

# Anhang

von

**Aufgaben** sammt ihren **Auflösungen**,

aus dem Gebiete der

**Statik, Dynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik  
und Aërostatik.**

---



## A) Aus der Statik.

### 1. Aufgabe.

Es sey  $AB$  (Fig. 1 und Fig. 2) eine steife gerade Linie, welche sich der Länge nach nicht verschieben läßt, wohl aber um jeden der beiden Punkte  $A$  und  $B$  frei drehen kann; wenn nun im Punkte  $C$  eine Kraft  $P$  normal auf  $AB$  wirkt, so soll der Druck bestimmt werden, welchen diese beiden Punkte  $A$  und  $B$  zu erleiden haben.

### Auflösung.

Es sey  $x$  der gesuchte Druck auf den Punkt  $A$  und  $y$  jener auf den Punkt  $B$ , so ist, wenn der Angriffspunct  $C$  der Kraft, wie in Fig. 1, zwischen den beiden Auflagrpuncten  $A$  und  $B$  liegt und man  $AB$  als einen um  $B$  drehbaren Hebel ansieht, die in  $A$  für das Gleichgewicht nöthige, nach aufwärts wirkende Kraft  $p$  aus der Relation (§. 73)  $p \cdot AB = P \cdot BC$  zu bestimmen und da zugleich  $x = p$  ist, so hat man

$$x = \frac{BC}{AB} \cdot P$$

Eben so erhält man, wenn man  $AB$  als einen um  $A$  drehbaren Hebel ansieht,

$$y = \frac{AC}{AB} \cdot P$$

Liegt dagegen der Angriffspunct  $C$  der Kraft  $P$ , wie in Fig. 2, in der Verlängerung von  $AB$ , so nehme man  $B$  für den Drehungspunct des Hebels  $AC$  und setze die in  $A$  für das Gleichgewicht nöthige Kraft  $= p$ ; so ist  $p \cdot AB = P \cdot BC$  und wegen  $x = -p$  sofort

$$x = -\frac{BC}{AB} \cdot P$$

d. h. der Druck findet nicht, wie im vorigen Falle in der Richtung der Kraft  $P$  oder nach abwärts, sondern nach aufwärts Statt.

Ferner ist der Druck in  $B$ , als Stützpunkt des doppelarmigen Hebels  $AC$ , sofort:

$$y = P + p = P + \frac{BC}{AB} \cdot p \quad \text{d. i.}$$

$$y = \frac{AC}{AB} \cdot P$$

also dessen Richtung nach abwärts.

Anmerkung. Wie man sieht, darf man in der Auflösung des erstern Falles nur, wegen der entgegengesetzten Lage von  $BC$ ,  $BC$  negativ oder mit entgegengesetztem Zeichen nehmen, um die Auflösung für den zweiten Fall zu erhalten. Es ist nämlich für beide Fälle

$$x = \pm \frac{BC}{AB} \cdot P \quad \text{und} \quad y = \frac{AC}{AB} \cdot P$$

wobei von den doppelten Zeichen für den Fall 1 (Fig. 1) das obere, und für jenen 2 (Fig. 2) das untere gilt.

Fällt der Punct  $C$  auf jenen  $B$ , so ist wegen  $BC = 0$  und  $AC = AB$ , sofort in beiden Fällen:

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = P,$$

wie es seyn soll.

## 2. Aufgabe.

Auf die in den beiden Puncten  $A$ ,  $B$  (Fig. 3) frei aufliegende gerade Linie  $AB$  und ihren Verlängerungen, wirken in den Puncten  $M$ ,  $M'$ ,  $M'' \dots$  normal die Kräfte  $P$ ,  $P'$ ,  $P'' \dots$ ; es soll wieder der Druck auf diese beiden Puncte  $A$  und  $B$  gefunden werden.

### Auflösung.

Sieht man zuerst  $B$  und dann  $A$  als Drehungspunct des Hebels an, und bezeichnet die beziehungsweise in  $A$  und  $B$  nöthigen Kräfte zur Herstellung des Gleichgewichtes mit  $p$  und  $q$ ; so hat man auf den Drehungspunct  $B$  bezogen (§. 32):

$$p \cdot AB + P'' \cdot BM'' + P''' \cdot BM''' = P \cdot BM + P' \cdot BM'$$

und auf den Punct  $A$  bezogen:

$$q \cdot AB + P \cdot AM = P' \cdot AM' + P'' \cdot AM'' + P''' \cdot AM'''$$

Aus diesen beiden Relationen folgt, wenn man den Druck auf den Punct  $A$  wieder durch  $x$  und jenen auf den Punct  $B$  durch  $y$  bezeichnet, wegen  $x = p$  und  $y = q$  sofort:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{P \cdot BM + P' \cdot BM' - P'' \cdot BM'' - P''' \cdot BM'''}{AB} \\ y &= \frac{P' \cdot AM' + P'' \cdot AM'' + P''' \cdot AM''' - P \cdot AM}{A} \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Durch Summirung dieser beiden Gleichungen folgt, wie es seyn soll:

$$x + y = P + P' + P''.$$

**Zusatz 1.** Wirken eine oder mehrere dieser Kräfte nach entgegengesetzter Richtung, hier also aufwärts, so darf man diese Kräfte nur mit entgegengesetzten Zeichen in die vorigen Formeln einsetzen.

**Zusatz 2.** Wirken die Kräfte nicht normal, sondern unter ganz beliebigen Winkeln gegen die Achse oder Gerade  $AB$ , so darf man nur jede dieser Kräfte in zwei Seitenkräfte zerlegen, wovon die eine in die Richtung der Geraden  $AB$  fällt, und die andere darauf senkrecht ist; die letztern dieser Seitenkräfte sind dann die Kräfte  $P, P', P''$ . der Formeln (A), während die erstern unberücksichtigt bleiben, wenn sich die Gerade  $AB$  der Länge nach nicht verschieben läßt, sonst aber die algebraische Summe die Größe und Richtung ihrer Resultante nach  $AB$  oder  $BA$  angibt.

Ist z. B. in der ersten Aufgabe, für welche hier  $P = P' = P'' = 0$  und  $P' = P$  zu setzen ist, der Winkel unter welchem die Kraft  $P$  (Fig. 4) auf  $AB$  wirkt  $= \alpha$ ; so erleidet die Achse  $AB$  von  $B$  gegen  $A$  einen Druck  $= P \cos \alpha$ , während die normal auf  $AB$  wirkende Kraft  $= P \sin \alpha$  ist.

Von dieser letztern Kraft entsteht in  $A$  ein Druck normal auf  $AB$ :

$$x = \frac{BC}{AB} \cdot P \sin \alpha$$

und in  $B$  ein Druck: 
$$y = \frac{AC}{AB} \cdot P \sin \alpha,$$

während der von  $B$  nach  $A$  Statt findende Druck  $P \cos \alpha$  ganz beliebig auf diese Punkte  $A$  und  $B$  vertheilt gedacht werden kann, so nach der Druck auf die beiden Punkte  $A$  und  $B$  in dieser Richtung ganz unbestimmt ist.

### 3. Aufgabe.

Mit der Achse  $AB$  (Fig. 5) ist im Punkte  $C$  der Arm  $CD$  senkrecht verbunden, und im Punkte  $D$  desselben wirkt die Kraft  $P$  parallel mit  $BA$ ; es soll der in den Punkten  $A$  und  $B$  dadurch entstehende Druck bestimmt werden.

#### 1. Auflösung.

Man ziehe die Verbindungslinie  $BD$  und verlängere dieselbe über  $D$  hinaus, schneide auf der Richtung der Kraft  $P$  das Stück  $De = P$  ab, ziehe  $ei$  parallel zu  $CD$  und  $in$  parallel zu  $AB$ , so daß dadurch

(indem auch  $CD$  verlängert wird) das Rechteck  $en$  entsteht. Bringt man ferner, da dadurch das Gleichgewicht nicht gestört wird, auf den Punct  $D$  die beiden gleichen Kräfte  $Dn$  und  $Dm$  nach gerad entgegengesetzten Richtungen an, so kann man  $Di$  als Resultante der beiden Kräfte  $De = P$  und  $Dn = P \tan \alpha$  ansehen, welche sofort auf den Punct  $B$  unter dem Winkel  $ABD = \alpha$  wirkt.

Schneidet man daher  $Bk = Di$  ab und construirt durch den Punct  $k$  das Rechteck  $gf$ , so wird der Punct senkrecht auf  $AB$  nach abwärts mit der Kraft  $Bf = Dn$ , und nach der Richtung  $BA$  mit der Kraft  $Bg = De = P$  gedrückt, während noch auf  $AB$  normal im Puncte  $C$  die Kraft  $Dm = Dn$  aufwärts wirkt. Diese letztere Kraft bringt aber (Aufgabe 1) auf die Puncte  $A$  und  $B$  senkrecht auf  $AB$  und zwar nach aufwärts einen Druck hervor, welcher beziehungsweise durch

$$x = \frac{BC}{AB} \cdot Dn = \frac{BC}{AB} \cdot P \tan \alpha \quad \text{und} \quad y' = \frac{AC}{AB} \cdot P \tan \alpha$$

ausgedrückt wird. Es ist daher der in  $A$  normal auf  $AB$  nach aufwärts Statt findende Druck

$$x = \frac{BC}{AB} \cdot P \tan \alpha$$

und der im Puncte  $B$  nach abwärts entstehende Druck  $y = Bf - y' = P \tan \alpha - \frac{AC}{AB} \cdot P \tan \alpha$  d. i.

$$y = \frac{BC}{AB} \cdot P \tan \alpha.$$

Setzt man  $\tan \alpha = \frac{CD}{BC}$ , so wird auch

$$x = \frac{CD}{AB} \cdot P \quad \text{und} \quad y = \frac{CD}{AB} P$$

so, daß also diese beiden Drücke der Größe nach einander gleich, der Richtung nach aber einander entgegengesetzt sind.

Was endlich den in der Längenrichtung der Achse  $AB$  Statt findenden Druck  $Bg = P$  betrifft, so kann man sich diesen als auf die beiden Puncte  $A$  und  $B$  ganz willkürlich vertheilt vorstellen, indem der auf diese einzelnen Puncte entfallende Druck unbestimmt ist.

## 2. Auflösung.

Zieht man durch den Punct  $A$  (Fig. 6)  $AE$  parallel zu  $CD$  und denkt sich den Durchschnittspunct  $E$  als Angriffspunct der Kraft  $P$ , so wie  $A$  als Drehungspunct des Winkelhebels  $EAB$ , an dessen Endpunct  $B$  zur Herstellung des Gleichgewichtes die senkrecht auf  $AB$  nach auf-

wärts wirkende Kraft  $y$  nothwendig seyn soll; so hat man nach statischen Gesetzen:

$P \cdot AE = y \cdot AB$  und daraus, wegen  $AE = CD$ , sofort

$$y = \frac{CD}{AB} \cdot P$$

als Druck auf den Punct  $B$  senkrecht auf  $AB$ , und zwar nach abwärts.

Der Drehungspunct  $A$  erleidet denselben Druck, als wenn die beiden Kräfte  $P$  und  $y$ , mit ihren ursprünglichen Richtungen parallel, in diesem Puncte angebracht wären; es findet daher in diesem Puncte  $A$  ein senkrecht auf  $AB$  und zwar nach aufwärts gerichteter Druck

$$x = y = \frac{CD}{AB} \cdot P$$

und ein von  $B$  gegen  $A$  gerichteter Druck  $= P$  Statt, welcher wieder auf einen, oder auf beide Puncte  $A$  und  $B$  vertheilt gedacht werden kann.

Anmerkung. Wie man sieht, hat die Entfernung des Punctes  $C$  von den beiden Puncten  $A$  und  $B$  auf die Größe und Richtung des Druckes keinen Einfluss und es bleibt immer  $x \cdot AB = P \cdot CD$ .

Zusatz. Wirkt die Kraft  $P$  nicht parallel mit  $BA$ , sondern bildet ihre Richtung, welche immer noch in der durch  $AB$  und  $CD$  gehenden Ebene liegen soll, mit  $AB$  den Winkel  $\alpha$ ; so erhält man durch Zerlegung der Kraft  $P$  in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte, wovon die eine nach  $DE$ , d. i. parallel mit  $BA$  wirkt, ganz einfach,

für den Druck auf  $A$  nach aufwärts:  $x = \frac{CD \cos \alpha - CD \sin \alpha}{AB} \cdot P$

für den Druck auf  $B$  nach abwärts:  $y = \frac{CD \cos \alpha + AC \sin \alpha}{AB} \cdot P$

und für den Druck auf  $A$  und  $B$  in der Längenrichtung von  $B$  gegen  $A$ :

$$z = P \cos \alpha.$$

#### 4. Aufgabe.

Eine gewichtlose, unbiegsame horizontale Ebene  $RS$  (Fig. 7) ist in den drei Puncten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  unterstützt und im Puncte  $M$  mit dem Gewichte  $P$  belastet; es soll der Druck bestimmt werden, welcher auf jeden der drei Stützpunkte Statt findet.

##### 1. Auflösung.

Bezeichnet man den gesuchten Druck auf den Punct  $A$  mit  $x$ , jenen auf  $B$  mit  $y$  und den Druck auf  $C$  mit  $z$ , nimmt ferner die Ver-

bindungsline  $AB$  zur Momentenachse und bezeichnet die für das Gleichgewicht in dem Punkte  $C$  normal auf die Ebene  $RS$  nach aufwärts anzubringende Kraft durch  $p$ ; so hat man, wenn  $CD$  und  $ME$  senkrecht auf  $AB$  gezogen werden,

$$p \cdot CD = P \cdot ME \text{ oder } p = \frac{ME}{CD} \cdot P,$$

folglich, da der Gröfse nach  $x = p$  ist, auch

$$x = \frac{ME}{CD} \cdot P.$$

Da sich die Flächen der beiden Dreiecke  $ABC$  und  $ABM$ , von einerlei Grundlinien wie ihre Höhen verhalten, also

$$\frac{ME}{CD} = \frac{\Delta ABM}{\Delta ABC} \text{ Statt findet, so ist auch}$$

$$x = \frac{\Delta ABM}{\Delta ABC} \cdot P.$$

Ganz analog damit erhält man auch für die Pressungen in den Punkten  $B$  und  $A$ , wenn man beziehungsweise  $AC$  und  $BC$  zu Momentenachsen nimmt:

$$y = \frac{\Delta ACM}{\Delta ABC} \cdot P \text{ und } x = \frac{\Delta BCM}{\Delta ABC} \cdot P.$$

**Zusatz 1.** Es ist also  $x + y + z = P$  und

$$x : y : z = \angle BCM : \angle ACM : \angle ABM.$$

**Zusatz 2.** Fällt der Punkt  $M$  mit dem Schwerpunkt des Dreieckes zusammen, so ist wegen  $\angle BCM = \angle ACM = \angle ABM$  auch

$$x = y = z = \frac{1}{3} P.$$

Fällt der Punkt  $M$  in eine der drei Verbindungs- oder Umfangslinien des Dreieckes  $ABC$ , z. B. in jene  $AB$ ; so wird, wegen  $\angle ABM = 0$  auch  $z = 0$  und wenn z. B.  $m$  der Punkt ist, mit welchem  $M$  zusammenfällt, sofort

$$x : y = \angle BCM : \angle ACM = Bm : Am$$

weil diese beiden Dreiecke einerlei Höhe haben.

Fällt endlich zugleich auch der Punkt  $C$  in diese Verbindungslinie  $AB$ , so werden die sämtlichen Dreiecke Null und daher folgt aus den allgemeinen Werthen

$$x = \frac{0}{0}, y = \frac{0}{0}, z = \frac{0}{0},$$

zum Beweis, dafs der Druck auf die drei Unterstützungspunkte einer in einem Punkte belasteten geraden unbiegsamen Linie unbestimmt ist, oder die Vertheilung des Druckes  $P$  auf diese 3 Punkte auf unzählige Arten geschehen kann.



## 2. Auflösung.

Setzt man (Fig 8)  $MA = a$ ,  $MB = b$ ,  $MC = c$  und die Winkel  $AMB = \alpha$ ,  $AMC = \beta$ ,  $BMC = \gamma$ , wobei also  $\gamma = 360^\circ - (\alpha + \beta)$  ist, bezeichnet ferner wie zuvor, die Drücke, welche die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  durch das in  $M$  angebrachte Gewicht  $P$  erleiden, beziehungsweise mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; so hat man fürs erste:

$$x + y + z = P \quad (1)$$

und dann, wenn man  $AM$  als Momentenachse nimmt, da die Kräfte  $y$  und  $z$  in Beziehung auf diese Achse im Gleichgewichte stehen müssen, auch, wenn  $BD$  und  $CE$  perpendicularär auf  $AM$  gezogen werden:

$$y \cdot BD = z \cdot CE \text{ d. i. } y \cdot b \sin \alpha = z \cdot c \sin \beta \quad (2)$$

Eben so folgt, wenn man  $BM$  als Momentenachse gelten läßt:

$$x \cdot a \sin \alpha = z \cdot c \sin \gamma \quad (3)$$

Aus diesen 3 Gleichungen (1), (2), (3) erhält man ganz einfach, wenn man noch Kürze halber

$$a b \sin \alpha + a c \sin \beta + b c \sin \gamma = N \text{ setzt:}$$

$$x = \frac{b c \sin \gamma}{N} P, \quad y = \frac{a c \sin \beta}{N} P, \quad z = \frac{a b \sin \alpha}{N} P.$$

Dabei ist, wie sich von selbst versteht,  $\sin \gamma = -\sin(\alpha + \beta)$ .

Anmerkung. Dieselben Werthe erhält man auch ganz einfach aus den Werthen der vorigen Auflösung, wenn man dort (Compend. §. 57)

$$\Delta ABM = \frac{1}{2} a b \sin \alpha, \quad \Delta ACM = \frac{1}{2} a c \sin \beta, \quad \Delta BCM = \frac{1}{2} b c \sin \gamma \text{ und} \\ \Delta ABC = \frac{1}{2} (a b \sin \alpha + a c \sin \beta + b c \sin \gamma) \text{ setzt.}$$

Zusatz. Für  $\alpha = \beta = 180^\circ$  tritt der vorhin erwähnte Fall ein, in welchem die 3 Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  mit dem Angriffspunct  $M$  der Kraft  $P$  in einer geraden Linie liegen und wobei der auf diese 3 Punkte vertheilte Druck  $P$  ganz unbestimmt ist, also diese letztere so gestellte Aufgabe unzählig viele Auflösungen, die allerdings innerhalb gewisser Grenzen liegen, zuläßt. Eine dieser Auflösungen erhält man, wie bereits bemerkt, indem man in den vorigen Werthen von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die Winkel  $\alpha = \beta = 180^\circ$  setzt; es wird dadurch, wegen  $\sin \gamma = -\sin(\alpha + \beta) = -\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  und  $\sin \beta = \sin \alpha$  sofort, wenn man gleich mit  $\sin \alpha$  dividirt:

$$x = \frac{-2 b c \cos \alpha}{a b + a c - 2 b c \cos \alpha} P,$$

oder wegen  $\cos \alpha = \cos 180^\circ = -1$ , auch:

$$x = \frac{2 b c P}{a b + a c + 2 b c}$$

Eben so ist  $y = \frac{acP}{ab + ac + 2bc}$  und  $z = \frac{abP}{ab + ac + 2bc}$

Anmerkung. Geht man auf die 3 Grundgleichungen (1), (2), (3) zurück; so gehen sie in dem vorliegenden speciellen Falle über in  
 $x + y + z = P$ ,  $yb \sin 180^\circ = 2c \sin 180^\circ$ ,  $xa \sin 180^\circ = zc \sin 0$ .

Da aber diese beiden letztern Gleichungen identisch sind und sonach nur Eine ausmachen, indem jede  $0 = 0$  wird, so bestehen in der That nur zwei Gleichungen, aus denen sich also die 3 Unbekannten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  nicht vollkommen bestimmen lassen.

Es bestehen nämlich, wenn man in Fig. 9  $AM = a$ ,  $MB = b$  und  $MC = c$  setzt, für das Gleichgewicht der 4 Kräfte  $P$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (§. 33 u. Nr. 20) nur die beiden Relationen:

$$x + y + z = P \quad (\alpha) \quad \text{und} \quad ax = by + cz \quad (\beta)$$

Da nun sowohl  $y$  als auch  $z$  Null seyn kann, so sind die Grenzen, innerhalb welcher die sämmtlichen Werthe von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  liegen und diesen beiden Bedingungsgleichungen entsprechen, folgende:

$$\text{für } x: \quad \frac{Pc}{a+c} \quad \text{und} \quad \frac{Pb}{a+b}$$

$$\text{für } y: \quad 0 \quad \text{und} \quad \frac{Pa}{a+b}$$

$$\text{für } z: \quad \frac{Pa}{a+c} \quad \text{und} \quad 0.$$

Drückt man zwei von den 3 Größen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  durch die dritte, z. B.  $x$ ,  $y$  durch  $z$  aus, so erhält man:

$$x = \frac{bP + (c-b)z}{a+b} \quad \text{und} \quad y = \frac{aP - (a+c)z}{a+b}$$

so, dafs also, wenn für  $z$  ein innerhalb der eben angegebenen betreffenden Grenzen liegender Werth angenommen wird, die beiden übrigen Größen vollkommen bestimmt sind; so ist z. B. für  $z = 0$  sofort:

$$x = \frac{bP}{a+b} \quad \text{und} \quad y = \frac{aP}{a+b}.$$

Eine ähnliche Unbestimmtheit, wie sie hier in Beziehung auf die 3, in einer geraden Linie liegenden Punkte vorkommt, findet auch Statt, wenn eine unbiegsame, in einem Punkte belastete Ebene, in mehr als 3 Punkten unterstützt, und der Druck auf jeden dieser Punkte gesucht wird.

Übrigens mufs bemerkt werden, dafs die hier erörterte Unbestimmtheit sogleich verschwindet, wenn man der geraden Linie (oder in dem eben angeführten Falle der Ebene) eine, wenn auch noch so geringe Biegsamkeit, wie dies in der Wirklichkeit immer der Fall ist, zugesteht. (Man sehe die Anmerk. zur 38. Aufgabe.)

### 5. Aufgabe.

Ein Sparren oder Balken, welcher hier durch eine steife gerade Linie  $AB$  (Fig 10) dargestellt wird, lehnt sich, während er sich zugleich auf den horizontalen Boden  $CR$  stützt, an eine verticale Wand  $CS$  in der Art, daß er selbst in einer verticalen (auf  $CR$  und  $CS$  perpendicularen) Ebene liegt und mit dem Horizonte den Winkel  $ABC = \alpha$  bildet; wenn nun in irgend einem Punkte  $M$  dieses Balkens ein Gewicht  $P$  aufgehängt wird, so soll unter der Voraussetzung, daß der Balken selbst kein Gewicht hat und weder am Boden  $CR$  noch an der Wand  $CS$  irgend eine Reibung Statt findet, sowohl der horizontale Schub als auch der verticale Druck des Balkens gegen die Wand  $CS$  und den Boden  $CR$  bestimmt werden.

#### Auflösung.

Es sey  $AM = a$  und  $BM = b$ , so entsteht von der lothrecht wirkenden Last  $P$  auf die beiden Punkte  $A$  und  $B$  nach derselben Richtung ein Druck, welcher (§. 20) für den Punkt  $A$  durch  $p = \frac{b}{a+b} P$  und für den Punkt  $B$  durch  $q = \frac{a}{a+b} P$  ausgedrückt wird.

