand so zu drücken, um dadurch das Herabgleiten desselben längs der verticalen Wand zu verhindern.

Zusatz. Sind also zwei gleiche Balken oder Sparren AC und BC (Fig. 11) in einer verticalen Ebene ABC unter gleichen Winkeln gegen den Horizont an einander gelehnt, oder zu einem sogenannten Leergesperre (technischer Ausdruck bei den Holzverbindungen) verbunden; so läfst sich der dabei entstehende horizontale, oder sogenannte Sparrenschub, wenn man $AD=BD=b$, $AC=BC=l$, $CD=h$, W. $CAD=$ W. $CBD=\alpha$ und das Gewicht eines Sparrens AC oder $BC=G$ setzt, durch

$$S=\tfrac{1}{2}G\,Cot\,\alpha$$

oder wegen $Cot\,\alpha=\frac{AD}{CD}=\frac{b}{h}$ auch durch

$$S=\tfrac{1}{2}G\frac{b}{h},$$

und wenn man annimmt, dafs der laufende Fufs jedes Sparrens (sein eigenes Gewicht mit eingerechnet) mit dem Gewichte q belastet, also $G=lq$ und $Sin\,\alpha=\frac{h}{l}$ ist, auch durch

$$S=\tfrac{1}{2}bq\frac{l}{h}=\tfrac{1}{2}q\frac{b}{Sin\,\alpha}$$

ausdrücken.

Der in A und B Statt findende verticale Druck ist sofort

$$D=G=ql.$$

6. Aufgabe.

Die vorige Aufgabe mit Rücksicht auf die an der verticalen Wand und am horizontalen Boden Statt findende Reibung aufzulösen.

Auflösung.

Bezeichnet man den horizontalen Schub oder normalen Druck des Balkens gegen die Wand AC (Fig. 10) indefs durch X, so mufs ohne Rücksicht auf Reibung in B nach der Richtung HB eine Kraft Y wirken, für welche (vorige Aufgabe) $Y = X$ ist. Setzt man den auf den Boden in B Statt findenden verticalen Druck $= Z$ und den Reibungscoeffizienten zwischen dem Balken und horizontalen Boden $= \mu$, so ist statt Y nur eine Kraft $Y' = X - \mu Z$ erforderlich, um das Ausgleiten bei B zu verhindern.

Die in A und B vom Gewichte P im Puncte M herrührenden lothrechten Kräfte sind nach der vorigen Aufgabe beziehungsweise $AD = p$ und $= q$; anstatt wie vorhin p in AF und AE zu zerlegen, mufs man jetzt, wenn μ' den Reibungscoeffizienten zwischen dem Balken und der verticalen Wand bezeichnet, $p - \mu' X$ zerlegen. Dadurch erhält man:

$$AF = X = (p - \mu' X)\, Cot\, \alpha \;.\;.\; (a) \quad \text{und} \quad W = AE = \frac{p - \mu' X}{Sin\, \alpha};$$

aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt:

$$X = \frac{p\, Cot\, \alpha}{1 + \mu'\, Cot\, \alpha} = \frac{p}{\mu' + tang\, \alpha} \;.\;.\; (b)$$

Wird ferner $BG = W$ in die beiden Seitenkräfte BH und BJ zerlegt, so wird $BH = W\, Cos\, \alpha = (p - \mu' X)\, Cot\, \alpha$ oder wegen Gleich. (a)

$$BH = X$$

und $\qquad BJ = W\, Sin\, \alpha$, d. i. $BJ = p - \mu' X$.

Es ist also der senkrechte Druck auf den Boden in B:

$$Z = q + BJ = p + q - \mu' X = P - \mu' X,$$

woraus $\mu Z = \mu (P - \mu' X)$, und wenn man diesen Werth in Y' substituirt, sofort $Y' = X - \mu (P - \mu' X)$ folgt. Setzt man in diesen letztern Ausdruck für X den Werth aus (b), so erhält man

$Y' = (1 + \mu \mu') \dfrac{p}{\mu' + tang\, \alpha} - \mu P$ oder wegen $p = \dfrac{bP}{a + b}$ (vorige Aufgabe) endlich die für das Gleichgewicht von H gegen B nöthige horizontale Kraft:

$$Y' = \frac{1 + \mu \mu'}{\mu' + tang\, \alpha} \cdot \frac{bP}{a + b} - \mu P \;.\;.\; (c)$$

Zusatz 1. Um jenen Neigungswinkel α' des Balkens gegen den Horizont zu finden, bei welchem die Reibung allein im Stande ist, das Ausgleiten zu verhindern, darf man in diesem letztern Ausdruck nur $Y' = 0$ setzen; dadurch erhält man

$(1 + \mu \mu')\, bP = (a + b)(\mu' + tang\, \alpha')\, \mu P$ und daraus:

$$tang\, \alpha' = \frac{b - \mu \mu' a}{\mu (a + b)}.$$

Setzt man $\mu' = \mu$ und sucht den Werth von μ, für welchen bei irgend einem Neigungswinkel α das Aus- und Abgleiten des Balkens verhindert wird; so erhält man wieder aus der vorigen Gleichung (c) für $Y' = 0$ nach gehöriger Entwicklung:

$$\mu = \frac{-(a+b)\,tang\,\alpha + \sqrt{[(a+b)^2\,tang\,\alpha^2 + a\,b]}}{a}.$$

Zusatz 2. Setzt man die Länge des Balkens oder Sparrens $a + b = l$, so ist auch $tang\,\alpha' = \frac{l - (1 + \mu\mu')\,a}{\mu\,l}$.

Da nun der Zähler dieses Bruches um so gröfser wird, je kleiner a ist, so wird auch α' nahe in demselben Verhältnifs gröfser, der Balken gleitet also unter übrigens gleichen Umständen um so leichter aus, je näher sich die Last P gegen den Punct A befindet.

Für $a = 0$ wird $tang\,\alpha' = \frac{1}{\mu}$; für $l = (1 + \mu\mu')\,a$ wird $a = \frac{l}{1 + \mu\mu'}$ und $\alpha' = 0$.

Fällt endlich der Aufhängpunct M der Last P in die halbe Länge AB, so wird wegen $b = a$ sofort $tang\,\alpha' = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}$, dieser Ausdruck nähert sich immer mehr der Nulle je gröfser α wird, für $\alpha = 90^0$ wird wegen $tang\,\alpha = \infty$ sofort $\mu = 0$. Für $\alpha = 0$ dagegen wird $\mu = \sqrt{\frac{b}{a}}$ und wenn noch dabei $b = a$ ist, $\mu = 1$.

7. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen der Balken AB (Fig. 12) vom Gewichte G ohne Reibung zwischen den beiden schiefen Ebenen AC und BC im Gleichgewichte bleibt.

Auflösung.

Da das Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die durch den Schwerpunct O des Balkens gezogene lothrechte Linie GH zugleich durch den Punct F geht, in welchem sich die beiden, durch die Endpuncte A, B auf die schiefen Ebenen AC und BC errichteten Perpendikel AF und BF schneiden; so seyen α und β die Neigungswinkel dieser schiefen Ebenen mit dem Horizonte DE, so wie $AF = p$ und $BF = q$ die aus dem Gewichte $G = FG$ entstehenden, auf AC und BC normalen Seitenkräfte. Diefs vorausgesetzt, hat man $p : G = Sin\,\beta : Sin\,(\alpha + \beta)$ und daraus:

$$p = \frac{G\,Sin\,\beta}{Sin\,(\alpha+\beta)} \quad \text{und eben so} \quad q = \frac{G\,Sin\,\alpha}{Sin\,(\alpha+\beta)} \quad (1)$$

Setzt man ferner die Länge des Balkens $AB = l$, den Winkel, welchen derselbe mit dem Horizonte bildet $BAJ = \varphi$ und $AO = \frac{1}{2} l$; so ist $$AL = \tfrac{1}{2} l \, Cos \, \varphi = AF \, Sin \, AFL = AF \, Sin \, \alpha$$

folglich $\frac{1}{2} l \, Cos \, \varphi = p \, Sin \, \alpha$ und $Cos \, \varphi = \frac{2p}{l} Sin \, \alpha$,

oder wenn man für p den Werth aus (1) setzt:

$$Cos \, \varphi = \frac{2 \, G \, Sin \, \alpha \, Sin \, \beta}{l \, Sin (\alpha + \beta)} \quad (2)$$

Will man das Gewicht G eliminiren, so darf man nur berücksichtigen, dafs W. $ABC = n = \beta - \varphi$, folglich W. $FBO = 90^0 - n = 90 + \varphi - \beta$ und daher wegen $FO : OB = Sin \, FBO : Sin \, OFB = Cos(\varphi - \beta) : Sin \, \beta$, also $FO \, Sin \, \beta = OB \, Cos (\varphi - \beta)$ oder $G \, Sin \, \beta = l \, Cos (\varphi - \beta)$, folglich wenn man diesen Werth in (2) substituirt, auch:

$$Cos \, \varphi = \frac{2 \, Sin \, \alpha \, Cos (\varphi - \beta)}{Sin (\alpha + \beta)}$$

ist, so, dafs wenn man $Cos (\varphi - \beta)$ auflöst, die Gleichung durch $Cos \, \varphi$ dividirt und gehörig reducirt, sofort

$$tang \, \varphi = \frac{Sin (\alpha + \beta) - 2 \, Sin \, \alpha \, Cos \beta}{2 \, Sin \, \alpha \, Sin \, \beta} \quad (3)$$

wird.

Zusatz. Für $\alpha = \beta$ wird $tang \, \varphi = 0$, folglich mufs der Balken für das Gleichgewicht horizontal liegen.

Für $\alpha = 0$ und $\beta = 90^0$ wird $tang \, \varphi = \frac{1}{0} = \infty$, folglich mufs der Balken in diesem Falle vertical stehen.

8. Aufgabe.

Der Balken oder Sparren AB (Fig. 13) liegt in A auf der verticalen Stütze oder Mauer AC auf und stützt sich am andern Ende bei B auf den horizontalen Boden BC; wenn nun wieder in irgend einem Puncte M des als gewichtlos gedachten Balkens eine Last P aufgehängt wird, so sollen die dadurch gegen die verticale Mauer und den horizontalen Boden entstehenden Pressungen bestimmt werden.

Auflösung.

Ist, wie in der 5. Aufgabe, $AM = a$, $BM = b$ und W. $ABC = \alpha$; so sind, wie dort

$$AD = p = \frac{b}{a+b} P \quad \text{und} \quad BJ = q = \frac{a}{a+b} P$$

die in A und B lothrecht wirkenden Kräfte.

Zerlegt man p in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte AE und AF senkrecht und parallel mit AB, so erhält man

$$AE = p\, Cos\, \alpha \text{ und } AF = p\, Sin\, \alpha.$$

Verlängert man AB, macht $BH = AF$, und zerlegt diese letztere Kraft in die horizontale und verticale Seitenkraft BG und BJ; so wird

$$BG = AF\,.\,Cos\,\alpha = p\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha \text{ und } BJ = AF\,.\,Sin\,\alpha = p\, Sin\,\alpha^2$$

der gesammte verticale Druck in B ist daher $D = q + BJ = \frac{a}{a+b} P + \frac{b}{a+b} P\, Sin\, \alpha^2$ d. i.

$$D = \frac{a + b\, Sin\,\alpha^2}{a+b} P \quad (1)$$

so wie der horizontale Schub in B sofort $S = BG = p\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha$,

d. i. $$S = \frac{b}{a+b} P\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha = \tfrac{1}{2} \frac{b}{a+b} P\, Sin\, 2\,\alpha. \quad (2)$$

Zerlegt man ferner die oben ausgedrückte Kraft AE in eine horizontale Aa und eine verticale Seitenkraft Ab, so erhält man:

$$Aa = AE\, Sin\,\alpha \text{ und } Ab = AE\, Cos\,\alpha,$$

folglich, wenn man für AE den Werth setzt:

$$Aa = p\, Cos\,\alpha\, Sin\,\alpha = \frac{b}{a+b} P\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha = \tfrac{1}{2}.\frac{b}{a+b} P\, Sin\, 2\,\alpha \quad (3)$$

und $$Ab = p\, Cos\,\alpha^2 = \frac{b}{a+b} P\, Cos\,\alpha^2. \quad (4)$$

Dieser letztere nach C fortgepflanzte verticale Druck mit jenem summirt, welcher in B nach dieser Richtung Statt findet, gibt, wie es seyn soll:

$$\frac{b}{a+b} P\, Cos\,\alpha^2 + \frac{a + b\, Sin\,\alpha^2}{a+b} P = P.$$

Zusatz 1. Hat der Balken AB das Gewicht G und liegt dessen Schwerpunct im Halbirungspunct der Länge l, so, dafs $b = a = \frac{1}{2} l$ ist; so hat man aus den vorigen Formeln, für den unbelasteten Balken:

im Puncte A den horizontalen Schub $S' = \frac{1}{4} G\, Sin\, 2\,\alpha$

„ verticalen Druck $D' = \frac{1}{2} G\, Cos\,\alpha^2$

im Puncte B den horizontalen Schub $S = \frac{1}{4} G\, Sin\, 2\,\alpha = S'$

„ verticalen Druck $D = \frac{1}{2} G\, (1 + Sin\,\alpha^2)$

Für $\alpha = 45^0$ wird der horizontale Schub am gröfsten und zwar wird dafür $S = S' = \frac{1}{4} G$.

Zugleich wird auch $D' = \frac{1}{4} G$ und $D = \frac{3}{4} G$.

Für $\alpha = 90^0$ wird $S = S' = 0$ und $D' = 0$, $D = G$.

Für $\alpha = 0$ endlich ist $S = S' = 0$ und $D' = D = \frac{1}{2} G$.

Zusatz 2. Setzt man bei einem Leergesperre ACB (Fig. 11) die Länge eines Sparrens $AC = BC = l$, die halbe Tiefe des Daches $AD = BD = b$, die Höhe desselben $CD = h$ und das Gewicht des laufenden Fuſses der Belastung (mit Einschluſs des eigenen Gewichtes des Sparrens) $= q$; so erhält man wegen $G = ql$, für den verticalen Druck auf die Säule CD im Puncte C:

$$D' = 2 \times \tfrac{1}{2} ql \, Cos\, \alpha^2 + qh = ql \, . \frac{b^2}{l^2} + qh = q\left(\frac{b^2}{l} + h\right)$$

für den verticalen Druck in A und B:

$$D = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{h^2}{l^2}\right) ql$$

und für den Sparrenschub in A und B:

$$S = \tfrac{1}{2} ql \, . \frac{h}{l} \, . \frac{b}{l} = \tfrac{1}{2} q \frac{bh}{l} = \tfrac{1}{2} q \frac{bh}{\sqrt{(b^2 + h^2)}}$$

oder auch
$$S = \tfrac{1}{2} qb \, Sin\, \alpha.$$

Der Sparrenschub wird also bei einerlei Tiefe $2b$ des Daches um so kleiner, je kleiner der Winkel α ist; es ist daher zur Verminderung des sonst so nachtheiligen Sparrenschubes bei flachen Dächern sehr vortheilhaft, solche Säulen oder Stützen CD anzubringen.

9. Aufgabe.

Auf die verticale Säule AB (Fig. 14), welche bei B im Boden befestigt ist, wirkt im Puncte A nach horizontaler Richtung die Kraft P mit dem Bestreben diese Säule umzustürzen; wenn nun in der durch AB und die Richtung der Kraft P gehenden Ebene die Strebe CD angebracht und bei C mit der Säule, bei D mit dem Boden befestigt ist, so sollen die Pressungen gefunden werden, welche diese Kraft P auf die Säule und Strebe hervorbringt.

Auflösung.

Die Kraft P bringt auf den Punct C den horizontalen Zug $CE = \frac{AB}{CB} P$, oder wenn man $AB = h$, $CD = l$ und W. $CDB = \alpha$ setzt, wegen $BC = l Sin\, \alpha$, jenen

$$CE = \frac{h}{l \, Sin\, \alpha} P$$

hervor.

Zerlegt man diese Kraft CE in die beiden Seitenkräfte CF und CJ, nach den Richtungen der Säule und Strebe, so wird, wenn man die erstere mit p und die letztere mit q bezeichnet, wegen $p : CE = Sin\,\alpha : Cos\,\alpha$, sofort:

$$p = CE\,tang\,\alpha = \frac{h}{l\,Cos\,\alpha} P \;.\;. \quad (1)$$

und wegen $q : CE = 1 : Cos\,\alpha$ der Werth von q:

$$q = \frac{CE}{Cos\,\alpha} = \frac{hP}{l\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha} = \frac{2h}{l\,Sin\,2\alpha} P \;.\;. \quad (2)$$

Die Kraft P äufsert demnach das Bestreben die Säule AB mit der Kraft $CF = p$ zu heben oder aus dem Boden zu ziehen, und die Strebe nach der Richtung CD mit der Kraft $CJ = q$ zu zerdrücken. Dieser Druck ist für $\alpha = 45^0$ am gröfsten und $= 2\frac{h}{l} P$.

Zerlegt man endlich noch den Druck, welchen die Strebe auf den Boden nach der Richtung CD ausübt, in einen verticalen und horizontalen Seitendruck r nnd s; so wird der erstere:

$$r = q\,Sin\,\alpha = \frac{h}{l\,Cos\,\alpha} P$$

und der letztere:

$$s = q\,Cos\,\alpha = \frac{h}{l\,Sin\,\alpha} P.$$

Für $\alpha = 45^0$ ist $\qquad r = s = \dfrac{2h}{l\sqrt{2}} P.$

10. Aufgabe.

Der horizontale Balken AC (Fig. 15) ist in A und noch aufserdem durch die Strebe DE mit der verticalen Säule AB verbunden; wenn nun in C die Kraft lothrecht wirkt, so ist die Frage, welche Pressungen dadurch entstehen.

Auflösung.

Setzt man die Länge des Balkens $AC = l$, die Höhe der Säule $AB = h$, die Länge der Strebe $DE = b$ und den W. $ADE = \alpha$; so bringt die Kraft P für's erste auf den Punct D einen Zug p lothrecht nach abwärts hervor, wofür

$$p = \frac{AC}{AD} P = \frac{l}{b\,Cos\,\alpha} P \quad \text{ist.}$$

Zerlegt man diese Kraft p in zwei Seitenkräfte Da und Db nach den Richtungen des Balkens und der Strebe, so wird:

$$D\,a : p = Cos\,\alpha : Sin\,\alpha \text{ und } D\,b : p = 1 : Sin\,\alpha$$

folglich $$D\,a = p\,Cot\,\alpha = \frac{l}{b\,Sin\,\alpha}\,P$$

und $$D\,b = \frac{p}{Sin\,\alpha} = \frac{l\,P}{b\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha} = \frac{2\,l\,P}{b\,Sin\,2\,\alpha}.$$

Von diesen Ausdrücken, welche für sich selbst sprechen, wird der letztere (Gröfse des Druckes, welchem die Strebe durch ihre rückwirkende Festigkeit widerstehen mufs) am gröfsten für $\alpha = 45^0$ und zwar wird dafür $D\,b = 2\,\frac{l}{b}\,P$.

11. Aufgabe.

Zwei Balken oder Sparren AB und BC (Fig. 16), wovon sich der obere gegen eine verticale Wand AD, der untere gegen den horizontalen Boden CD stützt und dabei nicht ausweichen kann, sollen in einer verticalen Ebene so aufeinander gestellt werden, dafs sie unter einander im Gleichgewichte stehen; es ist die Frage, welche Winkel sie dabei mit dem Horizonte bilden müssen?

Auflösung.

Es seyen $AB = l$, $BC = l'$ die Längen der Sparren und q das Gewicht des laufenden Fufses (oder überhaupt der Längeneinheit), ihre Schwerpuncte in den Halbirungspuncten der Längen, und wenn BE und CD horizontale Linien sind, die gesuchten Winkel $ABE = \alpha$ und $BCD = \alpha'$. Diefs vorausgesetzt, hat man (Aufgabe 5) im Puncte B den horizontalen Sparrenschub:

$$S = \tfrac{1}{2}\,q\,l\,Cot\,\alpha$$

und den verticalen Druck: $D = q\,l$.

Schneidet man nun auf der durch B gezogenen verticalen Linie BF das Stück $B\,c = D$ ab und zerlegt diese lothrechte Kraft in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen BE und BC, d. i. horizontal und nach der Länge des Sparrens BC; so wird die erstere

$$B\,a = \frac{B\,c\,Cos\,\alpha'}{Sin\,\alpha'} = \frac{D\,Cos\,\alpha'}{Sin\,\alpha'} = q\,l\,Cot\,\alpha'$$

und die letztere $$B\,b = \frac{B\,c}{Sin\,\alpha'} = \frac{D}{Sin\,\alpha'} = \frac{q\,l}{Sin\,\alpha'}.$$

Ferner entsteht durch den Sparren BC, dessen Gewicht $q\,l'$ ist, in B ebenfalls ein Schub nach BE, welcher durch

$$S' = \tfrac{1}{2}\,q\,l'\,Cot\,\alpha'$$

ausgedrückt wird, und da dieser Sparren am Boden CD nicht ausweichen kann (wie vorausgesetzt wurde), so mufs für das Gleichgewicht der horizontale Schub nach Be von Seite des Sparrens AB, dem Schube nach BE von Seite des Sparrens BC gleich seyn, d. h. es mufs die Bedingungsgleichung bestehen:

$$S = S' + Ba \text{ d. i. } \tfrac{1}{2} q\, l\, Cot\, \alpha = \tfrac{1}{2} q\, l'\, Cot\, \alpha' + q\, l\, Cot\, \alpha'.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$Cot\, \alpha = \left(2 + \frac{l'}{l}\right) Cot\, \alpha' \text{ oder auch } tang\, \alpha' = \left(2 + \frac{l'}{l}\right) tang\, \alpha.$$

Für zwei gleich lange Sparren, d. i. für $l' = l$, wird:

$$tang\, \alpha' = 3\, tang\, \alpha \text{ oder } tang\, \alpha : tang\, \alpha' = 1 : 3.$$

Zusatz. Das Gleichgewicht wird offenbar auch noch bestehen, wenn man statt der verticalen Wand den beiden Sparren AB, BC zwei gleiche AB', $B'C''$ symmetrisch entgegen aufstellt (Fig. 17)

Ist z. B. in diesem Falle und für $l' = l$ der Winkel $\alpha = 45^0$, so wird wegen $tang\, \alpha = 1$ und $tang\, \alpha' = 3$ der Winkel $\alpha' = 71^0\, 33'\, 54''$ oder nahe $71^0\, 34'$.

12. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen die Balken oder Sparren AB, BC, CD ... (Fig. 18), welche in einer verticalen Ebene als Seiten eines Polygons aufgestellt sind, im Gleichgewichte stehen, vorausgesetzt, dafs sich wieder der oberste bei A gegen eine verticale Wand und der unterste gegen den horizontalen Boden stützt.

Auflösung.

Bezeichnet man die Gewichte der Balken AB, BC ... durch G, G_1, G_2 ... und die in den Puncten B, C, D ... Statt findenden (horizontalen) Sparrenschübe beziehungsweise durch S, S_1, S_2 ..; so ist, wenn die Schwerpuncte der Sparren wieder in der Mitte liegen (vorige Aufgabe) für den Punct B:

$$S = \tfrac{1}{2} G\, Cot\, \alpha \quad (1)$$

und der verticale Druck $\quad D = G.$

Zieht man durch die Puncte B, C, D .. die horizontalen Linien BM, CN, DO .. und zerlegt die durch Bc dargestellte lothrechte Kraft G in zwei Seitenkräfte Ba und Bb nach den Richtungen BM und BC; so hat man

$$Ba = \frac{Bc\, Cos\, \alpha_1}{Sin\, \alpha_1} = G\, Cot\, \alpha_1 \text{ und } Bb = \frac{D}{Sin\, \alpha_1} = \frac{G}{Sin\, \alpha_1}.$$

Von dem zweiten Sparren entsteht in B ebenfalls noch ein Schub nach BM, und zwar ist dieser $= \frac{1}{2} G_1 \, Cot \, \alpha_1$, so, dafs der Gesammtschub nach $BM = G \, Cot \, \alpha_1 + \frac{1}{2} G_1 \, Cot \, \alpha_1$ ist Für das Gleichgewicht im Puncte B mufs also seyn:

$$\tfrac{1}{2} G \, Cot \, \alpha = G \, Cot \, \alpha_1 + \tfrac{1}{2} G_1 \, Cot \, \alpha_1 \quad (2)$$

Auf den Punct C übergehend, ist der nach BC Statt findende Druck:

$$Cd = Bb + \frac{\frac{1}{2} G_1}{Sin \, \alpha_1} = \frac{G + \frac{1}{2} G_1}{Sin \, \alpha_1}.$$

Wird diese Kraft Cd in die beiden Seitenkräfte Ce und Cf nach horizontaler und verticaler Richtung zerlegt, so erhält man

$$Ce = Cd \, . \, Cos \, \alpha_1 \text{ und } Cf = Cd \, . \, Sin \, \alpha_1, \text{ d. i.}$$

$$S' = Ce = (G + \tfrac{1}{2} G_1) \, Cot \, \alpha_1 \text{ und } D' = Cf + \tfrac{1}{2} G_1 = G + G_1.$$

Mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (2) ist auch

$$S' = \tfrac{1}{2} G \, Cot \, \alpha = S \text{ (wegen Gleich. 1.)}$$

Zerlegt man weiters die verticale Kraft $D' = Cf + fg = Cg$ in die beiden Seitenkräfte Ch und Ci, so wird

$$Ch = Cg \, Cot \, \alpha_2 = D' \, Cot \, \alpha_2 = (G + G_1) \, Cot \, \alpha_2$$

und

$$Ci = \frac{Cg}{Sin \, \alpha_2} = \frac{D'}{Sin \, \alpha_2} = \frac{G + G_1}{Sin \, \alpha_2}.$$

Der Sparren CD bringt im Puncte C noch aufserdem den horizontalen Schub gegen CN von der Gröfse $\frac{1}{2} G_2 \, Cot \, \alpha_2$ hervor, so, dafs also der gesammte in C nach dieser Richtung Statt findende Schub gleich $(G + G_1 + \frac{1}{2} G_2) \, Cot \, \alpha_2$ ist und sonach für das Gleichgewicht in diesem Puncte C sofort

$$S' = (G + G_1 + \tfrac{1}{2} G_2) \, Cot \, \alpha_2 \text{ d. i.}$$

$$\tfrac{1}{2} G \, Cot \, \alpha = (G + G_1 + \tfrac{1}{2} G_2) \, Cot \, \alpha_2 \ldots \quad (3)$$

Statt finden mufs u. s. w.

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) folgt ganz einfach:

$$tang \, \alpha = \frac{\frac{1}{2} G}{S}, \; tang \, \alpha_1 = \frac{G + \frac{1}{2} G_1}{S}, \; tang \, \alpha_2 = \frac{G + G_1 + \frac{1}{2} G_2}{S} \text{ u. s. w.}$$

und $tang \, \alpha_1 - tang \, \alpha = \frac{1}{2} . \frac{G + G_1}{S}$, $tang \, \alpha_2 - tang \, \alpha_1 = \frac{1}{2} . \frac{G_1 + G_2}{S}$ u. s. w.

also ist

$$S = \tfrac{1}{2} . \frac{G + G_1}{tang \, \alpha_1 - tang \, \alpha} = \tfrac{1}{2} . \frac{G_1 + G_2}{tang \, \alpha_2 - tang \, \alpha_1} = \ldots$$

Für $G = G_1 = G_2 = \ldots$ wird $tang \, \alpha : tang \, \alpha_1 : tang \, \alpha_2 : \ldots = 1 : 3 : 5 \ldots$

Zusatz. Ist die Anzahl der Balken oder Sparren allgemein $= n$, sind dabei $G_1, G_2 \ldots G_n$ ihre Gewichte und $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die obigen Winkel, so hat man also:

$$S = \tfrac{1}{2} G \, Cot \, \alpha_1 \text{ und}$$

$$2 S = . \frac{G_1 + G_2}{tang \, \alpha_2 - tang \, \alpha_1} = . \frac{G_2 + G_3}{tang \, \alpha_3 - tang \, \alpha_2} = \ldots = \frac{G_{n-1} + G_n}{tang \, \alpha_n - tang \, \alpha_{n-1}}$$

Da man nun n Unbekannte (d. i. die Winkel $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$) und dafür nur $n-1$ Gleichungen hat, so mufs man einen dieser Winkel, z. B. jenen α_1 als bekannt annehmen und alle übrigen durch diesen ausdrücken.

So hat man z. B. wie in Fig. 17 für zwei Balken die Gleichung $G_1 \, Cot \, \alpha_1 = \frac{G_1 + G_2}{tang \, \alpha_2 - tang \, \alpha_2}$ und daraus $tang \, \alpha_2 = \frac{2 \, G_1 + G_2}{G_1} tang \, \alpha_1$, so, dafs also wieder, wie schon oben gefunden wurde, für $G_2 = G_1$ sofort
$$tang \, \alpha_2 = 3 \, tang \, \alpha_1 \text{ wird.}$$

Anmerkung. Werden die Seiten des Polygons unendlich klein, so geht dasselbe in eine (umgekehrte) Kettenlinie über, welche bekanntlich die charakteristische Eigenschaft besitzt, dafs die horizontale Spannung in jedem Puncte der Curve eine constante Gröfse ist.

13. Aufgabe.

Wenn die beiden Sparren AC und BC (Fig. 19) mit dem horizontalen Balken oder Bundtram AB in A und B, und aufserdem noch in C durch die verticale Hängsäule CD verbunden ist (einfaches Hängwerk), den Druck und Schub zu bestimmen, welchen die belasteten Sparren in den Puncten A und B hervorbringen.

Auflösung.

Ist die mit Einflufs des eigenen Gewichtes über einen Sparren gleich vertheilte Last $= P$, die Last, welche die Hängsäule (durch Belastung des Balkens AB) zu tragen hat $= Q$, setzt man ferner $AD = BD = b$ und $CD = h$; so erhält man für den Druck im Puncte C nach der lothrechten Richtung CD:

$$\tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} P + Q = P + Q,$$

folglich, wenn man $Cd = P + Q$ abschneidet und das Parallelogramm construirt, sofort $Ap = Bp' = Ca = Cb$ als Druck in den Puncten A und B, nach den Richtungen Ap und Bp'. Construirt man daher noch die Rechtecke mn und $m'n'$, so wird

$$An = Bn' = Cc = \tfrac{1}{2} (P + Q)$$

und da jeder dieser beiden Puncte A und B noch aufserdem mit $\frac{1}{2} P$ gedrückt wird, so ist der gesammte Verticaldruck sowohl in A wie in B:
$$D = \tfrac{1}{2} (P + Q) + \tfrac{1}{2} P = P + \tfrac{1}{2} Q.$$

Ferner ist in demselben Puncte der horizontale Schub:
$Am = Bm' = S = ac$ oder wegen $Cc : ac = h : b$, auch

$$S = Cc \cdot \frac{b}{h} = \tfrac{1}{2}(P + Q)\frac{b}{h} = \tfrac{1}{2}(P + Q)\, Cot\, \alpha,$$

wenn man nämlich W. $CAB =$ W. $CBA = \alpha$ setzt.

14. Aufgabe.

Die bei dem zusammengesetzten Hängwerk in Fig. 20 vorkommenden Pressungen zu bestimmen.

Auflösung.

Ist die Belastung des horizontalen Balkens AB gegeben, und kommt davon auf jeden der Puncte E und F die Last Q, ist ferner $AE = BF = a$, $EF = b$, $CE = DF = h$ und W. $CAE =$ W. $DBF = \alpha$; so läfst sich in C die verticale Kraft $Q = Cd$ nach den Richtungen CA und CD zerlegen und zwar ist, wenn Ca und Cb diese Seitenkräfte sind:

$$Ca = \frac{Cd}{Sin\,\alpha} = \frac{Q}{Sin\,\alpha} \text{ und } Cb = Cd\, Cot\,\alpha = Q\, Cot\,\alpha.$$

Es wird also die Strebe CA mit der Kraft

$$Ca = Q \cdot \frac{AC}{CE} = \frac{Q}{h}\sqrt{(a^2 + h^2)}$$

und der Spannriegel CD mit jener

$$Cb = Q \cdot \frac{AE}{CE} = \frac{a}{h}\, Q$$

zusammengedrückt.

Die beiden Hängsäulen CE, DF werden mit der Kraft Q und der Balken AB mit jener $Q\, Cot\,\alpha$, auf ihre absolute, so wie dieser letztere noch aufserdem in Beziehung auf seine relative Festigkeit in Anspruch genommen, während die Puncte A und B jeder den verticalen Druck Q zu erleiden haben.

Anmerkung. Stellt z. B. AB eine gleichförmig belastete Brücke vor, so kann man als einfachste Hypothese annehmen, dafs jeder der beiden Puncte E und F den 3ten, so wie die Puncte A und B jeder den 6ten Theil der ganzen Belastung zu tragen haben. Ist sonach W diese Belastung, also $Q = \frac{1}{3} W$; so ist der verticale Druck in jedem der Puncte A und $B = Q + \frac{1}{6} W = \frac{1}{2} W$.

15. Aufgabe.

Die verschiedenen Pressungen bei einem einfachen Sprengwerk (Fig. 21) zu finden.

Auflösung.

Wird der Punct C vertical mit dem Gewichte Q gedrückt, so entfällt davon auf jede der beiden Streben CD, CE der Druck $\frac{1}{2}Q$, denn es ist, wenn man auf der durch C gezogenen lothrechten Linie $Cg = Q$ abschneidet und (in der durch AB, CD und CE gehenden verticalen Ebene) das Parallelogramm bh construirt, sofort (wegen $Cb : Cg = Cos\,\alpha : Sin\,2\,\alpha$):

$$Cb = Ch = \frac{Cg\,Cos\,\alpha}{Sin\,2\,\alpha} = \frac{Cg}{2\,Sin\,\alpha} = \frac{Q}{2\,Sin\,\alpha}.$$

Daraus entsteht aber der horizontale Schub:

$$S = Ca = Cb\,Cos\,\alpha = \tfrac{1}{2}Q\,Cot\,\alpha$$

und der verticale Druck:

$$D = Cf = Cb\,Sin\,\alpha = \tfrac{1}{2}Q$$

gerade so, wie bei dem einfachen Hängwerk.

16. Aufgabe.

Es sollen die verschiedenen Pressungen gefunden werden, welche bei dem zusammengesetzten Sprengwerk (Fig. 22) vorkommen.

Auflösung.

Entfällt auf die Puncte C und D die Last Q, so ist nach dem vorigen Verfahren der horizontale Schub $S = Ca = Q\,Cot\,\alpha$, so wie der verticale Druck $D = Cc = Q$.

Der Druck nach CE ist (wegen $Cb : Cc = 1 : Sin\,\alpha$) $Cb = \frac{Q}{Sin\,\alpha}$, folglich wird der Spannriegel CD mit der Kraft $Ca = Q\,Cot\,\alpha$, uud jede der beiden Streben CE und DF mit der Kraft $Cb = \frac{Q}{Sin\,\alpha}$ und zwar ebenfalls in Beziehung auf ihre rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen.

17. Aufgabe.

Ein einfacher Keil ABC (Fig. 23), dessen Cathete oder Höhe AC vertical steht und welcher zwischen zwei Prismen DG, EJ, die an seine Seitenflächen genau anpassen, eingeschoben ist, wirkt durch sein bloſses Gewicht zur Verschiebung dieser Prismen nach den Richtungen *CG* und *CJ*; wenn nun diese Prismen eine feste unverschiebbare Lage haben, so soll bestimmt werden 1stens die mittlere Kraft sämmtlicher Normalpressungen auf die Seitenfläche des Keils welche durch *AC*, und eben so für die Seitenfläche, welche durch *BC* geht (beide diese Ebenen stehen perpendikulär auf der Ebene *ABC*), 2tens derjenige Werth des Winkels *ACB* am Keil, für welchen die erste dieser beiden mittleren Kräfte ein Maximum wird, 3tens der Ort dieser mittleren Kraft, 4tens wenn die beiden auf einer horizontalen Ebene liegenden Prismen *DG* und *EJ* bloſs durch ihr eigenes Gewicht in ihrer unverschiebbaren Lage erhalten werden sollen, die Gewichte dieser Prismen, und 5tens die Gröſse der Basis *CG* des erstern Prisma, damit in demselben keine Drehung um die durch *G* gehende Kante Statt finden kann.

Auflösung zu 1.

Bezeichnet man das Gewicht des Keils *ABC* durch Q, die mittlere Kraft sämmtlicher Normalpressungen anf die senkrechte Seitenfläche *AC* mit x, so wie die mittlere Kraft der Normalpressungen auf die schiefe Seitenfläche *BC* durch y, den Reibungscoeffizienten für die erstere Fläche *AC* mit μ, jenen für die letztere *BC* mit μ' und den W. *ACB* mit α; so wird, wenn man y in die beiden nach den in Fig. 23. *a* durch die Pfeile angedeuteten Richtungen auf einander senkrechten (horizontal und vertical) Seitenkräfte r und s zerlegt, sofort

$$r = y \, Cos\, \alpha \text{ und } s = y \, Sin\, \alpha \quad . \; . \quad (m)$$

Zerlegt man ferner die aus dieser Kraft y entspringende, in der Richtung *MB* (Fig. 23. *b*) wirksame Reibung $\mu' y$ in zwei eben solche Seitenkräfte v und u, so wird

$$u = \mu' y \, Cos\, \alpha \text{ und } v = \mu' y \, Sin\, \alpha \quad . \; . \quad (n)$$

Da nun für das verlangte Gleichgewicht sowohl die horizontalen als auch die vorhandenen verticalen Kräfte für sich im Gleichgewichte stehen müssen, so hat man

$$x = r - v \text{ und } Q = u + s + \mu x,$$

d. i. wenn man die Werthe aus (m) und (n) substituirt:

$$x = y \, Cos\, \alpha - \mu' y \, Sin\, \alpha \quad . \; . \quad (1)$$

und

$$Q = \mu' y \, Cos\, \alpha + y \, Sin\, \alpha + \mu x \quad . \; . \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man ganz einfach die Werthe für x und y, und zwar wird, wenn man Kürze halber den gemeinschaftlichen Nenner:

$$\mu + \mu' + (1 - \mu\mu')\, tang\,\alpha = N$$

setzt, sofort:

$$x = \frac{1 - \mu'\, tang\,\alpha}{N}\, Q$$

und

$$y = \frac{Sec\,\alpha}{N}\, Q.$$

Setzt man die Höhe des Keils $AC = h$, die Länge der horizontalen durch A, B, C gehenden Seitenkanten desselben $= l$ und das Gewicht der cubischen Einheit des Keils $= q$; so ist, wegen $Q = \frac{1}{2} q\, l\, h^2\, tang\,\alpha$ auch

$$x = \frac{q\, l\, h^2\, (1 - \mu'\, tang\,\alpha)\, tang\,\alpha}{2\,N} \;.\;. \quad (3)$$

$$y = \frac{q\, l\, h^2\, Sec\,\alpha\, tang\,\alpha}{2\,N} \;.\;. \quad (4)$$

Auflösung zu 2.

Um den Winkel α für den gröfsten Werth von x zu finden, darf man nur in der vorigen Gleichung (3) den Werth von N herstellen, hierauf nach der bekannten Regel den Differenzialquotienten $\frac{dx}{d\alpha}$ ausdrücken und aus der Gleichung $\frac{dx}{d\alpha} = 0$ den Werth von $tang\,\alpha$ bestimmen; man findet so ohne Schwierigkeit

$$tang\,\alpha = -\frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'} + \frac{\sqrt{[\mu'(\mu + \mu')(1 + \mu\mu')]}}{\mu'(1 - \mu\mu')} \;.\;. \quad (5)$$

für welchen Werth von α die mittlere Pressung x in der That ein Maximum wird, weil dafür der 2te Differenzialquotient $\frac{d^2x}{d\alpha^2}$ negativ ausfällt.

Auflösung zu 3.

Setzt man die Höhe der Prismen $CD = a$ (Fig. 23) und für einen beliebigen Punct M der Seite DC die Abscisse $DM = z$, so wie $Mm = dz$; so folgt für den im Puncte M Statt findenden Normaldruck aus der Gleichung (3), in welcher jetzt alles bis auf h, wofür z gesetzt werden mufs, constant ist:

$$x = A\, z^2,$$

wenn man nämlich Kürze halber den constanten Factor mit A bezeichnet. Daraus folgt für die Normalpressung auf den unendlich schmalen Streifen von der Höhe $Mm = dz$ und der Breite l, der Werth $dx = 2\,Az\,dz$, und wenn man den Punct D als Mittelpunct der stat. Momente ansieht, so ist das stat. Moment dieses Druckes:

$$dM = z\,dx = 2\,A\,z^2\,dz.$$

Man erhält daher aus dieser Gleichung für die Summe der stat. Momente sämmtlicher von D bis C vorkommender Pressungen durch Integration:

$$M = 2A\int_0^a z^2\,dz = \tfrac{2}{3}\,A\,a^3.$$

Ist ferner O der gesuchte Ort der mittlern Kraft x (wenn die verticale Ebene FJ durch die halbe Länge l des Keils gedacht wird) und dafür $DO = X$, so ist auch $M = X\,.\,x = X\,A\,a^2$ (aus Relat. 3, in welcher a statt h zu setzen ist) folglich $X\,A\,a^2 = \tfrac{2}{3}\,A\,a^3$ und daraus

$$X = \tfrac{2}{3}\,a \;\;.\;\;.\;\; (6)$$

Auflösung zu 4.

Es seyen P und Q die gesuchten Gewichte der beiden Prismen CF und CH, so wie μ'' der Reibungscoeffizient derselben mit der horizontalen Ebene, worauf diese Prismen ruhen und verschiebbar sind; so hat man für das Gleichgewicht zwischen dem Keil und dem Prisma CF offenbar:

$$\mu''\,P = x \text{ und daraus } P = \frac{x}{\mu''} \;\;.\;\;.\;\; (7)$$

wobei für x der Werth aus der Gleichung (3) zu nehmen ist.

Ferner ist für das Prisma CH, wenn man sich die Kraft y in Fig. 23. a in entgegengesetzter Richtung wirkend vorstellt (um die nöthige Gegenwirkung von Seite des Prisma Q zu erhalten) und daher auch die Seitenkräfte $r = y\,Cos\,\alpha$ und $s = y\,Sin\,\alpha$ (Relat. m) nach gerad entgegengesetzten Richtungen wirkend annimmt, sofort für's Gleichgewicht:

$$\mu''\,(Q + y\,Sin\,\alpha) = y\,Cos\,\alpha, \text{ woraus}$$

$$Q = \frac{(Cos\,\alpha - \mu''\,Sin\,\alpha)}{\mu''}\,y \;\;.\;\;.\;\; (8)$$

folgt, und wobei der Werth von y aus der Relation (4) zu setzen ist.

Auflösung zu 5.

Setzt man die gesuchte Dimension $CG = u$, so mufs für das Gleichgewicht der Stabilität des Prisma CF mit dem durch O gehenden horizontalen Drucke x, damit nämlich um den Punct G keine Drehung entsteht, die Gleichung bestehen:

$$x . CO = P . \tfrac{1}{2} CG$$ d. i. mit Rücksicht auf die Relation (6):

$$\tfrac{1}{3} a x = \tfrac{1}{2} u P \quad \text{oder} \quad 2 a x = 3 u P,$$

und wenn man die Länge des Prisma (die auf der Ebene GD senkrechte Dimension) gleich jener des Keils, d. i. $= l$ und das Gewicht der cubischen Einheit $= q'$ setzt, wodurch $P = q' a l u$ wird, auch $2 a x = 3 a l q' u^2$, woraus endlich

$$u = \sqrt{\left(\frac{2 x}{3 l q'}\right)} \ . \ . \quad (9)$$

folgt, in welchem Ausdrucke für x der Werth aus (3) zu setzen ist.

Nach der vorigen Relation (7) mufs, um der 4ten Bedingung zu entsprechen (man setzt nämlich $P = q' a l u$),

$$u = \frac{x}{\mu'' a l q'} \ . \ . \quad (10)$$

seyn, so, dafs man also, um beiden Bedingungen 4 und 5 zugleich zu entsprechen, von diesen beiden, aus (9) und (10) ausgedrückten Werthen u den gröfseren beibehalten mufs.

18. Aufgabe.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes für die mit ihren ebenen Flächen aufeinander liegenden Steine eines Tonnengewölbes $ABM'N'$ (Fig. 24) zu bestimmen, wenn in den Fugen weder Reibung noch Cohäsion Statt findet und sich dabei der oberste Stein gegen eine verticale Wand, und der unterste gegen eine feste Widerlage stützt*).

---

*) Da die Definition der Gewölbe erst in der Baukunst vorkommt, so wollen wir hier zur gröfseren Verständlichkeit darüber Folgendes vorausschicken. Stellt Fig. 24 den verticalen Durchschnitt von der Hälfte eines Gewölbes vor, so heifsen die aufeinander liegenden keilförmigen Steine AB_1, A_1B_2 ... Gewölbsteine; die ebenen Flächen, mit welchen sich diese Steine berühren die Bindungs- oder Lagerflächen, so wie deren Grenzlinien AB, A_1B_1 ... Fugen. Diejenige Masse $M'S$, von welchem das Gewölbe getragen wird, oder gegen welche sich der Untertheil desselben stützt, heifst die Widerlage, bei Brücken der Stirnpfeiler, oder wenn sich zwei neben einander befindliche Gewölbe darauf stützen, der Pfeiler. Der zunächst an der Widerlage befindliche Theil des Gewölbes heifst der Anfang, der unterste Gewölbstein $M'N$ der erste und der oberste AB_1 der Schlufsstein des Gewölbes. Die concave Fläche des Gewölbes, welche durch die Durchschnittslinie BB_1NN' geht, heifst die innere Wölbung (*Intrados*), so wie jene, welche durch die obere Linie AA_1MM' geht, die äufsere Wölbung (*Extrados*),

1. Auflösung.

1. Es seyen O, O_1, O_2.. die in ein und derselben verticalen Ebene liegenden Schwerpuncte der Steine AB_1, A_1B_2.., ihre Gewichte der Reihe nach G, G_1, G_2.. und die Winkel, welche die Fugen A_1B_1, A_2B_2.. mit der Verticalen AZ bilden, eben so α, α_1, α_2...