Schneidet man daher  $AD = p$  ab und construirt das Parallelogramm  $EF$ , so ist die Seitenkraft  $AF = AD \cot \alpha = p \cot \alpha$  und jene

$$AE = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{p}{\sin \alpha}.$$

Verlängert man ferner  $AB$ , schneidet auf der Verlängerung  $BG = AE$  ab und construirt das Rechteck  $HJ$ , so ist

$$BJ = BG \sin \alpha = \frac{p}{\sin \alpha} \sin \alpha = p \text{ und } BH = BG \cos \alpha = \frac{p}{\sin \alpha} \cos \alpha = p \cot \alpha.$$

Es ist also der horizontale Schub gegen die Wand in  $A$ :

$$S = AF = p \cot \alpha = \frac{b}{a+b} P \cot \alpha$$

und der verticale Druck gegen den Boden in  $B$ :

$$D = q + BJ = q + p = P.$$

Außerdem ist der Schub, mit welchem der Balken am Boden  $CR$  nach horizontaler Richtung auszuweichen sucht:

$$BH = AF = S = \frac{b}{a+b} P \cot \alpha,$$

also eben so groß wie in  $A$  gegen die Wand.

Ist  $M$  der Halbirungspunct von  $AB$ , also  $b = a$ , so ist der horizontale Schub:

$$S = \frac{1}{2} P \cot \alpha.$$

Anmerkung. Es muß also, um das Gleichgewicht herzustellen, in  $B$  eine horizontale, von  $H$  gegen  $B$  wirkende Kraft  $S$  angebracht werden.

Für  $\alpha = 90^\circ$  ist  $S = 0$  und für  $\alpha = 0$  wird  $S$  unendlich groß, weil da keine Reibung angenommen wird, keine, auch noch so große Kraft im Stande ist, den Sparren horizontal gegen die Wand so zu drücken, um dadurch das Herabgleiten desselben längs der verticalen Wand zu verhindern.

Zusatz. Sind also zwei gleiche Balken oder Sparren  $AC$  und  $BC$  (Fig. 11) in einer verticalen Ebene  $ABC$  unter gleichen Winkeln gegen den Horizont an einander gelehnt, oder zu einem sogenannten Leergesperre (technischer Ausdruck bei den Holzverbindungen) verbunden; so läßt sich der dabei entstehende horizontale, oder sogenannte Sparrenschub, wenn man  $AD = BD = b$ ,  $AC = BC = l$ ,  $CD = h$ ,  $W. CAD = W. CBD = \alpha$  und das Gewicht eines Sparrens  $AC$  oder  $BC = G$  setzt, durch

$$S = \frac{1}{2} G \cot \alpha$$

oder wegen  $\cot \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{b}{h}$  auch durch

$$S = \frac{1}{2} G \frac{b}{h},$$

und wenn man annimmt, daß der laufende Fuß jedes Sparrens (sein eigenes Gewicht mit eingerechnet) mit dem Gewichte  $q$  belastet, also

$G = lq$  und  $\sin \alpha = \frac{h}{l}$  ist, auch durch

$$S = \frac{1}{2} b q \frac{l}{h} = \frac{1}{2} q \frac{b}{\sin \alpha}$$

ausdrücken.

Der in  $A$  und  $B$  Statt findende verticale Druck ist sofort

$$D = G = ql.$$

## 6. Aufgabe.

Die vorige Aufgabe mit Rücksicht auf die an der verticalen Wand und am horizontalen Boden Statt findende Reibung aufzulösen.

### Auflösung.

Bezeichnet man den horizontalen Schub oder normalen Druck des Balkens gegen die Wand  $AC$  (Fig. 10) indefs durch  $X$ , so muß ohne Rücksicht auf Reibung in  $B$  nach der Richtung  $HB$  eine Kraft  $Y$  wirken,

für welche (vorige Aufgabe)  $Y = X$  ist. Setzt man den auf den Boden in  $B$  Statt findenden verticalen Druck  $= Z$  und den Reibungscoefficienten zwischen dem Balken und horizontalen Boden  $= \mu$ , so ist statt  $Y$  nur eine Kraft  $Y' = X - \mu Z$  erforderlich, um das Ausgleiten bei  $B$  zu verhindern.

Die in  $A$  und  $B$  vom Gewichte  $P$  im Punkte  $M$  herrührenden lothrechten Kräfte sind nach der vorigen Aufgabe beziehungsweise  $AD = p$  und  $= q$ ; anstatt wie vorhin  $p$  in  $AF$  und  $AE$  zu zerlegen, muß man jetzt, wenn  $\mu'$  den Reibungscoefficienten zwischen dem Balken und der verticalen Wand bezeichnet,  $p - \mu' X$  zerlegen. Dadurch erhält man:

$$AF = X = (p - \mu' X) \cot \alpha \dots (a) \quad \text{und} \quad W = AE = \frac{p - \mu' X}{\sin \alpha};$$

aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt:

$$X = \frac{p \cot \alpha}{1 + \mu' \cot \alpha} = \frac{p}{\mu' + \tan \alpha} \dots (b)$$

Wird ferner  $BG = W$  in die beiden Seitenkräfte  $BH$  und  $BJ$  zerlegt, so wird  $BH = W \cos \alpha = (p - \mu' X) \cot \alpha$  oder wegen Gleich. (a)

$$BH = X$$

und  $BJ = W \sin \alpha$ , d. i.  $BJ = p - \mu' X$ .

Es ist also der senkrechte Druck auf den Boden in  $B$ :

$$Z = q + BJ = p + q - \mu' X = P - \mu' X,$$

woraus  $\mu Z = \mu(P - \mu' X)$ , und wenn man diesen Werth in  $Y'$  substituirt, sofort  $Y' = X - \mu(P - \mu' X)$  folgt. Setzt man in diesen letztern Ausdruck für  $X$  den Werth aus (b), so erhält man

$$Y' = (1 + \mu \mu') \frac{p}{\mu' + \tan \alpha} - \mu P \quad \text{oder wegen} \quad p = \frac{bP}{a+b} \quad (\text{vorige Aufgabe})$$

endlich die für das Gleichgewicht von  $H$  gegen  $B$  nöthige horizontale Kraft:

$$Y' = \frac{1 + \mu \mu'}{\mu' + \tan \alpha} \cdot \frac{bP}{a+b} - \mu P \dots (c)$$

**Zusatz 1.** Um jenen Neigungswinkel  $\alpha'$  des Balkens gegen den Horizont zu finden, bei welchem die Reibung allein im Stande ist, das Ausgleiten zu verhindern, darf man in diesem letztern Ausdruck nur  $Y' = 0$  setzen; dadurch erhält man

$$(1 + \mu \mu') bP = (a + b) (\mu' + \tan \alpha') \mu P \quad \text{und daraus:}$$

$$\tan \alpha' = \frac{b - \mu \mu' a}{\mu (a + b)}.$$

Setzt man  $\mu' = \mu$  und sucht den Werth von  $\mu$ , für welchen bei irgend einem Neigungswinkel  $\alpha$  das Aus- und Abgleiten des Balkens

verhindert wird; so erhält man wieder aus der vorigen Gleichung (c) für  $Y' = 0$  nach gehöriger Entwicklung:

$$\mu = \frac{-(a+b) \operatorname{tang} \alpha + \sqrt{[(a+b)^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + ab]}}{a}.$$

Zusatz 2. Setzt man die Länge des Balkens oder Sparrens  $a + b = l$ , so ist auch  $\operatorname{tang} \alpha' = \frac{l - (1 + \mu \mu') a}{\mu l}$ .

Da nun der Zähler dieses Bruches um so größer wird, je kleiner  $a$  ist, so wird auch  $\alpha'$  nahe in demselben Verhältniß größer, der Balken gleitet also unter übrigens gleichen Umständen um so leichter aus, je näher sich die Last  $P$  gegen den Punct  $A$  befindet.

Für  $a = 0$  wird  $\operatorname{tang} \alpha' = \frac{1}{\mu}$ ; für  $l = (1 + \mu \mu') a$  wird  $a = \frac{l}{1 + \mu \mu'}$  und  $\alpha' = 0$ .

Fällt endlich der Aufhängpunct  $M$  der Last  $P$  in die halbe Länge  $AB$ , so wird wegen  $b = a$  sofort  $\operatorname{tang} \alpha' = \frac{1 - \mu \mu'}{2\mu}$ , dieser Ausdruck nähert sich immer mehr der Nulle je größer  $\alpha$  wird, für  $\alpha = 90^\circ$  wird wegen  $\operatorname{tang} \alpha = \infty$  sofort  $\mu = 0$ . Für  $\alpha = 0$  dagegen wird  $\mu = \sqrt{\frac{b}{a}}$  und wenn noch dabei  $b = a$  ist,  $\mu = 1$ .

### 7. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen der Balken  $AB$  (Fig. 12) vom Gewichte  $G$  ohne Reibung zwischen den beiden schiefen Ebenen  $AC$  und  $BC$  im Gleichgewichte bleibt.

#### Auflösung.

Da das Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die durch den Schwerpunkt  $O$  des Balkens gezogene lothrechte Linie  $GH$  zugleich durch den Punct  $F$  geht, in welchem sich die beiden, durch die Endpunkte  $A, B$  auf die schiefen Ebenen  $AC$  und  $BC$  errichteten Perpendikel  $AF$  und  $BF$  schneiden; so seyen  $\alpha$  und  $\beta$  die Neigungswinkel dieser schiefen Ebenen mit dem Horizonte  $DE$ , so wie  $AF = p$  und  $BF = q$  die aus dem Gewichte  $G = FG$  entstehenden, auf  $AC$  und  $BC$  normalen Seitenkräfte. Diefs vorausgesetzt, hat man  $p : G = \sin \beta : \sin (\alpha + \beta)$  und daraus:

$$p = \frac{G \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad \text{und eben so} \quad q = \frac{G \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \quad (1)$$

Setzt man ferner die Länge des Balkens  $AB = l$ , den Winkel, welchen derselbe mit dem Horizonte bildet  $BAJ = \varphi$  und  $AO = \frac{1}{2}l$ ; so ist

$$AL = \frac{1}{2}l \cos \varphi = AF \sin AFL = AF \sin \alpha$$

folglich  $\frac{1}{2}l \cos \varphi = p \sin \alpha$  und  $\cos \varphi = \frac{2p}{l} \sin \alpha$ ,

oder wenn man für  $p$  den Werth aus (1) setzt:

$$\cos \varphi = \frac{2G \sin \alpha \sin \beta}{l \sin(\alpha + \beta)} \quad (2)$$

Will man das Gewicht  $G$  eliminiren, so darf man nur berücksichtigen, daß  $W. ABC = n = \beta - \varphi$ , folglich  $W. FBO = 90^\circ - n = 90 + \varphi - \beta$  und daher wegen  $FO : OB = \sin FBO : \sin OFB = \cos(\varphi - \beta) : \sin \beta$ , also  $FO \sin \beta = OB \cos(\varphi - \beta)$  oder  $G \sin \beta = l \cos(\varphi - \beta)$ , folglich wenn man diesen Werth in (2) substituirt, auch:

$$\cos \varphi = \frac{2 \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ist, so, daß wenn man  $\cos(\varphi - \beta)$  auflöst, die Gleichung durch  $\cos \varphi$  dividirt und gehörig reducirt, sofort

$$\tan \varphi = \frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta} \quad (3)$$

wird.

Zusatz. Für  $\alpha = \beta$  wird  $\tan \varphi = 0$ , folglich muß der Balken für das Gleichgewicht horizontal liegen.

Für  $\alpha = 0$  und  $\beta = 90^\circ$  wird  $\tan \varphi = \frac{1}{0} = \infty$ , folglich muß der Balken in diesem Falle vertical stehen.

### S. Aufgabe.

Der Balken oder Sparren  $AB$  (Fig. 13) liegt in  $A$  auf der verticalen Stütze oder Mauer  $AC$  auf und stützt sich am andern Ende bei  $B$  auf den horizontalen Boden  $BC$ ; wenn nun wieder in irgend einem Punkte  $M$  des als gewichtslos gedachten Balkens eine Last  $P$  aufgehängt wird, so sollen die dadurch gegen die verticale Mauer und den horizontalen Boden entstehenden Pressungen bestimmt werden.

### Auflösung.

Ist, wie in der 5. Aufgabe,  $AM = a$ ,  $BM = b$  und  $W. ABC = \alpha$ ; so sind, wie dort

$$AD = p = \frac{b}{a+b} P \quad \text{und} \quad BJ = q = \frac{a}{a+b} P$$

die in  $A$  und  $B$  lothrecht wirkenden Kräfte.

Zerlegt man  $p$  in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte  $AE$  und  $AF$  senkrecht und parallel mit  $AB$ , so erhält man

$$AE = p \cos \alpha \text{ und } AF = p \sin \alpha.$$

Verlängert man  $AB$ , macht  $BH = AF$ , und zerlegt diese letztere Kraft in die horizontale und verticale Seitenkraft  $BG$  und  $BJ$ ; so wird

$BG = AF \cdot \cos \alpha = p \sin \alpha \cos \alpha$  und  $BJ = AF \cdot \sin \alpha = p \sin^2 \alpha$   
 der gesammte verticale Druck in  $B$  ist daher  $D = q + BJ =$   
 $\frac{a}{a+b} P + \frac{b}{a+b} P \sin^2 \alpha$  d. i.

$$D = \frac{a + b \sin^2 \alpha}{a + b} P \quad (1)$$

so wie der horizontale Schub in  $B$  sofort  $S = BG = p \sin \alpha \cos \alpha$ ,

$$\text{d. i. } S = \frac{b}{a+b} P \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{b}{a+b} P \sin 2\alpha. \quad (2)$$

Zerlegt man ferner die oben ausgedrückte Kraft  $AE$  in eine horizontale  $Aa$  und eine verticale Seitenkraft  $Ab$ , so erhält man:

$$Aa = AE \sin \alpha \text{ und } Ab = AE \cos \alpha,$$

folglich, wenn man für  $AE$  den Werth setzt:

$$Aa = p \cos \alpha \sin \alpha = \frac{b}{a+b} P \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{b}{a+b} P \sin 2\alpha \quad (3)$$

$$\text{und } Ab = p \cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b} P \cos^2 \alpha. \quad (4)$$

Dieser letztere nach  $C$  fortgepflanzte verticale Druck mit jenem summirt, welcher in  $B$  nach dieser Richtung Statt findet, gibt, wie es seyn soll:

$$\frac{b}{a+b} P \cos^2 \alpha + \frac{a+b \sin^2 \alpha}{a+b} P = P.$$

Zusatz 1. Hat der Balken  $AB$  das Gewicht  $G$  und liegt dessen Schwerpunkt im Halbirungspunct der Länge  $l$ , so, daß  $b = a = \frac{1}{2} l$  ist; so hat man aus den vorigen Formeln, für den unbelasteten Balken:

$$\text{im Puncte } A \text{ den horizontalen Schub } S' = \frac{1}{4} G \sin 2\alpha$$

$$,, \text{ verticalen Druck } D' = \frac{1}{2} G \cos^2 \alpha$$

$$\text{im Puncte } B \text{ den horizontalen Schub } S = \frac{1}{4} G \sin 2\alpha = S'$$

$$,, \text{ verticalen Druck } D = \frac{1}{2} G (1 + \sin^2 \alpha)$$

Für  $\alpha = 45^\circ$  wird der horizontale Schub am größten und zwar wird dafür  $S = S' = \frac{1}{4} G$ .

$$\text{Zugleich wird auch } D' = \frac{1}{4} G \text{ und } D = \frac{3}{4} G.$$



Für  $\alpha = 90^\circ$  wird  $S = S' = 0$  und  $D' = 0$ ,  $D = G$ .

Für  $\alpha = 0$  endlich ist  $S = S' = 0$  und  $D' = D = \frac{1}{2}G$ .

**Zusatz 2.** Setzt man bei einem Leergesperre  $ACB$  (Fig. 11) die Länge eines Sparrens  $AC = BC = l$ , die halbe Tiefe des Daches  $AD = BD = b$ , die Höhe desselben  $CD = h$  und das Gewicht des laufenden Fusses der Belastung (mit Einschluss des eigenen Gewichtes des Sparrens)  $= q$ ; so erhält man wegen  $G = ql$ , für den verticalen Druck auf die Säule  $CD$  im Punkte  $C$ :

$$D' = 2 \times \frac{1}{2} ql \cos \alpha^2 + qh = ql \cdot \frac{b^2}{l^2} + qh = q \left( \frac{b^2}{l} + h \right)$$

für den verticalen Druck in  $A$  und  $B$ :

$$D = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h^2}{l^2} \right) ql$$

und für den Sparrenschub in  $A$  und  $B$ :

$$S = \frac{1}{2} ql \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{b}{l} = \frac{1}{2} q \frac{bh}{l} = \frac{1}{2} q \frac{bh}{\sqrt{(b^2 + h^2)}}$$

oder auch

$$S = \frac{1}{2} qb \sin \alpha.$$

Der Sparrenschub wird also bei einerlei Tiefe  $2b$  des Daches um so kleiner, je kleiner der Winkel  $\alpha$  ist; es ist daher zur Verminderung des sonst so nachtheiligen Sparrenschubes bei flachen Dächern sehr vortheilhaft, solche Säulen oder Stützen  $CD$  anzubringen.

## 9. Aufgabe.

Auf die verticale Säule  $AB$  (Fig. 14), welche bei  $B$  im Boden befestigt ist, wirkt im Punkte  $A$  nach horizontaler Richtung die Kraft  $P$  mit dem Bestreben diese Säule umzustürzen; wenn nun in der durch  $AB$  und die Richtung der Kraft  $P$  gehenden Ebene die Strebe  $CD$  angebracht und bei  $C$  mit der Säule, bei  $D$  mit dem Boden befestigt ist, so sollen die Pressungen gefunden werden, welche diese Kraft  $P$  auf die Säule und Strebe hervorbringt.

### Auflösung.

Die Kraft  $P$  bringt auf den Punkt  $C$  den horizontalen Zug  $CE = \frac{AB}{CB} P$ , oder wenn man  $AB = h$ ,  $CD = l$  und  $\angle CDB = \alpha$  setzt, wegen  $BC = l \sin \alpha$ , jenen

$$CE = \frac{h}{l \sin \alpha} P$$

hervor.

Zerlegt man diese Kraft  $CE$  in die beiden Seitenkräfte  $CF$  und  $CJ$ , nach den Richtungen der Säule und Strebe, so wird, wenn man die erstere mit  $p$  und die letztere mit  $q$  bezeichnet, wegen  $p:CE = \sin \alpha : \cos \alpha$ , sofort:

$$p = CE \tan \alpha = \frac{h}{l \cos \alpha} P \dots (1)$$

und wegen  $q:CE = 1:\cos \alpha$  der Werth von  $q$ :

$$q = \frac{CE}{\cos \alpha} = \frac{hP}{l \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2h}{l \sin 2\alpha} P \dots (2)$$

Die Kraft  $P$  äußert demnach das Bestreben die Säule  $AB$  mit der Kraft  $CF = p$  zu heben oder aus dem Boden zu ziehen, und die Strebe nach der Richtung  $CD$  mit der Kraft  $CJ = q$  zu zerdrücken. Dieser Druck ist für  $\alpha = 45^\circ$  am größten und  $= 2 \frac{h}{l} P$ .

Zerlegt man endlich noch den Druck, welchen die Strebe auf den Boden nach der Richtung  $CD$  ausübt, in einen verticalen und horizontalen Seitendruck  $r$  und  $s$ ; so wird der erstere:

$$r = q \sin \alpha = \frac{h}{l \cos \alpha} P$$

und der letztere:

$$s = q \cos \alpha = \frac{h}{l \sin \alpha} P.$$

$$\text{Für } \alpha = 45^\circ \text{ ist } r = s = \frac{2h}{l\sqrt{2}} P.$$

## 10. Aufgabe.

Der horizontale Balken  $AC$  (Fig. 15) ist in  $A$  und noch außerdem durch die Strebe  $DE$  mit der verticalen Säule  $AB$  verbunden; wenn nun in  $C$  die Kraft lothrecht wirkt, so ist die Frage, welche Pressungen dadurch entstehen.

### Auflösung.

Setzt man die Länge des Balkens  $AC = l$ , die Höhe der Säule  $AB = h$ , die Länge der Strebe  $DE = b$  und den W.  $ADE = \alpha$ ; so bringt die Kraft  $P$  für's erste auf den Punct  $D$  einen Zug  $p$  lothrecht nach abwärts hervor, wofür

$$p = \frac{AC}{AD} P = \frac{l}{b \cos \alpha} P \text{ ist.}$$

Zerlegt man diese Kraft  $p$  in zwei Seitenkräfte  $Da$  und  $Db$  nach den Richtungen des Balkens und der Strebe, so wird:

$$D a : p = \cos \alpha : \sin \alpha \text{ und } D b : p = 1 : \sin \alpha$$

folglich

$$D a = p \cot \alpha = \frac{l}{b \sin \alpha} P$$

und

$$D b = \frac{p}{\sin \alpha} = \frac{l P}{b \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 l P}{b \sin 2 \alpha}.$$

Von diesen Ausdrücken, welche für sich selbst sprechen, wird der letztere (Größe des Druckes, welchem die Strebe durch ihre rückwirkende Festigkeit widerstehen muß) am größten für  $\alpha = 45^\circ$  und zwar wird dafür  $D b = 2 \frac{l}{b} P$ .

### 11. Aufgabe.

Zwei Balken oder Sparren  $AB$  und  $BC$  (Fig. 16), wovon sich der obere gegen eine verticale Wand  $AD$ , der untere gegen den horizontalen Boden  $CD$  stützt und dabei nicht ausweichen kann, sollen in einer verticalen Ebene so aufeinander gestellt werden, daß sie unter einander im Gleichgewichte stehen; es ist die Frage, welche Winkel sie dabei mit dem Horizonte bilden müssen?

### Auflösung.

Es seyen  $AB = l$ ,  $BC = l'$  die Längen der Sparren und  $q$  das Gewicht des laufenden Fusses (oder überhaupt der Längeneinheit), ihre Schwerpunkte in den Halbirungspunkten der Längen, und wenn  $BE$  und  $CD$  horizontale Linien sind, die gesuchten Winkel  $ABE = \alpha$  und  $BCD = \alpha'$ . Dieß vorausgesetzt, hat man (Aufgabe 5) im Punkte  $B$  den horizontalen Sparrenschub :

$$S = \frac{1}{2} q l \cot \alpha$$

und den verticalen Druck:  $D = q l$ .

Schneidet man nun auf der durch  $B$  gezogenen verticalen Linie  $BF$  das Stück  $Bc = D$  ab und zerlegt diese lothrechte Kraft in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen  $BE$  und  $BC$ , d. i. horizontal und nach der Länge des Sparrens  $BC$ ; so wird die erstere

$$B a = \frac{B c \cos \alpha'}{\sin \alpha'} = \frac{D \cos \alpha'}{\sin \alpha'} = q l \cot \alpha'$$

und die letztere

$$B b = \frac{B c}{\sin \alpha'} = \frac{D}{\sin \alpha'} = \frac{q l}{\sin \alpha'}.$$

Ferner entsteht durch den Sparren  $BC$ , dessen Gewicht  $q l'$  ist, in  $B$  ebenfalls ein Schub nach  $BE$ , welcher durch

$$S' = \frac{1}{2} q l' \cot \alpha'$$

ausgedrückt wird, und da dieser Sparren am Boden  $CD$  nicht ausweichen kann (wie vorausgesetzt wurde), so muß für das Gleichgewicht der horizontale Schub nach  $Be$  von Seite des Sparrens  $AB$ , dem Schube nach  $BE$  von Seite des Sparrens  $BC$  gleich seyn, d. h. es muß die Bedingungsgleichung bestehen:

$$S = S' + Ba \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{2} q l \cot \alpha = \frac{1}{2} q l' \cot \alpha' + q l \cot \alpha'.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\cot \alpha = \left(2 + \frac{l'}{l}\right) \cot \alpha' \quad \text{oder auch} \quad \tan \alpha' = \left(2 + \frac{l'}{l}\right) \tan \alpha.$$

Für zwei gleich lange Sparren, d. i. für  $l' = l$ , wird:

$$\tan \alpha' = 3 \tan \alpha \quad \text{oder} \quad \tan \alpha : \tan \alpha' = 1 : 3.$$

**Zusatz.** Das Gleichgewicht wird offenbar auch noch bestehen, wenn man statt der verticalen Wand den beiden Sparren  $AB$ ,  $BC$  zwei gleiche  $AB'$ ,  $B'C'$  symmetrisch entgegen aufstellt (Fig. 17)

Ist z. B. in diesem Falle und für  $l' = l$  der Winkel  $\alpha = 45^\circ$ , so wird wegen  $\tan \alpha = 1$  und  $\tan \alpha' = 3$  der Winkel  $\alpha' = 71^\circ 33' 54''$  oder nahe  $71^\circ 34'$ .

## 12. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen die Balken oder Sparren  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD \dots$  (Fig. 18), welche in einer verticalen Ebene als Seiten eines Polygons aufgestellt sind, im Gleichgewichte stehen, vorausgesetzt, daß sich wieder der oberste bei  $A$  gegen eine verticale Wand und der unterste gegen den horizontalen Boden stützt.

### Auflösung.

Bezeichnet man die Gewichte der Balken  $AB$ ,  $BC \dots$  durch  $G$ ,  $G_1$ ,  $G_2 \dots$  und die in den Punkten  $B$ ,  $C$ ,  $D \dots$  Statt findenden (horizontalen) Sparrenschübe beziehungsweise durch  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2 \dots$ ; so ist, wenn die Schwerpunkte der Sparren wieder in der Mitte liegen (vorige Aufgabe) für den Punkt  $B$ :

$$S = \frac{1}{2} G \cot \alpha \quad (1)$$

und der verticale Druck  $D = G$ .

Zieht man durch die Punkte  $B$ ,  $C$ ,  $D \dots$  die horizontalen Linien  $BM$ ,  $CN$ ,  $DO \dots$  und zerlegt die durch  $Bc$  dargestellte lothrechte Kraft  $G$  in zwei Seitenkräfte  $Ba$  und  $Bb$  nach den Richtungen  $BM$  und  $BC$ ; so hat man

$$Ba = \frac{Bc \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = G \cot \alpha_1 \quad \text{und} \quad Bb = \frac{D}{\sin \alpha_1} = \frac{G}{\sin \alpha_1}.$$

Von dem zweiten Sparren entsteht in  $B$  ebenfalls noch ein Schub nach  $BM$ , und zwar ist dieser  $= \frac{1}{2} G_1 \cot \alpha_1$ , so, daß der Gesamtschub nach  $BM = G \cot \alpha_1 + \frac{1}{2} G_1 \cot \alpha_1$  ist. Für das Gleichgewicht im Punkte  $B$  muß also seyn:

$$\frac{1}{2} G \cot \alpha = G \cot \alpha_1 + \frac{1}{2} G_1 \cot \alpha_1 \quad (2)$$

Auf den Punkt  $C$  übergelend, ist der nach  $BC$  Statt findende Druck:

$$Cd = Bb + \frac{\frac{1}{2} G_1}{\sin \alpha_1} = \frac{G + \frac{1}{2} G_1}{\sin \alpha_1}.$$

Wird diese Kraft  $Cd$  in die beiden Seitenkräfte  $Ce$  und  $Cf$  nach horizontaler und verticaler Richtung zerlegt, so erhält man

$$Ce = Cd \cdot \cos \alpha_1 \text{ und } Cf = Cd \cdot \sin \alpha_1, \text{ d. i.}$$

$$S' = Ce = (G + \frac{1}{2} G_1) \cot \alpha_1 \text{ und } D' = Cf + \frac{1}{2} G_1 = G + G_1.$$

Mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (2) ist auch

$$S' = \frac{1}{2} G \cot \alpha = S \text{ (wegen Gleich. 1.)}$$

Zerlegt man weiters die verticale Kraft  $D' = Cf + fg = Cg$  in die beiden Seitenkräfte  $Ch$  und  $Ci$ , so wird

$$Ch = Cg \cot \alpha_2 = D' \cot \alpha_2 = (G + G_1) \cot \alpha_2$$

und

$$Ci = \frac{Cg}{\sin \alpha_2} = \frac{D'}{\sin \alpha_2} = \frac{G + G_1}{\sin \alpha_2}.$$

Der Sparren  $CD$  bringt im Punkte  $C$  noch außerdem den horizontalen Schub gegen  $CN$  von der Größe  $\frac{1}{2} G_2 \cot \alpha_2$  hervor, so, daß also der gesammte in  $C$  nach dieser Richtung Statt findende Schub gleich  $(G + G_1 + \frac{1}{2} G_2) \cot \alpha_2$  ist und sonach für das Gleichgewicht in diesem Punkte  $C$  sofort

$$S' = (G + G_1 + \frac{1}{2} G_2) \cot \alpha_2 \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{2} G \cot \alpha = (G + G_1 + \frac{1}{2} G_2) \cot \alpha_2 \dots \quad (3)$$

Statt finden muß u. s. w.

Aus den Gleichungen (1), (2), (3) folgt ganz einfach:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{2} G}{S}, \quad \tan \alpha_1 = \frac{G + \frac{1}{2} G_1}{S}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{G + G_1 + \frac{1}{2} G_2}{S} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{und } \tan \alpha_1 - \tan \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{G + G_1}{S}, \quad \tan \alpha_2 - \tan \alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1 + G_2}{S} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{also ist } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{G + G_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1 + G_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} = \dots$$

$$\text{Für } G = G_1 = G_2 = \dots \text{ wird } \tan \alpha : \tan \alpha_1 : \tan \alpha_2 : \dots = 1 : 3 : 5 \dots$$

**Zusatz.** Ist die Anzahl der Balken oder Sparren allgemein  $= n$ , sind dabei  $G_1, G_2 \dots G_n$  ihre Gewichte und  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  die obigen Winkel, so hat man also:

$$S = \frac{1}{2} G \cot \alpha_1 \text{ und}$$

$$2S = \frac{G_1 + G_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} = \frac{G_2 + G_3}{\tan \alpha_3 - \tan \alpha_2} = \dots = \frac{G_{n-1} + G_n}{\tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1}}$$

Da man nun  $n$  Unbekannte (d. i. die Winkel  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ ) und dafür nur  $n-1$  Gleichungen hat, so muß man einen dieser Winkel, z. B. jenen  $\alpha_1$  als bekannt annehmen und alle übrigen durch diesen ausdrücken.

So hat man z. B. wie in Fig. 17 für zwei Balken die Gleichung

$$G_1 \cot \alpha_1 = \frac{G_1 + G_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \text{ und daraus } \tan \alpha_2 = \frac{2G_1 + G_2}{G_1} \tan \alpha_1,$$

so, daß also wieder, wie schon oben gefunden wurde, für  $G_2 = G_1$  sofort  $\tan \alpha_2 = 3 \tan \alpha_1$  wird.

Anmerkung. Werden die Seiten des Polygons unendlich klein, so geht dasselbe in eine (umgekehrte) Kettenlinie über, welche bekanntlich die charakteristische Eigenschaft besitzt, daß die horizontale Spannung in jedem Punkte der Curve eine constante Größe ist.

### 13. Aufgabe.

Wenn die beiden Sparren  $AC$  und  $BC$  (Fig. 19) mit dem horizontalen Balken oder Bundtram  $AB$  in  $A$  und  $B$ , und außerdem noch in  $C$  durch die verticale Hängsäule  $CD$  verbunden ist (einfaches Hängwerk), den Druck und Schub zu bestimmen, welchen die belasteten Sparren in den Punkten  $A$  und  $B$  hervorbringen.

#### Auflösung.

Ist die mit Einfluß des eigenen Gewichtes über einen Sparren gleich vertheilte Last  $= P$ , die Last, welche die Hängsäule (durch Belastung des Balkens  $AB$ ) zu tragen hat  $= Q$ , setzt man ferner  $AD = BD = b$  und  $CD = h$ ; so erhält man für den Druck im Punkte  $C$  nach der lothrechten Richtung  $CD$ :

$$\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}P + Q = P + Q,$$

folglich, wenn man  $Cd = P + Q$  abschneidet und das Parallelogramm construirt, sofort  $Ap = Bp' = Ca = Cb$  als Druck in den Punkten  $A$  und  $B$ , nach den Richtungen  $Ap$  und  $Bp'$ . Construirt man daher noch die Rechtecke  $mn$  und  $m'n'$ , so wird

$$An = Bn' = Cc = \frac{1}{2}(P + Q)$$

und da jeder dieser beiden Punkte  $A$  und  $B$  noch außerdem mit  $\frac{1}{2}P$  gedrückt wird, so ist der gesammte Verticaldruck sowohl in  $A$  wie in  $B$ :

$$D = \frac{1}{2}(P + Q) + \frac{1}{2}P = P + \frac{1}{2}Q.$$

Ferner ist in demselben Punkte der horizontale Schub:

$Am = Bm' = S = ac$  oder wegen  $Cc : ac = h : b$ , auch

$$S = Cc \cdot \frac{b}{h} = \frac{1}{2}(P + Q) \frac{b}{h} = \frac{1}{2}(P + Q) \cot \alpha,$$

wenn man nämlich  $W.CAB = W.CBA = \alpha$  setzt.

#### 14. Aufgabe.

Die bei dem zusammengesetzten Hängwerk in Fig. 20 vorkommenden Pressungen zu bestimmen.

#### Auflösung.

Ist die Belastung des horizontalen Balkens  $AB$  gegeben, und kommt davon auf jeden der Punkte  $E$  und  $F$  die Last  $Q$ , ist ferner  $AE = BF = a$ ,  $EF = b$ ,  $CE = DF = h$  und  $W.CAE = W.DBF = \alpha$ ; so läßt sich in  $C$  die verticale Kraft  $Q = Cd$  nach den Richtungen  $CA$  und  $CD$  zerlegen und zwar ist, wenn  $Ca$  und  $Cb$  diese Seitenkräfte sind:

$$Ca = \frac{Cd}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad Cb = Cd \cot \alpha = Q \cot \alpha.$$

Es wird also die Strebe  $CA$  mit der Kraft

$$Ca = Q \cdot \frac{AC}{CE} = \frac{Q}{h} \sqrt{(a^2 + h^2)}$$

und der Spannriegel  $CD$  mit jener

$$Cb = Q \cdot \frac{AE}{CE} = \frac{a}{h} Q$$

zusammengedrückt.

Die beiden Hängsäulen  $CE$ ,  $DF$  werden mit der Kraft  $Q$  und der Balken  $AB$  mit jener  $Q \cot \alpha$ , auf ihre absolute, so wie dieser letztere noch außerdem in Beziehung auf seine relative Festigkeit in Anspruch genommen, während die Punkte  $A$  und  $B$  jeder den verticalen Druck  $Q$  zu erleiden haben.

Anmerkung. Stellt z. B.  $AB$  eine gleichförmig belastete Brücke vor, so kann man als einfachste Hypothese annehmen, daß jeder der beiden Punkte  $E$  und  $F$  den 3<sup>ten</sup>, so wie die Punkte  $A$  und  $B$  jeder den 6<sup>ten</sup> Theil der ganzen Belastung zu tragen haben. Ist sonach  $W$  diese Belastung, also  $Q = \frac{1}{3}W$ ; so ist der verticale Druck in jedem der Punkte  $A$  und  $B = Q + \frac{1}{6}W = \frac{1}{2}W$ .

### 15. Aufgabe.

Die verschiedenen Pressungen bei einem einfachen Sprengwerk (Fig. 21) zu finden.

#### Auflösung.

Wird der Punct  $C$  vertical mit dem Gewichte  $Q$  gedrückt, so entfällt davon auf jede der beiden Streben  $CD$ ,  $CE$  der Druck  $\frac{1}{2}Q$ , denn es ist, wenn man auf der durch  $C$  gezogenen lothrechten Linie  $Cg = Q$  abschneidet und (in der durch  $AB$ ,  $CD$  und  $CE$  gehenden verticalen Ebene) das Parallelogramm  $bh$  construirt, sofort (wegen  $Cb : Cg = \cos \alpha : \sin 2\alpha$ ):

$$Cb = Ch = \frac{Cg \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{Cg}{2 \sin \alpha} = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

Daraus entsteht aber der horizontale Schub:

$$S = Ca = Cb \cos \alpha = \frac{1}{2} Q \cot \alpha$$

und der verticale Druck:

$$D = Cf = Cb \sin \alpha = \frac{1}{2} Q$$

gerade so, wie bei dem einfachen Hängwerk.

### 16. Aufgabe.

Es sollen die verschiedenen Pressungen gefunden werden, welche bei dem zusammengesetzten Sprengwerk (Fig. 22) vorkommen.

#### Auflösung.

Entfällt auf die Puncte  $C$  und  $D$  die Last  $Q$ , so ist nach dem vorigen Verfahren der horizontale Schub  $S = Ca = Q \cot \alpha$ , so wie der verticale Druck  $D = Cc = Q$ .

Der Druck nach  $CE$  ist (wegen  $Cb : Cc = 1 : \sin \alpha$ )  $Cb = \frac{Q}{\sin \alpha}$ , folglich wird der Spannriegel  $CD$  mit der Kraft  $Ca = Q \cot \alpha$ , und jede der beiden Streben  $CE$  und  $DF$  mit der Kraft  $Cb = \frac{Q}{\sin \alpha}$  und zwar ebenfalls in Beziehung auf ihre rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen.

### 17. Aufgabe.

Ein einfacher Keil  $ABC$  (Fig. 23), dessen Cathete oder Höhe  $AC$  vertical steht und welcher zwischen zwei Prismen  $DG$ ,  $EJ$ , die an



seine Seitenflächen genau anpassen, eingeschoben ist, wirkt durch sein bloßes Gewicht zur Verschiebung dieser Prismen nach den Richtungen  $CG$  und  $CJ$ ; wenn nun diese Prismen eine feste unverschiebbare Lage haben, so soll bestimmt werden 1<sup>stens</sup> die mittlere Kraft sämmtlicher Normalpressungen auf die Seitenfläche des Keils welche durch  $AC$ , und eben so für die Seitenfläche, welche durch  $BC$  geht (beide diese Ebenen stehen perpendicular auf der Ebene  $ABC$ ), 2<sup>tens</sup> derjenige Werth des Winkels  $ACB$  am Keil, für welchen die erste dieser beiden mittleren Kräfte ein Maximum wird, 3<sup>tens</sup> der Ort dieser mittleren Kraft, 4<sup>tens</sup> wenn die beiden auf einer horizontalen Ebene liegenden Prismen  $DG$  und  $EJ$  bloß durch ihr eigenes Gewicht in ihrer unverschiebbaren Lage erhalten werden sollen, die Gewichte dieser Prismen, und 5<sup>tens</sup> die Gröfse der Basis  $CG$  des erstern Prisma, damit in demselben keine Drehung um die durch  $G$  gehende Kante Statt finden kann.

### Auflösung zu 1.

Bezeichnet man das Gewicht des Keils  $ABC$  durch  $Q$ , die mittlere Kraft sämmtlicher Normalpressungen auf die senkrechte Seitenfläche  $AC$  mit  $x$ , so wie die mittlere Kraft der Normalpressungen auf die schiefe Seitenfläche  $BC$  durch  $y$ , den Reibungscoefficienten für die erstere Fläche  $AC$  mit  $\mu$ , jenen für die letztere  $BC$  mit  $\mu'$  und den W.  $ACB$  mit  $\alpha$ ; so wird, wenn man  $y$  in die beiden nach den in Fig. 23. *a* durch die Pfeile angedeuteten Richtungen auf einander senkrechten (horizontal und vertical) Seitenkräfte  $r$  und  $s$  zerlegt, sofort

$$r = y \cos \alpha \text{ und } s = y \sin \alpha \dots (m)$$

Zerlegt man ferner die aus dieser Kraft  $y$  entspringende, in der Richtung  $MB$  (Fig. 23. *b*) wirksame Reibung  $\mu' y$  in zwei eben solche Seitenkräfte  $v$  und  $u$ , so wird

$$u = \mu' y \cos \alpha \text{ und } v = \mu' y \sin \alpha \dots (n)$$

Da nun für das verlangte Gleichgewicht sowohl die horizontalen als auch die vorhandenen verticalen Kräfte für sich im Gleichgewichte stehen müssen, so hat man

$$x = r - v \text{ und } Q = u + s + \mu x,$$

d. i. wenn man die Werthe aus (m) und (n) substituirt:

$$x = y \cos \alpha - \mu' y \sin \alpha \dots (1)$$

und

$$Q = \mu' y \cos \alpha + y \sin \alpha + \mu x \dots (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man ganz einfach die Werthe für  $x$  und  $y$ , und zwar wird, wenn man Kürze halber den gemeinschaftlichen Nenner:

$\mu + \mu' + (1 - \mu\mu') \tan \alpha = N$   
 setzt, sofort:

$$x = \frac{1 - \mu' \tan \alpha}{N} Q$$

und

$$y = \frac{\text{Sec } \alpha}{N} Q.$$

Setzt man die Höhe des Keils  $AC = h$ , die Länge der horizontalen durch  $A, B, C$  gehenden Seitenkanten desselben  $= l$  und das Gewicht der cubischen Einheit des Keils  $= q$ ; so ist, wegen

$Q = \frac{1}{2} q l h^2 \tan \alpha$  auch

$$x = \frac{q l h^2 (1 - \mu' \tan \alpha) \tan \alpha}{2 N} \dots (3)$$

$$y = \frac{q l h^2 \text{Sec } \alpha \tan \alpha}{2 N} \dots (4)$$

### Auflösung zu 2.

Um den Winkel  $\alpha$  für den größten Werth von  $x$  zu finden, darf man nur in der vorigen Gleichung (3) den Werth von  $N$  herstellen, hierauf nach der bekannten Regel den Differenzialquotienten  $\frac{dx}{d\alpha}$  ausdrücken und aus der Gleichung  $\frac{dx}{d\alpha} = 0$  den Werth von  $\tan \alpha$  bestimmen; man findet so ohne Schwierigkeit

$$\tan \alpha = - \frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'} + \frac{\sqrt{[\mu'(\mu + \mu')(1 + \mu\mu')]} }{\mu'(1 - \mu\mu')} \dots (5)$$

für welchen Werth von  $\alpha$  die mittlere Pressung  $x$  in der That ein Maximum wird, weil dafür der 2<sup>te</sup> Differenzialquotient  $\frac{d^2x}{d\alpha^2}$  negativ ausfällt.

### Auflösung zu 3.

Setzt man die Höhe der Prismen  $CD = a$  (Fig. 23) und für einen beliebigen Punct  $M$  der Seite  $DC$  die Abscisse  $DM = x$ , so wie  $Mm = dx$ ; so folgt für den im Puncte  $M$  Statt findenden Normaldruck aus der Gleichung (3), in welcher jetzt alles bis auf  $h$ , wofür  $x$  gesetzt werden muß, constant ist:

$$x = A x^2,$$

wenn man nämlich Kürze halber den constanten Factor mit  $A$  bezeichnet. Daraus folgt für die Normalpressung auf den unendlich schmalen Streifen von der Höhe  $Mm = dx$  und der Breite  $l$ , der Werth  $dx = 2Ax dx$ ,

und wenn man den Punct  $D$  als Mittelpunkt der stat. Momente ansieht, so ist das stat. Moment dieses Druckes:

$$dM = z dx = 2 A z^2 dz.$$

Man erhält daher aus dieser Gleichung für die Summe der stat. Momente sämmtlicher von  $D$  bis  $C$  vorkommender Pressungen durch Integration:

$$M = 2A \int_0^a z^2 dz = \frac{2}{3} A a^3.$$

Ist ferner  $O$  der gesuchte Ort der mittlern Kraft  $x$  (wenn die verticale Ebene  $FJ$  durch die halbe Länge  $l$  des Keils gedacht wird) und dafür  $DO = X$ , so ist auch  $M = X \cdot x = X A a^2$  (aus Relat. 3, in welcher  $a$  statt  $h$  zu setzen ist) folglich  $X A a^2 = \frac{2}{3} A a^3$  und daraus

$$X = \frac{2}{3} a \dots (6)$$

#### Auflösung zu 4.

Es seyen  $P$  und  $Q$  die gesuchten Gewichte der beiden Prismen  $CF$  und  $CH$ , so wie  $\mu''$  der Reibungscoefficient derselben mit der horizontalen Ebene, worauf diese Prismen ruhen und verschiebbar sind; so hat man für das Gleichgewicht zwischen dem Keil und dem Prisma  $CF$  offenbar:

$$\mu'' P = x \text{ und daraus } P = \frac{x}{\mu''} \dots (7)$$

wobei für  $x$  der Werth aus der Gleichung (3) zu nehmen ist.

Ferner ist für das Prisma  $CH$ , wenn man sich die Kraft  $y$  in Fig. 23.  $a$  in entgegengesetzter Richtung wirkend vorstellt (um die nöthige Gegenwirkung von Seite des Prisma  $Q$  zu erhalten) und daher auch die Seitenkräfte  $r = y \cos \alpha$  und  $s = y \sin \alpha$  (Relat.  $m$ ) nach gerad entgegengesetzten Richtungen wirkend annimmt, sofort für's Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} \mu'' (Q + y \sin \alpha) &= y \cos \alpha, \text{ woraus} \\ Q &= \frac{(\cos \alpha - \mu'' \sin \alpha)}{\mu''} y \dots (8) \end{aligned}$$

folgt, und wobei der Werth von  $y$  aus der Relation (4) zu setzen ist.

#### Auflösung zu 5.

Setzt man die gesuchte Dimension  $CG = u$ , so muß für das Gleichgewicht der Stabilität des Prisma  $CF$  mit dem durch  $O$  gehenden horizontalen Drucke  $x$ , damit nämlich um den Punct  $G$  keine Drehung entsteht, die Gleichung bestehen:

$x \cdot CO = P \cdot \frac{1}{2} CG$  d. i. mit Rücksicht auf die Relation (6):

$$\frac{1}{3} ax = \frac{1}{2} uP \text{ oder } 2ax = 3uP,$$

und wenn man die Länge des Prisma (die auf der Ebene  $GD$  senkrechte Dimension) gleich jener des Keils, d. i.  $= l$  und das Gewicht der cubischen Einheit  $= q'$  setzt, wodurch  $P = q'alu$  wird, auch  $2ax = 3atlq'u^2$ , woraus endlich

$$u = \sqrt{\left(\frac{2x}{3lq'}\right)} \dots (9)$$

folgt, in welchem Ausdrücke für  $x$  der Werth aus (3) zu setzen ist.

Nach der vorigen Relation (7) muß, um der 4<sup>ten</sup> Bedingung zu entsprechen (man setzt nämlich  $P = q'alu$ ),

$$u = \frac{x}{u''alq'} \dots (10)$$

seyn, so, dafs man also, um beiden Bedingungen 4 und 5 zugleich zu entsprechen, von diesen beiden, aus (9) und (10) ausgedrückten Werthen  $u$  den gröfseren beibehalten muß.

### 18. Aufgabe.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes für die mit ihren ebenen Flächen aufeinander liegenden Steine eines Tonnengewölbes  $ABM'N'$  (Fig. 24) zu bestimmen, wenn in den Fugen weder Reibung noch Cohäsion Statt findet und sich dabei der oberste Stein gegen eine verticale Wand, und der unterste gegen eine feste Widerlage stützt\*).