Zerlegt man die im Puncte O vertical wirkende Kraft G in eine horizontale Seitenkraft S nach OD und in eine zweite N normal auf die Fuge A_1B_1 nach OD_1; so hat man wegen $G:S:N = Sin\,\alpha : Cos\,\alpha : 1$ sofort:

$$S = G\,Cot\,\alpha \text{ oder } G = S\,tang\,\alpha \text{ und } N = \frac{G}{Sin\,\alpha} \quad .\ .\ (a)$$

Zerlegt man ferner eben so die durch O_1 gehende verticale Kraft G_1 nach O_1D_1 normal auf die Fuge A_1B_1 und O_1D_2 normal auf die folgende Fuge A_2B_2; so folgt, wenn man diese beiden Seitenkräfte mit N_1 und N_2 bezeichnet, aus der Proportion

$$N_1 : N_2 : G_1 = Sin\,(90 - \alpha_1) : Sin\,(90 - \alpha) : Sin\,(\alpha_1 - \alpha)$$

sofort $$N_1 = \frac{Cos\,\alpha_1}{Sin\,(\alpha_1 - \alpha)}\,G_1 \text{ und } N_2 = \frac{Cos\,\alpha}{Sin\,(\alpha_1 - \alpha)}\,G_1$$

Auf gleiche Weise erhält man durch Fortsetzung dieses Verfahrens, d. h. wenn man die in O_2 wirksame Kraft G_2 in zwei Seitenkräfte N_3 und N_4, beziehungsweise normal auf die Fugen A_2B_2 und A_3B_3 zerlegt:

$$N_3 = \frac{Cos\,\alpha_2}{Sin\,(\alpha_2 - \alpha_1)}\,G_2 \text{ und } N_4 = \frac{Cos\,\alpha_1}{Sin\,(\alpha_2 - \alpha_1)}\,G_2 \quad \text{u. s. w.}$$

Sollen nun diese mit ihren absolut glatten Fugen oder Flächen aneinander liegenden Steine in jeder Beziehung im Gleichgewichte bleiben; so müssen die gegenseitigen Normalpressungen nicht nur einander gerade entgegengesetzt, sondern auch paarweise einander gleich seyn, d. h. es müssen die Bedingungsgleichungen Statt finden:

---

die genannten beiden Linien die Wölbungslinien, B und A ihre Scheiteln.

Bilden die Wölbungsflächen cylinderische Flächen, so heifst das Gewölbe ein Tonnengewölbe und zwar ein horizontales, wenn ihre Achse horizontal ist. Die bei diesen Gewölben noch vorkommenden beiden verticalen Flächen werden Stirnflächen genannt, und je nachdem diese Flächen auf der geometrischen Achse der innern cylinderischen Fläche recht- oder schiefwinkelig stehen, heifst ein solches Tonnengewölbe auch noch ein gerades oder schiefes Gewölbe. Nur von diesen erstern ist hier in der vorliegenden Aufgabe die Rede, wefshalb wir auch die Definitionen der Gewölbe nicht weiter fortsetzen wollen.

$$N = N_1,\ N_2 = N_3,\ N_4 = N_5 \text{ u. s. w.}$$

oder wenn man für N, N_1 .. die gefundenen Werthe setzt:

$$\frac{G}{Sin\,\alpha} = \frac{G_1\,Cos\,\alpha_1}{Sin(\alpha_1 - \alpha)},\ \frac{G_1\,Cos\,\alpha}{Sin(\alpha_1 - \alpha)} = \frac{G_1\,Cos\,\alpha_2}{Sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\frac{G_2\,Cos\,\alpha_1}{Sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{G_3\,Cos\,\alpha_3}{Sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \text{ u. s. w.}$$

Löst man in der ersten dieser Gleichungen $Sin(\alpha_1 - \alpha)$ auf, dividirt Zähler und Nenner mit $Cos\,.\,Cos\,\alpha_1$ und bestimmt dann G_1; so erhält man:

$$G_1 = \frac{tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha}{tang\,\alpha}\,G.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus den übrigen Bedingungsgleichungen:

$$G_2 = \frac{tang\,\alpha_2 - tang\,\alpha_1}{tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha}\,G_1,\ G_3 = \frac{tang\,\alpha_3 - tang\,\alpha_2}{tang\,\alpha_2 - tang\,\alpha_1}\,G_2 \text{ u. s. w.}$$

Da aber (obige Relation a) $G = S\,tang\,\alpha$ ist, so folgt auch

$$G_1 = S(tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha) \quad (1)$$

und wenn man diesen Werth in der nächsten Gleich. setzt:

$$G_2 = S(tang\,\alpha_2 - tang\,\alpha_1) \text{ und eben so:}$$

$$G_3 = S(tang\,\alpha_3 - tang\,\alpha_2) \text{ u. s. w.}$$

Es verhalten sich also bei einem im Gleichgewichte befindlichen Gewölbe die Gewichte der einzelnen Gewölbsteine, wie der Unterschied der Tangenten der Winkel, welche ihre Fugen mit der Verticallinie bilden.

II. Aus diesen letzteren Relationen folgt auch:

$$(2)\ \begin{cases} S\,tang\,\alpha = G \\ S\,tang\,\alpha_1 = G + G_1 \\ S\,tang\,\alpha_2 = G + G_1 + G_2 \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Ist Q das Gewicht des Gewölbebogens $AMNB$, dessen oberste Fuge AB vertical ist und wobei die unterste Fuge MN mit der Verticalen den Winkel φ bildet; so ist nach diesen letztern Relationen (2):

$$S\,tang\,\varphi = G + G_1 + G_2 + .. = Q$$

oder

$$S = Q\,Cot\,\varphi \quad (3)$$

wobei S den horizontalen Schub im Scheitel bezeichnet.

Ist Q' das Gewicht des auf das Gewölbstück Q folgenden Gewölbsteines und φ' der Winkel, welchen dessen untere Fuge mit der Verticalen bildet; so ist eben so

$$S\,tang\,\varphi' = Q + Q' \text{ also } Q + Q' : Q = tang\,\varphi' : tang\,\varphi$$

oder

$$Q' : Q = (tang\,\varphi' - tang\,\varphi) : tang\,\varphi \quad (4)$$

III. Bilden endlich die beiden Fugen MN, $M'N'$ eines Gewölbsteines vom Gewichte Q' mit der Verticallinie die Winkel φ und φ'; so ist der Normaldruck auf den nach unten zunächst folgenden Gewölbstein $N = \frac{Q' \, Cos \, \varphi}{Sin \, (\varphi' - \varphi)}$ (vergleiche den obigen Ausdruck N_2).

Zerlegt man diesen Druck N in einen horizontalen S' und verticalen D, so ist $S' = N \, Cos \, \varphi'$ und $D = N \, Sin \, \varphi'$, oder wenn man für N den Werth setzt:

$$S' = \frac{Q' \, Cos \, \varphi \, Cos \, \varphi'}{Sin \, (\varphi' - \varphi)} = \frac{Q'}{tang \, \varphi' - tang \, \varphi} \quad . \; . \quad (s)$$

oder wegen $Q' = S \, (tang \, \varphi' - tang \, \varphi)$ (wie aus der Gleichung (4) folgt, wenn man für Q seinen Werth $S \, tang \, \varphi$ setzt) auch:

$$S' = S \quad (5)$$

und

$$D = \frac{Q' \, Sin \, \varphi' \, Cos \, \varphi}{Sin \, (\varphi' - \varphi)} = \frac{Q' \, tang \, \varphi'}{tang \, \varphi' - tang \, \varphi}$$

oder wegen $Q' : Q' + Q = tang \, \varphi' - tang \, \varphi : tang \, \varphi'$ (was ebenfalls aus Gleich. 4 folgt) woraus man erhält $\frac{Q' \, tang \, \varphi'}{tang \, \varphi' - tang \, \varphi} = Q' + Q$ auch

$$D = Q + Q'. \quad (6)$$

Anmerkung. Alle diese Relationen sind für sich klar und begründen gewisse Eigenschaften der Gewölbe, bei welchen die absolut glatten Gewölbsteine für sich im Gleichgewichte sind; so folgt z. B. aus der Relation (5), dafs der horizontale Druck oder Schub in jeder Fuge also auch in der letzten an der Widerlage constant, und zwar dem horizontalen Drucke gleich ist, welchen das Gewölbe gegen die am Scheitel befindliche verticale Fuge ausübt; die Gleichung (6) dagegen sagt aus, dafs der verticale Druck eines jeden Gewölbstücks, dieses vom Scheitel an gerechnet, gegen die darunter befindliche Fuge, dem Gewichte dieses Gewölbstückes gleich ist u. s. w.

2. Auflösung.

Zieht man aus irgend einem Puncte C (Fig. 25) der Verticallinie AZ die Geraden CT, CT_1, CT_2... beziehungsweise parallel mit den Fugen A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3...; so steht CT perpendikulär auf der Richtung Ob des Normaldruckes gegen die Fuge A_1B_1, CT_1 perpendikulär auf der Richtung O_1c des Normaldruckes gegen die Fuge A_2B_2 u. s. w.

Ist ferner EF horizontal, also senkrecht auf die Richtung der Kraft G, so verhalten sich (mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung) die 3 Kräfte G, S, N wie die Seiten OJ, OD, OD_1 des Dreieckes ODJ (Fig. 25. *a*) d. h. es ist

$$G:S:N = OJ:OD,\ OD_1,$$

oder da dieses Dreieck jenem CTE ähnlich ist (indem die Seiten wechselweise aufeinander senkrecht stehen) auch $G:S:N = ET:CE:CT$; daraus folgt $\frac{G}{N} = \frac{ET}{CT}$ und $\frac{G}{S} = \frac{ET}{CE}$.

Genau eben so erhält man aus den folgenden Dreiecken:

$$\frac{G_1}{N_1} = \frac{TT_1}{CT_1},\ \frac{G_2}{N_2} = \frac{T_1T_2}{CT_2}\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man ferner in Fig. 25 den horizontalen Druck $Oa = S$, den Normaldruck gegen die Fuge A_1B_1, d. i. $Ob = N_1$, jenen $O_1b = \mathfrak{N}$, den Normaldruck gegen die Fuge A_2B_2, d. i. $O_1c = N_1$ und jenen $O_2c = \mathfrak{N}_1$ u. s. f., so hat man nach den eben entwickelten Relationen:

$$\frac{G}{N} = \frac{ET}{CT}\ (1),\quad \frac{G_1}{\mathfrak{N}} = \frac{TT_1}{CT_1}\ (2),\quad \frac{G_1}{N_1} = \frac{TT_1}{CT_1}\ (3),$$

$$\frac{G_2}{\mathfrak{N}_1} = \frac{T_1T_2}{C_1T_1}\ (4),\quad \frac{G_2}{N_2} = \frac{T_1T_2}{CT_2}\ (5)\ \text{u. s. w.}$$

Da nun fürs Gleichgewicht der Gewölbsteine $N = \mathfrak{N}$, $N_1 = \mathfrak{N}_1$, $N_2 = \mathfrak{N}_2$ u. s. w. seyn mufs, so erhält man durch Division der Relation (1) durch (2), d. i. $\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{G}{G_1} = \frac{ET}{TT_1}$

eben so $\frac{(3)}{(4)}$: $\frac{G_1}{G_2} = \frac{TT_1}{T_1T_2}$ u. s. w.

oder da, wenn man $CE = 1$ nimmt, $ET = tang\,\alpha$, $TT_1 = ET_1 - ET = tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha$, $T_1T_2 = ET_2 - ET_1 = tang\,\alpha_2 - tang\,\alpha_1$ u. s. w. ist, auch:

$$\frac{G}{S} = \frac{tang\,\alpha}{1},\quad \frac{G}{G_1} = \frac{tang\,\alpha}{tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha},\quad \frac{G_1}{G_2} = \frac{tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha}{tang\,\alpha_2 - tang\,\alpha_1}\ \text{u. s. f.}$$

daraus folgt wieder, wie in der 1. Auflösung:

$$G = S\,tang\,\alpha,\quad G_1 = S\,(tang\,\alpha_1 - tang\,\alpha)\ \text{u. s. w.}$$

Es ist ferner, wie leicht zu sehen:

$$S:N:N_1:N_2\ldots = CE:CT:CT_1\ldots = 1:Sec\,\alpha:Sec\,\alpha_1:Sec\,\alpha_2:\ldots$$

Bildet also irgend eine Fuge mit der Verticalen den Winkel φ, so ist der Normaldruck N' auf diese Fuge, wegen $S:N' = 1:Sec\,\varphi$ sofort

$$N' = S\,sec\,\varphi = \frac{S}{Cos\,\varphi}.$$

Da überdiefs noch $G:G_1:G_2\ldots = ET:TT_1:T_1T_2:\ldots$ Statt findet, so drückt z. B. ET_2 das Gewicht $Q = G + G_1 + G_2$ des Gewölbstückes AA_3B_3B aus und es ist daher, wenn die Fuge A_3B_3 mit der Verticallinie den W. φ bildet:

$$G:Q = ET:ET_2 = tang\,\alpha : tang\,\varphi\text{, woraus}$$

$Q = \frac{G\,tang\,\varphi}{tang\,\alpha}$ oder wegen $G = S\,tang\,\alpha$ wieder, wie oben

$Q = S\,tang\,\varphi$ folgt.

Anmerkung. Da für eine horizontale Fuge $\varphi = 90^0$ wird, so ist dafür $Q = \infty$, d. h. das Gewicht des über einer Fuge befindlichen Gewölbstückes, dieses von der betreffenden Fuge bis zum Scheitel gerechnet, muſs, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, um so gröſseres seyn, je mehr sich der Winkel, welchen diese Fuge mit der Verticallinie bildet, einem Rechten nähert; für eine horizontale Fuge kann (unter den gemachten Voraussetzungen) das Gleichgewicht bei keinem, auch noch so groſsen Gewichte des darüber stehenden Gewölbbogens bestehen.

19. Aufgabe.

Es soll die Dicke eines Tonnengewölbes $ABRS$ (Fig. 26), d. i. die Höhe der einzelnen Gewölbsteine gefunden werden, wenn die sämmtlichen Fugen auf der innern Gewölbslinie AMR perpendikulär stehen und das Gleichgewicht besteht, ohne daſs zwischen den einzelnen Gewölbsteinen eine Reibung oder Cohäsion Statt findet.

Auflösung.

Es sey Mn irgend ein Gewölbstein, dessen obere Fuge MN mit der Verticalen den Winkel φ, dagegen die untere jenen $nCZ = \varphi + \alpha$ bildet; ferner sey G das Gewicht dieses Gewölbsteins und S wieder der constante horizontale Schub des Gewölbes.

Dieſs vorausgesetzt, ist (vorige Aufgabe, *III*. Gleich. *s*):

$$\frac{G}{S} = \frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\varphi\; Cos\,(\varphi + \alpha)}$$

und wenn man sich (wodurch das Gleichgewicht nicht beeinträchtigt wird) den Gewölbstein so dünn, also den Winkel α so klein vorstellt, daſs man $Sin\,\alpha = \alpha$ und $Cos\,(\varphi + \alpha) = Cos\,\varphi$ setzen kann, auch:

$$\frac{G}{S} = \frac{\alpha}{Cos\,\varphi^2} \quad .\,. \quad (a)$$

Ist ferner $\rho = CM$ der Krümmungshalbmesser der innern Gewölbslinie AMR für den betreffenden Punct M, so ist $Mm = \rho\,\alpha$, folglich, wenn man die gesuchte Länge der Fuge $MN = z$ setzt, sofort

$$Nn = (\rho + z)\,\alpha,$$

und daher, wenn man die Stirnfläche dieses Gewölbsteines $NMmn = f$ setzt:

$$f = \tfrac{1}{2}\,CN.\,Nn - \tfrac{1}{2}\,CM.\,Mm = \tfrac{1}{2}\left[(\rho + z)^2\,\alpha - \rho^2\,\alpha\right].$$

So wie diese Fläche f dem Gewichte G des Gewölbsteins Mn proportional ist (weil das Gewölbe durchaus gleiche Länge oder Tiefe hat) oder demselben entspricht, eben so läfst sich eine Fläche f' angeben, welche dem horizontalen Schub oder Druck S gegen die verticale Fuge oder Ebene entspricht; es darf dazu blofs f' aus der Proportion $f:f' = G:S$ bestimmt werden, so, dafs also $\frac{G}{S} = \frac{f}{f'}$, oder wenn man die Dicke des Gewölbes im Scheitel, d. i. $AB = a$ und $f' = ab$ setzt, wobei b noch eine unbestimmte Constante bezeichnet, auch $\frac{G}{S} = \frac{f}{ab}$, oder wenn man für f den vorigen Werth setzt:

$$\frac{G}{S} = \frac{\alpha}{2ab}[(\rho + z)^2 - \rho^2]$$

wird. Dieser Quotient dem obigen (a) gleichgesetzt, erhält man:

$$\alpha[(\rho + z)^2 - \rho^2] = \frac{2ab\alpha}{Cos\,\varphi^2}$$

und daraus ganz einfach:

$$z = -\rho + \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{2ab}{Cos\,\varphi^2}\right)} \;.\;. \quad (b)$$

Setzt man den Krümmungshalbmesser für den Scheitel A gleich r, so wird, da in diesem Puncte $z = a$, $\rho = r$ und $\varphi = 0$ ist, wenn man diese Gleichung (b) auf den Scheitel des Gewölbes anwendet:

$$a = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2ab}{1}\right)} \text{ und daraus } (a + r)^2 = r^2 + 2ab$$

oder $2ab = a^2 + 2ar$, so, dafs wenn man diesen Werth für $2ab$ in der vorigen Gleichung (b) substituirt, auch

$$z = -\rho + \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{a^2 + 2ar}{Cos\,\varphi^2}\right)} \;.\;. \quad (c) \text{ wird.}$$

Ist p das Gewicht der cubischen Einheit des Gewölbes, so ist nach der gemachten Voraussetzung $S = f'p = abp$, folglich auch $ab = \frac{S}{p}$ und daher $2ab = a^2 + 2ar = \frac{2S}{p}$, also auch

$$z = -\rho + \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{2S}{p\,Cos\,\varphi^2}\right)} \;.\;. \quad (d)$$

so wie $\qquad S = \frac{1}{2}(a^2 + 2ar)p \;.\;. \quad (e)$

Zusatz. Ist die innere Wölbungslinie ein Kreis, so ist $\rho = r$ constant, folglich die Dicke des Gewölbes:

$$z = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{a^2 + 2ar}{Cos\,\varphi^2}\right)}.$$

Für den Scheitel wird $\varphi = 0$ und daher, wie es seyn soll, $z = a$; für die weiter davon entfernten Puncte, wird, da $Cos\,\varphi$ abnimmt und sich immer mehr der Nulle nähert, z fortwährend gröfser, und wird endlich für eine horizontale Fuge, wofür $\varphi = 90^0$, also $Cos\ \varphi = 0$ ist, Unendlich (was mit der Anmerkung der vorigen Aufgabe übereinstimmt).

20. Aufgabe.

Es soll bei der bisherigen Voraussetzung, dafs die Gewölbsteine unter sich ohne Reibung und Cohäsion im Gleichgewichte sind, die Dicke ED des Widerlagers DF (Fig. 27) bestimmt werden, welches mit dem Drucke des Gewölbbogens $ABGF$ im Gleichgewichte steht, vorausgesetzt, dafs die als eine einzige Masse angesehene Widerlage an ihrer Basis DE nicht ausgleiten oder abrutschen kann.

1. Auflösung.

Es sey der Winkel, welchen die an der Widerlage befindliche Fuge GF mit der Verticalen bildet $FCA = \alpha$, das Gewicht des Gewölbbogens BF (als die Hälfte des ganzen Gewölbes) $= Q$, ferner $AB = b$, $FG = b'$, $NJ = h$ (wobei $GN = NF$) und die gesuchte Dicke der Widerlage $DE = x$.

Besteht die Widerlage aus einem Materiale von demselben specifischen Gewichte wie das Gewölbe und ist p das Gewicht der cubischen Einheit, so kann man für eine Gewölblänge (senkrecht auf die Stirnfläche $GFAB$ verstanden) $= 1$, wenn man die Fläche $ABGF = F$ und Fläche $DGE = DE \times JN = hx$ setzt, sofort das Gewicht des Gewölbbogens $Q = pF$ und das Gewicht der Widerlage oder des Pfeilers $q = phx$ setzen.

Nun bringt das Gewölbe auf die Widerlage den verticalen Druck Q und den horizontalen Schub (18. Aufgabe, Relat. 3) $S = Q\,Cot\,\alpha$ hervor, und da diese letztere, nach Nn gerichtete Kraft, den Pfeiler oder die Widerlage um den Punct D (d. i. um die durch diesen Punct gehende Längenkante) umzustürzen strebt; so mufs, wenn man Fm perpendikulär auf NJ zieht, und wenn O der Schwerpunct der Widerlage, so wie OH eine durch diesen Punct gezogene Verticallinie ist, für das Gleichgewicht

$$q \,.\, DH + Q \,.\, DJ = S \,.\, NJ$$

seyn. Da nun $DH = \frac{1}{2}x$, $DJ = x - Fm = x - \frac{1}{2}b'\,Sin\,\alpha$, $NJ = h$ und $S = Q\,Cot\,\alpha$ ist, so folgt $\frac{1}{2}qx + Qx - \frac{1}{2}Qb'\,Sin\,\alpha = hQ\,Cot\,\alpha$, oder wenn man für q und Q die Werthe setzt:

$$\tfrac{1}{2}phx^2 + pFx - \tfrac{1}{2}pb'F\,Sin\,\alpha = pFh\,Cot\,\alpha.$$

Wird diese Gleichuug nach x aufgelöst, so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$x = \frac{-F + \sqrt{[F(F + b' h \, Sin\, \alpha + 2 h^2 \, Cot\, \alpha)]}}{h}.$$

Zusatz. Ist die innere Wölbungslinie ein Kreisbogen vom Halbmesser r, so ist (vorige Aufgabe, Zusatz)

$$b' = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2rb + b^2}{Cos\, \alpha^2}\right)}$$

und (eben dort wo $f = \frac{G}{S} ab = ab \, tang\, \varphi$ wegen (3) in Aufgabe 18 war)

$F = \frac{2rb + b^2}{2} tang\, \alpha$ in der vorigen Gleichung von x zu substituiren

2. Auflösung.

1. Um zuerst den horizontalen Schub gegen das Widerlager zu bestimmen, denke man sich den Druck auf die Fläche GF (Fig. 28) in dem Puncte M concentrirt und KM als die Richtung dieser Kraft N. Eben so sey C jener Punct, in welchem man sich den Druck S in der verticalen Fuge AB vereint denken kann, so wie KC ihre (horizontale) Richtung; ferner sey O' der Schwerpunct der Gewölbshälfte $ABFG$ und KV eine durch diesen Punct gezogene Verticallinie. Diefs vorausgesetzt, so mufs dem nach der Richtung KL wirksamen Gewichte Q des Gewölbbogens durch die beiden den daraus entspringenden Kräften $KC = S$ und $KM = N$ entgegen wirkenden Pressungen (nach dem Satze der gleichen Wirkung und Gegenwirkung) das Gleichgewicht gehalten werden. Ist daher ML eine horizontale Linie, so verhalten sich diese 3 Kräfte Q, S, N wie die Seiten des Dreieckes MLK, so, dafs wenn KL das Gewicht oder die Kraft Q vorstellt, sofort $MK = N$ den auf die Fuge GF Statt findenden Druck und $ML = S$ den horizontalen Schub oder Druck gegen das Widerlager bezeichnet; es ist daher fürs Gleichgewicht dieser 3 Kräfte:

$$Q : S : N = KL : ML : KM,$$

also $$S = \frac{ML}{KL} Q \quad \text{und} \quad N = \frac{KM}{KL} Q$$

und zwar finden diese Ausdrücke unter allen Bedingungen, also auch dann Statt, wenn in der Fuge GF irgend eine Reibung oder Cohäsion angenommen wird. Setzt man dagegen wieder wie bisher eine absolut glatte Fuge ohne Reibung und Cohäsion voraus, so mufs fürs Gleichgewicht die Richtung der Kraft N, d. i. KM auf die Richtung der

Fuge GF normal seyn; bildet daher die Fuge GF mit der Verticalen den W. $GVK = \alpha$, so ist auch W. $KML = \alpha$ und daher

$$\frac{ML}{KL} = Cot\,\alpha \quad \text{und} \quad \frac{KM}{KL} = \frac{1}{Sin\,\alpha},$$

folglich
$$S = Q\,Cot\,\alpha \quad \text{und} \quad N = \frac{Q}{Sin\,\alpha}.$$

Zerlegt man die normal auf GF wirkende Kraft N in eine horizontale Kraft P und in eine verticale D, so erhält man natürlich wieder

$$P = S \quad \text{und} \quad D = Q.$$

II. Was weiters die Stabilität des Pfeilers oder Widerlagers betrifft, so steht dieser bekanntlich mit den Kräften, welche ihn umzuwerfen streben gerade noch im Gleichgewichte, wenn die Resultirende JR aus allen auf ihn einwirkenden Kräften durch den Punct D geht, um welchen das Umstürzen Statt finden kann; aufserdem mufs, wenn der Pfeiler DEG nur durch die Reibung vom Gleiten auf dem horizontalen Boden verhindert wird, der Winkel $RJH = \varphi$, welchen diese Resultante mit der Verticalen bildet, kleiner als der sogenannte Reibungswinkel seyn. Denn ist R die Gröfse dieser Mittelkraft und μ der Reibungscoeffizient des Pfeilers oder Widerlagers auf seiner Basis DE, so ist, wenn man R in eine horizontale und eine verticale Seitenkraft zerlegt, die erstere $p = R\,Sin\,\beta$ und die letztere $q = R\,Cos\,\beta$, folglich der Betrag der, der Kraft p entgegenwirkenden Reibung $= \mu q = \mu R\,Cos\,\beta$ und daher fürs Gleichgewicht $p = q$, d. i. $R\,Sin\,\beta = \mu\,R\,Cos\,\beta$, woraus $tang\,\beta = \mu$, also β der Reibungswinkel ist.