\*) Da die Definition der Gewölbe erst in der Baukunst vorkommt, so wollen wir hier zur gröfseren Verständlichkeit darüber Folgendes vorausschicken. Stellt Fig. 24 den verticalen Durchschnitt von der Hälfte eines Gewölbes vor, so heifsen die aufeinander liegenden keilförmigen Steine  $AB_1, A_1B_2 \dots$  Gewölbsteine; die ebenen Flächen, mit welchen sich diese Steine berühren die Bindungs- oder Lagerflächen, so wie deren Grenzlinien  $AB, A_1B_1 \dots$  Fugen. Diejenige Masse  $M'S$ , von welchem das Gewölbe getragen wird, oder gegen welche sich der Untertheil desselben stützt, heifst die Widerlage, bei Brücken der Stirnpfeiler, oder wenn sich zwei neben einander befindliche Gewölbe darauf stützen, der Pfeiler. Der zunächst an der Widerlage befindliche Theil des Gewölbes heifst der Anfang, der unterste Gewölbstein  $M'N$  der erste und der oberste  $AB_1$  der Schlußstein des Gewölbes. Die concave Fläche des Gewölbes, welche durch die Durchschnittslinie  $BB_1N'N'$  geht, heifst die innere Wölbung (*Intrados*), so wie jene, welche durch die obere Linie  $AA_1MM'$  geht, die äufsere Wölbung (*Extrados*),

## 1. Auflösung.

I. Es seyen  $O, O_1, O_2 \dots$  die in ein und derselben verticalen Ebene liegenden Schwerpunkte der Steine  $AB_1, A_1B_2 \dots$ , ihre Gewichte der Reihe nach  $G, G_1, G_2 \dots$  und die Winkel, welche die Fugen  $A_1B_1, A_2B_2 \dots$  mit der Verticalen  $AZ$  bilden, eben so  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ .

Zerlegt man die im Punkte  $O$  vertical wirkende Kraft  $G$  in eine horizontale Seitenkraft  $S$  nach  $OD$  und in eine zweite  $N$  normal auf die Fuge  $A_1B_1$  nach  $OD_1$ ; so hat man wegen  $G:S:N = \sin \alpha : \cos \alpha : 1$  sofort:

$$S = G \cot \alpha \text{ oder } G = S \tan \alpha \text{ und } N = \frac{G}{\sin \alpha} \dots (a)$$

Zerlegt man ferner eben so die durch  $O_1$  gehende verticale Kraft  $G_1$  nach  $O_1D_1$  normal auf die Fuge  $A_1B_1$  und  $O_1D_2$  normal auf die folgende Fuge  $A_2B_2$ ; so folgt, wenn man diese beiden Seitenkräfte mit  $N_1$  und  $N_2$  bezeichnet, aus der Proportion

$$N_1 : N_2 : G_1 = \sin(90 - \alpha_1) : \sin(90 - \alpha) : \sin(\alpha_1 - \alpha)$$

sofort

$$N_1 = \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} G_1 \text{ und } N_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} G_1$$

Auf gleiche Weise erhält man durch Fortsetzung dieses Verfahrens, d. h. wenn man die in  $O_2$  wirksame Kraft  $G_2$  in zwei Seitenkräfte  $N_3$  und  $N_4$ , beziehungsweise normal auf die Fugen  $A_2B_2$  und  $A_3B_3$  zerlegt:

$$N_3 = \frac{\cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} G_2 \text{ und } N_4 = \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} G_2 \text{ u s. w.}$$

Sollen nun diese mit ihren absolut glatten Fugen oder Flächen aneinander liegenden Steine in jeder Beziehung im Gleichgewichte bleiben; so müssen die gegenseitigen Normalpressungen nicht nur einander gerade entgegengesetzt, sondern auch paarweise einander gleich seyn, d. h. es müssen die Bedingungsgleichungen Statt finden:

die genannten beiden Linien die Wölbungslinien,  $B$  und  $A$  ihre Scheiteln.

Bilden die Wölbungsflächen cylinderische Flächen, so heist das Gewölbe ein Tonnengewölbe und zwar ein horizontales, wenn ihre Achse horizontal ist. Die bei diesen Gewölben noch vorkommenden beiden verticalen Flächen werden Stirnflächen genannt, und je nachdem diese Flächen auf der geometrischen Achse der innern cylinderischen Fläche recht- oder schiefwinkelig stehen, heist ein solches Tonnengewölbe auch noch ein gerades oder schiefes Gewölbe. Nur von diesen erstern ist hier in der vorliegenden Aufgabe die Rede, weshalb wir auch die Definitionen der Gewölbe nicht weiter fortsetzen wollen.

$$N = N_1, N_2 = N_3, N_4 = N_5 \text{ u. s. w.}$$

oder wenn man für  $N, N_1 \dots$  die gefundenen Werthe setzt:

$$\frac{G}{\sin \alpha} = \frac{G_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}, \quad \frac{G_1 \cos \alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)} = \frac{G \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\frac{G_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{G_3 \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \text{ u. s. w.}$$

Löst man in der ersten dieser Gleichungen  $\sin(\alpha_1 - \alpha)$  auf, dividirt Zähler und Nenner mit  $\cos \cdot \cos \alpha_1$  und bestimmt dann  $G_1$ ; so erhält man:

$$G_1 = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha}{\tan \alpha} G.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus den übrigen Bedingungsgleichungen:

$$G_2 = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha} G_1, \quad G_3 = \frac{\tan \alpha_3 - \tan \alpha_2}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} G_2 \text{ u. s. w.}$$

Da aber (obige Relation a)  $G = S \tan \alpha$  ist, so folgt auch

$$G_1 = S(\tan \alpha_1 - \tan \alpha) \quad (1)$$

und wenn man diesen Werth in der nächsten Gleich. setzt:

$$G_2 = S(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) \text{ und eben so:}$$

$$G_3 = S(\tan \alpha_3 - \tan \alpha_2) \text{ u. s. w.}$$

Es verhalten sich also bei einem im Gleichgewichte befindlichen Gewölbe die Gewichte der einzelnen Gewölbsteine, wie der Unterschied der Tangenten der Winkel, welche ihre Fugen mit der Verticallinie bilden.

II. Aus diesen letzteren Relationen folgt auch:

$$(2) \quad \begin{cases} S \tan \alpha = G \\ S \tan \alpha_1 = G + G_1 \\ S \tan \alpha_2 = G + G_1 + G_2 \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Ist  $Q$  das Gewicht des Gewölbobogens  $AMNB$ , dessen oberste Fuge  $AB$  vertical ist und wobei die unterste Fuge  $MN$  mit der Verticalen den Winkel  $\varphi$  bildet; so ist nach diesen letztern Relationen (2):

$$S \tan \varphi = G + G_1 + G_2 + \dots = Q$$

oder

$$S = Q \cot \varphi \quad (3)$$

wobei  $S$  den horizontalen Schub im Scheitel bezeichnet.

Ist  $Q'$  das Gewicht des auf das Gewölbstück  $Q$  folgenden Gewölbsteines und  $\varphi'$  der Winkel, welchen dessen untere Fuge mit der Verticalen bildet; so ist eben so

$$S \tan \varphi' = Q + Q' \text{ also } Q + Q': Q = \tan \varphi': \tan \varphi$$

oder

$$Q': Q = (\tan \varphi' - \tan \varphi): \tan \varphi \quad (4)$$

III. Bilden endlich die beiden Fugen  $MN$ ,  $M'N'$  eines Gewölbsteines vom Gewichte  $Q'$  mit der Verticallinie die Winkel  $\varphi$  und  $\varphi'$ ; so ist der Normaldruck auf den nach unten zunächst folgenden Gewölbstein

$$N = \frac{Q' \cos \varphi}{\sin(\varphi' - \varphi)} \quad (\text{vergleiche den obigen Ausdruck } N_2).$$

Zerlegt man diesen Druck  $N$  in einen horizontalen  $S'$  und verticalen  $D$ , so ist  $S' = N \cos \varphi'$  und  $D = N \sin \varphi'$ , oder wenn man für  $N$  den Werth setzt:

$$S' = \frac{Q' \cos \varphi \cos \varphi'}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{Q'}{\tan \varphi' - \tan \varphi} \quad \dots (s)$$

oder wegen

$$Q' = S(\tan \varphi' - \tan \varphi)$$

(wie aus der Gleichung (4) folgt, wenn man für  $Q$  seinen Werth  $S \tan \varphi$  setzt) auch:

$$S' = S \quad (5)$$

und

$$D = \frac{Q' \sin \varphi' \cos \varphi}{\sin(\varphi' - \varphi)} = \frac{Q' \tan \varphi'}{\tan \varphi' - \tan \varphi}$$

oder wegen  $Q' : Q' + Q = \tan \varphi' - \tan \varphi : \tan \varphi'$  (was ebenfalls aus

Gleich. 4 folgt) woraus man erhält  $\frac{Q' \tan \varphi'}{\tan \varphi' - \tan \varphi} = Q' + Q$  auch

$$D = Q + Q'. \quad (6)$$

Anmerkung. Alle diese Relationen sind für sich klar und begründen gewisse Eigenschaften der Gewölbe, bei welchen die absolut glatten Gewölbsteine für sich im Gleichgewichte sind; so folgt z. B. aus der Relation (5), daß der horizontale Druck oder Schub in jeder Fuge also auch in der letzten an der Widerlage constant, und zwar dem horizontalen Drucke gleich ist, welchen das Gewölbe gegen die am Scheitel befindliche verticale Fuge ausübt; die Gleichung (6) dagegen sagt aus, daß der verticale Druck eines jeden Gewölbstücks, dieses vom Scheitel an gerechnet, gegen die darunter befindliche Fuge, dem Gewichte dieses Gewölbstückes gleich ist u. s. w.

## 2. Auflösung.

Zieht man aus irgend einem Punkte  $C$  (Fig. 25) der Verticallinie  $AZ$  die Geraden  $CT$ ,  $CT_1$ ,  $CT_2 \dots$  beziehungsweise parallel mit den Fugen  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3 \dots$ ; so steht  $CT$  perpendicular auf der Richtung  $Ob$  des Normaldruckes gegen die Fuge  $A_1B_1$ ,  $CT_1$  perpendicular auf der Richtung  $O_1c$  des Normaldruckes gegen die Fuge  $A_2B_2$  u. s. w.

Ist ferner  $EF$  horizontal, also senkrecht auf die Richtung der Kraft  $G$ , so verhalten sich (mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung)

die 3 Kräfte  $G$ ,  $S$ ,  $N$  wie die Seiten  $OJ$ ,  $OD$ ,  $OD_1$  des Dreieckes  $ODJ$  (Fig. 25. a) d. h. es ist

$$G : S : N = OJ : OD, OD_1,$$

oder da dieses Dreieck jenem  $CTE$  ähnlich ist (indem die Seiten wechselseitig aufeinander senkrecht stehen) auch  $G : S : N = ET : CE : CT$ ;

daraus folgt 
$$\frac{G}{N} = \frac{ET}{CT} \text{ und } \frac{G}{S} = \frac{ET}{CE}.$$

Genau eben so erhält man aus den folgenden Dreiecken:

$$\frac{G_1}{N_1} = \frac{TT_1}{CT_1}, \quad \frac{G_2}{N_2} = \frac{T_1T_2}{CT_2} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man ferner in Fig. 25 den horizontalen Druck  $Oa = S$ , den Normaldruck gegen die Fuge  $A_1B_1$ , d. i.  $Ob = N_1$ , jenen  $O_1b = \mathfrak{N}$ , den Normaldruck gegen die Fuge  $A_2B_2$ , d. i.  $O_1c = N_1$  und jenen  $O_2c = \mathfrak{N}_1$  u. s. f., so hat man nach den eben entwickelten Relationen:

$$\frac{G}{N} = \frac{ET}{CT} \quad (1), \quad \frac{G_1}{\mathfrak{N}} = \frac{TT_1}{CT_1} \quad (2), \quad \frac{G_1}{N_1} = \frac{TT_1}{CT_1} \quad (3),$$

$$\frac{G_2}{\mathfrak{N}_1} = \frac{T_1T_2}{CT_1} \quad (4), \quad \frac{G_2}{N_2} = \frac{T_1T_2}{CT_2} \quad (5) \text{ u. s. w.}$$

Da nun fürs Gleichgewicht der Gewölbsteine  $N = \mathfrak{N}$ ,  $N_1 = \mathfrak{N}_1$ ,  $N_2 = \mathfrak{N}_2$  u. s. w. seyn muß, so erhält man durch Division der Relation

(1) durch (2), d. i. 
$$\begin{aligned} (1) : & \frac{G}{N} = \frac{ET}{CT} \\ (2) : & \frac{G_1}{\mathfrak{N}} = \frac{TT_1}{CT_1} \\ \text{eben so} & (3) : \frac{G_1}{N_1} = \frac{TT_1}{CT_1} \text{ u. s. w.} \\ & (4) : \frac{G_2}{\mathfrak{N}_1} = \frac{T_1T_2}{CT_1} \end{aligned}$$

oder da, wenn man  $CE = 1$  nimmt,  $ET = \tan \alpha$ ,  $TT_1 = ET_1 - ET = \tan \alpha_1 - \tan \alpha$ ,  $T_1T_2 = ET_2 - ET_1 = \tan \alpha_2 - \tan \alpha_1$  u. s. w. ist, auch:

$$\frac{G}{S} = \frac{\tan \alpha}{1}, \quad \frac{G}{G_1} = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_1 - \tan \alpha}, \quad \frac{G_1}{G_2} = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \text{ u. s. f.}$$

daraus folgt wieder, wie in der 1. Auflösung:

$$G = S \tan \alpha, \quad G_1 = S (\tan \alpha_1 - \tan \alpha) \text{ u. s. w.}$$

Es ist ferner, wie leicht zu sehen:

$$S : N : N_1 : N_2 \dots = CE : CT : CT_1 \dots = 1 : \sec \alpha : \sec \alpha_1 : \sec \alpha_2 \dots$$

Bildet also irgend eine Fuge mit der Verticalen den Winkel  $\varphi$ , so ist der Normaldruck  $N'$  auf diese Fuge, wegen  $S : N' = 1 : \sec \varphi$  sofort

$$N' = S \sec \varphi = \frac{S}{\cos \varphi}.$$

Da überdieß noch  $G : G_1 : G_2 \dots = ET : TT_1 : T_1T_2 \dots$  Statt findet, so drückt z. B.  $ET_2$  das Gewicht  $Q = G + G_1 + G_2$  des Gewölbstückes  $AA_3B_3B$  aus und es ist daher, wenn die Fuge  $A_3B_3$  mit der Verticalen den W.  $\varphi$  bildet:



$$G : Q = ET : ET_2 = \tan \alpha : \tan \varphi, \text{ woraus}$$

$$Q = \frac{G \tan \varphi}{\tan \alpha} \text{ oder wegen } G = S \tan \alpha \text{ wieder, wie oben}$$

$$Q = S \tan \varphi \text{ folgt.}$$

Anmerkung. Da für eine horizontale Fuge  $\varphi = 90^\circ$  wird, so ist dafür  $Q = \infty$ , d. h. das Gewicht des über einer Fuge befindlichen Gewölbstückes, dieses von der betreffenden Fuge bis zum Scheitel gerechnet, muß, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, um so größeres seyn, je mehr sich der Winkel, welchen diese Fuge mit der Verticallinie bildet, einem Rechten nähert; für eine horizontale Fuge kann (unter den gemachten Voraussetzungen) das Gleichgewicht bei keinem, auch noch so großen Gewichte des darüber stehenden Gewölbogens bestehen.

### 19. Aufgabe.

Es soll die Dicke eines Tonnengewölbes  $ABRS$  (Fig. 26), d. i. die Höhe der einzelnen Gewölbsteine gefunden werden, wenn die sämtlichen Fugen auf der innern Gewölbslinie  $AMR$  perpendicular stehen und das Gleichgewicht besteht, ohne daß zwischen den einzelnen Gewölbsteinen eine Reibung oder Cohäsion Statt findet.

#### Auflösung.

Es sey  $Mn$  irgend ein Gewölbstein, dessen obere Fuge  $MN$  mit der Verticalen den Winkel  $\varphi$ , dagegen die untere jenen  $nCZ = \varphi + \alpha$  bildet; ferner sey  $G$  das Gewicht dieses Gewölbsteins und  $S$  wieder der constante horizontale Schub des Gewölbes.

Dies vorausgesetzt, ist (vorige Aufgabe, III. Gleich. s):

$$\frac{G}{S} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi \cos (\varphi + \alpha)}$$

und wenn man sich (wodurch das Gleichgewicht nicht beeinträchtigt wird) den Gewölbstein so dünn, also den Winkel  $\alpha$  so klein vorstellt, daß man  $\sin \alpha = \alpha$  und  $\cos (\varphi + \alpha) = \cos \varphi$  setzen kann, auch:

$$\frac{G}{S} = \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi} \cdot \cdot (a)$$

Ist ferner  $\rho = CM$  der Krümmungshalbmesser der innern Gewölbslinie  $AMR$  für den betreffenden Punct  $M$ , so ist  $Mm = \rho \alpha$ , folglich, wenn man die gesuchte Länge der Fuge  $MN = x$  setzt, sofort

$$Nn = (\rho + x) \alpha,$$

und daher, wenn man die Stirnfläche dieses Gewölbsteines  $NMmn = f$  setzt:

$$f = \frac{1}{2} CN \cdot Nn - \frac{1}{2} CM \cdot Mm = \frac{1}{2} [(\rho + x)^2 \alpha - \rho^2 \alpha].$$

So wie diese Fläche  $f$  dem Gewichte  $G$  des Gewölbsteins  $Mn$  proportional ist (weil das Gewölbe durchaus gleiche Länge oder Tiefe hat) oder demselben entspricht, eben so läßt sich eine Fläche  $f'$  angeben, welche dem horizontalen Schub oder Druck  $S$  gegen die verticale Fuge oder Ebene entspricht; es darf dazu bloß  $f'$  aus der Proportion  $f:f' = G:S$  bestimmt werden, so, daß also  $\frac{G}{S} = \frac{f}{f'}$ , oder wenn man die Dicke des Gewölbes im Scheitel, d. i.  $AB = a$  und  $f' = ab$  setzt, wobei  $b$  noch eine unbestimmte Constante bezeichnet, auch  $\frac{G}{S} = \frac{f}{ab}$ , oder wenn man für  $f$  den vorigen Werth setzt:

$$\frac{G}{S} = \frac{\alpha}{2ab} [(\rho + \varkappa)^2 - \rho^2]$$

wird. Dieser Quotient dem obigen (a) gleichgesetzt, erhält man:

$$\alpha [(\rho + \varkappa)^2 - \rho^2] = \frac{2ab\alpha}{\cos \varphi^2}$$

und daraus ganz einfach:

$$\varkappa = -\rho + \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{2ab}{\cos \varphi^2}\right)}. \quad (b)$$

Setzt man den Krümmungshalbmesser für den Scheitel  $A$  gleich  $r$ , so wird, da in diesem Punkte  $\varkappa = a$ ,  $\rho = r$  und  $\varphi = 0$  ist, wenn man diese Gleichung (b) auf den Scheitel des Gewölbes anwendet:

$$a = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2ab}{1}\right)} \text{ und daraus } (a+r)^2 = r^2 + 2ab$$

oder  $2ab = a^2 + 2ar$ , so, daß wenn man diesen Werth für  $2ab$  in der vorigen Gleichung (b) substituirt, auch

$$\varkappa = -\rho + \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{a^2 + 2ar}{\cos \varphi^2}\right)}. \quad (c) \text{ wird.}$$

Ist  $p$  das Gewicht der cubischen Einheit des Gewölbes, so ist nach der gemachten Voraussetzung  $S = f'p = abp$ , folglich auch  $ab = \frac{S}{p}$  und daher  $2ab = a^2 + 2ar = \frac{2S}{p}$ , also auch

$$\varkappa = -\rho + \sqrt{\left(\rho^2 + \frac{2S}{p \cos \varphi^2}\right)}. \quad (d)$$

so wie

$$S = \frac{1}{2}(a^2 + 2ar)p. \quad (e)$$

Zusatz. Ist die innere Wölbungslinie ein Kreis, so ist  $\rho = r$  constant, folglich die Dicke des Gewölbes:

$$\varkappa = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{a^2 + 2ar}{\cos \varphi^2}\right)}.$$

Für den Scheitel wird  $\varphi = 0$  und daher, wie es seyn soll,  $\varkappa = a$ ; für die weiter davon entfernten Punkte, wird, da  $\cos \varphi$  abnimmt und

sich immer mehr der Nulle nähert,  $\approx$  fortwährend gröfser, und wird endlich für eine horizontale Fuge, wofür  $\varphi = 90^\circ$ , also  $\text{Cos } \varphi = 0$  ist, Unendlich (was mit der Anmerkung der vorigen Aufgabe übereinstimmt).

## 20. Aufgabe.

Es soll bei der bisherigen Voraussetzung, dafs die Gewölbsteine unter sich ohne Reibung und Cohäsion im Gleichgewichte sind, die Dicke  $ED$  des Widerlagers  $DF$  (Fig. 27) bestimmt werden, welches mit dem Drucke des Gewölbobogens  $ABGF$  im Gleichgewichte steht, vorausgesetzt, dafs die als eine einzige Masse angesehene Widerlage an ihrer Basis  $DE$  nicht ausgleiten oder abrutschen kann.

### 1. Auflösung.

Es sey der Winkel, welchen die an der Widerlage befindliche Fuge  $GF$  mit der Verticalen bildet  $FCA = \alpha$ , das Gewicht des Gewölbobogens  $BF$  (als die Hälfte des ganzen Gewölbes)  $= Q$ , ferner  $AB = b$ ,  $FG = b'$ ,  $NJ = h$  (wobei  $GN = NF$ ) und die gesuchte Dicke der Widerlage  $DE = x$ .

Besteht die Widerlage aus einem Materiale von demselben specifischen Gewichte wie das Gewölbe und ist  $p$  das Gewicht der cubischen Einheit, so kann man für eine Gewölblänge (senkrecht auf die Stirnfläche  $GFAB$  verstanden)  $= 1$ , wenn man die Fläche  $ABGF = F$  und Fläche  $DGE = DE \times JN = hx$  setzt, sofort das Gewicht des Gewölbobogens  $Q = pF$  und das Gewicht der Widerlage oder des Pfeilers  $q = phx$  setzen.

Nun bringt das Gewölbe auf die Widerlage den verticalen Druck  $Q$  und den horizontalen Schub (18. Aufgabe, Relat. 3)  $S = Q \text{ Cot } \alpha$  hervor, und da diese letztere, nach  $Nn$  gerichtete Kraft, den Pfeiler oder die Widerlage um den Punct  $D$  (d. i. um die durch diesen Punct gehende Längenkante) umzustürzen strebt; so mufs, wenn man  $Fm$  perpendicular auf  $NJ$  zieht, und wenn  $O$  der Schwerpunkt der Widerlage, so wie  $OH$  eine durch diesen Punct gezogene Verticallinie ist, für das Gleichgewicht

$$q \cdot DH + Q \cdot DJ = S \cdot NJ$$

seyen. Da nun  $DH = \frac{1}{2}x$ ,  $DJ = x - Fm = x - \frac{1}{2}b' \text{ Sin } \alpha$ ,  $NJ = h$  und  $S = Q \text{ Cot } \alpha$  ist, so folgt  $\frac{1}{2}qx + Qx - \frac{1}{2}Qb' \text{ Sin } \alpha = hQ \text{ Cot } \alpha$ , oder wenn man für  $q$  und  $Q$  die Werthe setzt:

$$\frac{1}{2}phx^2 + pFx - \frac{1}{2}pb'F \text{ Sin } \alpha = pFh \text{ Cot } \alpha$$

Wird diese Gleichung nach  $x$  aufgelöst, so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$x = \frac{-F + \sqrt{[F(F + b'h \sin \alpha + 2h^2 \cot \alpha)]}}{h}$$

Zusatz. Ist die innere Wölbungslinie ein Kreisbogen vom Halbmesser  $r$ , so ist (vorige Aufgabe, Zusatz)

$$b' = -r + \sqrt{\left(r^2 + \frac{2rb + b^2}{\cos \alpha^2}\right)}$$

und (eben dort wo  $f = \frac{G}{S} ab = ab \tan \varphi$  wegen (3) in Aufgabe 18 war)

$$F = \frac{2rb + b^2}{2} \tan \alpha \text{ in der vorigen Gleichung von } x \text{ zu substituiren}$$

## 2. Auflösung.

I. Um zuerst den horizontalen Schub gegen das Widerlager zu bestimmen, denke man sich den Druck auf die Fläche  $GF$  (Fig. 28) in dem Punkte  $M$  concentrirt und  $KM$  als die Richtung dieser Kraft  $N$ . Eben so sey  $C$  jener Punkt, in welchem man sich den Druck  $S$  in der verticalen Fuge  $AB$  vereint denken kann, so wie  $KC$  ihre (horizontale) Richtung; ferner sey  $O'$  der Schwerpunkt der Gewölbshälfte  $ABFG$  und  $KV$  eine durch diesen Punkt gezogene Verticallinie. Diefs vorausgesetzt, so muß dem nach der Richtung  $KL$  wirkenden Gewichte  $Q$  des Gewölbobogens durch die beiden den daraus entspringenden Kräften  $KC = S$  und  $KM = N$  entgegen wirkenden Pressungen (nach dem Satze der gleichen Wirkung und Gegenwirkung) das Gleichgewicht gehalten werden. Ist daher  $ML$  eine horizontale Linie, so verhalten sich diese 3 Kräfte  $Q, S, N$  wie die Seiten des Dreieckes  $MLK$ , so, daß wenn  $KL$  das Gewicht oder die Kraft  $Q$  vorstellt, sofort  $MK = N$  den auf die Fuge  $GF$  Statt findenden Druck und  $ML = S$  den horizontalen Schub oder Druck gegen das Widerlager bezeichnet; es ist daher fürs Gleichgewicht dieser 3 Kräfte:

$$Q : S : N = KL : ML : KM,$$

also 
$$S = \frac{ML}{KL} Q \text{ und } N = \frac{KM}{KL} Q$$

und zwar finden diese Ausdrücke unter allen Bedingungen, also auch dann Statt, wenn in der Fuge  $GF$  irgend eine Reibung oder Cohäsion angenommen wird. Setzt man dagegen wieder wie bisher eine absolut glatte Fuge ohne Reibung und Cohäsion voraus, so muß fürs Gleichgewicht die Richtung der Kraft  $N$ , d. i.  $KM$  auf die Richtung der

Fuge  $GF$  normal seyn; bildet daher die Fuge  $GF$  mit der Verticalen den  $W. GVK = \alpha$ , so ist auch  $W. KML = \alpha$  und daher

$$\frac{ML}{KL} = \text{Cot } \alpha \text{ und } \frac{KM}{KL} = \frac{1}{\text{Sin } \alpha},$$

folglich

$$S = Q \text{ Cot } \alpha \text{ und } N = \frac{Q}{\text{Sin } \alpha}.$$

Zerlegt man die normal auf  $GF$  wirkende Kraft  $N$  in eine horizontale Kraft  $P$  und in eine verticale  $D$ , so erhält man natürlich wieder

$$P = S \text{ und } D = Q.$$

II. Was weiters die Stabilität des Pfeilers oder Widerlagers betrifft, so steht dieser bekanntlich mit den Kräften, welche ihn umzuwerfen streben gerade noch im Gleichgewichte, wenn die Resultirende  $JR$  aus allen auf ihn einwirkenden Kräften durch den Punct  $D$  geht, um welchen das Umstürzen Statt finden kann; außerdem muß, wenn der Pfeiler  $DEG$  nur durch die Reibung vom Gleiten auf dem horizontalen Boden verhindert wird, der Winkel  $RJH = \varphi$ , welchen diese Resultante mit der Verticalen bildet, kleiner als der sogenannte Reibungswinkel seyn. Denn ist  $R$  die Gröfse dieser Mittelkraft und  $\mu$  der Reibungscoefficient des Pfeilers oder Widerlagers auf seiner Basis  $DE$ , so ist, wenn man  $R$  in eine horizontale und eine verticale Seitenkraft zerlegt, die erstere  $p = R \text{ Sin } \beta$  und die letztere  $q = R \text{ Cos } \beta$ , folglich der Betrag der, der Kraft  $p$  entgegenwirkenden Reibung  $= \mu q = \mu R \text{ Cos } \beta$  und daher fürs Gleichgewicht  $p = q$ , d. i.  $R \text{ Sin } \beta = \mu R \text{ Cos } \beta$ , woraus  $\text{tang } \beta = \mu$ , also  $\beta$ , der Reibungswinkel ist.

Ist nun der vorhin genannte Winkel  $\varphi$  gröfser als jener  $\beta$ , so wird  $p > q$  und es findet ein Gleiten des Prisma in der Richtung  $ED$  Statt; es muß daher für die Stabilität hinsichtlich des Gleitens des Pfeilers

$$\text{tang } \varphi < \text{tang } \beta, \text{ d. i. } \frac{RH}{JH} < \mu \text{ (oder } \varphi < \mu) \text{ seyn.}$$

Nun erhält man aber die Resultirende  $R = JR$  aus den beiden durch die Schwerpunkte  $O$  und  $O'$  des Widerlagers und Gewölbogens wirkenden verticalen Kräften  $Q$  und  $q$ , so wie der durch den Scheitel  $C$  gehenden horizontalen Kraft  $S$ , indem man durch den Punct  $J$ , in welchem die durch  $O$  gezogene Verticallinie, die verlängerte Gerade  $KM$  schneidet,  $JT = S$  nach horizontaler und  $JH = Q + q$  nach verticaler Richtung abschneidet, daraus das Rechteck  $HT$  construirt und die Diagonale  $JR$  zieht; dadurch wird die vorige erste Bedingung:

$$\frac{S}{Q + q} < \mu \quad (1)$$

In Beziehung auf die zweite Bedingung, daß nämlich die Resultante  $JR$  durch die äußere Kante  $D$  des Pfeilers gehen soll, hat man, wenn die Gewölbshöhe  $KL = a$ , der Horizontalabstand  $FZ = c$ , die innere Pfeilerhöhe  $EF = h'$  und die Dicke der Widerlage  $DE = x$  gesetzt wird, für das Gleichgewicht in Beziehung auf den Momentenpunkt  $D$ :

$$S(a + h') = q(c + x) + Q \cdot \frac{1}{2} x,$$

oder wenn man wieder die mittlere Pfeilerhöhe  $MU = h$  und das Gewicht der cubischen Einheit der Widerlage  $= p$  setzt, wodurch für jeden Fufs Länge des Pfeilers  $Q = phx$  wird, auch:

$$S(a + h') = q(c + x) + \frac{1}{2} phx^2 \dots (i)$$

woraus sofort

$$x = \frac{-q + \sqrt{\left\{ q^2 + 2ph[S(a + h') - qc] \right\}}}{ph} \dots (2)$$

folgt.

Anmerkung. Damit für die Dauer eine hinreichende Sicherheit gewonnen werde, und weil nach dieser Entwicklung die Stabilität des Pfeilers nur eben noch mit der Kraft, welche ihn umzustürzen strebt, im Gleichgewichte steht, nimmt man in dieser letztern Formel  $nS$  statt  $S$ , wo  $n > 1$  und zwar nach den Erfahrungen von *Audoy*,  $n = 1.9$  seyn soll.

Um den Pfeiler gegen das Gleiten zu sichern, muß nach der Bedingungsgleichung (1):  $Q + q > \frac{S}{\mu}$ , d. i.  $phx > \frac{S}{\mu} - q$  oder

$x > \frac{S - \mu q}{\mu ph}$  seyn; da nun in der Regel der erstere Werth (2) größer als dieser letztere ausfällt, so wird man in diesem Falle auch den erstern (im entgegengesetzten Falle diesen letztern) beibehalten.

Da man für sehr hohe Pfeiler  $h' = h$  setzen und in der obigen Relation (i)  $a$  gegen  $h'$  und  $q(c + x)$  gegen  $\frac{1}{2} phx^2$  auslassen kann, so erhält man unter dieser Voraussetzung  $Sh = \frac{1}{2} b h x^2$  und daraus eine Art von

Grenz- oder Maximalwerth für die Widerlagsdicke  $x = \sqrt{\frac{2S}{p}}$ , oder wenn man der vorigen Bemerkung gemäß  $1.9S$  statt  $S$  schreibt, auch

$$x = \sqrt{\frac{3.8S}{p}}.$$

## 21. Aufgabe.

Den Schwerpunkt einer Cycloide oder gemeinen Radlinie zu finden.

### Auflösung.

Es sey (Fig. 29)  $AB = a$  ein Durchmesser des Erzeugungskreises und zwar durch den Scheitel  $A$  der Cycloide  $DAD'$  auf ihre Grund-

linie  $DD'$  perpendicular gezo-gen, ferner seyen für irgend einen Punct  $M$  der Curve  $AP = x$  und  $PM (= PM') = y$  die rechtwinkligen Coordinaten. Die Differenzialgleichung dieser Curve ist, wenn  $AB = 2a$ ,  $DP' = x$  und  $P'M = y$  gesetzt wird (Comp. §. 726)  $dx = \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$ , folglich muß man in derselben um auf die hier angenommene Bezeichnung überzugehen  $a$  statt  $2a$ ,  $DB - BP' = \frac{1}{2}a\pi - y$  statt  $x$  und  $AB - AP = a - x$  statt  $y$  setzen; dadurch erhält man, nach einer einfachen Substitution und Reduction:

$$dy = \frac{(a-x) dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} \dots (\alpha)$$

Ferner erhält man für das Element des Bogens  $ds$ , wenn  $AM = s$  ist:  $ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dx \sqrt{\left[1 + \frac{(a-x)^2}{ax-x^2}\right]}$  wegen der vorigen Gleich. ( $\alpha$ ), und wenn man gehörig reducirt:

$$ds = dx \sqrt{\frac{a}{x}} \dots (\beta)$$

woraus sofort  $s = \sqrt{a} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{ax}$

ohne Constante folgt, weil für  $x = 0$  auch  $s = 0$  seyn muß.

Setzt man nun in die betreffenden beiden Gleichungen

$Xs = \int x ds$  und  $Ys = \int y ds$  der Relationen **I.** in Nr. **22**, für  $s$  und  $ds$  die vorigen Werthe, so erhält man:

$$2X\sqrt{ax} = \sqrt{a} \int x^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{und} \quad 2Y\sqrt{ax} = \sqrt{a} \int y x^{-\frac{1}{2}} dx$$

wobei diese Integrale so zu nehmen sind, daß  $s$  mit  $x$  zugleich verschwindet. Die erste Gleichung integrirt, gibt:

$$2X\sqrt{ax} = \frac{2}{3} x \sqrt{ax},$$

woraus  $X = \frac{1}{3} x \dots (1)$  folgt.

Um die zweite Gleichung zu integriren, benütze man das theilweise Integriren nach der Formel (Compend. §. 792)

$\int u dv = uv - \int v du$  und setze darin  $u = y$  und  $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ , woraus  $v = 2\sqrt{x}$  folgt; dadurch wird

$$\int \frac{y dx}{\sqrt{x}} = 2y\sqrt{x} - 2 \int dy \sqrt{x}$$

oder da, wenn man für  $dy$  den Werth aus ( $\alpha$ ) setzt,

$$\int dy \sqrt{x} = \int \frac{(a-x) dx}{\sqrt{(a-x)}} = \int dx \sqrt{(a-x)} = C - \frac{2}{3} (a-x)^{\frac{3}{2}}$$

wobei die Constante  $C$ , da das Integral für  $x=0$  verschwinden (also  $0 = C - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$  seyn) muß, den Werth  $\frac{2}{3} a \sqrt{a}$  hat, auch:

$$\int \frac{y \, dx}{\sqrt{x}} = 2y \, dx - \frac{4}{3} \left[ (a-x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right]$$

so, daß also durch Integration dieser zweiten Gleichung:

$$2Y \sqrt{ax} = \sqrt{a} \left[ 2y \sqrt{x} + \frac{4}{3} (a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} a \sqrt{a} \right]$$

und daraus  $Y = y + \frac{2}{3} \left[ \frac{(a-x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \right]$  . . (2) folgt.

Durch diese Coordinaten  $X$  und  $Y$  ist sofort der Schwerpunkt des Bogens  $AM$  bestimmt.

**Zusatz.** Für den gegen die Achse  $AB$  symmetrischen Bogen  $MAM'$  liegt der Schwerpunkt in der Achse  $AB$  selbst und zwar in einem Punkte  $O$ , wofür  $AO = \frac{1}{3} AP$  ist.

Für die halbe Cycloide  $AMD$  ist  $x=a$  und  $y = \frac{1}{2} a \pi$  zu setzen; mit diesen Werthen erhält man aus (1) und (2):

$$X = \frac{1}{3} a \quad \text{und} \quad Y = \left( \frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) a \quad (\text{oder nahe } \cdot 9 a).$$

## 22. Aufgabe.

Den Schwerpunkt des Bogens der gemeinen Kettenlinie zu finden.

### Auflösung.

Nimmt man die durch den tiefsten Punkt  $A$  (Fig. 30) der Kettenlinie  $DAD'$  gezogenen lothrechten Linie  $AB$  zur Abscissenachse und den Punkt  $A$  zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten, setzt also für irgend einen Punkt  $M$  der Curve  $AP = x$ ,  $PM = y$ , Bog.  $AM = s$  und wenn  $O$  der gesuchte Schwerpunkt des Bogens  $AM$  ist,  $AN = X$ ,  $NO = Y$ ; so hat man zuerst nach Nr. 43, Anmerk. 2:

$$b + x = \frac{1}{2} b \left( e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} \right) \quad \dots \quad (1)$$

folglich auch:

$$dx = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}} \right) dy \quad \dots \quad (\alpha)$$

und wegen  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{1}{4} \left( e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} \right)^2 dy^2$  sofort:

$$ds = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} \right) dy$$

also wenn man integrirt:



$$s = \frac{1}{2} b \left( e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}} \right) \dots (2)$$

und zugleich, wegen Relat. (a):

$$s = b \frac{dx}{dy} \dots (3)$$

Nun ist nach der oben genannten Relation  $Xs = \int x ds$  (Nr. 22)

oder  $Xs = xs - \int s dx$  und da (wegen Relat. a und Gleich. 2)

$$\begin{aligned} \int s dx &= \frac{1}{2} \int s dy \left( e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}} \right) = \frac{1}{4} b \int \left( e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}} \right)^2 dy = \\ &= \frac{1}{4} b \left[ \frac{1}{2} b \left( e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} \right) \left( e^{\frac{y}{b}} - e^{-\frac{y}{b}} \right) - 2y \right] = \frac{1}{4} b \left[ (b+x) \cdot \frac{2s}{b} - 2y \right] \\ &= \frac{1}{2} s (b+x) - \frac{1}{2} b y \end{aligned}$$

ist, auch:  $Xs = xs - \frac{(b+x)s}{2} + \frac{by}{2} = \frac{by + (x-b)s}{2}$ ,

woraus endlich: **I.**  $X = \frac{by + (x-b)s}{2s}$  folgt.

Um ferner auch die Ordinate  $Y$  zu bestimmen, hat man:

$$Ys = \int y ds = ys - \int s dy$$

oder da nach Relat. (3)  $s dy = b dx$  ist, auch:

$$Ys = ys - \int b dx = ys - bx,$$

wo überall keine Constante hinzukömmt, weil für  $x=0$  auch  $y=0$  und  $s=0$  ist.

Aus dieser letztern Relation folgt:

$$\text{II. } Y = \frac{ys - bx}{s}.$$

**Zusatz.** Setzt man für die halbe Kettenlinie  $AMD$ ,  $x = AB = a$ ,  $y = BD = c$  und Bog.  $AMD = l$ , so folgt aus diesen gefundenen Ausdrücken für  $X$  und  $Y$ :

$$X = \frac{bc + (a-b)l}{2l} \quad \text{und} \quad Y = \frac{cl - ab}{l}.$$

Für die ganze Kettenlinie  $DAD'$  wird, da die Achse  $AB$  selbst durch den Schwerpunkt geht (wenn nämlich die beiden Aufhängpunkte  $D$  und  $D'$  in einerlei Horizont liegen), von diesen beiden Coordinaten die letztere  $Y=0$ .

**Anmerkung.** Mit Hilfe der Variationsrechnung läßt sich zeigen, daß unter allen isometrischen, durch die beiden Aufhängpunkte  $D, D'$  gehenden, und in derselben Ebene liegenden Curven, der Schwerpunkt der Kettenlinie am tiefsten liege.

### 23. Aufgabe.

Es soll der Schwerpunkt von dem cycloidischen Segmente  $MAM'M$  (Fig. 29) gefunden werden.

#### Auflösung.

Da der Schwerpunkt dieser ebenen Fläche in dem durch den Scheitel  $A$  auf die Grundlinie  $DD'$  gezogenen Perpendikel  $AB$  liegen muß, so handelt es sich hier blofs um die Bestimmung der Abscisse

$X = AO$  des gesuchten Schwerpunktes  $O$ .

Nun gibt von den Relationen II. in Nr. 26 die letztere, d. i.  $F = \int dF$ , für den vorliegenden Fall  $F = 2 \int_0^x y dx$ , oder wenn man wieder theilweise integrirt, wodurch  $\int y dx = xy - \int x dy$ , oder wegen  $dy = \frac{(a-x) dx}{\sqrt{ax-x^2}}$  (aus Relat.  $\alpha$  in Aufgabe 21, wenn man die dortige Bezeichnung auch hier beibehält),

$\int y dx = xy - \int dx \sqrt{ax-x^2}$  wird, sofort auch:

$$F = 2xy - 2 \int dx \sqrt{ax-x^2}.$$

Wird der über  $AB$  gezeichnete Erzeugungskreis von der Ordinate  $MM'$  in den Punkten  $N, N'$  geschnitten, so bezeichnet dieses letztere Integrale  $\int dx \sqrt{ax-x^2}$  nichts anderes als die Kreisfläche  $APN$ , folglich das doppelte Integral den Kreisabschnitt  $NAN'N$ , so, daß wenn man diese letztere Fläche mit  $f$  bezeichnet, endlich auch

$$(a) \quad F = 2xy - f \text{ ist}^*).$$

Die 1<sup>te</sup> der erwähnten Relationen II. (in Nr. 26), nämlich

$XF = \int x dF$  geht im vorliegenden Falle über in

$XF = 2 \int xy dx = x^2 y - \int x^2 dy$  (wenn man nämlich wieder theilweise integrirt). Nun ist, wenn man für  $dy$  den oben angegebenen Werth setzt:

\*) Fällt  $M$  auf  $D$ , so hat man für die Fläche der Cycloide  $AD'D$ , wegen  $x = a, 2y = a\pi$  und  $f = \frac{1}{2}a^2\pi$  sofort  $F = a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\pi = \frac{1}{2}a^2\pi$ ; diese ist also 3 Mal so groß als die Fläche des Erzeugungskreises. (Vergleiche Lehrb. III. S. 448.)

$$\int x^2 dy = \int x dx \sqrt{ax - x^2} = \frac{1}{2} a \int dx \sqrt{ax - x^2} - \int \left(\frac{1}{2} a - x\right) dx \sqrt{ax - x^2} = \frac{1}{4} af - \frac{1}{3} (ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

wozu keine Constante kommt, weil diese Integrale für  $x=0$  verschwinden müssen. Es ist daher:

$$XF = x^2 y - \frac{1}{4} af + \frac{1}{3} (ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

und daraus, wenn man zugleich für  $F$  den vorigen Werth aus (a) setzt:

$$X = \frac{x^2 y + \frac{1}{3} (ax - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} af}{2xy - f}$$

Zusatz. Für die ganze cycloidische Fläche  $DAD'D$  wird  $x = a$ ,  $y = \frac{1}{2} a \pi$  und  $f = \frac{1}{4} a^2 \pi$ , folglich  $X = \frac{7}{12} a$ .

## 24. Aufgabe.

Den Schwerpunkt der durch Umdrehung des cycloidischen Bogens  $AM$  (Fig. 29) um die Achse  $AB$  entstehenden Rotationsfläche zu bestimmen.

### Auflösung.

Mit Beibehaltung der in den beiden vorigen Aufgaben (21 u. 23) gewählten Bezeichnung (und Berücksichtigung der Gleich.  $\beta$  in der 21. Aufgabe) gehen die beiden hier gehörigen Gleichungen in Nr. 29 in die folgenden über:

$$O = 2\pi \int_0^x y dx \sqrt{\frac{a}{x}} \text{ und } OX = 2\pi \int_0^x xy dx \sqrt{\frac{a}{x}} = 2\pi \sqrt{a} \int_0^x y dx \sqrt{x}.$$

Aus der erstern dieser Gleichungen folgt, wenn man theilweise integrirt:

$$O = 2\pi \sqrt{a} \left[ 2y\sqrt{x} - 2 \int dy \sqrt{x} \right]$$

oder wegen  $\int dy \sqrt{x} = \int dx \sqrt{a-x}$  auch:

$$O = 4\pi \sqrt{a} \cdot y \sqrt{x} - 4\pi \sqrt{a} \int dx \sqrt{a-x}.$$

Eben so ist  $OX = 2\pi \sqrt{a} \left[ \frac{2}{3} x \sqrt{x} \cdot y - \frac{2}{3} \int dy x \sqrt{x} \right]$

$$= \frac{4}{3} \pi y x \sqrt{ax} - \frac{4}{3} \pi \sqrt{a} \int x dx \sqrt{a-x}.$$

(Gleich.  $\alpha$ , 21. Aufg.)

Nun ist aber  $\int dx \sqrt{a-x} = C - \frac{2}{3} (a-x)^{\frac{3}{2}}$  wobei, da dieses

Integral für  $x=0$  verschwinden soll,  $C = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$ , folglich

$\int dx \sqrt{a-x} = \frac{2}{3} \left[ a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}} \right]$  ist; ferner wird, wie leicht zu finden (wenn man  $a-x = z$ , also  $x = a-z$  und  $dx = -dz$  setzt und nach der Integration die Werthe wieder herstellt):

$$\int x dx \sqrt{a-x} = C - \frac{2}{3} a (a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (a-x)^{\frac{5}{2}}$$

wobei die Constante, da das Integral für  $x=0$  wieder verschwinden muß,  $C = \frac{2}{3} a \cdot a^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}}$ , folglich

$$\int_0^x x dx \sqrt{a-x} = \frac{2}{3} a \left[ a^{\frac{3}{2}} - (a-x)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{2}{5} \left[ a^{\frac{5}{2}} - (a-x)^{\frac{5}{2}} \right]$$

wird. Setzt man daher in die beiden vorigen Gleichungen von  $O$  und  $OX$  die Werthe dieser Integralien hinein, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$O = 4\pi y \sqrt{ax} + \frac{8}{3}\pi \sqrt{a(a-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{8}{3}\pi a^2$$

und

$$OX = \frac{4}{3}\pi y x \sqrt{ax} - \frac{16}{45}\pi a^3 + \frac{8}{9}\pi a \sqrt{a(a-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{8}{15}\pi \sqrt{a(a-x)^{\frac{5}{2}}}$$

durch welche beide Gleichungen sofort  $\left(\frac{OX}{O} = \right) X$  bestimmt ist

Zusatz. Geht der Bogen  $AM$  in die halbe Cycloide  $AMD$  über, so wird, wegen  $x=a$  und  $y = \frac{1}{2} a \pi$  sofort:

$$O = 2 a^2 \pi \left( \pi - \frac{4}{3} \right)$$

und

$$OX = \frac{2}{3} a^3 \pi \left( \pi - \frac{8}{15} \right)$$

folglich

$$X = \frac{1}{3} a \frac{\left( \pi - \frac{8}{15} \right)}{\left( \pi - \frac{4}{3} \right)}, \text{ nahe } = .4808 a.$$

## 25. Aufgabe.

Es soll der Schwerpunkt eines Ellipsoiden-Abschnittes bestimmt werden, dessen beide Grundflächen auf einer der 3 Hauptachsen perpendikulär stehen.