Ist nun der vorhin genannte Winkel φ gröfser als jener β, so wird $p > q$ und es findet ein Gleiten des Prisma in der Richtung ED Statt; es mufs daher für die Stabilität hinsichtlich des Gleitens des Pfeilers

$$tang\,\varphi < tang\,\beta, \quad \text{d. i.} \quad \frac{RH}{JH} < \mu \quad (\text{oder } \varphi < \mu) \text{ seyn.}$$

Nun erhält man aber die Resultirende $R = JR$ aus den beiden durch die Schwerpuncte O und O' des Widerlagers und Gewölbbogens wirkenden verticalen Kräften Q und q, so wie der durch den Scheitel C gehenden horizontalen Kraft S, indem man durch den Punct J, in welchem die durch O gezogene Verticallinie, die verlängerte Gerade KM schneidet, $JT = S$ nach horizontaler und $JH = Q + q$ nach verticaler Richtung abschneidet, daraus das Rechteck HT construirt und die Diagonale JR zieht; dadurch wird die vorige erste Bedingung:

$$\frac{S}{Q+q} < \mu \quad . \quad . \quad (1)$$

In Beziehung auf die zweite Bedingung, dafs nämlich die Resultante JR durch die äufsere Kante D des Pfeilers gehen soll, hat man, wenn die Gewölbshöhe $KL = a$, der Horizontalabstand $FZ = c$, die innere Pfeilerhöhe $EF = h'$ und die Dicke der Widerlage $DE = x$ gesetzt wird, für das Gleichgewicht in Beziehung auf den Momentenpunct D: $S(a + h') = q(c + x) + Q \cdot \frac{1}{2} x$,
oder wenn man wieder die mittlere Pfeilerhöhe $MU = h$ und das Gewicht der cubischen Einheit der Widerlage $= p$ setzt, wodurch für jeden Fufs Länge des Pfeilers $Q = phx$ wird, auch:

$$S(a + h') = q(c + x) + \tfrac{1}{2} p h x^2 \quad . \quad . \quad (i)$$

woraus sofort

$$x = \frac{-q + \sqrt{\left\{q^2 + 2ph[S(a + h') - qc]\right\}}}{ph} \quad . \quad . \quad (2)$$

folgt.

Anmerkung. Damit für die Dauer eine hinreichende Sicherheit gewonnen werde, und weil nach dieser Entwicklung die Stabilität des Pfeilers nur eben noch mit der Kraft, welche ihn umzustürzen strebt, im Gleichgewichte steht, nimmt man in dieser letztern Formel nS statt S, wo $n > 1$ und zwar nach den Erfahrungen von *Audoy*, $n = 1{\cdot}9$ seyn soll.

Um den Pfeiler gegen das Gleiten zu sichern, mufs nach der Bedingungsgleichung (1): $Q + q > \frac{S}{\mu}$, d. i. $phx > \frac{S}{\mu} - q$ oder $x > \frac{S - \mu q}{\mu p h}$ seyn; da nun in der Regel der erstere Werth (2) gröfser als dieser letztere ausfällt, so wird man in diesem Falle auch den erstern (im entgegengesetzten Falle diesen letztern) beibehalten.

Da man für sehr hohe Pfeiler $h' = h$ setzen und in der obigen Relation (i) a gegen h' und $q(c + x)$ gegen $\frac{1}{2} p h x^2$ auslassen kann, so erhält man unter dieser Voraussetzung $Sh = \frac{1}{2} b h x^2$ und daraus eine Art von Grenz- oder Maximalwerth für die Widerlagsdicke $x = \sqrt{\frac{2S}{p}}$, oder wenn man der vorigen Bemerkung gemäfs $1{\cdot}9\,S$ statt S schreibt, auch $x = \sqrt{\frac{3{\cdot}8\,S}{p}}$.

21. Aufgabe.

Den Schwerpunct einer Cycloide oder gemeinen Radlinie zu finden.

Auflösung.

Es sey (Fig. 29) $AB = a$ ein Durchmesser des Erzeugungskreises und zwar durch den Scheitel A der Cycloide DAD' auf ihre Grundlinie DD' perpendikulär gezogen, ferner seyen für irgend einen Punct M der Curve $AP = x$ und $PM (= PM') = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten. Die Differenzialgleichung dieser Curve ist, wenn $AB = 2a$, $DP' = x$ und $P'M = y$ gesetzt wird (Comp. §. 726) $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$, folglich mufs man in derselben um auf die hier angenommene Bezeichnung überzugehen a statt $2a$, $DB - BP' = \frac{1}{2}a\pi - y$ statt x und $AB - AP = a - x$ statt y setzen; dadurch erhält man, nach einer einfachen Substitution und Reduction:

$$dy = \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{(ax - x^2)}} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Ferner erhält man für das Element des Bogens ds, wenn $AM = s$ ist: $ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dx \sqrt{\left[1 + \frac{(a - x)^2}{ax - x^2}\right]}$ wegen der vorigen Gleich. (α), und wenn man gehörig reducirt:

$$ds = dx \sqrt{\frac{a}{x}} \quad . \quad . \quad (\beta)$$

woraus sofort $\quad s = \sqrt{a} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{ax}$

ohne Constante folgt, weil für $x = 0$ auch $s = 0$ seyn mufs.

Setzt man nun in die betreffenden beiden Gleichungen $Xs = \int x\,ds$ und $Ys = \int y\,ds$ der Relationen *I.* in Nr. **22**, für s und ds die vorigen Werthe, so erhält man:

$$2X\sqrt{ax} = \sqrt{a}\int x^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{und} \quad 2Y\sqrt{ax} = \sqrt{a}\int y\,x^{-\frac{1}{2}} dx$$

wobei diese Integrale so zu nehmen sind, dafs s mit x zugleich verschwindet. Die erste Gleichung integrirt, gibt:

$$2X\sqrt{ax} = \tfrac{2}{3}x\sqrt{ax},$$

woraus $\quad X = \frac{1}{3}x \quad . \quad . \quad (1)$ folgt.

Um die zweite Gleichung zu integriren, benütze man das theilweise Integriren nach der Formel (Compend. §. 792) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ und setze darin $u = y$ und $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, woraus $v = 2\sqrt{x}$ folgt; dadurch wird

$$\int \frac{y\,dx}{\sqrt{x}} = 2y\sqrt{x} - 2\int dy\sqrt{x}$$

oder da, wenn man für dy den Werth aus (α) setzt,

$$\int dy\sqrt{x} = \int \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{(a - x)}} = \int dx\sqrt{(a - x)} = C - \tfrac{2}{3}(a - x)^{\frac{3}{2}}$$

wobei die Constante C, da das Integral für $x=0$ verschwinden (also $0=C-\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$ seyn) muſs, den Werth $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$ hat, auch:

$$\int\frac{y\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2y\,\mathrm{d}x-\tfrac{4}{3}\left[(a-x)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right]$$

so, daſs also durch Integration dieser zweiten Gleichung:

$$2Y\sqrt{a\,x}=\sqrt{a}\left[2y\sqrt{x}+\tfrac{4}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{4}{3}a\sqrt{a}\right]$$

und daraus $$Y=y+\tfrac{2}{3}\left[\frac{(a-x)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\right]\quad.\;.\;(2)$$ folgt.

Durch diese Coordinaten X und Y ist sofort der Schwerpunct des Bogens AM bestimmt.

Zusatz. Für den gegen die Achse AB symmetrischen Bogen MAM' liegt der Schwerpunct in der Achse AB selbst und zwar in einem Puncte O, wofür $AO=\frac{1}{3}AP$ ist.

Für die halbe Cycloide AMD ist $x=a$ und $y=\frac{1}{2}a\pi$ zu setzen; mit diesen Werthen erhält man aus (1) und (2):

$$X=\tfrac{1}{3}a \text{ und } Y=(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{2}{3})\,a \text{ (oder nahe } \cdot 9\,a).$$

22. Aufgabe.

Den Schwerpunct des Bogens der gemeinen Kettenlinie zu finden.

Auflösung.

Nimmt man die durch den tiefsten Punct A (Fig. 30) der Kettenlinie DAD' gezogenen lothrechten Linie AB zur Abscissenachse und den Punct A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, setzt also für irgend einen Punct M der Curve $AP=x$, $PM=y$, Bog. $AM=s$ und wenn O der gesuchte Schwerpunct des Bogens AM ist, $AN=X$, $NO=Y$; so hat man zuerst nach Nr. 43, Anmerk. 2:

$$b+x=\tfrac{1}{2}b\left(e^{\frac{y}{b}}+e^{-\frac{y}{b}}\right)\quad.\;.\;(1)$$

folglich auch:

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{b}}-e^{-\frac{y}{b}}\right)\mathrm{d}y\quad.\;.\;(\alpha)$$

und wegen $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{y}{b}}+e^{-\frac{y}{b}}\right)^2\mathrm{d}y^2$ sofort:

$$\mathrm{d}s=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{b}}+e^{-\frac{y}{b}}\right)\mathrm{d}y$$

also wenn man integrirt:

$$s = \tfrac{1}{2} b \left(e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}}\right) \; . \; . \quad (2)$$

und zugleich, wegen Relat. (α):

$$s = b \frac{dx}{dy} \; . \; . \quad (3)$$

Nun ist nach der oben genannten Relation $X s = \int x \, ds$ (Nr. 22)

oder $X s = x s - \int s \, dx$ und da (wegen Relat. α und Gleich. 2)

$$\int s \, dx = \tfrac{1}{2} \int s \, dy \left(e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}}\right) = \tfrac{1}{4} b \int \left(e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}}\right)^2 dy =$$

$$\tfrac{1}{4} b \left[\tfrac{1}{2} b \left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)\left(e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}}\right) - 2y\right] = \tfrac{1}{4} b \left[(b + x) . \frac{2s}{b} - 2y\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} s (b + x) - \tfrac{1}{2} b y$$

ist, auch: $\quad X s = x s - \frac{(b + x) s}{2} + \frac{b y}{2} = \frac{b y + (x - b) s}{2}$,

woraus endlich: $\quad$ I. $\quad X = \frac{b y + (x - b) s}{2 s} \quad$ folgt.

Um ferner auch die Ordinate Y zu bestimmen, hat man:

$$Y s = \int y \, ds = y s - \int s \, dy$$

oder da nach Relat. (3) $s \, dy = b \, dx$ ist, auch:

$$Y s = y s - \int b \, dx = y s - b x,$$

wo überall keine Constante hinzukömmt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ und $s = 0$ ist.

Aus dieser letztern Relation folgt:

$$\text{II.} \quad Y = \frac{y s - b x}{s}.$$

Zusatz. Setzt man für die halbe Kettenlinie AMD, $x = AB = a$, $y = BD = c$ und Bog. $AMD = l$, so folgt aus diesen gefundenen Ausdrücken für X und Y:

$$X = \frac{b c + (a - b) l}{2 l} \quad \text{und} \quad Y = \frac{c l - a b}{l}.$$

Für die ganze Kettenlinie DAD' wird, da die Achse AB selbst durch den Schwerpunct geht (wenn nämlich die beiden Aufhängpuncte D und D' in einerlei Horizont liegen), von diesen beiden Coordinaten die letztere $Y = 0$.

Anmerkung. Mit Hilfe der Variationsrechnung läfst sich zeigen, dafs unter allen isometrischen, durch die beiden Aufhängpuncte D, D' gehenden, und in derselben Ebene liegenden Curven, der Schwerpunct der Kettenlinie am tiefsten liege.

23. Aufgabe.

Es soll der Schwerpunct von dem cycloidischen Segmente $MAM'M$ (Fig. 29) gefunden werden.

Auflösung.

Da der Schwerpunct dieser ebenen Fläche in dem durch den Scheitel A auf die Grundlinie DD' gezogenen Perpendikel AB liegen mufs, so handelt es sich hier blofs um die Bestimmung der Abscisse

$$X = AO \text{ des gesuchten Schwerpunctes } O.$$

Nun gibt von den Relationen $II.$ in Nr. **26** die letztere, d. i. $F = \int dF$, für den vorliegenden Fall $F = 2\int_0^x y\,dx$, oder wenn man wieder theilweise integrirt, wodurch $\int y\,dx = xy - \int x\,dy$, oder wegen $dy = \frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$ (aus Relat. α in Aufgabe 21, wenn man die dortige Bezeichnung auch hier beibehält),

$$\int y\,dx = xy - \int dx\sqrt{(ax-x^2)} \text{ wird, sofort auch:}$$

$$F = 2xy - 2\int dx\sqrt{(ax-x^2)}.$$

Wird der über AB gezeichnete Erzeugungskreis von der Ordinate MM' in den Puncten N, N' geschnitten, so bezeichnet dieses letztere Integrale $\int dx\sqrt{(ax-x^2)}$ nichts anderes als die Kreisfläche APN, folglich das doppelte Integral den Kreisabschnitt $NAN'N$, so, dafs wenn man diese letztere Fläche mit f bezeichnet, endlich auch

$$(a)\quad F = 2xy - f \text{ ist*)}.$$

Die 1ste der erwähnten Relationen $II.$ (in Nr. **26**), nämlich $XF = \int x\,dF$ geht im vorliegenden Falle über in

$$XF = 2\int xy\,dx = x^2y - \int x^2\,dy$$ (wenn man nämlich wieder theilweise integrirt). Nun ist, wenn man für dy den oben angegebenen Werth setzt:

---

*) Fällt M auf D, so hat man für die Fläche der Cycloide $AD'D$, wegen $x = a, 2y = a\pi$ und $f = \frac{1}{4}a^2\pi$ sofort $F = a^2\pi - \frac{1}{4}a^2\pi = \frac{3}{4}a^2\pi$; diese ist also 3 Mal so grofs als die Fläche des Erzeugungskreises. (Vergleiche Lehrb. III. S. 448.)

$$\int x^2\,dy = \int x\,dx\sqrt{(a\,x - x^2)} = \tfrac{1}{2}a\int dx\sqrt{(a\,x - x^2)} -$$

$$\int (\tfrac{1}{2}a - x)\,dx\sqrt{(a\,x - x^2)} = \tfrac{1}{4}af - \tfrac{1}{3}(a\,x - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

wozu keine Constante kommt, weil diese Integrale für $x = 0$ verschwinden müssen. Es ist daher:

$$XF = x^2 y - \tfrac{1}{4}af + \tfrac{1}{3}(a\,x - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

und daraus, wenn man zugleich für F den vorigen Werth aus (a) setzt:

$$X = \frac{x^2 y + \frac{1}{3}(a\,x - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}af}{2\,x\,y - f}$$

Zusatz. Für die ganze cycloidische Fläche $DAD'D$ wird $x = a$, $y = \frac{1}{2}a\,\pi$ und $f = \frac{1}{4}a^2\,\pi$, folglich $X = \frac{7}{12}a$.

24. Aufgabe.

Den Schwerpunct der durch Umdrehung des cycloidischen Bogens AM (Fig. 29) um die Achse AB entstehenden Rotationsfläche zn bestimmen.

Auflösung.

Mit Beibehaltung der in den beiden vorigen Aufgaben (21 u. 23) gewählten Bezeichnung (und Berücksichtigung der Gleich. β in der 21. Aufgabe) gehen die beiden hieher gehörigen Gleichungen in Nr. **29** in die folgenden über:

$$O = 2\,\pi\int_0^x y\,dx\sqrt{\frac{a}{x}} \text{ und } OX = 2\,\pi\int_0^x x\,y\,dx\sqrt{\frac{a}{x}} = 2\,\pi\sqrt{a}\int_0^x y\,dx\sqrt{x}.$$

Aus der erstern dieser Gleichungen folgt, wenn man theilweise integrirt:

$$O = 2\,\pi\sqrt{a}\left[2\,y\sqrt{x} - 2\int dy\sqrt{x}\right]$$

oder wegen $\int dy\sqrt{x} = \int dx\sqrt{(a - x)}$ auch:

$$O = 4\,\pi\sqrt{a}\,.\,y\sqrt{x} - 4\,\pi\sqrt{a}\int dx\sqrt{(a - x)}.$$

Eben so ist

$$OX = 2\,\pi\sqrt{a}\left[\tfrac{2}{3}x\sqrt{x}\,.\,y - \tfrac{2}{3}\int dy\,x\sqrt{x}\right]$$

$$= \tfrac{4}{3}\,\pi\,y\,x\sqrt{a\,x} - \tfrac{4}{3}\,\pi\sqrt{a}\int x\,dx\sqrt{(a - x)}.$$

(Gleich. α, 21. Aufg.)

Nun ist aber $\int dx\sqrt{(a - x)} = C - \frac{2}{3}(a - x)^{\frac{3}{2}}$ wobei, da dieses

Integral für $x = 0$ verschwinden soll, $C = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$, folglich $\int dx \sqrt{(a-x)} = \frac{2}{3}\left[a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}}\right]$ ist; ferner wird, wie leicht zu finden (wenn man $a - x = z$, also $x = a - z$ und $dx = -dz$ setzt und nach der Integration die Werthe wieder herstellt):

$$\int x\, dx \sqrt{(a-x)} = C - \frac{2}{3} a (a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(a-x)^{\frac{5}{2}}$$

wobei die Constante, da das Integral für $x = 0$ wieder verschwinden mufs, $C = \frac{2}{3} a \cdot a^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}}$, folglich

$$\int_0^x x\, dx \sqrt{(a-x)} = \frac{2}{3} a \left[a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{2}{5}\left[a^{\frac{5}{2}} - (a-x)^{\frac{5}{2}}\right]$$

wird. Setzt man daher in die beiden vorigen Gleichungen von O und OX die Werthe dieser Integralien hinein, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$O = 4\pi y \sqrt{ax} + \frac{8}{3}\pi \sqrt{a} (a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}\pi a^2$$

und

$$OX = \frac{4}{3}\pi y x \sqrt{ax} - \frac{16}{45}\pi a^3 + \frac{8}{9}\pi a \sqrt{a} (a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{15}\pi \sqrt{a} (a-x)^{\frac{5}{2}}$$

durch welche beide Gleichungen sofort $\left(\frac{OX}{O} = \right) X$ bestimmt ist

Zusatz. Geht der Bogen AM in die halbe Cycloide AMD über, so wird, wegen $x = a$ und $y = \frac{1}{2} a \pi$ sofort:

$$O = 2 a^2 \pi (\pi - \tfrac{4}{3})$$

und

$$OX = \tfrac{2}{3} a^3 \pi (\pi - \tfrac{8}{15})$$

folglich

$$X = \frac{1}{3} a \frac{(\pi - \frac{8}{15})}{(\pi - \frac{4}{3})}, \text{ nahe } = \cdot 4808\, a.$$

25. Aufgabe.

Es soll der Schwerpunct eines Ellipsoiden-Abschnittes bestimmt werden, dessen beide Grundflächen auf einer der 3 Hauptachsen perpendikulär stehen.

Auflösung.

Sind $2a$, $2b$, $2c$ die drei Hauptachsen des Ellipsoides (oder elliptischen Sphäroides) und nimmt man die erstere zur Achse der x, so wie den Mittelpunct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; so ist, wenn man die Fläche eines auf der Achse der x perpendikulären Schnittes, welchem die Abscisse x entspricht, mit F bezeichnet und damit parallel noch einen zweiten, der Abscisse $x + \mathrm{d}x$ entsprechenden Schnitt führt, das Volumen des zwischen diesen beiden Schnitten enthaltenen Körpers, $\mathrm{d}V = F\,\mathrm{d}x$ und daher nach den Relationen *III* in Nr. **33**:

$$V = \int_{x'}^{x''} F\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad VX = \int_{x'}^{x''} F\,x\,\mathrm{d}x$$

wenn man die Rechnung nämlich auf ein Segment des Ellipsoides beschränkt, welches von zwei auf der Achse der x perpendikulären Ebenen eingeschlossen oder begrenzt wird, ~~dessen~~ Abscissen die Werthe x' und x'' haben.