### Auflösung.

Sind  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  die drei Hauptachsen des Ellipsoides (oder elliptischen Sphäroides) und nimmt man die erstere zur Achse der  $x$ , so wie den Mittelpunkt zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; so ist, wenn man die Fläche eines auf der Achse der  $x$  perpendikulären Schnittes,

welchem die Abscisse  $x$  entspricht, mit  $F$  bezeichnet und damit parallel noch einen zweiten, der Abscisse  $x + dx$  entsprechenden Schnitt führt, das Volumen des zwischen diesen beiden Schnitten enthaltenen Körpers,

$dV = F dx$  und daher nach den Relationen III in Nr. 33:

$$V = \int_{x'}^{x''} F dx \quad \text{und} \quad VX = \int_{x'}^{x''} F x dx$$

wenn man die Rechnung nämlich auf ein Segment des Ellipsoides beschränkt, welches von zwei auf der Achse der  $x$  perpendicularen Ebenen eingeschlossen oder begrenzt wird, dessen Abscissen die Werthe  $x'$  und  $x''$  haben.

Nun ist aber die Gleichung des Ellipsoides (d. i. von dessen Oberfläche), wenn die rechtwinkligen Coordinaten vom Mittelpuncte aus gezählt werden (III. S. 434):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \dots (m)$$

Führt man daher in der Entfernung vom Mittelpunct  $= x$  einen Schnitt perpendicular auf die Achse  $2a$  oder der  $x$ , so entsteht eine Ellipse von den Halbachsen  $b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  und  $c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,

daher ist wegen (Compend. §. 860)  $F = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$  nunmehr:

$$V = \pi b c \int_{x'}^{x''} dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \pi b c (x'' - x') \left[1 - \frac{x'^2 + x'x'' + x''^2}{3a^2}\right]$$

und

$$VX = \pi b c \int_{x'}^{x''} x dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \pi b c \frac{1}{2} (x''^2 - x'^2) \left[1 - \frac{x'^2 + x''^2}{2a^2}\right]$$

folglich

$$X = \frac{VX}{V} = \frac{3}{4} (x' + x'') \left[ \frac{2a^2 - (x'^2 + x''^2)}{3a^2 - (x'^2 + x'x'' + x''^2)} \right] \quad \dots (A)$$

Zusatz 1. Für das halbe Ellipsoid ist  $x' = 0$  und  $x'' = a$  folglich

$$V = \frac{2}{3} \pi a b c \quad \text{und} \quad X = \frac{3}{8} a.$$

Für das ganze Ellipsoid dagegen ist  $x' = -a$  und  $x'' = +a$ , daher

$$V = \frac{4}{3} \pi a b c \quad \text{und} \quad X = 0.$$

Geht das Ellipsoid in eine Kugel vom Halbmesser  $r$  über, so muß man in diesen Ausdrücken  $a = b = c = r$  setzen.

Zusatz 2. Zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Kugelabschnittes, welcher durch Umdrehung des Kreissegmentes  $BAB'$  (Fig. 31), wofür der Halbmesser  $CA = r$  und Bog.  $BAB' = s$  ist, um die Achse  $AC$  entsteht, muß man in dem obigen Ausdruck (A)

$x' = CN = r \cos \frac{s}{2r}$ ,  $x'' = r$  und  $a = r$  setzen, dadurch erhält man für die Abscisse  $CO$  des Schwerpunktes  $O$ :

$$X = \frac{3}{4}r \left( 1 + \cos \frac{s}{2r} \right) \cdot \frac{\left( \sin^2 \frac{s}{2r} \right)}{1 + \sin^2 \frac{s}{2r} - \cos \frac{s}{2r}}$$

Für die Halbkugel folgt daraus, wegen  $s = r\pi$ :

$$X = \frac{3}{4}r \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}r.$$

## 26. Aufgabe.

Ein gerader Kegel von kreisförmiger Grundfläche besteht aus zwei verschiedenen Materialien, wovon die obere das specifische Gewicht  $s$  und die untere jenes  $S$  besitzt; beide Theile berühren sich in einer mit der Grundfläche parallelen Kreisebene vom Halbmesser  $r$ ; der Halbmesser der Grundfläche des ganzen Kegels ist  $= R$  und die Höhe des untern Theiles (nämlich des parallel abgestutzten Kegels) vom specif. Gewicht  $S = h$ ; es soll der Schwerpuuct dieses Kegels bestimmt werden.

### Auflösung.

Da bei der Voraussetzung, dafs jeder der beiden Theile für sich homogen ist, der gesuchte Schwerpuuct in der geometrischen Achse des Kegels liegt, so sey  $b$  die Höhe des obern Theiles des Kegels und  $X$  der Abstand des gesuchten Schwerpunktes von der Grundfläche des ganzen Kegels; so hat man zuerst:

$$b : b + h = r : R \quad \text{oder} \quad b : h = r : R - r, \quad \text{also} \quad b = \frac{hr}{R-r}$$

Der Inhalt des obern Theils des Kegels ist  $v = \frac{1}{3} \pi r^2 b = \frac{1}{3} \pi r^3 \frac{h}{R-r}$ , folglich dessen absolutes Gewicht, wenn  $\gamma$  das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers bezeichnet:

$$g = \frac{1}{3} \pi \gamma s r^3 \frac{h}{R-r} \quad \dots \quad (\alpha)$$

und der Abstand des Schwerpunktes von der untern Grundfläche:

$$d = h + \frac{1}{4}b = h + \frac{1}{4} \frac{hr}{R-r} \quad \dots \quad (\beta)$$

Eben so ist das Volumen des untern Theiles des Kegels (als abgestutzter Kegel von den Grundflächen  $r^2 \pi$ ,  $R^2 \pi$  und der Höhe  $h$ ):

$$V = \frac{1}{3} h (r^2 + R^2 + Rr) \pi$$

und dessen Gewicht:

$$G = \frac{1}{3} \pi \gamma S h (r^2 + R^2 + Rr), \dots (\alpha')$$

so wie der Abstand seines Schwerpunktes von der Basis (Nr. 35):

$$D = \frac{1}{4} h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \dots (\beta')$$

Nun ist für das Gleichgewicht nach statischen Gesetzen (wenn man den in der Basis des Kegels liegenden Punct  $A$  der Achse  $AC$ , Fig. 32, zum Mittelpunkt der statischen Momente nimmt und daher  $AE = D$ ,  $AO = X$  und  $AF = d$  setzt):

$$(G + g) X = g d + G D$$

Aus dieser Gleichung folgt nun, wenn man für  $g$ ,  $G$ ,  $d$ ,  $D$  die Werthe aus  $(\alpha)$ ,  $(\alpha')$ ,  $(\beta)$ ,  $(\beta')$  substituirt,  $X$  bestimmt und so weit als möglich reducirt und abkürzt:

$$X = \frac{h}{4} \left( \frac{s r^3 (4R - 3r) + S (R - r)^2 (R^2 + 2Rr + 3r^2)}{(R - r) [s r^3 + S (R^3 - r^3)]} \right)$$

Zusatz. Für  $r = 0$  wird, wie es seyn soll, da der Kegel dann durchaus von einerlei specifischem Gewichte oder homogen ist:

$$X = \frac{h}{4}.$$

## 27. Aufgabe.

Auf einen in den Puncten  $A$  und  $B$  (Fig. 33) befestigten Faden  $ANB$  wird mittelst eines Ringes das Gewicht  $P$  aufgehängt; es ist die Frage, in welcher Lage dasselbe ruhen wird?

### Auflösung.

Zieht man in der durch die Puncte  $A$  und  $B$  gelegten verticalen Ebene, in welcher sich sofort die Fadenstücke  $AN$  und  $BN$  befinden müssen, wenn das Gewicht im Puncte  $N$  zur Ruhe kommt,  $AC$  horizontal, so wie  $DN$  und  $BE$  vertical oder lothrecht, setzt  $AC = a$ ,  $BC = b$ , die Länge des Fadens  $AN + NB = l$  (als gegebene),  $AD = x$  und  $DN = y$  (als unbekannte Größen); so hat man, wenn noch  $NF$  parallel zu  $AC$  gezogen wird,  $DC = a - x = NF = NB \times \cos BNF$  und  $BF = b + y = NB \cdot \sin BNF$ , folglich

$$(a - x)^2 + (b + y)^2 = NB^2$$

oder wegen  $NB^2 = (l - AN)^2 = [l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]^2$  auch

$$(a - x)^2 + (b + y)^2 = [l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]^2 \dots (\alpha)$$

Geht man nun von dem Satze aus, dafs bei dieser gleitenden Bewegung des Gewichtes  $P$  das Gleichgewicht nur dann erst eintritt, wenn

dessen Schwerpunkt die möglich tiefste Lage eingenommen hat, so muß, wenn man die Ordinate  $y$  als eine Function der absolut variablen Abscisse  $x$  ansieht, jener Werth für  $x = AD$  gesucht werden, wofür  $y = DN$  ein Maximum wird, folglich aus der vorigen Gleichung ( $\alpha$ ) der Differentialquotient  $\frac{dy}{dx}$  bestimmt und gleich Null gesetzt werden. Diefs gibt:

$$-2(a-x) + 2(b+y) \frac{dy}{dx} = -2(l - \sqrt{(x^2 + y^2)}) \cdot \frac{x + y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

und für  $\frac{dy}{dx} = 0$ :

$$a - x = \frac{[l - \sqrt{(x^2 + y^2)}]x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{lx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - x$$

d. i. 
$$a = \frac{lx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \dots (5)$$

woraus sofort 
$$y = \frac{x}{a} \sqrt{(l^2 - a^2)} \dots (1) \text{ folgt.}$$

Ohne die Entwicklung weiter zu verfolgen, geht auch schon aus dieser Gleichung (1) die Übereinstimmung mit dem Resultate in §. 67 (Beispiel) hervor, wonach der Winkel  $ANB$  durch die, durch den gesuchten Punkt  $N$  gehende Verticale  $DN$  halbart wird. Denn da in diesem Falle  $NE = NB$ , daher  $AE = AN + NB = l$  und  $EC = \sqrt{(l^2 - a^2)}$ , folglich wegen  $AD : DN = AC : CE$  d. i.

$$x : y = a : \sqrt{(l^2 - a^2)}$$

ist; so folgt daraus wieder die vorige Gleichung (1).

**Zusatz.** Steht ein System von Gewichten  $p, p', p'' \dots$  im Gleichgewichte, deren Schwerpunkte von einer horizontalen Ebene die Abstände  $x, x', x'' \dots$  haben, so wird bei einer unendlich kleinen Bewegung, nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten sofort

$$p dx + p' dx' + p'' dx'' + \dots = 0 \text{ oder was dasselbe ist}$$

$$d(p x + p' x' + p'' x'' + \dots) = 0 \dots (m)$$

Ist aber  $X$  der Abstand des Schwerpunktes des ganzen Systemes, folglich

$$X = \frac{p x + p' x' + \dots}{p + p' + \dots}, \text{ so ist auch}$$

$$dX = \frac{d(p x + p' x' + \dots)}{p + p' + \dots}$$

oder zufolge der vorigen Relation (m) auch

$$dX = 0,$$

zum Beweis, daß  $X$  constant ist, also der gemeinschaftliche Schwerpunkt bei dieser eingeleiteten oder angenommenen Bewegung der im Gleichgewichte befindlichen Gewichte weder steigt noch fällt.



(Dasselbe gilt auch von dem Schwerpunkte bei Maschinen, welche unter dem Einflusse von Gewichten im Gleichgewichte stehen.)

Wendet man diesen Satz auf die vorliegende Aufgabe an, so kann man beim Differenzieren der vorigen Gleichung ( $\alpha$ )  $y$  als constant ansehen und dadurch die Entwicklung in etwas vereinfachen.

Anmerkung. Wird ein materieller Punct vom Gewichte  $p$  blofs in Folge seines Gewichtes bewegt, so ist die Arbeit, welche die Schwerkraft ausübt, während der Punct von der Lage  $M_0$  (Fig. 34) in die tiefere  $M$ , gleichgiltig durch welche Curve  $M_0M$  übergeht, sofort  $W = p(A'M - AM_0)$ , oder wenn man die verticalen Abstände  $AM_0$  und  $A'M$  von einer horizontalen Ebene  $AX$  durch  $z_0$  und  $z$  bezeichnet

$$W = p(z - z_0);$$

dabei wird  $W$  oder die Arbeit negativ, wenn der Punct  $M$  höher als jener  $M_0$  liegt, also  $z_0 > z$  ist.

Sind allgemein  $p, p', p'' \dots$  die Gewichte der einzelnen Puncte irgend eines Systemes von materiellen Puncten,  $z_0, z'_0, z''_0 \dots$  die von irgend einer horizontalen Ebene nach abwärts gezählten verticalen Ordinaten der anfänglichen Lage dieser Puncte, so wie  $z, z', z'' \dots$  die Ordinaten ihrer Endlagen nach einer gewissen Zeit; so ist nach der vorigen Relation die Arbeitsgröße der Schwerkraft für dieses System während dieser Zeit:

$$\begin{aligned} W &= p(z - z_0) + p'(z' - z'_0) + p''(z'' - z''_0) + \dots \\ &= pz + p'z' + \dots - (pz_0 + p'z'_0 + \dots) \end{aligned}$$

oder

$$W = \Sigma(pz) - \Sigma(pz_0);$$

bezeichnet man aber das Gesamtgewicht des Systemes, d. i. die Summe  $p + p' + p'' \dots = \Sigma(p)$  durch  $P$ , so wie die verticalen Ordinaten des Schwerpunktes des Systemes für die erste und letzte Lage desselben durch  $Z_0$  und  $Z$ , so erhält die vorige Gleichung (Nr. 17) auch die Form:

$$W = PZ - PZ_0 = P(Z - Z_0)$$

woraus sofort der Satz folgt, dafs in dem durch die Schwere wie immer bewegten Systeme, die Arbeit der Schwerkraft gleich ist dem Gesamtgewicht des Systemes multiplicirt mit der verticalen Höhe, um welche der Schwerpunkt desselben gesunken ist.

Da nun für eine unendlich kleine Bewegung des Systemes die obigen Differenzen  $z - z_0, z' - z'_0 \dots$  in  $dz_0, dz'_0 \dots$  übergehen, so wird dafür  $dW = p dz_0 + p' dz'_0 + \dots = P(Z - Z_0) = PdZ_0$  und daher, wenn die sämtlichen materiellen Puncte oder Gewichte unter sich im Gleichgewichte stehen, was nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten die Gleichung  $p dz_0 + p' dz'_0 + \dots = 0$  bedingt, auch  $dW = PdZ_0 = 0$ , woraus wieder folgt, dafs bei dieser unendlich kleinen Bewegung, der Schwerpunkt des Systemes weder steigt noch fällt.

## 28. Aufgabe.

Eine sogenannte Zugbrücke, welche in der Zeichnung (Fig 35) durch die gerade Linie  $AC$  vorgestellt ist, lasse sich in der verticalen Ebene  $ACB$  um den Punkt  $C$  drehen; an dem Endpunkte  $A$  derselben ist eine über die Rolle  $N$  geführte Schnur oder Kette befestigt, an welcher das Gewicht  $X$  aufgehängt ist; es soll nun die Gröfse dieses Gewichtes so bestimmt werden, dafs dasselbe mit dem Gewichte  $Q$  der Brücke bei irgend einer Lage  $MC$  derselben im Gleichgewichte steht.

### Auflösung.

Es sey die Länge der Brücke, als Halbmesser des Quadranten  $AMB$  d. i.  $AC = MC = BC = R$  und wenn  $O$  der Schwerpunkt der Brücke ist,  $CO = a$ ; ferner soll die Gröfse des Gewichtes  $X$  für jene Lage der Brücke  $MC$  gefunden werden, für welche, wenn  $BC$  eine Verticale, der  $W. BCM = \alpha$  ist. Zieht man durch  $O$  die lothrechte Linie  $OE$  und auf die Sehne  $BM$  das Perpendikel  $CD$ , so hat man, wenn das Gewicht der Schnüre oder Ketten dabei nicht berücksichtigt wird, fürs Gleichgewicht

$$Q \cdot CE = X \cdot CD \text{ oder } Q \cdot a \sin \alpha = X \cdot R \cos \frac{1}{2} \alpha$$

und daraus: 
$$X = \frac{a}{R} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} Q \text{ d. i.}$$

$$X = \frac{2aQ}{R} \sin \frac{1}{2} \alpha \dots (m)$$

Zusatz 1. Für  $\alpha = 0$  wird also  $X = 0$  und für  $\alpha = 90^\circ$  dagegen  $X = \frac{2aQ}{R} \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{aQ}{R} \sqrt{2}$ .

Zusatz 2. Bezeichnet man das nach statischen Gesetzen auf den Endpunkt  $A$  reducirte Gewicht  $Q$  der Brücke durch  $P$ , so ist  $RP = aQ$ , folglich läfst sich die vorige Relation (m) auch so schreiben:

$$X = 2P \sin \frac{1}{2} \alpha,$$

oder es ist, wenn man die dem Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  entsprechende Sehne  $BM = S$  setzt, wegen  $S = 2R \sin \frac{1}{2} \alpha$ , auch  $X = \frac{PS}{R}$  woraus die Proportion

folgt: 
$$P : X = R : S \dots (n)$$

## 29. Aufgabe.

Das Gewicht  $X$  der vorigen Aufgabe zu bestimmen, wenn dabei auch das Gewicht der Kette berücksichtigt wird.

**Auflösung.**

Es sey  $q$  das Gewicht des laufenden Fusses der Kette und die Brücke wieder in der Lage  $CM$  (Fig. 35), so ist das zur Balancirung der Brücke nöthige Aufhänggewicht in dieser Lage nach der Relat. (n) im Zusatz 2 der vorigen Aufgabe:

$$p = \frac{S}{R} P.$$

Da ferner das Gewicht des Kettenstückes  $MB = S$  die Gröfse  $qS$  besitzt und ihr Schwerpunkt im Punkte  $D$  liegt, so ist das statische Moment dieses Gewichtes:

$$M = qS \times CE = qS \times CD \sin \frac{1}{2} \alpha = qS \times R \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \alpha$$

oder endlich wegen  $S = 2R \sin \frac{1}{2} \alpha$  auch

$$M = 2qR^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

Mufs ferner dieses Gewicht  $p$  noch wegen des Gewichtes  $qS$  der Kette um  $p'$  vergrößert werden, so ist dessen stat. Moment

$$M' = p' \times CD = p' \cdot R \cos \frac{1}{2} \alpha$$

und da für das Gleichgewicht  $M' = M$  seyn muß, sofort

$$p' R \cos \frac{1}{2} \alpha = 2qR^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$$

also

$$p' = 2qR \sin^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Liegt nun selbst bei der horizontalen Lage  $AC$  der Brücke das untere Ende der Kette schon auf dem Boden  $CL$  auf, so, daß also auch in jeder andern Lage  $CM$  der Brücke, das Gewicht der Kette von derselben Länge  $BC = R$  wirksam ist; so hat man, da dieses letztere Gewicht  $= qR$  ist, für die Gröfse des gesuchten Aufhänggewichtes bei irgend einer Lage  $MC$  der Brücke  $X = p + p' - qR$ , oder, wenn man für  $p$  und  $p'$  die vorigen Werthe setzt, auch:

$$X = \frac{S}{R} P + 2qR \sin^2 \frac{1}{2} \alpha - qR.$$

Zusatz. Wegen  $X + qR = \frac{S}{R} P + 2qR \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$ ,

gibt es offenbar einen gewissen Werth von  $\alpha$ , wofür  $X = 0$  ist. Setzt man, um diesen Werth zu finden, in der vorigen Gleichung  $X = 0$ , so erhält man, wegen  $S = 2R \sin \frac{1}{2} \alpha$ :

$$qR = 2P \sin \frac{1}{2} \alpha + 2qR \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$$

und daraus durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{-P + \sqrt{P^2 + 2q^2 R^2}}{2qR}.$$

### 30. Aufgabe.

Auf zwei miteinander in Verbindung stehenden krummen Flächen, die im Durchschnitte mit einer verticalen Ebene, durch die beiden Curven  $BMC$  und  $BmD$  (Fig. 36) dargestellt sind, liegen die beiden, mittelst eines über die Rolle  $A$  gehenden Fadens  $MAm$  miteinander verbundenen materiellen Punkte  $M$  und  $m$ , von den Gewichten  $Q$  und  $q$ ; es ist die Frage, welche Eigenschaften diese beiden Curven gegeneinander besitzen müssen, wenn diese Gewichte  $Q$  und  $q$  in jeder Lage, die sie darauf einnehmen können, miteinander im Gleichgewichte stehen sollen?

### Auflösung.

Nimmt man die durch  $A$  gehende in der Verticalebene  $ACD$  liegende lothrechte Linie  $AE$  zur Abscissenachse und setzt für irgend einen Punkt  $M$  der Curve  $BMC$  (in welchem sich das Gewicht  $Q$  befinden soll)  $AP = X$  und  $PM = Y$ , so wie für den entsprechenden Punkt  $m$  der Curve  $b m D$  (in welchem sich das zweite Gewicht  $q$  befindet)  $Ap = x$  und  $pm = y$ ; so wird, während  $Q$  um den Bogen  $MM' = dS$  aufwärts gleitet, jenes  $q$  um das Bogenelement  $mm'$  abwärts gehen, oder es wird das erstere Gewicht um die Höhe  $PP' = dX$  steigen, dagegen das letztere gleichzeitig um die Höhe  $pp' = dx$  sinken. Es folgt daher nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht zwischen  $Q$  und  $q$ :

$$Q dX + q dx = 0$$

oder wenn man integrirt:

$$QX + qx = C \dots (1)$$

wobei  $C$  eine unbestimmte Constante bezeichnet.

Ist  $X'$  der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der Gewichte  $Q$  und  $q$  von der durch  $A$  gezogenen Horizontalen, so ist

$$(Q + q) X' = QX + qx = C \text{ (wegen 1), und daraus}$$

$$X' = \frac{C}{Q + q}$$

eine constante Größe, d. h. der gemeinschaftliche Schwerpunkt kann bei dieser unendlich kleinen Verschiebung der Gewichte  $Q$  und  $q$  auf ihren Curven weder fallen noch steigen. (Vergl. die 27. Aufgabe.)

Ist nun die Länge des Fadens  $MA + Am = l$  und  $AB = a$ ; so ist

$$l = \sqrt{[(X + a)^2 + Y^2]} + \sqrt{[(x + a)^2 + y^2]} \dots (2)$$

Wenn daher die eine der beiden Curven, z. B. jene  $BMC$  durch

die Gleichung  $Y = F(X) \dots (3)$  gegeben ist, so läßt sich aus den Gleichungen (1), (2), (3) sofort auch die Gleichung der zweiten Curve  $BmD$ , d. i.  $y = f(x)$  bestimmen.

### 31. Aufgabe.

Es soll die in der verticalen Ebene  $ACD$  (Fig. 37) liegende Curve  $AmD$  bestimmt werden, auf welcher das constante Gewicht  $P$ , welches in der 28. Aufgabe statt dem variablen Gewichte  $X$  gesetzt wird, herabgleiten muß, damit dasselbe in jeder Lage mit dem Gewichte der Zugbrücke im Gleichgewichte stehe.

#### Auflösung.

Setzt man wie in der 28. Aufgabe  $CE = ME = AE = R$  und für irgend eine Lage der Zugbrücke  $ME$  (für welche sich das Gewicht  $P$  in  $m$  befinden soll) die Sehne  $AM = S$ , dagegen, um die Bezeichnung der vorigen Aufgabe beibehalten zu können, das auf den Endpunct  $M$  reducirte Gewicht der Brücke  $= Q$  (statt  $P$  in der 28. Aufg.), so ist nach der Proportion ( $n$ ) in der 28. Aufgabe  $Q : P = R : S$  oder

$$P = \frac{S}{R} Q \dots (\alpha)$$

wobei mit der Bezeichnung der vorigen Aufgabe verglichen,  $P$  statt  $q$  steht.