Nun ist aber die Gleichung des Ellipsoides (d. i. von dessen Oberfläche), wenn die rechtwinkeligen Coordinaten vom Mittelpuncte aus gezählt werden (III. S. 434):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \quad . \quad (m)$$

Führt man daher in der Entfernung vom Mittelpunct $= x$ einen Schnitt perpendikulär auf die Achse $2a$ oder der x, so entsteht eine Ellipse von den Halbachsen $b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ und $c\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$, daher ist wegen (Compend. §. 860) $F = \pi\, b\, c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ nunmehr:

$$V = \pi\, b\, c\int_{x'}^{x''} \mathrm{d}x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \pi\, b\, c\,(x'' - x')\left[1 - \frac{x'^2 + x'x'' + x''^2}{3a^2}\right]$$

und

$$VX = \pi\, b\, c\int_{x'}^{x''} x\,\mathrm{d}x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \pi\, b\, c\ \tfrac{1}{2}(x''^2 - x'^2)\left[1 - \frac{x'^2 + x''^2}{2a^2}\right]$$

folglich

$$X = \frac{VX}{V} = \tfrac{3}{4}(x' + x'')\left[\frac{2a^2 - (x'^2 + x''^2)}{3a^2 - (x'^2 + x'x'' + x''^2)}\right] \quad . \quad . \quad (A)$$

Zusatz 1. Für das halbe Ellipsoid ist $x' = 0$ und $x'' = a$ folglich

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\, a\, b\, c \quad \text{und} \quad X = \tfrac{3}{8}a.$$

Für das ganze Ellipsoid dagegen ist $x' = -a$ und $x'' = +a$, daher

$$V = \tfrac{4}{3}\pi\, a\, b\, c \quad \text{und} \quad X = 0.$$

Geht das Ellipsoid in eine Kugel vom Halbmesser r über, so muſs man in diesen Ausdrücken $a = b = c = r$ setzen.

Zusatz 2. Zur Bestimmung des Schwerpunctes eines Kugelabschnittes, welcher durch Umdrehung des Kreissegmentes BAB' (Fig. 31), wofür der Halbmesser $CA = r$ und Bog. $BAB' = s$ ist, um die Achse AC entsteht, muſs man in dem obigen Ausdruck (A)

$$x' = CN = r\,Cos\,\frac{s}{2r},\ x'' = r \text{ und } a = r \text{ setzen,}$$

dadurch erhält man für die Abscisse CO des Schwerpunctes O:

$$X = \tfrac{3}{4} r \left(1 + Cos\,\frac{s}{2r}\right) \cdot \frac{\left(Sin^2 \frac{s}{2r}\right)}{1 + Sin^2 \frac{s}{2r} - Cos\,\frac{s}{2r}}$$

Für die Halbkugel folgt daraus, wegen $s = r\pi$:

$$X = \tfrac{3}{4} r \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{8} r.$$

26. Aufgabe.

Ein gerader Kegel von kreisförmiger Grundfläche besteht aus zwei verschiedenen Materien, wovon die obere das specifische Gewicht s und die untere jenes S besitzt; beide Theile berühren sich in einer mit der Grundfläche parallelen Kreisebene vom Halbmesser r; der Halbmesser der Grundfläche des ganzen Kegels ist $= R$ und die Höhe des untern Theiles (nämlich des parallel abgestutzten Kegels) vom specif. Gewicht $S = h$; es soll der Schwerpuuct dieses Kegels bestimmt werden.

Auflösung.

Da bei der Voraussetzung, dafs jeder der beiden Theile für sich homogen ist, der gesuchte Schwerpunct in der geometrischen Achse des Kegels liegt, so sey b die Höhe des obern Theiles des Kegels und X der Abstand des gesuchten Schwerpunctes von der Grundfläche des ganzen Kegels; so hat man zuerst:

$$b : b + h = r : R \quad \text{oder} \quad b : h = r : R - r, \quad \text{also } b = \frac{hr}{R - r}$$

Der Inhalt des obern Theils des Kegels ist $v = \frac{1}{3}\pi r^2 b = \frac{1}{3}\pi r^3 \frac{h}{R - r}$, folglich dessen absolutes Gewicht, wenn γ das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers bezeichnet:

$$g = \tfrac{1}{3}\pi\gamma s r^3 \frac{h}{R - r} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

und der Abstand des Schwerpunctes von der untern Grundfläche:

$$d = h + \tfrac{1}{4} b = h + \tfrac{1}{4}\frac{hr}{R - r} \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Eben so ist das Volumen des untern Theiles des Kegels (als abgestutzter Kegel von den Grundflächen $r^2\pi$, $R^2\pi$ und der Höhe h):

$$V = \tfrac{1}{3} h\,(r^2 + R^2 + Rr)\,\pi$$

und dessen Gewicht:

$$G = \tfrac{1}{3}\pi\gamma S h(r^2 + R^2 + Rr), \ . \ . \quad (\alpha')$$

so wie der Abstand seines Schwerpunctes von der Basis (Nr. **35**):

$$D = \tfrac{1}{4} h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \ . \ . \quad (\beta')$$

Nun ist für das Gleichgewicht nach statischen Gesetzen (wenn man den in der Basis des Kegels liegenden Punct A der Achse AC, Fig. 32, zum Mittelpunct der statischen Momente nimmt und daher $AE = D$, $AO = X$ und $AF = d$ setzt):

$$(G + g) X = gd + GD$$

Aus dieser Gleichung folgt nun, wenn man für g, G, d, D die Werthe aus (α), (α'), (β), (β') substituirt, X bestimmt und so weit als möglich reducirt und abkürzt:

$$X = \frac{h}{4}\left(\frac{sr^3(4R - 3r) + S(R - r)^2(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{(R - r)[sr^3 + S(R^3 - r^3)]}\right)$$

Zusatz. Für $r = 0$ wird, wie es seyn soll, da der Kegel dann durchaus von einerlei specifischem Gewichte oder homogen ist:

$$X = \frac{h}{4}.$$

27. Aufgabe.

Auf einen in den Puncten A und B (Fig. 33) befestigten Faden ANB wird mittelst eines Ringes das Gewicht P aufgehängt; es ist die Frage, in welcher Lage dasselbe ruhen wird?

Auflösung.

Zieht man in der durch die Puncte A und B gelegten verticalen Ebene, in welcher sich sofort die Fadenstücke AN und BN befinden müssen, wenn das Gewicht im Puncte N zur Ruhe kommt, AC horizontal, so wie DN und BE vertical oder lothrecht, setzt $AC = a$, $BC = b$, die Länge des Fadens $AN + NB = l$ (als gegebene), $AD = x$ und $DN = y$ (als unbekannte Gröfsen); so hat man, wenn noch NF parallel zu AC gezogen wird, $DC = a - x = NF = NB \times \mathrm{Cos}\, BNF$ und $BF = b + y = NB \,.\, \mathrm{Sin}\, BNF$, folglich

$$(a - x)^2 + (b + y)^2 = NB^2$$

oder wegen $NB^2 = (l - AN)^2 = [l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]^2$ auch

$$(a - x)^2 + (b + y)^2 = [l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]^2 \ . \ . \quad (a)$$

Geht man nun von dem Satze aus, dafs bei dieser gleitenden Bewegung des Gewichtes P das Gleichgewicht nur dann erst eintritt, wenn dessen Schwerpunct die möglich tiefste Lage eingenommen hat, so mufs, wenn man die Ordinate y als eine Function der absolut variablen Abscisse x ansieht, jener Werth für $x = AD$ gesucht werden, wofür $y = DN$ ein Maximum wird, folglich aus der vorigen Gleichung (α) der Differenzialquotient $\frac{dy}{dx}$ bestimmt und gleich Null gesetzt werden. Diefs gibt:

$$-2(a-x) + 2(b+y)\frac{dy}{dx} = -2(l - \sqrt{(x^2+y^2)}) \cdot \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

und für $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$a - x = \frac{[l - \sqrt{(x^2+y^2)}]\,x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{lx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - x$$

d. i.

$$a = \frac{lx}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \,.\,.\quad (\beta)$$

woraus sofort $\quad y = \frac{x}{a}\sqrt{(l^2 - a^2)} \,.\,.\quad (1)\quad$ folgt.

Ohne die Entwicklung weiter zu verfolgen, geht auch schon aus dieser Gleichung (1) die Übereinstimmung mit dem Resultate in §. 67 (Beispiel) hervor, wonach der Winkel ANB durch die, durch den gesuchten Punct N gehende Verticale DN halbirt wird. Denn da in diesem Falle $NE = NB$, daher $AE = AN + NB = l$ und $EC = \sqrt{(l^2 - a^2)}$, folglich wegen $AD : DN = AC : CE$ d. i.

$$x : y = a : \sqrt{(l^2 - a^2)}$$

ist; so folgt daraus wieder die vorige Gleichung (1).

Zusatz. Steht ein System von Gewichten p, p', p''.. im Gleichgewichte, deren Schwerpuncte von einer horizontalen Ebene die Abstände x, x', x''.. haben, so wird bei einer unendlich kleinen Bewegung, nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten sofort

$p\,dx + p'\,dx' + p''\,dx'' + .. = 0$ oder was dasselbe ist

$$d(px + p'x' + p''x'' + ..) = 0\,. \quad (m)$$

Ist aber X der Abstand des Schwerpunctes des ganzen Systemes, folglich

$$X = \frac{px + p'x' + ..}{p + p' + ..}, \text{ so ist auch}$$

$$dX = \frac{d(px + p'x' + \;)}{p + p' + ..}$$

oder zufolge der vorigen Relation (m) auch

$$dX = 0,$$

zum Beweis, dafs X constant ist, also der gemeinschaftliche Schwerpunct bei dieser eingeleiteten oder angenommenen Bewegung der im Gleichgewichte befindlichen Gewichte weder steigt noch fällt.

(Dasselbe gilt auch von dem Schwerpuncte bei Maschinen, welche unter dem Einflusse von Gewichten im Gleichgewichte stehen.)

Wendet man diesen Satz auf die vorliegende Aufgabe an, so kann man beim Differenziiren der vorigen Gleichung (α) y als constant ansehen und dadurch die Entwicklung in etwas vereinfachen.

Anmerkung. Wird ein materieller Punct vom Gewichte p blofs in Folge seines Gewichtes bewegt, so ist die Arbeit, welche die Schwerkraft ausübt, während der Punct von der Lage M_0 (Fig. 34) in die tiefere M, gleichgiltig durch welche Curve $M_0 M$ übergeht, sofort $W = p(A'M - AM_0)$, oder wenn man die verticalen Abstände AM_0 und $A'M$ von einer horizontalen Ebene AX durch z_0 und z bezeichnet

$$W = p(z - z_0);$$

dabei wird W oder die Arbeit negativ, wenn der Punct M höher als jener M_0 liegt, also $z_0 > z$ ist.

Sind allgemein p, p', p'' .. die Gewichte der einzelnen Puncte irgend eines Systemes von materiellen Puncten, z_0, z'_0, z''_0 .. die von irgend einer horizontalen Ebene nach abwärts gezählten verticalen Ordinaten der anfänglichen Lage dieser Puncte, so wie z, z', z'' .. die Ordinaten ihrer Endlagen nach einer gewissen Zeit; so ist nach der vorigen Relation die Arbeitsgröfse der Schwerkraft für dieses System während dieser Zeit:

$$W = p(z - z_0) + p'(z' - z'_0) + p''(z'' - z''_0) + \ldots$$
$$= pz + p'z' + \ldots - (pz_0 + p'z'_0 + \ldots)$$

oder
$$W = \Sigma(pz) - \Sigma(pz_0);$$

bezeichnet man aber das Gesammtgewicht des Systems, d. i. die Summe $p + p' + p'' \ldots = \Sigma(p)$ durch P, so wie die verticalen Ordinaten des Schwerpunctes des Systemes für die erste und letzte Lage desselben durch Z_0 und Z, so erhält die vorige Gleichung (Nr. 17) auch die Form:

$$W = PZ - PZ_0 = P(Z - Z_0)$$

woraus sofort der Satz folgt, dafs in dem durch die Schwere wie immer bewegten Systeme, die Arbeit der Schwerkraft gleich ist dem Gesammtgewicht des Systemes multiplicirt mit der verticalen Höhe, um welche der Schwerpunct desselben gesunken ist.

Da nun für eine unendlich kleine Bewegung des Systemes die obigen Differenzen $z - z_0$, $z' - z'_0$ .. in dz_0, dz'_0 .. übergehen, so wird dafür $dW = p\,dz_0 + p'\,dz'_0 + \ldots = P(Z - Z_0) = P\,dZ_0$ und daher, wenn die sämmtlichen materiellen Puncte oder Gewichte unter sich im Gleichgewichte stehen, was nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung $p\,dz_0 + p'\,dz'_0 + \ldots = 0$ bedingt, auch $dW = P\,dZ_0 = 0$, woraus wieder folgt, dafs bei dieser unendlich kleinen Bewegung, der Schwerpunct des Systems weder steigt noch fällt.

28. Aufgabe.

Eine sogenannte Zugbrücke, welche in der Zeichnung (Fig 35) durch die gerade Linie AC vorgestellt ist, lasse sich in der verticalen Ebene ACB um den Punct C drehen; an dem Endpuncte A derselben ist eine über die Rolle N geführte Schnur oder Kette befestigt, an welcher das Gewicht X aufgehängt ist; es soll nun die Gröfse dieses Gewichtes so bestimmt werden, dafs dasselbe mit dem Gewichte Q der Brücke bei irgend einer Lage MC derselben im Gleichgewichte steht.

Auflösung.

Es sey die Länge der Brücke, als Halbmesser des Quadranten AMB d. i. $AC = MC = BC = R$ und wenn O der Schwerpunct der Brücke ist, $CO = a$; ferner soll die Gröfse des Gewichtes X für jene Lage der Brücke MC gefunden werden, für welche, wenn BC eine Verticale, der W. $BCM = \alpha$ ist. Zieht man durch O die lothrechte Linie OE und auf die Sehne BM das Perpendikel CD, so hat man, wenn das Gewicht der Schnüre oder Ketten dabei nicht berücksichtigt wird, fürs Gleichgewicht

$$Q \,.\, CE = X \,.\, CD \quad \text{oder} \quad Q \,.\, a \,Sin\, \alpha = X \,.\, R \,Cos\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

und daraus:
$$X = \frac{a}{R} \,.\, \frac{2 \,Sin\, \frac{1}{2}\alpha \,Cos\, \frac{1}{2}\alpha}{Cos\, \frac{1}{2}\alpha} Q \quad \text{d. i.}$$

$$X = \frac{2aQ}{R} Sin\, \tfrac{1}{2}\alpha \;.\;. \quad (m)$$

Zusatz 1. Für $\alpha = 0$ wird also $X = 0$ und für $\alpha = 90^0$ dagegen $X = \frac{2aQ}{R} \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{aQ}{R}\sqrt{2}$.

Zusatz 2. Bezeichnet man das nach statischen Gesetzen auf den Endpunct A reducirte Gewicht Q der Brücke durch P, so ist $RP = aQ$, folglich läfst sich die vorige Relation (m) auch so schreiben:

$$X = 2P \,Sin\, \tfrac{1}{2}\alpha,$$

oder es ist, wenn man die dem Winkel α entsprechende Sehne $BM = S$ setzt, wegen $S = 2R \,Sin\, \frac{1}{2}\alpha$, auch $X = \frac{PS}{R}$ woraus die Proportion folgt:

$$P : X = R : S \;.\;. \quad (n)$$

29. Aufgabe.

Das Gewicht X der vorigen Aufgabe zu bestimmen, wenn dabei auch das Gewicht der Kette berücksichtigt wird.

Auflösung.

Es sey q das Gewicht des laufenden Fuſses der Kette und die Brücke wieder in der Lage CM (Fig. 35), so ist das zur Balancirung der Brücke nöthige Aufhänggewicht in dieser Lage nach der Relat. (n) im Zusatz 2 der vorigen Aufgabe:

$$p = \frac{S}{R} P.$$

Da ferner das Gewicht des Kettenstückes $MB = S$ die Gröſse qS besitzt und ihr Schwerpunct im Puncte D liegt, so ist das statische Moment dieses Gewichtes:

$$M = qS \times CE = qS \times CD\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha = qS \times R\, Cos \tfrac{1}{2}\alpha\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

oder endlich wegen $S = 2R\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha$ auch

$$M = 2qR^2\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\, Cos \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Muſs ferner dieses Gewicht p noch wegen des Gewichtes qS der Kette um p' vergröſsert werden, so ist dessen stat. Moment

$$M' = p' \times CD = p'.R\, Cos \tfrac{1}{2}\alpha$$

und da für das Gleichgewicht $M' = M$ seyn muſs, sofort

$$p' R\, Cos \tfrac{1}{2}\alpha = 2qR^2\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha\, Cos \tfrac{1}{2}\alpha$$

also $$p' = 2qR\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Liegt nun selbst bei der horizontalen Lage AC der Brücke das untere Ende der Kette schon auf dem Boden CL auf, so, daſs also auch in jeder andern Lage CM der Brücke, das Gewicht der Kette von derselben Länge $BC = R$ wirksam ist; so hat man, da dieses letztere Gewicht $= qR$ ist, für die Gröſse des gesuchten Aufhänggewichtes bei irgend einer Lage MC der Brücke $X = p + p' - qR$, oder, wenn man für p und p' die vorigen Werthe setzt, auch:

$$X = \frac{S}{R} P + 2qR\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha - qR.$$

Zusatz. Wegen $$X + qR = \frac{S}{R} P + 2qR\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha,$$

gibt es offenbar einen gewissen Werth von α, wofür $X = 0$ ist. Setzt man, um diesen Werth zu finden, in der vorigen Gleichung $X = 0$, so erhält man, wegen $S = 2R\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha$:

$$qR = 2P\, Sin \tfrac{1}{2}\alpha + 2qR\, Sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

und daraus durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung:

$$Sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{-P + \surd(P^2 + 2q^2R^2)}{2qR}.$$

30. Aufgabe.

Auf zwei miteinander in Verbindung stehenden krummen Flächen, die im Durchschnitte mit einer verticalen Ebene, durch die beiden Curven **BMC** und **BmD** (Fig. 36) dargestellt sind, liegen die beiden, mittelst eines über die Rolle A gehenden Fadens MAm miteinander verbundenen materiellen Puncte M und m, von den Gewichten Q und q; es ist die Frage, welche Eigenschaften diese beiden Curven gegeneinander besitzen müssen, wenn diese Gewichte Q und q in jeder Lage, die sie darauf einnehmen können, miteinander im Gleichgewichte stehen sollen?

Auflösung.

Nimmt man die durch A gehende in der Verticalebene ACD liegende lothrechte Linie AE zur Abscissenachse und setzt für irgend einen Punct M der Curve BMC (in welchem sich das Gewicht Q befinden soll) $AP = X$ und $PM = Y$, so wie für den entsprechenden Punct m der Curve bmD (in welchem sich das zweite Gewicht q befindet) $Ap = x$ und $pm = y$; so wird, während Q um den Bogen $MM' = dS$ aufwärts gleitet, jenes q um das Bogenelement mm' abwärts gehen, oder es wird das erstere Gewicht um die Höhe $PP' = dX$ steigen, dagegen das letztere gleichzeitig um die Höhe $pp' = dx$ sinken. Es folgt daher nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zwischen Q und q:

$$Q\,dX + q\,dx = 0$$

oder wenn man integrirt:

$$QX + qx = C \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei C eine unbestimmte Constante bezeichnet.

Ist X' der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes der Gewichte Q und q von der durch A gezogenen Horizontalen, so ist

$$(Q + q)X' = QX + qx = C \text{ (wegen 1), und daraus}$$

$$X' = \frac{C}{Q + q}$$

eine constante Gröfse, d. h. der gemeinschaftliche Schwerpunct kann bei dieser unendlich kleinen Verschiebung der Gewichte Q und q auf ihren Curven weder fallen noch steigen. (Vergl. die 27. Aufgabe.)

Ist nun die Länge des Fadens $MA + Am = l$ und $AB = a$; so ist

$$l = \sqrt{[(X + a)^2 + Y^2]} + \sqrt{[(x + a)^2 + y^2]} \quad . \quad . \quad (2)$$

Wenn daher die eine der beiden Curven, z. B. jene BMC durch

die Gleichung $Y = F(X)$ . . (3)
gegeben ist, so läſst sich aus den Gleichungen (1), (2), (3) sofort auch die Gleichung der zweiten Curve BmD, d. i. $y = f(x)$ bestimmen.

31. Aufgabe.

Es soll die in der verticalen Ebene ACD (Fig. 37) liegende Curve AmD bestimmt werden, auf welcher das constante Gewicht P, welches in der 28. Aufgabe statt dem variablen Gewichte X gesetzt wird, herabgleiten muſs, damit dasselbe in jeder Lage mit dem Gewichte der Zugbrücke im Gleichgewichte stehe.

Auflösung.

Setzt man wie in der 28. Aufgabe $CE = ME = AE = R$ und für irgend eine Lage der Zugbrücke ME (für welche sich das Gewicht P in m befinden soll) die Sehne $AM = S$, dagegen, um die Bezeichnung der vorigen Aufgabe beibehalten zu können, das auf den Endpunct M reducirte Gewicht der Brücke $= Q$ (statt P in der 28. Aufg.), so ist nach der Proportion (n) in der 28. Aufgabe $Q : P = R : S$ oder

$$P = \frac{S}{R} Q \;\;. \;. \quad (\alpha)$$

wobei mit der Bezeichnung der vorigen Aufgabe verglichen, P statt q steht.

Die 3 Gleichungen der vorigen Aufgabe sind, wegen $a = 0$ (indem hier die beiden Puncte A und B der Fig. 36 zusammenfallen) und $q = P$ sofort:

$$QX + Px = C \;.\;.\; (1), \quad l = \sqrt{(X^2 + Y^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2)} \;.\;.\; (2')$$

und $Y = F(X)$ oder da die Curve AMC ein Kreisbogen vom Halbmesser R ist,

$$Y^2 + X^2 = 2\,RX \;\;.\;. \quad (3')$$

Die Gleichung (2′) wird daher $l = \sqrt{2\,RX} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$ oder da aus jener (1) $X = \frac{C - Px}{Q}$ folgt, auch:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = l - \sqrt{\left[\frac{2\,R}{Q}(C - Px)\right]} \;.\;. \quad (2)$$

Um die in dieser Gleichung der gesuchten Curve AmD vorkommenden unbestimmten Constanten P und C zu finden, darf man nur bemerken, daſs erstens das freie, durch die Curve noch nicht verminderte Gewicht mit dem Gewichte der Brücke in ihrer horizontalen Lage im Gleichgewichte, und da das Gewicht P in diesem Falle im Anfangspuncte A ist, für $x=0$ auch $y=0$ seyn muſs. Mit der ersten dieser beiden Bedingungen folgt aus der obigen Relation (α), indem für diese Lage die Sehne $AM=S$ in $AC=R\sqrt{2}$ übergeht:

$$P=\frac{R\sqrt{2}}{R}Q=Q\sqrt{2}\;.\;.\quad(\beta)$$

und mit der zweiten Bedingung erhält man aus (2):

$$0=l-\sqrt{\frac{2RC}{Q}}\quad\text{oder}\quad C=\frac{Ql^2}{2R}\;.\;.\quad(\gamma)$$

Setzt man daher diese Werthe für P und C in die vorige Gleich. (2) und zugleich auch $l=AC=R\sqrt{2}$, so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\sqrt{(x^2+y^2)}=R\sqrt{2}-\sqrt{[2R(R-x\sqrt{2})]}\;.\;.\quad(3)$$

Da sich nun aus dieser Gleichung zu jedem beliebigen Werthe von $x=Ap$ die Distanz oder Sehne $Am=\sqrt{(x^2+y^2)}$ sehr einfach berechnen läſst, so kann die gesuchte Curve AmD leicht mittelst Puncte m, m' . . construirt werden.

Zusatz. Da aus der vorigen Gleichung (3) die nachstehende

$$(x^2+y^2+2R\sqrt{2}.x-4R^2)^2=16R^3(R-x\sqrt{2})$$

folgt, so ist die eigentliche Gleichung der gesuchten Curve AmD eine algebraische des vierten Grades.

Anmerkung. *Belidor,* welcher (in der *Science des Ingénieurs*) zuerst die Anwendung dieser Curve zum Aufziehen der Zugbrücken zeigte, nennt sie *Sinusoide*, weil er bei ihrer Construction die Sinus der Erhebungswinkel benützt. Übrigens ist diese Curve (wie *Joh. Bernoulli* und *L'Hôpital* zuerst gezeigt haben) nichts anders als eine Epicycloide, bei welcher der Grund- und Erzeugungskreis gleiche Durchmesser haben.

32. Aufgabe.

Die Gleichung der elastischen Linie zu finden.

Auflösung.

Da man unter der elastischen Linie nichts anderes als die neutrale Schichte (§. 255) eines elastischen prismatischen Körpers versteht, welcher in einem oder mehreren Puncten befestigt und durch das eigene oder ein sonstiges Gewicht gebogen wird; so kann man sich diese Linien immer als elastische Stäbe ohne Dicke vorstellen.

I. Ist also erstens ein gewichtsloser elastischer Stab AB (Fig. 38) mit dem einen Ende B in eine verticale Wand BN befestigt und am andern Endpunct A mit dem Gewichte Q belastet, wobei jedoch die

Krümmung oder Biegung nur wenig von der Horizontalen abweichen soll; so ist, wenn man $AC = a$, $AE = BC = \delta$ und für irgend einen Punct M der Curve die rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ so wie den Bog. $AM = s$, den Krümmungshalbmesser $OM = \rho$ und wenn MT eine in diesem Puncte gezogene Tangente ist, W. $MTP = \alpha$ setzt, sofort das statische Moment der Last Q in Beziehung auf diesen Punct $M = Qx$. Bezeichnet daher E' das Biegungsmoment (oder die relative Elasticität), so ist nach Relation (2) in Nr. **115**:

$$E' = \rho\, Q\, x \; . \; . \quad (m)$$

Nun ist (Compend. §. 710) $\rho = -\frac{ds^3}{dx\, d^2y}$, oder da man bei der vorausgesetzten geringen Biegung dx statt ds setzen kann, auch:

$$\rho = -\frac{dx^2}{d^2y} \text{ (vergl. auch Nr. } \mathbf{118}\text{); es ist also}$$

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -Qx \; . \; . \quad (n)$$

(vergleiche Relat. (a) in Nr. **118**) oder da dx constant ist,

$$E' d \,.\, \frac{dy}{dx} = -Q\, x\, dx.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt

$$E' \frac{dy}{dx} = C - \frac{Qx^2}{2};$$

um die Constante C zu bestimmen bemerke man, daſs wegen $\frac{dy}{dx} = tang\, \alpha$, für $x = a$ (weil die Tangente BE im Puncte B mit der Abscissenachse parallel ist) $\alpha = 0$, also auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist; dieſs gibt $C = \frac{Qa^2}{2}$, folglich ist, wenn man diesen Werth substituirt:

$$E' dy = \frac{Qa^2}{2} dx - \frac{Qx^2}{2} dx$$

und wenn man abermals integrirt:

$$E' y = \frac{Q}{2}(a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3),$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn muſs. Die gesuchte Gleichung ist daher:

$$y = \frac{Q}{6E'}(3a^2 x - x^3). \; . \quad (1)$$

Zusatz Die gröſste Ordinate oder Biegung erhält man aus dieser Gleichung für $x = a$ und zwar wird

$$\delta = \frac{Qa^3}{3E'} \; . \; . \quad (2)$$

Der Krümmungshalbmesser für irgend einen Punct M ist (obige Relat. m) $\rho = \frac{E'}{Qx}$ oder wenn man für E' den Werth aus der Relat. (2) setzt:

$$\rho = \frac{a^3}{3\delta x} \quad . \quad (3)$$

Für $x = 0$ wird $\rho = \infty$, zum Beweis, dafs der Stab im Aufhängpunct A nicht gekrümmt ist. Da ferner ρ für $x = a$ am kleinsten wird, so besitzt der Stab am Befestigungspunct B die gröfste Krümmung.

II. Ist der Stab über die ganze Länge gleichförmig belastet, und zwar auf die Längeneinheit mit dem Gewichte q; so kommt auf den ganzen Stab die Last qa und auf das Stück AM jene qx. In Bezug auf den Punct M ist das stat. Moment dieser Belastung qx sofort $M = \frac{1}{2} x \cdot qx = \frac{1}{2} q x^2$; wird daher dieses Moment statt jenem Qx in der obigen Relation (n) gesetzt, so erhält man für den vorliegenden Fall:

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2} q x^2$$

und daraus wieder, wie vorhin zuerst

$$E' \frac{dy}{dx} = C - \tfrac{1}{6} q x^3,$$

wobei, da für $x = a$ wieder $\frac{dy}{dx} = 0$ seyn mufs, $C = \frac{1}{6} q a^3$, also eigentlich $$E' \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{6} q a^3 - \tfrac{1}{6} q x^3$$

ist, und dann weiters:

$$E' y = \tfrac{1}{6} q (a^3 x - \tfrac{1}{4} x^4)$$

ohne Constante, weil für $x = 0$ wieder $y = 0$ seyn soll.

Die Gleichung der elastischen Linie ist daher in diesem zweiten Falle:

$$y = \frac{q}{24 E'} (4 a^3 x - x^4) \quad . \quad . \quad (1')$$

Zusatz 1. Die gröfste Ordinate oder Biegung ist (für $x = a$)

$$\delta' = \frac{q a^4}{8 E'} = \frac{Q a^3}{8 E'} \quad . \quad . \quad (2')$$

wenn man nämlich die ganze Last $qa = Q$ setzt.

Da die obige Relation (m) für den gegenwärtigen Fall in

$$E' = \tfrac{1}{2} \rho q x^2 \quad . \quad . \quad (m')$$

übergeht, so folgt daraus, wenn man auch gleich für E' den aus (2') folgenden Werth $\frac{q a^4}{8 \delta'}$ setzt:

$$\rho = \frac{a^4}{4\,\delta'\,x^2} \;.\;. \quad (3')$$

der kleinste Werth des Krümmungshalbmessers ist, wegen $x = a$ sofort

$$\rho = \frac{a^2}{4\,\delta'}.$$

Zusatz 2. Die Vergleichung der beiden Relationen (2) und (2') gibt die Proportion $\delta : \delta' = 8 : 3$ (vergleiche Nr. **119**).

Sucht man jenes Gewicht q, welches am freien Ende A des gewichtslosen Stabes bei B dieselbe Biegung, wie die über die ganze Länge gleichförmig vertheilte Last Q hervorbringt, so muſs ρ für den Punct B in beiden Fällen denselben Werth besitzen. Nun ist für die Last q in A aus Relat. (m) $\rho = \frac{E'}{q\,a}$ und für die Last Q über die ganze Länge, aus (m') $\rho = \frac{2\,E'}{q\,a^2} = \frac{2\,E'}{Q\,a}$, folglich $\frac{E'}{q\,a} = \frac{2\,E'}{Q\,a}$ d. i.

$$q = \tfrac{1}{2}\,Q.$$

III. Es sey endlich der gewichtslose Stab $A\,B$ am freien Ende A mit dem Gewichte Q und auſserdem noch über die ganze Länge mit dem Gewichte $q\,a$ gleichförmig belastet, so, daſs die beiden vorigen Fälle hier vereint Statt finden; so hat man für den Punct M der Curve das stat. Moment:

$$M = Q\,x + \tfrac{1}{2}\,x \;\; q\,x = Q\,x + \tfrac{1}{2}\,q\,x^2$$

folglich wie oben

$$E'\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,Q\,x - \tfrac{1}{2}\,q\,x^2,$$

daraus

$$E'\,\frac{dy}{dx} = C - \frac{Q\,x^2}{2} - \frac{q\,x^3}{6}$$

oder (da wieder für $x = a$, $\frac{dy}{dx} = 0$ ist) wegen $C = \frac{Q\,a^2}{2} + \frac{q\,a^3}{6}$, auch

$$E'\,dy = \left(\frac{Q\,a^2}{2} + \frac{q\,a^3}{6}\right) dx - \left(\frac{Q\,x^2}{2} + \frac{q\,x^3}{6}\right) dx$$

folglich

$$E'\,y = \left(\frac{Q\,a^2}{2} + \frac{q\,a^3}{6}\right) x - \left(\frac{Q\,x^3}{6} + \frac{q\,x^4}{24}\right) \;.\;. \quad (1'')$$

ohne Constante.

Zusatz 1. Für $x = a$ wird $y = \delta''$, gleich der gröſsten Biegung, folglich aus dieser Gleichung:

$$\delta'' = \frac{a^3}{E'}\left(\frac{Q}{3} + \frac{q\,a}{8}\right) \;.\;. \quad (2'')$$

Auch ist wieder aus der Relation $E' = \rho\,(Q\,x + \tfrac{1}{2}\,q\,a^2)$, wenn man für E' den Werth aus der vorigen Gleich. (2'') setzt:

$$\rho = \frac{a^3}{\delta''} \cdot \frac{\left(\frac{Q}{3} + \frac{qa}{8}\right)}{Qx + \frac{1}{2}qx^2} \quad . \; . \quad (3'')$$

Zusatz 2. Besteht die gleichförmige Belastung qa bloſs in dem eigenen Gewichte G des Stabes, so nehmen die vorigen Gleichungen (1″) und (2″) die Form an:

$$E'y = a^2 (\tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{6} G) x - \tfrac{1}{6} \left(Qx^3 + \frac{G}{4a} x^4\right)$$

und $$\delta'' = \frac{a^3}{E'} \left(\frac{Q}{3} + \frac{G}{8}\right) \text{ (vergl. Nr. 119).}$$

33. Aufgabe.

Ein gewichtsloser elastischer Stab ABA' (Fig. 39) ist in einer verticalen Wand BE in der Art befestigt, daſs er in seinem natürlichen Zustande die Lage aa', dagegen, wenn er in den freien Endpuncten A und A' mit den Gewichten Q und Q', welche sich umgekehrt wie die Abstände AC und $A'C'$ von der Wand verhalten, belastet wird, jene ABA annimmt; es sollen die Krümmungen bestimmt werden, welche der Stab unmittelbar am Befestigungspunct B zu beiden Seiten der ohne Dicke gedachten Wand annimmt, vorausgesetzt, daſs der Stab auf der einen Seite der Wand soll gebogen werden können, ohne daſs dieses auf die Biegung auf der andern Seite der Wand einen Einfluſs hat.

Auflösung.

Setzt man die horizontalen Abstände $AC = x$ und $A'C' = x'$, so ist nach der gemachten Voraussetzung:

$$Q : Q' = x' : x \text{ oder } Qx = Q'x' \quad . \; . \quad (\alpha)$$

Ist ferner für den Punct B der Krümmungshalbmesser in der Curve $AB = r$ und in der Curve $A'B' = r'$, so ist (Aufgabe 32, Relat. m) $E' = rQx$, und da der Stab durchaus dieselbe relative Elasticität besitzen soll, auch $E' = r'Q'x'$, folglich $rQx = r'Q'x'$ und wegen Relat. (α) sofort: $$r' = r$$
d. h. die Krümmung des Stabes ist im Puncte B zu beiden Seiten der Wand die nämliche, es halten sich daher die Fibern desselben bei B, zu beiden Seiten der Wand oder des Befestigungspunctes B das Gleichgewicht.

Es bleibt sonach das Gleichgewicht, so wie die ganze Lage ABA' auch ungeändert, wenn man die Wand BE wegnimmt und dafür den Stab im Puncte B mit einem Stift so befestigt, daſs sich der Stab um denselben drehen kann, dieser Stift oder Befestigungspunct B erleidet dabei einen verticalen Druck nach abwärts $= Q + Q'$, so, dafs man diesen Punct auch ohne Störung des Gleichgewichtes durch eine vertical aufwärts wirkende Kraft $P = Q + Q'$ ersetzen kann. Werden ferner die beiden Puncte A und A' befestigt, so erleiden diese Puncte (da das Gleichgewicht immer noch bestehen bleibt) vertical aufwärts einen Druck, beziehungsweise von Q und Q'.

Kehrt man endlich das Ganze um, so kann auch ohne Störung des Gleichgewichtes der in den Puncten A und A' nach abwärts Statt findende Druck Q und Q' durch Stützen aufgehoben werden, wie diefs in der That in Fig. 40 dargestellt ist.

Zusatz. Wird also ein an beiden Enden unterstützter oder frei aufliegender elastischer Stab, in irgend einem Puncte B belastet, so wird derselbe genau so gebogen, als ob er in dem Belastungspunct befestigt, dagegen durch vertical aufwärts wirkende, in den Unterstützungspuncten angebrachte Kräfte, die dem Drucke auf die Stützen gleich kommen, gebogen würde; dabei bestimmen sich diese Kräfte oder Verticalpressungen auf die Stützpuncte genau so, wie beim geradlinigen Hebel nach dem Satze der statischen Momente.

34. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab ABA' (Fig. 41) liegt auf den beiden in einerlei Horizont befindlichen Stützen A und A' frei auf und ist im Puncte B mit dem Gewichte Q belastet; es sollen die Gleichungen der beiden entstehenden Curven AMB und $A'M'B$, ferner die Gröfse der Biegung oder der Pfeil CB u. s. w. gefunden werden.

Auflösung.

Es sey $AC = a$ und $AA' = l$, so wie für irgend einen Punct M der Curve AMB und einen Punct M' der Curve $A'M'B$ (bei Voraussetzung von rechtwinkeligen Coordinaten), $AP = x$, $PM = y$ und $A'P' = x'$, $P'M' = y'$, ferner wenn BT die im Puncte B gezogene (folglich — vorige Aufgabe — beiden Curven gemeinschaftliche) Tangente ist, W. $ATB = \alpha$; so ist, wenn man die in den Puncten A und A' auf die Stützen Statt findenden Pressungen mit p und p' bezeichnet, sich also (vorige Aufgabe) vorstellt, dafs der Stab in B befestigt, und in den Puncten A, A' durch die Kräfte p, p' vertical aufwärts gezogen wird, zuerst, wegen $pl = Q(l - a)$ und $p'l = Qa$:

$$p = \frac{Q}{l}(l-a) \text{ und } p' = \frac{Q}{l}a \;.\;. \quad (\alpha)$$

(also, wie es seyn soll, $p+p'=Q$). Ferner ist in der Curve AMB, für den Punct M das stat. Moment $= px$, folglich (Aufg. 32):

$$E'\frac{d^2y}{dx^2} = -px \text{ und daraus } E'\frac{dy}{dx} = C - \frac{px^2}{2}$$

oder da für $x=a$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, also $C = \frac{pa^2}{2} + E'\,tang\,\alpha$ wird, auch:

$$E'dy = \left(\frac{pa^2}{2} + E'\,tang\,\alpha\right)dx - \frac{px^2}{2}\,dx,$$

aus welcher Gleichung wieder weiters

$$E'y = \left(\frac{pa^2}{2} + E'\,tang\,\alpha\right)x - \frac{px^3}{6},$$

oder wenn man für p den Werth aus (α) setzt, sofort:

$$E'y = \frac{Q}{l}\,\frac{a^2}{2}(l-a)\,x + x\,E\,tang\,\alpha - \frac{Q}{6l}(l-a)\,x^3 \,. \quad (I)$$

folgt.

Eben so ist in der Curve $A'M'B$ für den Punct M' das stat. Moment $= p'x'$ folglich

$$E'\frac{d^2y'}{dx'^2} = p'x'$$

und daraus wieder

$$E'\frac{dy'}{dx'} = C - \frac{p'x'^2}{2}$$

oder da für $x'=l-a$ der Quotient $\frac{dy'}{dx'} = -tang\,\alpha$, folglich die Constante $C = \frac{p'}{2}(l-a)^2 - E'\,tang\,\alpha$ wird, auch

$$E'\,dy' = \frac{p'}{2}(l-a)^2\,dx' - E'\,tang\,\alpha\,dx' - \frac{p'x'^2}{2}\,dx'$$

woraus endlich durch weiteres Integriren

$$E'y' = \frac{p'}{2}(l-a)^2\,x' - x'E'\,tang\,\alpha - \frac{p'}{6}\,a'^3$$

oder wenn man auch hier für p' den Werth aus (α) setzt:

$$E'y' = \frac{Qa}{2l}(l-a)^2\,x' - x'E'\,tang\,\alpha - \frac{Qa}{6l}\,x'^3 \;.\;. \quad (II)$$

folgt.

Setzt man in der Gleichung (I) $x=a$ und in jener (II) $x'=l-a$, so wird für beide Werthe $y=y'=BC=\delta$, daher ist beziehungsweise nach einer einfachen Reduction:

$$(b)\,. \quad E'\delta = \frac{Qa^3}{3l}(l-a) + a\,E'\,tang\,\alpha \text{ und}$$

$$E'\delta = \frac{Qa}{3l}(l-a)^3 - (l-a)\,E'\,tang\,\alpha$$

so, dafs wenn man diese beiden Werthe einander gleich setzt und dann $E' \tang \alpha$ bestimmt, sofort

$$E' \tang \alpha = \frac{Q a}{3 l} (l - a)(l - 2 a) \; . \; . \quad (c)$$

wird. Substituirt man diesen Werth für $E' \tang \alpha$ in die beiden Relationen (I) und (II), so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction, für die Gleichung der Curve AMB:

$$y = \frac{Q}{6 l E'} (l - a) \left[(2 a l - a^2) x - x^3 \right] \; . \; . \quad (1)$$

und für die Gleichung der Curve $A'M'B$:

$$y' = \frac{Q a}{6 l E'} \left[(l^2 - a^2) x' - x'^3 \right] \; . \; . \quad (1')$$

dabei darf in der erstern Gleichung x blofs von 0 bis a, und in der letztern x' von 0 bis $l - a$ genommen werden.

Setzt man den vorigen Werth von $E' \tang \alpha$ auch in die Gleichung (b), so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\delta = \frac{Q a^2 (l - a)^2}{3 l E'} \; . \; . \quad (2)$$

Zusatz 1. Zur Bestimmung des tiefsten Punctes des gebogenen Stabes ABA', mufs man die gröfsten Ordinaten y und y' aufsuchen. Nun folgt aus (1) nach der bekannten Regel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{6 l E'} (l - a) \left[(2 a l - a^2) - 3 x^2 \right] = 0$$

und daraus:

$$x = \sqrt{\left[\frac{a (2 l - a)}{3} \right]} \; . \; . \quad (c).$$

Da aber $x \overline{\gtrless} a$ seyn mufs, so mufs seyn $\frac{a(2 l - a)}{3} \overline{\gtrless} a^2$ oder $l \overline{\gtrless} 2 a$.

Ist daher $l > 2 a$, d. h. liegt der Punct C näher bei A als bei A', so gibt es in der Curve AMB keine gröfste Ordinate y. Ist dagegen $l = 2 a$ oder $= 2 a - e$, so wird beziehungsweise $x = a$ und $= \sqrt{(a^2 - \frac{2}{3} a e)}$ und dafür, weil der 2te Differenzialquotient negativ ausfällt, die Ordinate y ein Maximum.

Eben so folgt aus der Gleichung (1'):

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Q a}{6 l E'} (l^2 - a^2 - 3 x'^2) = 0$$

und daraus:

$$x' = \sqrt{\left(\frac{l^2 - a^2}{3} \right)} \; . \; . \quad (d)$$

Da nun $x' \gtreqless l - a$ seyn mufs, so mufs $\frac{l^2 - a^2}{3} \gtreqless (l - a)^2$, d i. $l \gtreqless 2a$ seyn, so, dafs wenn $l < 2a$, also $l - a < a$ oder der Punct C näher bei A' als bei A liegt, in der Curve $A'M'B$ keine gröfste Ordinate y' vorhanden ist, was mit der vorigen Bemerkung für y im Einklange steht.

Für $l = 2a$ oder $2a + e$ würde beziehungsweise:

$$x' = a \text{ und } = \sqrt{\left(a^2 + \frac{4ae + e^2}{3}\right)} \text{ und dafür } y' \text{ ein Maximum.}$$

Der tiefste Punct des gebogenen Stabes liegt also immer zwischen dem Aufhängpunct B der Last und demjenigen Stützpunct A', dessen Entfernung vom Aufhängpunct die gröfsere ist.

Ist z. B. $a = 1$ und $l = 3$, so ist die der gröfsten Ordinate y' entsprechende Abscisse (aus Relat. d) $x' = \sqrt{\frac{8}{3}}$ und damit diese Ordinate

selbst $$y'^2_{\text{max.}} = \frac{32}{27} \cdot \frac{16\,Q^2}{81\,E'^2}$$

während nur $$\delta^2 = \frac{16\,Q^2}{81\,E'^2},$$

folglich in der That $y'_{\text{max.}} > \delta$ ist.

Zusatz 2. Für den besondern Fall, in welchem die Last Q in der Mitte hängt, folgt aus den Gleichungen (1), (1′) und (2), wegen $l = 2a$, beziehungsweise:

$$y = \frac{Q}{12\,E'}(3a^2x - x^3)\ ^{*)}$$

$$y' = \frac{Q}{12\,E'}(3a^2x' - x'^3)$$

und $$\delta = \frac{Q\,a^3}{6\,E'};$$

endlich folgt aus der Relation (c) $tang\,\alpha = 0$, also $\alpha = 0$.

Für die gröfste Ordinate ist $x = x' = a$ und damit

$$y_{\text{max.}} = y'_{\text{max.}} = \frac{Q\,a^3}{6\,E'} = \delta.$$

Zusatz 3. Aus den Relationen $E' = \rho p x = \rho p' x'$ (Gleich. m

---

*) Will man in diesem Falle den Halbirungspunct zum Ursprung der rechtw. Coordinaten nehmen, so mufs man in dieser Gleichung $a - x$ statt x setzen, dadurch erhält man die Gleichung:

$$y = \frac{Q}{12\,E'}(2a^3 - 3ax^2 + x^3).$$

in der 32. Aufg.) und $E' = \frac{Q\,a^2\,(l-a)^2}{3\,\delta\,l}$ (obige Gleich. 2) folgt der Krümmungshalbmesser:

für die Curve AMB: $\rho = \frac{a^2\,(l-a)}{3\,\delta\,x}$

und für die Curve $A'M'B$: $\rho' = \frac{a\,(l-a)^2}{3\,\delta\,x'}$

Für $l = 2\,a$ wird $\rho = \frac{a^3}{3\,\delta\,x}$ und $\rho' = \frac{a^3}{3\,\delta\,x'}$.

Für $x = a$ wird ρ am kleinsten und zwar $\rho = \frac{a^2}{3\,\delta}$, dagegen ist für $x = 0$ sofort $\rho = \infty$.

35. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab ADB (Fig. 42) liegt auf zwei Stützen A und B horizontal frei auf, und wird durch ein über seine Länge gleich vertheiltes Gewicht belastet; es soll die dadurch entstehende Curve gefunden werden.

Auflösung.