Die 3 Gleichungen der vorigen Aufgabe sind, wegen  $a = 0$  (indem hier die beiden Punkte  $A$  und  $B$  der Fig. 36 zusammenfallen) und  $q = P$  sofort:

$QX + Px = C \dots (1)$ ,  $l = \sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \dots (2')$  und  $Y = F(X)$  oder da die Curve  $AMC$  ein Kreisbogen vom Halbmesser  $R$  ist,

$$Y^2 + X^2 = 2RX \dots (3')$$

Die Gleichung (2') wird daher  $l = \sqrt{2RX} + \sqrt{x^2 + y^2}$  oder da aus jener (1)  $X = \frac{C - Px}{Q}$  folgt, auch:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = l - \sqrt{\left[ \frac{2R}{Q} (C - Px) \right]} \dots (2)$$

Um die in dieser Gleichung der gesuchten Curve  $AmD$  vorkommenden unbestimmten Constanten  $P$  und  $C$  zu finden, darf man nur bemerken, daß erstens das freie, durch die Curve noch nicht verminderte Gewicht mit dem Gewichte der Brücke in ihrer horizontalen Lage im Gleichgewichte, und da das Gewicht  $P$  in diesem Falle im Anfangs-

puncte  $A$  ist, für  $x=0$  auch  $y=0$  seyn muß. Mit der ersten dieser beiden Bedingungen folgt aus der obigen Relation ( $\alpha$ ), indem für diese Lage die Sehne  $AM=S$  in  $AC=R\sqrt{2}$  übergeht:

$$P = \frac{R\sqrt{2}}{R} Q = Q\sqrt{2} \dots (\beta)$$

und mit der zweiten Bedingung erhält man aus (2):

$$0 = l - \sqrt{\frac{2RC}{Q}} \quad \text{oder} \quad C = \frac{Ql^2}{2R} \dots (\gamma)$$

Setzt man daher diese Werthe für  $P$  und  $C$  in die vorige Gleich. (2) und zugleich auch  $l=AC=R\sqrt{2}$ , so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = R\sqrt{2} - \sqrt{[2R(R - x\sqrt{2})]} \dots (3)$$

Da sich nun aus dieser Gleichung zu jedem beliebigen Werthe von  $x=Ap$  die Distanz oder Sehne  $Am = \sqrt{(x^2 + y^2)}$  sehr einfach berechnen läßt, so kann die gesuchte Curve  $AmD$  leicht mittelst Punkte  $m, m' \dots$  construirt werden.

Zusatz. Da aus der vorigen Gleichung (3) die nachstehende

$$(x^2 + y^2 + 2R\sqrt{2} \cdot x - 4R^2)^2 = 16R^3(R - x\sqrt{2})$$

folgt, so ist die eigentliche Gleichung der gesuchten Curve  $AmD$  eine algebraische des vierten Grades.

Anmerkung. *Belidor*, welcher (in der *Science des Ingénieurs*) zuerst die Anwendung dieser Curve zum Aufziehen der Zugbrücken zeigte, nennt sie *Sinusoide*, weil er bei ihrer Construction die Sinus der Erhebungswinkel benützt. Übrigens ist diese Curve (wie *Joh. Bernoulli* und *L'Hôpital* zuerst gezeigt haben) nichts anders als eine *Epicycloide*, bei welcher der Grund- und Erzeugungskreis gleiche Durchmesser haben.

### 32. Aufgabe.

Die Gleichung der elastischen Linie zu finden.

#### Auflösung.

Da man unter der elastischen Linie nichts anderes als die neutrale Schichte (§. 255) eines elastischen prismatischen Körpers versteht, welcher in einem oder mehreren Punkten befestigt und durch das eigene oder ein sonstiges Gewicht gebogen wird; so kann man sich diese Linien immer als elastische Stäbe ohne Dicke vorstellen.

**I.** Ist also erstens ein gewichtsloser elastischer Stab  $AB$  (Fig. 38) mit dem einen Ende  $B$  in eine verticale Wand  $BN$  befestigt und am andern Endpunct  $A$  mit dem Gewichte  $Q$  belastet, wobei jedoch die

Krümmung oder Biegung nur wenig von der Horizontalen abweichen soll; so ist, wenn man  $AC = a$ ,  $AE = BC = \delta$  und für irgend einen Punkt  $M$  der Curve die rechtwinkligen Coordinaten  $AP = x$ ,  $PM = y$  so wie den Bog.  $AM = s$ , den Krümmungshalbmesser  $OM = \rho$  und wenn  $MT$  eine in diesem Punkte gezogene Tangente ist,  $\angle MTP = \alpha$  setzt, sofort das statische Moment der Last  $Q$  in Beziehung auf diesen Punkt  $M = Qx$ . Bezeichnet daher  $E'$  das Biegemoment (oder die relative Elasticität), so ist nach Relation (2) in Nr. 115:

$$E' = \rho Qx \dots (m)$$

Nun ist (Compend. §. 710)  $\rho = -\frac{ds^3}{dx dy^2}$ , oder da man bei der vorausgesetzten geringen Biegung  $dx$  statt  $ds$  setzen kann, auch:

$$\rho = -\frac{dx^3}{d^2y} \text{ (vergl. auch Nr. 118); es ist also}$$

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -Qx \dots (n)$$

(vergleiche Relat. (a) in Nr. 118) oder da  $dx$  constant ist,

$$E' d \cdot \frac{dy}{dx} = -Qx dx.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt

$$E' \frac{dy}{dx} = C - \frac{Qx^2}{2};$$

um die Constante  $C$  zu bestimmen bemerke man, dafs wegen

$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ , für  $x = a$  (weil die Tangente  $BE$  im Punkte  $B$  mit der

Abscissenachse parallel ist)  $\alpha = 0$ , also auch  $\frac{dy}{dx} = 0$  ist; diefs gibt

$C = \frac{Qa^2}{2}$ , folglich ist, wenn man diesen Werth substituirt:

$$E' dy = \frac{Qa^2}{2} dx - \frac{Qx^2}{2} dx$$

und wenn man abermals integrirt:

$$E' y = \frac{Q}{2} (a^2 x - \frac{1}{3} x^3),$$

wozu keine Constante kommt, weil für  $x = 0$  auch  $y = 0$  seyn muß.

Die gesuchte Gleichung ist daher:

$$y = \frac{Q}{6E'} (3a^2 x - x^3) \dots (1)$$

Zusatz Die größte Ordinate oder Biegung erhält man aus dieser Gleichung für  $x = a$  und zwar wird

$$\delta = \frac{Qa^3}{3E'} \dots (2)$$

Der Krümmungshalbmesser für irgend einen Punct  $M$  ist (obige Relat.  $m$ )  $\rho = \frac{E'}{Qx}$  oder wenn man für  $E'$  den Werth aus der Relat. (2) setzt:

$$\rho = \frac{a^3}{3\delta x} \dots (3)$$

Für  $x=0$  wird  $\rho = \infty$ , zum Beweis, daß der Stab im Aufhängepunct  $A$  nicht gekrümmt ist. Da ferner  $\rho$  für  $x=a$  am kleinsten wird, so besitzt der Stab am Befestigungspunct  $B$  die größte Krümmung.

II. Ist der Stab über die ganze Länge gleichförmig belastet, und zwar auf die Längeneinheit mit dem Gewichte  $q$ ; so kommt auf den ganzen Stab die Last  $qa$  und auf das Stück  $AM$  jene  $qx$ . In Bezug auf den Punct  $M$  ist das stat. Moment dieser Belastung  $qx$  sofort  $M = \frac{1}{2}x \cdot qx = \frac{1}{2}qx^2$ ; wird daher dieses Moment statt jenem  $Qx$  in der obigen Relation (n) gesetzt, so erhält man für den vorliegenden Fall:

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}qx^2$$

und daraus wieder, wie vorhin zuerst

$$E' \frac{dy}{dx} = C - \frac{1}{6}qx^3,$$

wobei, da für  $x=a$  wieder  $\frac{dy}{dx} = 0$  seyn muß,  $C = \frac{1}{6}qa^3$ , also

$$E' \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}qa^3 - \frac{1}{6}qx^3$$

ist, und dann weiters:

$$E' y = \frac{1}{6}q(a^3x - \frac{1}{4}x^4)$$

ohne Constante, weil für  $x=0$  wieder  $y=0$  seyn soll.

Die Gleichung der elastischen Linie ist daher in diesem zweiten Falle:

$$y = \frac{q}{24E'}(4a^3x - x^4) \dots (1')$$

Zusatz 1. Die größte Ordinate oder Biegung ist (für  $x=a$ )

$$\delta' = \frac{qa^4}{8E'} = \frac{Qa^3}{8E'} \dots (2')$$

wenn man nämlich die ganze Last  $qa = Q$  setzt.

Da die obige Relation (m) für den gegenwärtigen Fall in

$$E' = \frac{1}{2}\rho qx^2 \dots (m')$$

übergeht, so folgt daraus, wenn man auch gleich für  $E'$  den aus (2')

folgenden Werth  $\frac{qa^4}{8\delta'}$  setzt:



$$\rho = \frac{a^4}{4\delta' x^2} \dots (3')$$

der kleinste Werth des Krümmungshalbmessers ist, wegen  $x = a$  sofort

$$\rho = \frac{a^2}{4\delta'}$$

**Zusatz 2.** Die Vergleichung der beiden Relationen (2) und (2') gibt die Proportion  $\delta : \delta' = 8 : 3$  (vergleiche Nr. 119).

Sucht man jenes Gewicht  $q$ , welches am freien Ende  $A$  des gewichtslosen Stabes bei  $B$  dieselbe Biegung, wie die über die ganze Länge gleichförmig vertheilte Last  $Q$  hervorbringt, so muß  $\rho$  für den Punct  $B$  in beiden Fällen denselben Werth besitzen. Nun ist für die

Last  $q$  in  $A$  aus Relat. (m)  $\rho = \frac{E'}{q a}$  und für die Last  $Q$  über die ganze

Länge, aus (m')  $\rho = \frac{2E'}{q a^2} = \frac{2E'}{Q a}$ , folglich  $\frac{E'}{q a} = \frac{2E'}{Q a}$  d. i.

$$q = \frac{1}{2} Q.$$

**III.** Es sey endlich der gewichtslose Stab  $AB$  am freien Ende  $A$  mit dem Gewichte  $Q$  und außerdem noch über die ganze Länge mit dem Gewichte  $q a$  gleichförmig belastet, so, daß die beiden vorigen Fälle hier vereint Statt finden; so hat man für den Punct  $M$  der Curve das stat. Moment:

$$M = Q x + \frac{1}{2} x q x = Q x + \frac{1}{2} q x^2$$

folglich wie oben

$$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = -Q x - \frac{1}{2} q x^2,$$

daraus

$$E' \frac{dy}{dx} = C - \frac{Q x^2}{2} - \frac{q x^3}{6}$$

oder (da wieder für  $x = a$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  ist) wegen  $C = \frac{Q a^2}{2} + \frac{q a^3}{6}$ , auch

$$E' dy = \left( \frac{Q a^2}{2} + \frac{q a^3}{6} \right) dx - \left( \frac{Q x^2}{2} + \frac{q x^3}{6} \right) dx$$

folglich

$$E' y = \left( \frac{Q a^2}{2} + \frac{q a^3}{6} \right) x - \left( \frac{Q x^3}{6} + \frac{q x^4}{24} \right) \dots (1'')$$

ohne Constante.

**Zusatz 1.** Für  $x = a$  wird  $y = \delta''$ , gleich der größten Biegung, folglich aus dieser Gleichung:

$$\delta'' = \frac{a^3}{E'} \left( \frac{Q}{3} + \frac{q a}{8} \right) \dots (2'')$$

Auch ist wieder aus der Relation  $E' = \rho (Q x + \frac{1}{2} q a^2)$ , wenn man für  $E'$  den Werth aus der vorigen Gleich. (2'') setzt:

$$\rho = \frac{a^3}{\delta''} \cdot \left( \frac{Q}{3} + \frac{qa}{8} \right) \cdot \dots \quad (3'')$$

**Zusatz 2.** Besteht die gleichförmige Belastung  $qa$  blofs in dem eigenen Gewichte  $G$  des Stabes, so nehmen die vorigen Gleichungen (1'') und (2'') die Form an:

$$E'y = a^2 \left( \frac{1}{2} Q + \frac{1}{8} G \right) x - \frac{1}{6} \left( Q x^3 + \frac{G}{4a} x^4 \right)$$

und 
$$\delta'' = \frac{a^3}{E'} \left( \frac{Q}{3} + \frac{G}{8} \right) \quad (\text{vergl. Nr. 119}).$$

### 33. Aufgabe.

Ein gewichtsloser elastischer Stab  $ABA'$  (Fig. 39) ist in einer verticalen Wand  $BE$  in der Art befestigt, dafs er in seinem natürlichen Zustande die Lage  $aa'$ , dagegen, wenn er in den freien Endpunkten  $A$  und  $A'$  mit den Gewichten  $Q$  und  $Q'$ , welche sich umgekehrt wie die Abstände  $AC$  und  $A'C'$  von der Wand verhalten, belastet wird, jene  $ABA'$  annimmt; es sollen die Krümmungen bestimmt werden, welche der Stab unmittelbar am Befestigungspunct  $B$  zu beiden Seiten der ohne Dicke gedachten Wand annimmt, vorausgesetzt, dafs der Stab auf der einen Seite der Wand soll gebogen werden können, ohne dafs dieses auf die Biegung auf der andern Seite der Wand einen Einflufs hat.

#### Auflösung.

Setzt man die horizontalen Abstände  $AC = x$  und  $A'C' = x'$ , so ist nach der gemachten Voraussetzung:

$$Q : Q' = x' : x \quad \text{oder} \quad Qx = Q'x' \quad \dots \quad (\alpha)$$

Ist ferner für den Punct  $B$  der Krümmungshalbmesser in der Curve  $AB = r$  und in der Curve  $A'B' = r'$ , so ist (Aufgabe 32, Relat.  $m$ )  $E' = rQx$ , und da der Stab durchaus dieselbe relative Elasticität besitzen soll, auch  $E' = r'Q'x'$ , folglich  $rQx = r'Q'x'$  und wegen Relat. ( $\alpha$ ) sofort:

$$r' = r$$

d. h. die Krümmung des Stabes ist im Puncte  $B$  zu beiden Seiten der Wand die nämliche, es halten sich daher die Fibern desselben bei  $B$ , zu beiden Seiten der Wand oder des Befestigungspunctes  $B$  das Gleichgewicht.

Es bleibt sonach das Gleichgewicht, so wie die ganze Lage  $ABA'$  auch ungeändert, wenn man die Wand  $BE$  wegnimmt und dafür den Stab im Puncte  $B$  mit einem Stift so befestigt, dafs sich der Stab um

denselben drehen kann, dieser Stift oder Befestigungspunct  $B$  erleidet dabei einen verticalen Druck nach abwärts  $= Q + Q'$ , so, daß man diesen Punct auch ohne Störung des Gleichgewichtes durch eine vertical aufwärts wirkende Kraft  $P = Q + Q'$  ersetzen kann. Werden ferner die beiden Puncte  $A$  und  $A'$  befestigt, so erleiden diese Puncte (da das Gleichgewicht immer noch bestehen bleibt) vertical aufwärts einen Druck, beziehungsweise von  $Q$  und  $Q'$ .

Keht man endlich das Ganze um, so kann auch ohne Störung des Gleichgewichtes der in den Puncten  $A$  und  $A'$  nach abwärts Statt findende Druck  $Q$  und  $Q'$  durch Stützen aufgehoben werden, wie dies in der That in Fig. 40 dargestellt ist.

**Zusatz.** Wird also ein an beiden Enden unterstützter oder frei aufliegender elastischer Stab, in irgend einem Puncte  $B$  belastet, so wird derselbe genau so gebogen, als ob er in dem Belastungspunct befestigt, dagegen durch vertical aufwärts wirkende, in den Unterstützungspuncten angebrachte Kräfte, die dem Drucke auf die Stützen gleich kommen, gebogen würde; dabei bestimmen sich diese Kräfte oder Verticalpressungen auf die Stützpunkte genau so, wie beim geradlinigen Hebel nach dem Satze der statischen Momente.

### 34. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab  $ABA'$  (Fig. 41) liegt auf den beiden in einerlei Horizont befindlichen Stützen  $A$  und  $A'$  frei auf und ist im Puncte  $B$  mit dem Gewichte  $Q$  belastet; es sollen die Gleichungen der beiden entstehenden Curven  $AMB$  und  $A'M'B$ , ferner die Gröfße der Biegung oder der Pfeil  $CB$  u. s. w. gefunden werden.

#### Auflösung.

Es sey  $AC = a$  und  $AA' = l$ , so wie für irgend einen Punct  $M$  der Curve  $AMB$  und einen Punct  $M'$  der Curve  $A'M'B$  (bei Voraussetzung von rechtwinkligen Coordinaten),  $AP = x$ ,  $PM = y$  und  $A'P' = x'$ ,  $P'M' = y'$ , ferner wenn  $BT$  die im Puncte  $B$  gezogene (folglich — vorige Aufgabe — beiden Curven gemeinschaftliche) Tangente ist,  $\angle ATB = \alpha$ ; so ist, wenn man die in den Puncten  $A$  und  $A'$  auf die Stützen Statt findenden Pressungen mit  $p$  und  $p'$  bezeichnet, sich also (vorige Aufgabe) vorstellt, daß der Stab in  $B$  befestigt, und in den Puncten  $A, A'$  durch die Kräfte  $p, p'$  vertical aufwärts gezogen wird, zuerst, wegen  $pl = Q(l - a)$  und  $p'l = Qa$ :

$$p = \frac{Q}{l}(l-a) \text{ und } p' = \frac{Q}{l}a \dots (\alpha)$$

(also, wie es seyn soll,  $p + p' = Q$ ). Ferner ist in der Curve  $AMB$ , für den Punkt  $M$  das stat. Moment  $= px$ , folglich (Aufg. 32):

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -px \text{ und daraus } E' \frac{dy}{dx} = C - \frac{px^2}{2}$$

oder da für  $x = a$  der Quotient  $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$ , also  $C = \frac{pa^2}{2} + E' \text{tang } \alpha$  wird, auch:

$$E' dy = \left( \frac{pa^2}{2} + E' \text{tang } \alpha \right) dx - \frac{px^2}{2} dx,$$

aus welcher Gleichung wieder weiters

$$E'y = \left( \frac{pa^2}{2} + E' \text{tang } \alpha \right) x - \frac{px^3}{6},$$

oder wenn man für  $p$  den Werth aus (a) setzt, sofort:

$$E'y = \frac{Q}{l} \frac{a^2}{2} (l-a)x + x E' \text{tang } \alpha - \frac{Q}{6l} (l-a)x^3. (I)$$

folgt.

Eben so ist in der Curve  $A'M'B$  für den Punkt  $M'$  das stat. Moment

$$= p'x' \text{ folglich } E' \frac{d^2y'}{dx'^2} = -p'x'$$

$$\text{und daraus wieder } E' \frac{dy'}{dx'} = C - \frac{p'x'^2}{2}$$

oder da für  $x' = l - a$  der Quotient  $\frac{dy'}{dx'} = -\text{tang } \alpha$ , folglich die Constante  $C = \frac{p'}{2}(l-a)^2 - E' \text{tang } \alpha$  wird, auch

$$E' dy' = \frac{p'}{2}(l-a)^2 dx' - E' \text{tang } \alpha dx' - \frac{p'x'^2}{2} dx'$$

woraus endlich durch weiteres Integriren

$$E'y' = \frac{p'}{2}(l-a)^2 x' - x' E' \text{tang } \alpha - \frac{p'}{6} x'^3$$

oder wenn man auch hier für  $p'$  den Werth aus (a) setzt:

$$E'y' = \frac{Qa}{2l}(l-a)^2 x' - x' E' \text{tang } \alpha - \frac{Qa}{6l} x'^3 \dots (II)$$

folgt.

Setzt man in der Gleichung (I)  $x = a$  und in jener (II)  $x' = l - a$ , so wird für beide Werthe  $y = y' = BC = \delta$ , daher ist beziehungsweise nach einer einfachen Reduction:

$$(b) . \quad E'\delta = \frac{Qa^3}{3l}(l-a) + a E' \text{tang } \alpha \text{ und}$$

$$E'\delta = \frac{Qa}{3l}(l-a)^3 - (l-a) E' \text{tang } \alpha$$

so, daß wenn man diese beiden Werthe einander gleich setzt und dann  $E' \tan \alpha$  bestimmt, sofort

$$E' \tan \alpha = \frac{Qa}{3l} (l-a)(l-2a) \dots (c)$$

wird. Substituirt man diesen Werth für  $E' \tan \alpha$  in die beiden Relationen (I) und (II), so erhält man nach einer ganz einfachen Reduction, für die Gleichung der Curve  $AMB$ :

$$y = \frac{Q}{6lE'} (l-a) [(2al - a^2)x - x^3] \dots (1)$$

und für die Gleichung der Curve  $A'M'B$ :

$$y' = \frac{Qa}{6lE'} [(l^2 - a^2)x' - x'^3] \dots (1')$$

dabei darf in der erstern Gleichung  $x$  bloß von 0 bis  $a$ , und in der letztern  $x'$  von 0 bis  $l-a$  genommen werden.

Setzt man den vorigen Werth von  $E' \tan \alpha$  auch in die Gleichung (b), so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\delta = \frac{Qa^2(l-a)^2}{3lE'} \dots (2)$$

**Zusatz 1.** Zur Bestimmung des tiefsten Punctes des gebogenen Stabes  $ABA'$ , muß man die größten Ordinaten  $y$  und  $y'$  aufsuchen. Nun folgt aus (1) nach der bekannten Regel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{6lE'} (l-a) [(2al - a^2) - 3x^2] = 0$$

und daraus:

$$x = \sqrt{\left[ \frac{a(2l-a)}{3} \right]} \dots (c).$$

Da aber  $x \leq a$  seyn muß, so muß seyn  $\frac{a(2l-a)}{3} \leq a^2$  oder  $l \leq 2a$ .

Ist daher  $l > 2a$ , d. h. liegt der Punct  $C$  näher bei  $A$  als bei  $A'$ , so gibt es in der Curve  $AMB$  keine größte Ordinate  $y$ . Ist dagegen  $l = 2a$  oder  $= 2a - e$ , so wird beziehungsweise  $x = a$  und  $= \sqrt{(a^2 - \frac{2}{3}ae)}$  und dafür, weil der 2<sup>te</sup> Differenzialquotient negativ ausfällt, die Ordinate  $y$  ein Maximum.

Eben so folgt aus der Gleichung (1'):

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Qa}{6lE'} (l^2 - a^2 - 3a'^2) = 0$$

und daraus:

$$x' = \sqrt{\left( \frac{l^2 - a^2}{3} \right)} \dots (d)$$

Da nun  $x' \leq l - a$  seyn muß, so muß  $\frac{l^2 - a^2}{3} \leq (l - a)^2$ , d. i.  $l \leq 2a$  seyn, so, daß wenn  $l < 2a$ , also  $l - a < a$  oder der Punkt  $C$  näher bei  $A'$  als bei  $A$  liegt, in der Curve  $A'MB$  keine größte Ordinate  $y'$  vorhanden ist, was mit der vorigen Bemerkung für  $y$  im Einklange steht.

Für  $l = 2a$  oder  $2a + e$  würde beziehungsweise:

$$x' = a \text{ und } = \sqrt{\left(a^2 + \frac{4ae + e^2}{3}\right)} \text{ und dafür } y' \text{ ein Maximum.}$$

Der tiefste Punkt des gebogenen Stabes liegt also immer zwischen dem Aufhängpunkt  $B$  der Last und demjenigen Stützpunkt  $A'$ , dessen Entfernung vom Aufhängpunkt die größere ist.

Ist z. B.  $a = 1$  und  $l = 3$ , so ist die der größten Ordinate  $y'$  entsprechende Abscisse (aus Relat.  $d$ )  $x' = \sqrt{\frac{8}{3}}$  und damit diese Ordinate selbst

$$y'_{\max.} = \frac{32}{27} \cdot \frac{16 Q^2}{81 E'^2}$$

während nur

$$\delta^2 = \frac{16 Q^2}{81 E'^2},$$

folglich in der That  $y'_{\max.} > \delta$  ist.