Es sey die Länge des Stabes, welche bei der stets vorausgesetzten geringen Biegung der Entfernung der beiden Stützen gleich ist, $AB = l$, die auf die Längeneinheit kommende Belastung $= q$, der Neigungswinkel der im Puncte A an die Curve gezogenen Tangente AT mit der Horizontalen $= \alpha$, für einen beliebigen Punct M der gesuchten Curve $AP = x$ und $PM = y$ (wobei wieder PM senkrecht auf AB) so wie der Krümmungshalbmesser in diesem Puncte $= \rho$. Diefs vorausgesetzt, ist der Druck auf jede der beiden Stützen $p = \frac{1}{2}\,q\,l$, so, dafs man die Stützen wegnehmen und dafür in A und B die Kraft p vertical aufwärts anbringen kann. Denkt man sich dabei noch den Punct M befestigt, wodurch (33. Aufgabe) in dem Zustande des Stabes nichts geändert wird, so ist das statische Moment in Beziehung auf M, da auf den Bogen AM das Gewicht $q\,x$ (indem man die Länge des Bogens mit der Abscisse verwechseln darf) gleichförmig vertheilt ist, folglich im Halbirungspuncte von AM die Kraft $q\,x$ abwärts, dagegen im Puncte A die Kraft $p = \frac{1}{2}\,q\,l$ aufwärts wirkt $= -\frac{1}{2}\,x\,.\,q\,x + x\,.\,\frac{1}{2}\,q\,l = -\frac{1}{2}\,q\,x^2 + \frac{1}{2}\,q\,l\,x$. folglich (Aufgabe 32, Relat. n)

$$E'\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\,q\,x^2 - \frac{1}{2}\,q\,l\,x$$

und daraus wieder $E' \frac{dy}{dx} = C + \frac{1}{6} q x^3 - \frac{1}{4} q l x^2$,

oder da für $x = 0$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, folglich die Constante der Integration $C = E'\,tang\,\alpha$ wird, auch

$$E'\,dy = dx\,E'\,tang\,\alpha + \tfrac{1}{6} q x^3 dx - \tfrac{1}{4} q l x^2 dx.$$

Durch weitere Integration dieser Gleichung erhält man:

$$E' y = x E'\,tang\,\alpha + \frac{q}{24} x^4 - \frac{q l}{12} x^3,$$

ohne Constante, wobei sich die noch unbestimmte constante Gröfse $tang\,\alpha$ aus dem Umstande bestimmen läfst, dafs für $x = l$ die Ordinate $y = 0$ werden mufs; diefs gibt:

$$E'\,tang\,\alpha = \frac{q l^3}{24} \;.\;.\; (m)$$

so, dafs wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung substituirt und daraus y bestimmt, sofort die gesuchte Gleichung der Curve die Form erhält:

$$y = \frac{q}{24 E'} (l^3 x - 2 l x^3 - x^4) \;.\;.\; (1)$$

Zusatz. Bezeichnet man wieder die gröfste Ordinate durch δ, so hat man, um diese zu finden, nach der Regel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{24 E'} (l^3 - 6 l x^2 + 4 x^3) = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{24 E'} (-12 l x + 12 x^2);$$

aus der erstern dieser beiden Gleichungen folgt $x = \frac{1}{2} l$, womit der zweite Differenzialquotient negativ wird; es ist daher die durch die Mitte C von AB gezogene Ordinate $CD = \delta$ die gröfste, und zwar ist, wenn man in der Gleichung (1) $x = \frac{1}{2} l$ setzt und reducirt:

$$\delta = \frac{5 q l^4}{384 E'} \;.\;.\; (2)$$

Ferner folgt aus den Relationen (32. Aufgabe, Relat. m) $E' = \rho(-\frac{1}{2} q x^2 + \frac{1}{2} q l x)$ und (vorige Gleich. 2) $E' = \frac{5 q l^4}{384 \delta}$, wenn man diese beiden Ausdrücke einander gleich setzt und ρ bestimmt:

$$\rho = \frac{5 l^4}{192 \delta x (l - x)} \;.\;.\; (3)$$

Für $x = 0$ und $x = l$ wird $\rho = \infty$, so, dafs also der Stab in den Auflagpuncten A und B gar nicht gekrümmt ist; dagegen wird

ρ am kleinsten für $x = \frac{1}{2} l$ und zwar ist dafür $\rho = \frac{5 l^2}{48 \delta}$, so, dafs also der Stab in der Mitte bei D am stärksten gekrümmt ist.

Da die Gleichung der Curve (1) nicht geändert wird, wenn man $l - x$ statt x schreibt, so zeigt dieses an, dafs die Curve AMB durch die aus dem Halbirungspunct C gezogene Verticallinie CD in zwei symmetrische Aeste getheilt wird. Nimmt man daher diesen Halbirungspunct C zum Ursprung der Coordinaten, setzt also $CP = x$, so mufs man in der vorigen Gleichung (1) $\frac{1}{2} l - x$ statt x setzen; dadurch erhält man für die neue Gleichung der Curve:

$$y = \frac{q}{24 E'} \left(\frac{5 l^4}{16} - \frac{3 l^2}{2} x^2 + x^4 \right)$$

oder wenn man die halbe Länge $\frac{1}{2} l = a$ setzt, auch

$$y = \frac{q}{24 E'} (5 a^4 - 6 a^2 x^2 + x^4) \quad . \quad . \quad (1')$$

Ferner wird (Relat. m) $tang\, \alpha = \frac{q a^3}{3 E'}$, (Relat. 2) $\delta = \frac{5 q a^4}{24 E'}$ und (Relat. 3) $\rho = \frac{5 a^4}{12 \delta (a^2 - x^2)}$.

36. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab ADB (Fig. 42) liegt horizontal auf zwei Stützen frei auf und ist sowohl in seiner halben Länge mit dem Gewichte Q als auch durch ein über die ganze Länge gleich vertheiltes Gewicht, welches auf die Längeneinheit $= q$ ist, belastet, es soll die Gleichung der dadurch entstehenden Curve bestimmt werden.

Auflösung.

Setzt man die Entfernung der beiden Stützen $AB = 2a$ und nimmt man den Halbirungspunct C zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, setzt nämlich für irgend einen Punct der Curve $CP = x$ und $PM = y$, so wie den Druck, welchen jede der beiden Stützen erleidet $= p$; so ist für diesen letzteren $p \cdot 2a = Q \cdot a + 2aq \cdot a$ oder

$$p = \tfrac{1}{2} Q + a q \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Ferner ist das stat. Moment in Beziehung auf den Punct M (welchen man sich wieder befestigt, dagegen die Kraft p im Puncte A aufwärts, und jene $AP \cdot q$ in der halben Länge von AM abwärts wirksam denkt) $= p(a - x) - (a - x) q \cdot \frac{(a - x)}{2} = p(a - x) - \frac{1}{2} q (a - x)^2$, folglich (Aufgabe 32, Relat. n):

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -p(a-x) + \tfrac{1}{2} q (a-x)^2.$$

Daraus folgt durch Integrirung

$$E' \frac{dy}{dx} = C - p(ax - \tfrac{1}{2}x^2) + \tfrac{1}{2} q (a^2 x - a x^2 + \tfrac{1}{3} x^3)$$

oder da für $x = 0$ der Quotient $\frac{dy}{dx}$ (als Tangente des Winkels, welchen die im tiefsten Puncte D an die Curve gezogene geometr. Tangente mit der Abscissenachse bildet) $= 0$, also die Constante C ebenfalls $= 0$ wird, auch

$$E' dy = -p(ax - \tfrac{1}{2}x^2)\,dx + \tfrac{1}{2} q (a^2 x - a x^2 + \tfrac{1}{3} x^3)\,dx \quad .. (\beta)$$

woraus ferner

$$E' y = C - p\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \tfrac{1}{2} q \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

oder da für $x = a$, $y = 0$, folglich die Constante der Integration $C = \frac{1}{3} p a^3 - \frac{1}{8} q a^4$ wird, sofort

$$E' y = \tfrac{1}{3} p a^3 - \tfrac{1}{8} q a^4 - p\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \tfrac{1}{2} q \left(\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

oder wegen $p = \frac{1}{2} Q + q a$ (Relat. α) endlich:

$$E' y = \left(\frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}\right) - \left(\frac{Q a}{4} + \frac{q a^2}{4}\right) x^2 + \frac{Q}{12} x^3 + \frac{q}{24} x^4 \quad .. (I)$$

folgt.

Zusatz 1. Wollte man die Lage der im Puncte A gezogenen Tangente AT bestimmen, so dürfte man in der Relation (β) sofort nur $x = a$ und $-\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$ setzen (weil y abnimmt, wenn x zunimmt) und $tang\,\alpha$ daraus bestimmen; diefs würde geben:

$$tang\,\alpha = \frac{3 Q a^2 + 4 q a^3}{12 E'} \quad .. (1)$$

Da für $x = 0$ die Ordinate $y = CD = \delta$ am gröfsten wird, so hat man aus (I) $E' \delta = \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}$ und daraus:

$$\delta = \frac{4 Q a^3 + 5 q a^4}{24 E'} \quad .. (2)$$

Endlich ist (vergl. 32. Aufgabe, Relat. m)

$$E' = \rho\,[p(a-x) - \tfrac{1}{2} q (a-x)^2]$$

folglich, wenn man in diese Gleichung für E' den Werth aus der vorigen Relation (2) und für p den Werth aus (α) setzt und dann ρ bestimmt, die Gröfse des Krümmungshalbmessers im Puncte M:

$$\rho = \frac{a^3}{12\delta(a-x)} \cdot \frac{4Q + 5qa}{Q + q(a+x)} \quad .. (3)$$

Zusatz 2. Setzt man $q = 0$, so gehen die Gleichungen (I), (1), (2) und (3) über in jene:

$$y = \frac{Q}{12 E'}(2a^3 - 3ax^2 + x^3)$$

$$tang\,\alpha = \frac{Q a^2}{4E'}$$

$$\delta = \frac{Q a^3}{6E'}$$

und
$$\rho = \frac{a^3}{3\delta(a - x)}$$

welche Werthe mit jenen in der Aufgabe 34, Zusatz 2, wie es seyn soll, genau übereinstimmen.

Setzt man dagegen $Q = 0$, so gehen die genannten 4 Gleichungen (I), (1), (2) und (3) über in:

$$y = \frac{q}{24 E'}(5a^4 - 6a^2x^2 + x^4)$$

$$tang\,\alpha = \frac{q a^3}{3E'}$$

$$\delta = \frac{5 q a^4}{24 E'}$$

und
$$\rho = \frac{5a^4}{12\delta(a^2 - x^2)}$$

was wieder mit den analogen Ausdrücken der vorigen Aufgabe (Zusatz) gehörig übereinstimmt.

Anmerkung. Will man nicht schon im voraus den mittlern Punct D als den tiefsten der Curve ADB gelten lassen, also bei der Bestimmung der Constante C der ersten Integration den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ nicht schon als bekannt ansehen und wie es oben geschehen dafür $\frac{dy}{dx} = 0$ setzen, d. h. die an diesen Punct D gezogene Tangente als parallel mit AB annehmen; so bilde diese Tangente mit der Abscissenachse AB gegen A hin allgemein den Winkel α, so, daſs in der obigen zweiten Differenzialgleichung (des ersten Grades) für $x = 0$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, daher die Constante $C = E'\,tang\,\alpha$ wird. Mit diesem Werthe erhält man bei dem vorigen Verfahren für den Ast AMD:

$$E'y = -a\,tang\,\alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24} - x\,tang\,\alpha - \left(\frac{Q a}{4} + \frac{q a^2}{4}\right)x^2 + \frac{Q x^3}{12} + \frac{q x^4}{24} \;.\;.\; (A)$$

und für den Ast $A'M'D$, wobei sich nichts ändert, als daſs $tang\,\alpha$ mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist:

$$E'y = a\,tang\,\alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24} + x\,tang\,\alpha - \left(\frac{Q a}{4} + \frac{q a^2}{4}\right) x^2 + \frac{Q x^3}{12} + \frac{q x^4}{24}.$$

Um nun den Werth für $tang\,\alpha$ zu finden, sey für $x = 0$ die Ordinate $y = \delta$, so ist aus diesen beiden Gleichungen:

$$E'\delta = -a\,tang\,\alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}$$

und $$E'\delta = a\,tang\,\alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}$$

daraus durch Subtraction:

$$0 = 2 a\,tang\,\alpha \text{ oder } tang\,\alpha = 0 \ . \ . \quad (r)$$

durch Summirung dagegen entsteht $2 E'\delta = 2\left[\frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}\right]$ und

daraus folgt $$\delta = \frac{4 Q a^3 + 5 q a^4}{24 E'},$$ wie oben.

Aus der Gleichung (A) folgt zur Bestimmung der größten Ordinate, mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (r):

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{Q a}{2} + \frac{q a^2}{2}\right) x + \frac{Q x^2}{4} + \frac{q x^3}{6} = 0$$

und daraus $x = 0$, womit der zweite Quotient $\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{Q a}{2} + \frac{q a^2}{2}\right)$ in der That negativ ausfällt.

37. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab ACA' (Fig. 43) ist in A eingemauert, in C mit dem Gewichte Q belastet und liegt am andern Ende A' auf einer Stütze frei auf; es soll die Curve bestimmt werden, welche der Stab dabei annimmt.

Auflösung.

Es sey $AB = a$, $AA' = l$ und der Druck auf die Stütze in $A' = p$, ferner seyen die rechtwinkeligen Coordinaten irgend eines Punctes M der Curve AMC, $AP = x$, $PM = y$, so wie eines Punctes M' der Curve $A'M'C$, $AP' = x'$ und $P'M' = y'$; so ist das stat. Moment in Beziehung auf den Punct M (wobei man sich nach Aufg. 33, Zusatz, den Punct M befestigt und in A' die Kraft p aufwärts, dagegen in C jene Q abwärts wirkend denken kann) $\mathfrak{M} = p(l - x) - Q(a - x)$, folglich wieder

$$E'\frac{d^2y}{dx^2} = -p(l - x) + Q(a - x)$$ und daraus

$$E'\frac{dy}{dx} = -p\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) \;.\;.\quad (m)$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x=0$ auch $\frac{dy}{dx}=0$ ist, ferner

$$E'y = -p\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Q\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \;.\;.\quad (I)$$

ebenfalls ohne Constante, indem für $x=0$ auch $y=0$ seyn mufs; dabei liegt x innerhalb der Grenzen 0 und a.

Eben so hat man in Beziehung auf den Punct M' der Curve $A'M'C$ das stat. Moment (indem man sich M' befestigt, und im Puncte A' die Kraft p aufwärts wirkend denkt) $\mathfrak{M} = p(l - x')$, folglich

$$E'\frac{d^2y'}{dx'^2} = -p(l - x'), \text{ also } E'\frac{dy'}{dx'} = C - p\left(lx' - \frac{x'^2}{2}\right)$$

oder da für $x'=a$ der Quotient (indem nach Aufgabe 33, die beiden Curven im Puncte C eine gemeinschaftliche Tangente haben) $\frac{dy'}{dx'}$ jenen Werth annimmt, welcher aus der Relation (m) für $\frac{dy}{dx}$ hervorgeht, wenn man $x=a$ setzt, folglich

$$-p\left(la - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{Qa^2}{2} = C - p\left(la - \frac{a^2}{2}\right) \text{ oder } C = \frac{Qa^2}{2}$$

wird, auch: $$E'\frac{dy'}{dx'} = \frac{Qa^2}{2} - p\left(lx' - \frac{x'^2}{2}\right)$$

und daraus weiters:

$$E'y' = \frac{Qa^2}{2}x' - p\left(\frac{lx'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right) + C'.$$

Da ferner y' für $x'=a$ jenen Werth annimmt, welchen y für $x=a$ in (I) erhält, so hat man zur Bestimmung der Constanten C':

$$-p\left(\frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6}\right) + \frac{Qa^3}{3} = \frac{Qa^3}{2} - p\left(\frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6}\right) + C'$$

und daraus $$C' = -\frac{Qa^3}{6},$$

folglich, wenn man diesen Werth substituirt, auch:

$$E'y' = -\frac{Qa^3}{6} + \frac{Qa^2}{2}x' - p\left(\frac{lx'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right) \;.\;.\quad (II)$$

wobei x' von a bis l genommen werden kann.

Um endlich noch die unbestimmte Gröfse p zu bestimmen, benütze man die Bedingung, dafs für $x=l$ die Ordinate $y=0$ seyn mufs, so erhält man:

$$p = \frac{a^2(3l - a)}{2l^3}Q \;.\;.\quad (n)$$

welcher Werth noch in die Gleichungen (I) und (II) der Curven AMC und $A'M'C$ gesetzt werden kann.

Zusatz 1. Zur Bestimmung der gröfsten Ordinate oder des tiefsten Punctes des gebogenen Stabes hat man zuerst aus der Gleichung (I):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + Q\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

und daraus, nachdem man mit x abgekürzt (oder die Wurzel $x = 0$ beseitigt) hat:

$$x = 2 \cdot \frac{Qa - pl}{Q - p} \quad . \, . \quad (1)$$

setzt man in dieser Gleichung $l = a + a'$ und für p den Werth aus (n), so zeigt sich, dafs nur dann, wie es die Natur der Sache erfordert, $x \overline{\gtrless} a$ seyn kann, wenn $a' \overline{\gtrless} \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist. Da der zweite Quotient $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -Qa(2a^2 + aa' + 2a'^2)$ dabei negativ wird, so findet unter dieser Bedingung wirklich ein Maximum von y Statt.

Es folgt ferner aus der Gleichung (II):

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'} = \frac{Qa^2}{2} - p\left(lx' - \frac{x'^2}{2}\right) = 0$$

und daraus, wenn man wieder für p den Werth aus der Relat. (n) setzt:

$$x' = \left[1 - \sqrt{\left(\frac{l-a}{3l-a}\right)}\right] l \quad . \, . \quad (2)$$

Da aber für diese Curve $A'M'C$ $x' \overline{\gtrless} a$ seyn mufs, so folgt, dafs wenn man in diesem Ausdrucke von x' die Gröfse $l = a + a'$ setzt, diese Bedingung nur erfüllt wird, wenn $a' \overline{\gtrless} \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist.

Auch wird in der That dafür der zweite Differenzialquotient $\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}x'^2} = -p(l - x')$ negativ, also die Ordinate y' ein Maximum.

Diese Untersuchung zeigt also, dafs in dem Aste oder in der Curve AMC für y ein Maximum und zwar für $x = 2 \cdot \frac{Qa - pl}{Q - p}$ Statt findet, wenn $l = a + a'$ gesetzt, $a' \overline{\gtrless} \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist. Ferner dafs in dem Aste oder in der Curve $A'M'C$ eine gröfste Ordinate y' existirt und zwar für $x' = \left[1 - \sqrt{\left(\frac{l-a}{3l-a}\right)}\right] l$, wenn $l = a + a'$ gesetzt, $a' \overline{\gtrless} \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist.

Für $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ wird in beiden Fällen $x = x' = a$, so, dafs dann der Aufhängpunct C zugleich auch der tiefste Punct ist.

Findet also das Maximum in der ersten Curve Statt, so kann kein solches in der zweiten Curve bestehen, und umgekehrt, nur für $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ fallen beide gröfsten Ordinaten im Aufhängpunct C zusammen.

Zusatz 2. Für $a' = a$ oder $l = 2a$ wird $p = \frac{5}{16} Q$ und aus der Relation (2): $x = \frac{12}{11} a$, es liegt also, da dieser Werth $x > a$ ist, kein Maximum von y in der Curve AMC.

Dagegen wird für den zweiten Ast $A'M'C$ aus der Gleich. (2):

$$x' = 2a\left(1 - \sqrt{\tfrac{1}{5}}\right)$$

und da dieser Werth von x' zwischen a und $2a$ liegt (indem $x' > a$ und $< 2a$ ist), so findet in diesem Aste eine gröfste Ordinate y' Statt und zwar ist

$$y'_{\text{max.}} = \frac{Q a^3}{6 E'} \sqrt{\tfrac{1}{5}}$$

Die beiden Gleichungen (*I*) und (*II*) der Curventheile AMC und $A'M'C$ gehen über in jene:

$$E' y = Q\left(\frac{3a}{16} x^2 - \frac{11}{96} x^3\right)$$

und

$$E' y' = Q\left(-\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} x' - \frac{5a}{16} x'^2 + \frac{5}{96} x'^3\right)$$

Zusatz 3. Setzt man wieder den Pfeil oder die Ordinate des Aufhängpunctes $BC = \delta$, so erhält man sowohl aus der Relation (*I*) als aus jener (*II*) für $x = a$ sofort $y = y' = \delta$ und zwar:

$$\delta = \frac{Q a^3}{12 l^3 E'} \left[4 l^3 - a(3l - a)^2\right] \;.\;. \quad (3)$$

Für $l = a + \frac{a}{\sqrt{2}}$ wird $\delta = \frac{Q a^3}{12 E'} (2 - \sqrt{2})$ welcher Werth in der That, wie es seyn soll, mit der gröfsten Ordinate y in (*I*) oder y' in (*II*), welche für $x = x' = a$ entsteht, übereinstimmt.

Anmerkung. Für $l = 2a$ ist nach Zusatz 2 die gröfste Ordinate in dem Aste $A'M'C$ und zwar ist $y'_{\text{max.}} = \frac{Q a^3}{6\sqrt{5}.E'}$, oder nahe $= \frac{Q a^3}{13{\cdot}4\, E'}$, während die Ordinate des Aufhängpunctes $\delta = \frac{7 Q a^3}{96 E'}$, oder nahe $= \frac{Q a^3}{13\,7\, E'}$, also in der That $y'_{\text{max.}} > \delta$ ist.

38. Aufgabe.

Der elastische, gewichtlose Stab BAB' (Fig. 44) liegt horizontal auf 3 Stützen A, B, B', von denen sich jene A in der Mitte zwischen den beiden andern B, B' befindet, frei auf; wenn nun jede Hälfte des Stabes in der Mitte C und C' mit den Gewichten Q und Q' belastet ist, so soll der auf jede der 3 Stützen entfallende Druck und zugleich die Biegung bestimmt werden, welche der Stab dadurch erleidet.

Auflösung.

Es sey $AB = AB' = a$, der Druck auf den Punct A gleich p und auf die Puncte B und B' beziehungsweise q und q', so wie der Winkel, welchen die im Puncte A an die Curve gezogene Tangente mit der zur Abscissenachse genommenen Geraden BB' bildet $= \alpha$; so hat man zuerst:

$$p + q + q' = Q + Q' \;.\;.\quad (1)$$

ferner, wenn man sich die Pressungen p, q, q' als Kräfte vorstellt, welche den in den Puncten A, B, B' nach aufwärts wirkenden Kräften p, q, q' gleich und entgegengesetzt sind, nach statischen Gesetzen (wenn man B als Drehungspunct ansieht):

$$2\,a\,q' + p\,a = Q \cdot \tfrac{1}{2}\,a + Q' \cdot \tfrac{3}{2}\,a$$

und (B' als Drehungspunct):

$$2\,a\,q + p\,a = Q \cdot \tfrac{3}{2}\,a + Q' \cdot \tfrac{1}{2}\,a$$

folglich

$$2\,(q - q') = Q - Q' \;.\;.\quad (2)$$

Setzt man für die rechtw. Coordinaten eines Punctes M der Curve ACB, $AP = x$, $PM = y$ und denkt sich von dem Theile BCM der Curve den Punct M befestigt, dagegen in C und B die Kräfte Q und q ab- und aufwärts angebracht; so ist das stat. Moment in Beziehung auf diesen Punct $= q\,(a - x) - Q\left(\frac{a}{2} - x\right)$, folglich (genau so wie bei den vorhergehenden Aufgaben):

$$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = Q\left(\frac{a}{2} - x\right) - q\,(a - x)$$

und daraus

$$E' \frac{dy}{dx} = Q\left(\frac{a\,x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) - q\left(a\,x - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

oder da für $x = 0$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$ seyn soll, mithin die Constante $C = E'\,tang\,\alpha$ wird, auch:

$$E' \frac{dy}{dx} = Q\left(\frac{a\,x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) - q\left(a\,x - \frac{x^2}{2}\right) + E'\,tang\,\alpha \;.\;.\quad (\alpha)$$

woraus durch abermaliges Integriren, sofort

$$E'\,y = Q\left(\frac{a\,x^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) - q\left(\frac{a\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x\,E'\,tang\,\alpha \;.\;.\quad (I)$$

folgt, wozu keine Constante kömmt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn muſs.

Diese Gleichung bezieht sich auf alle Puncte der Hälfte AMC, so, dafs darin x nur von 0 bis $\frac{a}{2}$ genommen werden darf.

Auf die zweite Hälfte BC der Curve ACB übergehend, sey für irgend einen Punct M', $AP' = x'$ und $P'M' = y'$, so, dafs hier x' nur von $\frac{a}{2}$ bis a genommen werden darf; so ist (wenn man sich den Punct M' befestigt, dagegen im Puncte B die Kraft p aufwärts wirkend denkt) das stat. Moment in Beziehung auf den Punct $M' = q(a - x')$

folglich wieder $$E' \frac{d^2 y'}{dx'^2} = - q(a - x')$$

und daraus:

$$E' \frac{dy'}{dx'} = C - q\left(a x' - \frac{x'^2}{2}\right).$$

Um die Constante C zu bestimmen, bemerke man, dafs die beiden Hälften AC und BC der Curve ACB in C eine gemeinschaftliche Tangente haben müssen, dafs also der vorige Quotient $\frac{dy}{dx'}$ für $x' = \frac{a}{2}$ denselben Werth, wie der obige Quotient $\frac{dy}{dx}$ in (α) für $x = \frac{a}{2}$ erhalten mufs; diefs gibt die Bedingungsgleichung:

$$\tfrac{1}{8} Q a^2 - \tfrac{3}{8} q a^2 + E' \, tang\, \alpha = - \tfrac{3}{8} q a^2 + C$$

woraus $C = \frac{1}{8} Q a^2 + E' \, tang\, \alpha$ folgt, so, dafs wenn man diesen Werth substituirt, sofort

$$E' \frac{dy'}{dx'} = \tfrac{1}{8} Q a^2 + E' \, tang\, \alpha - q\left(a x' - \frac{x'^2}{2}\right)$$

und daraus durch abermaliges Integriren

$$E' y' = C' + \tfrac{1}{8} Q a^2 x' + x' E' \, tang\, \alpha - q\left(\frac{a x'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right)$$

folgt. Zur Bestimmung der Constanten C' bemerke man, dafs y' für $x' = \frac{a}{2}$ denselben Werth wie y für $x = \frac{a}{2}$ in der vorigen Gleichung (I) annehmen mufs; stellt man daher wieder wie vorhin die dieser Bemerkung entsprechende Bedingungsgleichung auf und bestimmt daraus C', so erhält man $$C' = - \tfrac{1}{48} Q a^3$$

und damit aus der vorigen Relation die Gleichung der Curvenhälfte $BM'C$:

$$E' y' = \frac{Q a^2}{8} x' + x' E' \, tang\, \alpha - q\left(\frac{a x'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right) - \frac{Q a^3}{48}. \quad (II)$$

Aus diesen Gleichungen (I) und (II), welche den Curventheilen AMC und $BM'C$ der Hälfte ACB entsprechen, erhält man jene für die Curventheile AC' und $B'C'$ der Hälfte $AC'B'$, ganz einfach, indem man in diese Gleichungen Q' statt Q und q' statt q setzt und $tang\,\alpha$ mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt; man erhält dadurch:

$$E'y = Q'\left(\frac{a x^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) - q'\left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - x E' \,tang\,\alpha \quad (I')$$

und $$E'y' = \frac{Q'a^2}{8} x' - x' E' \,tang\,\alpha - q'\left(\frac{a x'^2}{2} - \frac{x'^3}{6}\right) - \frac{Q'a^3}{48} \quad (II')$$

dabei ist in der erstern Gleichung x von 0 bis $\frac{a}{2}$ und in der letztern x' von $\frac{a}{2}$ bis a zu nehmen.

Setzt man in (II) und (II') $x' = a$, so wird $y' = 0$, folglich, wenn man gehörig reducirt und mit a abkürzt:

$$0 = E' \,tang\,\alpha + \tfrac{5}{48} Q a^2 - \tfrac{1}{3} q a^2 \quad (3)$$

und $$0 = -E' \,tang\,\alpha + \tfrac{5}{48} Q' a^2 - \tfrac{1}{3} q' a^2 \quad (4)$$

so, daſs sich aus den vier Gleichungen (1), (2), (3), (4), die noch unbestimmten Gröſsen α, p, q, q' bestimmen lassen. Man erhält nämlich durch die Subtraction von (3) — (4):

$$0 = 2 E' \,tang\,\alpha + \tfrac{5}{48} a^2 (Q - Q') - \tfrac{1}{3} a^2 (q - q')$$

oder, wenn man für $q - q'$ den aus (2) folgenden Werth substituirt und $tang\,\alpha$ bestimmt:

$$tang\,\alpha = \frac{a^2 (Q - Q')}{32 E'} \quad (III)$$

Mit diesem Werthe von $tang\,\alpha$ folgt ferner aus (3):

$$q = \frac{13\,Q - 3\,Q'}{32} \quad (IV)$$

und eben so aus (4):

$$q' = \frac{13\,Q' - 3\,Q}{32} \quad (V)$$

und damit aus (1):

$$p = \frac{22\,(Q + Q')}{32} \quad (VI)$$

Anmerkung. Wie man sieht, so trägt die mittlere Stütze A um $\frac{1}{16}$ der ganzen Last $Q + Q'$ mehr als das Doppelte von dem, was die beiden Stützen B und B' zusammen tragen, oder mit andern Worten, diese Stütze trägt etwas weniges (und zwar um $\frac{1}{48}$) mehr als $\frac{2}{3}$ der ganzen Last.

Auch sieht man, daſs die Pressungen auf die Stützen von der Gröſse E' unabhängig sind, folglich dieselben bleiben, der Stab mag viel oder wenig biegsam seyn. Aus diesem Grunde fällt auch die bei der Vertheilung des Druckes einer in 3 Puncten unterstützten geraden steifen Linie bestehende Unbestimmtheit, wie sie in der 4. Aufgabe vorkömmt, sogleich hinweg, wenn man dieser Linie auch nur die allergeringste Biegsamkeit zugesteht.

Zusatz. Für den besondern Fall, dafs $Q' = Q$ wird, erhält man aus den vorigen Relationen:

$$p = \tfrac{22}{16} Q, \; q = q' = \tfrac{5}{16} Q \text{ und } tang\, \alpha = 0$$

so, dafs also die Abscissenachse BAB' zugleich eine Tangente an die Curve im Puncte A bildet. Die Gleichungen (I) und (II) oder (I') und (II') gehen dabei in die Gleichungen über:

$$E' y = \frac{Q}{96}(9\,a\,x^2 - 11\,x^3)$$

und $$E' y' = \frac{Q}{96}(-2\,a^3 + 12\,a^2\,x' - 15\,a\,x'^2 + 5\,x'^3)$$

wovon die erstere den Curvenhälften AC und AC' und die letztere jenen BC und $B'C'$ entspricht.

Für $x = \frac{a}{2}$ gibt die erstere, und für $x' = \frac{a}{2}$ die letztere denselben Werth: $$\delta = y = y' = \frac{7\,Q\,a^3}{768\,E'}.$$

Für $x = 0$ gibt die erstere, und für $x' = a$ die letztere $y = y' = 0$, Alles wie es seyn soll.

Zur Bestimmung der gröfsten Ordinate folgt aus der ersten dieser beiden Gleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{96\,E'}(18\,a\,x - 33\,x^2) = 0$ und daraus $x = 0$ für ein Minimum und $x = \frac{18}{33} a$, welcher Werth gröfser als $\frac{a}{2}$, folglich für diese Curvenhälfte AC unbrauchbar ist. Aus der zweiten Gleichung dagegen erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{96\,E'}(12\,a^2 - 30\,a\,x + 15\,x^2) = 0$ und daraus $x' = a \pm a\sqrt{\tfrac{1}{5}}$, wovon, da x' nicht gröfser als a seyn darf, nur der zweite Werth $x' = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, welcher, wie es für den Curventheil BC seyn soll, gröfser als $\frac{a}{2}$ und kleiner als a ist, in der That einem Maximum von y' entspricht, indem dafür der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2} = A(-30\,a + 30\,x)$ negativ ausfällt, und zwar ist dafür

$$y'_{\text{max.}} = \frac{Q\,a^3}{48\sqrt{5}.\,E'} \text{ oder nahe } = \frac{Q\,a^3}{107\,E'}$$

während der obige Werth für die Ordinate des Aufhängpunctes C nahe den Werth $\delta = \frac{Q\,a^3}{109{\cdot}7\,E'}$ gibt, dieser also jedenfalls etwas kleiner als der vorige Werth von y' ist.

Was endlich den Krümmungshalbmesser betrifft, so läfst sich dieser für jeden der beiden Curventheile AC und BC wieder eben so, wie bei den vorhergehenden Aufgaben ohne Schwierigkeit bestimmen.

Anmerkung. Setzt man hier (in diesem Zusatz) überall $2a$ statt a, so erhält man genau dieselben Gleichungen und Werthe wie im Zusatz 2, der vorigen Aufgabe. Jede Hälfte des Stabes ACB und ACB' ist also hier genau in derselben Lage, als ob dieselbe in A eingemauert wäre und beziehungsweise in B und B' frei aufläge.

39. Aufgabe.

Die vorige Aufgabe mit Rücksicht auf das eigene Gewicht des elastischen Stabes oder Balkens aufzulösen.

Auflösung.

Behält man durchaus dieselbe Bezeichnung wie in der vorigen Aufgabe bei und setzt das Gewicht der Längeneinheit des Stabes (oder wenn dieser gewichtlos betrachtet wird, die noch außer der Belastung Q auf die Längeneinheit kommende gleichförmige Belastung) $= g$; so muſs man jetzt für das erstere, auf den Punct M bezogene stat. Moment der vorigen Aufgabe

$$\mathfrak{M} = q(a - x) - Q\left(\frac{a}{2} - x\right) - \tfrac{1}{2} g (a - x)^2$$

und daher $$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = Q\left(\frac{a}{2} - x\right) + \tfrac{1}{2} g (a - x)^2 - q(a - x)$$

setzen (also hier noch das Glied $g(a - x) . \frac{1}{2}(a - x)$ hinzufügen, woraus man, genau wie früher verfahren, nach und nach

$$E' \frac{dy}{dx} = Q\left(\frac{a}{2} x - \frac{x^2}{2}\right) + \tfrac{1}{2} g \left(a^2 x - a x^2 + \frac{x^3}{3}\right) - q\left(a x - \frac{x^2}{2}\right) + E' \tang \alpha$$

und

$$E' y = Q\left(\frac{a}{4} x^2 - \frac{x^3}{6}\right) + \tfrac{1}{2} g \left(\frac{a^2}{2} x^2 - \frac{a}{3} x^3 + \frac{x^4}{12}\right) - q\left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + x E' \tang \alpha \quad (I)$$

erhält.

Für die Hälfte BC ist jetzt das stat. Moment $= q(a - x) - \frac{1}{2} g (a - x)^2$ folglich

$$E' \frac{d^2 y'}{dx'^2} = \tfrac{1}{2} g (a - x')^2 - q(a - x')$$

und daraus (da die Constante $C = \frac{Q a^2}{8} + E' \tang \alpha$ wird):

$$E'\frac{dy'}{dx'}=\tfrac{1}{2}g\left(a^2x'-ax'^2+\frac{x'^3}{3}\right)-q\left(ax'-\frac{x'^2}{2}\right)+\frac{Qa^2}{8}+E'\,tang\,\alpha$$

und

$$E'y'=\tfrac{1}{2}g\left(\frac{a^2x'^2}{2}-\frac{ax'^3}{3}+\frac{x'^4}{12}\right)-q\left(\frac{ax'^2}{2}-\frac{x'^3}{6}\right)+$$
$$\frac{Qa^2}{8}x'+x'E'\,tang\,\alpha-\frac{Qa^3}{48}\qquad(II)$$

die den 4 Gleichungen (1), (2), (3), (4) der vorigen Aufgabe analogen Gleichungen sind hier:

$$p+q+q'=Q+Q'+2ag\quad(1)$$
$$2(q-q')=Q-Q'\quad(2)$$

ferner, wenn man in (II) und (II') (welche letztere Gleich. aus jener (II) entsteht, wenn man wieder Q' und q' statt Q und q schreibt und $tang\,\alpha$ negativ nimmt) $x'=a$ setzt, wofür $y'=0$ wird:

$$0=\tfrac{1}{8}ga^4-\tfrac{1}{3}qa^3+\tfrac{5}{48}Qa^3+aE'\,tang\,\alpha\quad(3)$$

und $$0=\tfrac{1}{8}ga^4-\tfrac{1}{3}q'a^3+\tfrac{5}{48}Q'a^3-aE'\,tang\,\alpha\quad(4)$$

Aus diesen Gleichungen folgt ganz einfach, wie in der vorigen Aufgabe:

$$tang\,\alpha=\frac{a^2(Q-Q')}{32E'}$$

dagegen $$q=\frac{13Q-3Q'+12ag}{32}$$

$$q'=\frac{13Q'-3Q+12ag}{32}$$

und $$p=\frac{22(Q+Q')+40ag}{32}$$

Endlich erhält man für die Ordinate des Aufhangpunctes (für $x=\frac{a}{2}$ aus (I) oder $x'=\frac{a}{2}$ aus (II):

$$\delta=\frac{7Qa^3}{768E'}+\frac{ga^4}{12E'},$$

welche Ausdrücke sämmtlich, wie es seyn soll, für $g=0$ in die correspondirenden der vorigen Aufgabe übergehen.

40. Aufgabe.

Wenn zwei materielle Kugeln aus homogenen Schichten oder Schalen gebildet sind, deren sämmtliche Puncte sich im geraden Verhältniſs ihrer Massen und im umgekehrten Verhältniſs des Quadrates ihrer Entfernung anziehen, die Resultante der Kräfte zu finden, welche jede Kugel auf die andere ausübt.

Auflösung.

I. Betrachtet man zuerst die Anziehung einer homogenen Kugelschale, deren Mittelpunct C (Fig. 45) ist, gegen einen materiellen Punct O, welcher aufserhalb der Schale liegt; so sey r der Halbmesser der Schale und δ ihre unendlich kleine Dicke, folglich $V = 4\,r^2\,\pi\,\delta$ ihr Volumen; ferner bezeichne p die anziehende Kraft, welche zwei materielle Puncte in dem Abstande $= 1$ gegen einander ausüben, wenn jeder Punct die Masse $= 1$ besitzt, m sey die Masse des materiellen Punctes in O und m' die Masse der Volumeneinheit der Kugelschale, folglich $M = 4\,r^2\,\pi\,\delta\,m'$ jene der Schale selbst; ferner sey $CO = a$ der Abstand des materiellen Punctes O vom Mittelpunct C und für irgend eine unendlich kleine, im Puncte M liegende Oberfläche ω der Kugelschale, der Abstand $MO = z$, folglich, da das Volumen dieses Elementes der Schale $= \omega\,\delta$ und dessen Masse $= \omega\,\delta\,m'$ ist, die Anziehungskraft gegen den Punct O, nach dem angenommenen Gesetze:

$$p' = \frac{\omega\,\delta\,m\,m'}{z^2}\,p \qquad (\alpha)$$

Denkt man sich die Kugelschale durch zwei Ebenen MM' und mm' geschnitten, welche auf der Geraden CO perpendikulär stehen und einander unendlich nahe liegen, so, dafs für $OP = x$ $Op = x + dx$ ist; so hat die Resultirende aus allen ähnlichen Kräften wie p' in (α) der dadurch abgeschnittenen unendlich schmalen Zone, die Richtung OC und als Gröfse oder Intensität die Summe aus den Projectionen der sämmtlichen elementaren Kräfte p' auf die Achse OC*).

Nun ist die Projection der Kraft p', welche in M wirkt, auf die Achse CO offenbar $\frac{x}{z}\,p' = \omega\,\delta\,m\,m'\,p\,\frac{x}{z^3}$ (Relat. α), folglich gibt die

---

*) Nimmt man nämlich in Nr. 15 die Richtung der Resultante $\mathfrak{R}$ für die Achse der x, so wird in der dortigen Relation $a = 0$, $b = c = 90^\circ$ und daher

$$\mathfrak{R} = \Sigma\,(P\,Cos\,\alpha),\quad \Sigma\,(P\,Cos\,\beta) = 0 \text{ und } \Sigma\,(P\,Cos\,\gamma) = 0.$$

Von diesen Relationen sagt die erstere aus, dafs die Gröfse der Resultante mehrerer auf einen Punct wirkenden Kräfte gleich ist der algebr. Summe aus den Projectionen dieser Seitenkräfte auf die Richtung der Resultante, so wie jede der beiden letztern, dafs die algebr. Summe aus den Projectionen dieser Seitenkräfte auf eine zur Resultirenden perpendikulären Achse gleich Null ist.

Summe aus allen ähnlichen Werthen, welche den auf der genannten unendlich schmalen Zone liegenden Elementen ω entsprechen, die Gesammtanziehung dieser schmalen Zone auf den materiellen Punct O. Setzt man daher, da alle auf dieser Zone liegenden Elemente ω dasselbe x und z haben, für die Summe dieser Elemente den Sector selbst, d. i. $2r\pi\, dx$, so ist die eben genannte Anziehung der materiellen Zone $MM'm'm$ gegen den materiellen Punct O und umgekehrt des Punctes O gegen die Zone, sofort:

$$dP = 2r\pi\delta m'mp\frac{x\,dx}{z^3} = \frac{M}{2r}mp\frac{x\,dx}{z^3}.$$

Da aber $z^2 = x^2 + MP^2 = x^2 + r^2 - (a-x)^2 = r^2 - a^2 + 2ax$, folglich

$$x = \frac{z^2 + a^2 - r^2}{2a} \text{ und } dx = \frac{2z\,dz}{2a}$$

ist, so folgt auch nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$dP = \frac{Mmp}{4a^2r}\left[dz + (a^2 - r^2)\frac{dz}{z^2}\right]$$

Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man für den allgemeinen Fall:

$$P = \frac{Mmp}{4a^2r}\left[z - \frac{(a^2 - r^2)}{z}\right] + C$$

Liegt nun

a) der Punct O, wie oben angenommen worden, aufserhalb der Kugelschale, so mufs dieses Integral innerhalb der Grenzen von $z = a - r$ bis $z = a + r$ genommen werden; dadurch erhält man:

$$P = \frac{Mmp}{4a^2r}\left[a + r - \frac{a^2 - r^2}{a + r} - (a - r) + \frac{a^2 - r^2}{a - r}\right]$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$P = \frac{Mm}{a^2}p \quad (1)$$

Liegt aber

b) der Punct O (Fig. 46) innerhalb der Kugelschale, so mufs das vorige Integral zwischen den Grenzen von $z = r - a$ bis $z = r + a$ genommen werden, wodurch man aber

$$P = \frac{Mmp}{4a^2r}\left[r + a + \frac{r^2 - a^2}{r + a} - (r - a) - \frac{r^2 - a^2}{r - a}\right]$$

oder nach gehöriger Reduction

$$P = 0 \quad (2) \text{ erhält.}$$

Aus der Relation (1) folgt, dafs die anziehende Kraft, welche die Kugelschale von der Masse $= M$ auf den äufsern Punct O von der Masse $= m$ (und umgekehrt m gegen M) ausübt, genau dieselbe ist, als wenn die gesammte Materie der Kugelschale in ihrem Mittelpunct vereinigt wäre.

Dagegen zeigt die Relation (2), dafs die Anziehungskraft, welche die Kugelschale gegen einen innerhalb liegenden Punct ausübt, Null ist.

II. Da nun das eben Bewiesene von jeder mit dieser concentrischen Kugelschale gilt, so folgt, dafs ein aus homogenen concentrischen Kugelschalen zusammengesetzter Körper, dessen sämmtliche Puncte einen aufserhalb liegenden materiellen Punct nach dem umgekehrten quadratischen Verhältnifs der Entfernung anziehen, dieselbe Wirkung auf diesen Punct, so wie auch umgekehrt dieser Punct auf den Körper ausübt, als wenn die ganze Materie dieses Körpers in seinem Mittelpuncte vereinigt wäre.

Weiters folgt, dafs sich bei demselben Anziehungsgesetze die Wirkung eines aus homogenen Kugelschalen gebildeten Körpers gegen einen in seinem innern befindlichen Punct auf die Wirkung jener Materie beschränkt, welche von der durch diesen Punct gehenden Kugelfläche eingeschlossen wird, gegen welche nämlich dieser Punct als ein äufserer erscheint, während die Wirkung der ihn einschliefsenden concentrischen Schichten Null ist.

Anmerkung. Wäre demnach unsere Erde genau kugelförmig und homogen, so würde ihre Anziehung auf einen Punct im innern derselben dem Abstande dieses Punctes vom Mittelpuncte der Erde direct proportional seyn, während ihre Anziehung auf einen aufserhalb oder über ihrer Oberfläche liegenden Punct dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional wäre. Denn man müfste nach dem letztern Satze für einen innern Punct O (Fig. 46) die Masse M der anziehenden Kugel dem Cubus des Halbmessers $CO = a$ proportional, also in der obigen Formel (1) $M = \mu a^3 M'$ setzen, wodurch $P = \mu M' m . a$ wird, während für äufsere Puncte die Masse $M (= \frac{4}{3} \pi r^3)$ constant, also auch die Formel (1) ungeändert bleibt.

III. Liegen endlich die Mittelpuncte C, C' zweier aus homogenen concentrischen Schichten bestehenden Kugeln von den Massen M und M' um die Entfernung a auseinander, so ist die Wirkung der ersten Kugel C auf jeden materiellen Punct der zweiten Kugel C' eben so, als wenn die Masse M der ersten Kugel in ihrem Mittelpuncte vereinigt wäre; ihre Wirkung ist daher auf die Gesammtmasse der zweiten Kugel die nämliche, als wenn im Puncte C die Masse M befindlich wäre, welche ihre Wirkung auf diese zweite Kugel C' ausübte. Die Resultante dieser Wirkung ist aber

$$W = \frac{MM'}{a^2} p$$

gerade so, als wenn auch die Masse M' der zweiten Kugel in ihrem Mittelpuncte C' vereinigt wäre; hieraus folgt der Satz, dafs die Resultirende der Kräfte, welche jede Kugel auf die andere ausübt, genau die nämliche ist, wie wenn die gesammte Masse oder Materie jeder Kugel in ihrem Schwer- oder Mittelpuncte vereinigt wäre.