**Zusatz 2.** Für den besondern Fall, in welchem die Last  $Q$  in der Mitte hängt, folgt aus den Gleichungen (1), (1') und (2), wegen  $l = 2a$ , beziehungsweise:

$$y = \frac{Q}{12 E'} (3a^2 x - x^3) *$$

$$y' = \frac{Q}{12 E'} (3a^2 x' - x'^3)$$

und

$$\delta = \frac{Q a^3}{6 E'};$$

endlich folgt aus der Relation (c)  $\tan \alpha = 0$ , also  $\alpha = 0$ .

Für die größte Ordinate ist  $x = x' = a$  und damit

$$y_{\max.} = y'_{\max.} = \frac{Q a^3}{6 E'} = \delta.$$

**Zusatz 3.** Aus den Relationen  $E' = \rho p x = \rho p' x'$  (Gleich.  $m$

\*) Will man in diesem Falle den Halbirungspunkt zum Ursprung der rechtw. Coordinaten nehmen, so muß man in dieser Gleichung  $a - x$  statt  $x$  setzen, dadurch erhält man die Gleichung:

$$y = \frac{Q}{12 E'} (2a^3 - 3ax^2 + x^3).$$

in der 32. Aufg.) und  $E' = \frac{Q a^2 (l-a)^2}{3 \delta l}$  (obige Gleich. 2) folgt der Krümmungshalbmesser:

$$\text{für die Curve } AMB: \quad \rho = \frac{a^2 (l-a)}{3 \delta x}$$

$$\text{und für die Curve } A'M'B: \quad \rho' = \frac{a (l-a)^2}{3 \delta x'}$$

$$\text{Für } l = 2a \text{ wird } \rho = \frac{a^3}{3 \delta x} \text{ und } \rho' = \frac{a^3}{3 \delta x'}$$

Für  $x = a$  wird  $\rho$  am kleinsten und zwar  $\rho = \frac{a^2}{3 \delta}$ , dagegen ist für  $x = 0$  sofort  $\rho = \infty$ .

### 35. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab  $ADB$  (Fig. 42) liegt auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  horizontal frei auf, und wird durch ein über seine Länge gleich vertheiltes Gewicht belastet; es soll die dadurch entstehende Curve gefunden werden.

#### Auflösung.

Es sey die Länge des Stabes, welche bei der stets vorausgesetzten geringen Biegung der Entfernung der beiden Stützen gleich ist,  $AB = l$ , die auf die Längeneinheit kommende Belastung  $= q$ , der Neigungswinkel der im Punkte  $A$  an die Curve gezogenen Tangente  $AT$  mit der Horizontalen  $= \alpha$ , für einen beliebigen Punkt  $M$  der gesuchten Curve  $AP = x$  und  $PM = y$  (wobei wieder  $PM$  senkrecht auf  $AB$ ) so wie der Krümmungshalbmesser in diesem Punkte  $= \rho$ . Diefs vorausgesetzt, ist der Druck auf jede der beiden Stützen  $p = \frac{1}{2} q l$ , so, daß man die Stützen wegnehmen und dafür in  $A$  und  $B$  die Kraft  $p$  vertical aufwärts anbringen kann. Denkt man sich dabei noch den Punkt  $M$  befestigt, wodurch (33. Aufgabe) in dem Zustande des Stabes nichts geändert wird, so ist das statische Moment in Beziehung auf  $M$ , da auf den Bogen  $AM$  das Gewicht  $q x$  (indem man die Länge des Bogens mit der Abscisse verwechseln darf) gleichförmig vertheilt ist, folglich im Halbirungspuncte von  $AM$  die Kraft  $q x$  abwärts, dagegen im Punkte  $A$  die Kraft  $p = \frac{1}{2} q l$  aufwärts wirkt  $= -\frac{1}{2} x \cdot q x + x \cdot \frac{1}{2} q l = -\frac{1}{2} q x^2 + \frac{1}{2} q l x$ . folglich (Aufgabe 32, Relat.  $n$ )

$$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} q x^2 - \frac{1}{2} q l x$$

und daraus wieder  $E' \frac{dy}{dx} = C + \frac{1}{6} q x^3 - \frac{1}{4} q l x^2$ ,

oder da für  $x = 0$  der Quotient  $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$ , folglich die Constante der Integration  $C = E' \text{ tang } \alpha$  wird, auch

$$E' dy = dx E' \text{ tang } \alpha + \frac{1}{6} q x^3 dx - \frac{1}{4} q l x^2 dx.$$

Durch weitere Integration dieser Gleichung erhält man:

$$E' y = x E' \text{ tang } \alpha + \frac{q}{24} x^4 - \frac{q l}{12} x^3,$$

ohne Constante, wobei sich die noch unbestimmte constante Größe  $\text{tang } \alpha$  aus dem Umstande bestimmen läßt, daß für  $x = l$  die Ordinate  $y = 0$  werden muß; dies gibt:

$$E' \text{ tang } \alpha = \frac{q l^3}{24} \dots (m)$$

so, daß wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung substituirt und daraus  $y$  bestimmt, sofort die gesuchte Gleichung der Curve die Form erhält:

$$y = \frac{q}{24 E'} (l^3 x - 2 l x^3 - x^4) \dots (1)$$

**Zusatz.** Bezeichnet man wieder die größte Ordinate durch  $\delta$ , so hat man, um diese zu finden, nach der Regel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{24 E'} (l^3 - 6 l x^2 + 4 x^3) = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q}{24 E'} (-12 l x + 12 x^2);$$

aus der erstern dieser beiden Gleichungen folgt  $x = \frac{1}{2} l$ , womit der zweite Differenzialquotient negativ wird; es ist daher die durch die Mitte  $C$  von  $AB$  gezogene Ordinate  $CD = \delta$  die größte, und zwar ist, wenn man in der Gleichung (1)  $x = \frac{1}{2} l$  setzt und reducirt:

$$\delta = \frac{5 q l^4}{384 E'} \dots (2)$$

Ferner folgt aus den Relationen (32. Aufgabe, Relat.  $m$ )

$$E' = \rho \left( -\frac{1}{2} q x^2 + \frac{1}{2} q l x \right) \text{ und (vorige Gleich. 2) } E' = \frac{5 q l^4}{384 \delta},$$

wenn man diese beiden Ausdrücke einander gleich setzt und  $\rho$  bestimmt:

$$\rho = \frac{5 l^4}{192 \delta x (l - x)} \dots (3)$$

Für  $x = 0$  und  $x = l$  wird  $\rho = \infty$ , so, daß also der Stab in den Auflagpunkten  $A$  und  $B$  gar nicht gekrümmt ist; dagegen wird



$\rho$  am kleinsten für  $x = \frac{1}{2}l$  und zwar ist dafür  $\rho = \frac{5l^2}{48\delta}$ , so, daß also der Stab in der Mitte bei  $D$  am stärksten gekrümmt ist.

Da die Gleichung der Curve (1) nicht geändert wird, wenn man  $l - x$  statt  $x$  schreibt, so zeigt dieses an, daß die Curve  $AMB$  durch die aus dem Halbirungspunct  $C$  gezogene Verticallinie  $CD$  in zwei symmetrische Aeste getheilt wird. Nimmt man daher diesen Halbirungspunct  $C$  zum Ursprung der Coordinaten, setzt also  $CP = x$ , so muß man in der vorigen Gleichung (1)  $\frac{1}{2}l - x$  statt  $x$  setzen; dadurch erhält man für die neue Gleichung der Curve:

$$y = \frac{q}{24E'} \left( \frac{5l^4}{16} - \frac{3l^2}{2} x^2 + x^4 \right)$$

oder wenn man die halbe Länge  $\frac{1}{2}l = a$  setzt, auch

$$y = \frac{q}{24E'} (5a^4 - 6a^2x^2 + x^4) \dots (1')$$

Ferner wird (Relat.  $m$ )  $\tan \alpha = \frac{qa^3}{3E'}$ , (Relat. 2)  $\delta = \frac{5qa^4}{24E'}$  und

$$\text{(Relat. 3)} \quad \rho = \frac{5a^4}{12\delta(a^2 - x^2)}.$$

### 36. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab  $ADB$  (Fig. 42) liegt horizontal auf zwei Stützen frei auf und ist sowohl in seiner halben Länge mit dem Gewichte  $Q$  als auch durch ein über die ganze Länge gleich vertheiltes Gewicht, welches auf die Längeneinheit  $= q$  ist, belastet, es soll die Gleichung der dadurch entstehenden Curve bestimmt werden.

#### Auflösung.

Setzt man die Entfernung der beiden Stützen  $AB = 2a$  und nimmt man den Halbirungspunct  $C$  zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten, setzt nämlich für irgend einen Punct der Curve  $CP = x$  und  $PM = y$ , so wie den Druck, welchen jede der beiden Stützen erleidet  $= p$ ; so ist für diesen letzteren  $p \cdot 2a = Q \cdot a + 2aq \cdot a$  oder

$$p = \frac{1}{2}Q + aq \dots (a)$$

Ferner ist das stat. Moment in Beziehung auf den Punct  $M$  (welchen man sich wieder befestigt, dagegen die Kraft  $p$  im Puncte  $A$  aufwärts, und jene  $AP \cdot q$  in der halben Länge von  $AM$  abwärts wirksam denkt)  $= p(a - x) - (a - x)q \cdot \frac{(a - x)}{2} = p(a - x) - \frac{1}{2}q(a - x)^2$ , folglich (Aufgabe 32, Relat.  $n$ ):

$$E' \frac{d^2y}{dx^2} = -p(a-x) + \frac{1}{2}q(a-x)^2.$$

Daraus folgt durch Integrirung

$$E' \frac{dy}{dx} = C - p(ax - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2}q(a^2x - ax^2 + \frac{1}{3}x^3)$$

oder da für  $x=0$  der Quotient  $\frac{dy}{dx}$  (als Tangente des Winkels, welchen die im tiefsten Punkte  $D$  an die Curve gezogene geometr. Tangente mit der Abscissenachse bildet)  $= 0$ , also die Constante  $C$  ebenfalls  $= 0$  wird, auch

$$E' dy = -p(ax - \frac{1}{2}x^2) dx + \frac{1}{2}q(a^2x - ax^2 + \frac{1}{3}x^3) dx \dots (\beta)$$

woraus ferner

$$E'y = C - p\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

oder da für  $x=a$ ,  $y=0$ , folglich die Constante der Integration  $C = \frac{1}{3}pa^3 - \frac{1}{8}qa^4$  wird, sofort

$$E'y = \frac{1}{3}pa^3 - \frac{1}{8}qa^4 - p\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{a^2x^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

oder wegen  $p = \frac{1}{2}Q + qa$  (Relat.  $\alpha$ ) endlich:

$$E'y = \left(\frac{Qa^3}{6} + \frac{5qa^4}{24}\right) - \left(\frac{Qa}{4} + \frac{qa^2}{4}\right)x^2 + \frac{Q}{12}x^3 + \frac{q}{24}x^4 \dots (I)$$

folgt.

Zusatz 1. Wollte man die Lage der im Punkte  $A$  gezogenen Tangente  $AT$  bestimmen, so dürfte man in der Relation ( $\beta$ ) sofort nur  $x=a$  und  $-\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$  setzen (weil  $y$  abnimmt, wenn  $x$  zunimmt) und  $\text{tang } \alpha$  daraus bestimmen; dieß würde geben:

$$\text{tang } \alpha = \frac{3Qa^2 + 4qa^3}{12E'} \dots (1)$$

Da für  $x=0$  die Ordinate  $y=CD = \delta$  am größten wird, so hat man aus (I)  $E'\delta = \frac{Qa^3}{6} + \frac{5qa^4}{24}$  und daraus:

$$\delta = \frac{4Qa^3 + 5qa^4}{24E'} \dots (2)$$

Endlich ist (vergl. 32. Aufgabe, Relat.  $m$ )

$$E' = \rho \left[ p(a-x) - \frac{1}{2}q(a-x)^2 \right]$$

folglich, wenn man in diese Gleichung für  $E'$  den Werth aus der vorigen Relation (2) und für  $p$  den Werth aus ( $\alpha$ ) setzt und dann  $\rho$  bestimmt, die Größe des Krümmungshalbmessers im Punkte  $M$ :

$$\rho = \frac{a^3}{12\delta(a-x)} \cdot \frac{4Q + 5qa}{Q + q(a+x)} \dots (3)$$

Zusatz 2. Setzt man  $q=0$ , so gehen die Gleichungen (I), (1), (2) und (3) über in jene:

$$y = \frac{Q}{12 E'} (2 a^3 - 3 a x^2 + x^3)$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{Q a^2}{4 E'}$$

$$\delta = \frac{Q a^3}{6 E'}$$

und

$$\rho = \frac{a^3}{3 \delta (a - x)}$$

welche Werthe mit jenen in der Aufgabe 34, Zusatz 2, wie es seyn soll, genau übereinstimmen.

Setzt man dagegen  $Q=0$ , so gehen die genannten 4 Gleichungen (I), (1), (2) und (3) über in:

$$y = \frac{q}{24 E'} (5 a^4 - 6 a^2 x^2 + x^4)$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{q a^3}{3 E'}$$

$$\delta = \frac{5 q a^4}{24 E'}$$

und

$$\rho = \frac{5 a^4}{12 \delta (a^2 - x^2)}$$

was wieder mit den analogen Ausdrücken der vorigen Aufgabe (Zusatz) gehörig übereinstimmt.

Anmerkung. Will man nicht schon im voraus den mittlern Punct  $D$  als den tiefsten der Curve  $ADB$  gelten lassen, also bei der Bestimmung der

Constante  $C$  der ersten Integration den Quotienten  $\frac{dy}{dx}$  für  $x=0$  nicht

schon als bekannt ansehen und wie es oben geschehen dafür  $\frac{dy}{dx} = 0$

setzen, d. h. die an diesen Punct  $D$  gezogene Tangente als parallel mit  $AB$  annehmen; so bilde diese Tangente mit der Abscissenachse  $AB$  gegen  $A$  hin allgemein den Winkel  $\alpha$ , so, daß in der obigen zweiten Differenz-

gleichung (des ersten Grades) für  $x=0$  der Quotient  $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$ ,

daher die Constante  $C = E' \text{ tang } \alpha$  wird. Mit diesem Werthe erhält man bei dem vorigen Verfahren für den Ast  $AMD$ :

$$E' y = -a \text{ tang } \alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24} - x \text{ tang } \alpha - \left( \frac{Q a}{4} + \frac{q a^2}{4} \right) x^2 + \frac{Q x^3}{12} + \frac{q x^4}{24} \dots (A)$$

und für den Ast  $A'M'D$ , wobei sich nichts ändert, als daß  $\text{tang } \alpha$  mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist:

$$E'y = a \operatorname{tang} \alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24} + x \operatorname{tang} \alpha - \left( \frac{Q a}{4} + \frac{q a^2}{4} \right) x^2 + \frac{Q x^3}{12} + \frac{q x^4}{24}.$$

Um nun den Werth für  $\operatorname{tang} \alpha$  zu finden, sey für  $x = 0$  die Ordinate  $y = \delta$ , so ist aus diesen beiden Gleichungen:

$$E' \delta = -a \operatorname{tang} \alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}$$

und 
$$E' \delta = a \operatorname{tang} \alpha + \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24}$$

daraus durch Subtraction:

$$0 = 2 a \operatorname{tang} \alpha \text{ oder } \operatorname{tang} \alpha = 0 \dots (r)$$

durch Summirung dagegen entsteht  $2 E' \delta = 2 \left[ \frac{Q a^3}{6} + \frac{5 q a^4}{24} \right]$  und

daraus folgt 
$$\delta = \frac{4 Q a^3 + 5 q a^4}{24 E'}$$
, wie oben.

Aus der Gleichung (A) folgt zur Bestimmung der größten Ordinate, mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (r):

$$\frac{dy}{dx} = - \left( \frac{Q a}{2} + \frac{q a^2}{2} \right) x + \frac{Q x^2}{4} + \frac{q x^3}{6} = 0$$

und daraus  $x = 0$ , womit der zweite Quotient  $\frac{d^2 y}{dx^2} = - \left( \frac{Q a}{2} + \frac{q a^2}{2} \right)$

in der That negativ ausfällt.

### 37. Aufgabe.

Der gewichtlose elastische Stab  $ACA'$  (Fig. 43) ist in  $A$  eingemauert, in  $C$  mit dem Gewichte  $Q$  belastet und liegt am andern Ende  $A'$  auf einer Stütze frei auf; es soll die Curve bestimmt werden, welche der Stab dabei annimmt.

#### Auflösung.

Es sey  $AB = a$ ,  $AA' = l$  und der Druck auf die Stütze in  $A' = p$ , ferner seyen die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punctes  $M$  der Curve  $AMC$ ,  $AP = x$ ,  $PM = y$ , so wie eines Punctes  $M'$  der Curve  $A'M'C$ ,  $AP' = x'$  und  $P'M' = y'$ ; so ist das stat. Moment in Beziehung auf den Punct  $M$  (wobei man sich nach Aufg. 33, Zusatz, den Punct  $M$  befestigt und in  $A'$  die Kraft  $p$  aufwärts, dagegen in  $C$  jene  $Q$  abwärts wirkend denken kann)  $\mathfrak{M} = p(l - x) - Q(a - x)$ , folglich wieder

$$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = -p(l - x) + Q(a - x) \text{ und daraus}$$

$$E' \frac{dy}{dx} = -p \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + Q \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) \dots (m)$$

wozu keine Constante kommt, weil für  $x=0$  auch  $\frac{dy}{dx}=0$  ist, ferner

$$E'y = -p \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Q \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \dots (I)$$

ebenfalls ohne Constante, indem für  $x=0$  auch  $y=0$  seyn muß; dabei liegt  $x$  innerhalb der Grenzen 0 und  $a$ .

Eben so hat man in Beziehung auf den Punct  $M'$  der Curve  $A'M'C$  das stat. Moment (indem man sich  $M'$  befestigt, und im Puncte  $A'$  die Kraft  $p$  aufwärts wirkend denkt)  $\mathfrak{M} = p(l - x')$ , folglich

$$E' \frac{d^2y'}{dx'^2} = -p(l - x'), \text{ also } E' \frac{dy'}{dx'} = C - p \left( lx' - \frac{x'^2}{2} \right)$$

oder da für  $x'=a$  der Quotient (indem nach Aufgabe 33, die beiden Curven im Puncte  $C$  eine gemeinschaftliche Tangente haben)  $\frac{dy'}{dx'}$  jenen

Werth annimmt, welcher aus der Relation (m) für  $\frac{dy}{dx}$  hervorgeht, wenn man  $x=a$  setzt, folglich

$$-p \left( la - \frac{a^2}{2} \right) + \frac{Qa^2}{2} = C - p \left( la - \frac{a^2}{2} \right) \text{ oder } C = \frac{Qa^2}{2}$$

wird, auch: 
$$E' \frac{dy'}{dx'} = \frac{Qa^2}{2} - p \left( lx' - \frac{x'^2}{2} \right)$$

und daraus weiters:

$$E'y' = \frac{Qa^2}{2} x' - p \left( \frac{lx'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right) + C'$$

Da ferner  $y'$  für  $x'=a$  jenen Werth annimmt, welchen  $y$  für  $x=a$  in (I) erhält, so hat man zur Bestimmung der Constanten  $C'$ :

$$-p \left( \frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) + \frac{Qa^3}{3} = \frac{Qa^3}{2} - p \left( \frac{la^2}{2} - \frac{a^3}{6} \right) + C'$$

und daraus 
$$C' = -\frac{Qa^3}{6},$$

folglich, wenn man diesen Werth substituirt, auch:

$$E'y' = -\frac{Qa^3}{6} + \frac{Qa^2}{2} x' - p \left( \frac{lx'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right) \dots (II)$$

wobei  $x'$  von  $a$  bis  $l$  genommen werden kann.

Um endlich noch die unbestimmte Gröfse  $p$  zu bestimmen, benütze man die Bedingung, daß für  $x=l$  die Ordinate  $y=0$  seyn muß, so erhält man:

$$p = \frac{a^2(3l-a)}{2l^3} Q \dots (n)$$

welcher Werth noch in die Gleichungen (I) und (II) der Curven  $AMC$  und  $A'M'C$  gesetzt werden kann.

Zusatz 1. Zur Bestimmung der grössten Ordinate oder des tiefsten Punktes des gebogenen Stabes hat man zuerst aus der Gleichung (I):

$$\frac{dy}{dx} = -p \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + Q \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) = 0$$

und daraus, nachdem man mit  $x$  abgekürzt (oder die Wurzel  $x = 0$  beseitigt) hat:

$$x = 2 \cdot \frac{Qa - pl}{Q - p} \dots (1)$$

setzt man in dieser Gleichung  $l = a + a'$  und für  $p$  den Werth aus (n), so zeigt sich, dafs nur dann, wie es die Natur der Sache erfordert,

$x \leq a$  seyn kann, wenn  $a' \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$  ist. Da der zweite Quotient

$\frac{d^2y}{dx^2} = -Qa(2a^2 + aa' + 2a'^2)$  dabei negativ wird, so findet

unter dieser Bedingung wirklich ein Maximum von  $y$  Statt.

Es folgt ferner aus der Gleichung (II):

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{Qa^2}{2} - p \left( lx' - \frac{x'^2}{2} \right) = 0$$

und daraus, wenn man wieder für  $p$  den Werth aus der Relat. (n) setzt:

$$x' = \left[ 1 - \sqrt{\left( \frac{l-a}{3l-a} \right)} \right] l \dots (2)$$

Da aber für diese Curve  $A'M'C$   $x' \leq a$  seyn mufs, so folgt, dafs wenn man in diesem Ausdrücke von  $x'$  die Gröfse  $l = a + a'$  setzt, diese Bedingung nur erfüllt wird, wenn  $a' \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$  ist.

Auch wird in der That dafür der zweite Differenzialquotient  $\frac{d^2y'}{dx'^2} = -p(l - x')$  negativ, also die Ordinate  $y'$  ein Maximum.

Diese Untersuchung zeigt also, dafs in dem Aste oder in der Curve  $AMC$  für  $y$  ein Maximum und zwar für  $x = 2 \cdot \frac{Qa - pl}{Q - p}$  Statt findet,

wenn  $l = a + a'$  gesetzt,  $a' \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$  ist. Ferner dafs in dem Aste oder

in der Curve  $A'M'C$  eine grösste Ordinate  $y'$  existirt und zwar für

$x' = \left[ 1 - \sqrt{\left( \frac{l-a}{3l-a} \right)} \right] l$ , wenn  $l = a + a'$  gesetzt,  $a' \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$  ist.

Für  $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$  wird in beiden Fällen  $x = x' = a$ , so, dafs dann der Aufhängpunct  $C$  zugleich auch der tiefste Punct ist.

Findet also das Maximum in der ersten Curve Statt, so kann kein solches in der zweiten Curve bestehen, und umgekehrt, nur für  $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$  fallen beide größten Ordinaten im Aufhängpunct  $C$  zusammen.

**Zusatz 2.** Für  $a' = a$  oder  $l = 2a$  wird  $p = \frac{5}{16} Q$  und aus der Relation (2):  $x = \frac{12}{11} a$ , es liegt also, da dieser Werth  $x > a$  ist, kein Maximum von  $y$  in der Curve  $AMC$ .

Dagegen wird für den zweiten Ast  $A'M'C$  aus der Gleich. (2):

$$x' = 2a(1 - \sqrt{\frac{1}{5}})$$

und da dieser Werth von  $x'$  zwischen  $a$  und  $2a$  liegt (indem  $x' > a$  und  $< 2a$  ist), so findet in diesem Aste eine größte Ordinate  $y'$  Statt

und zwar ist

$$y'_{\max.} = \frac{Qa^3}{6E'} \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Die beiden Gleichungen (I) und (II) der Curventheile  $AMC$  und  $A'M'C$  gehen über in jene:

$$E'y = Q \left( \frac{3a}{16} x^2 - \frac{11}{96} x^3 \right)$$

und

$$E'y' = Q \left( -\frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} x' - \frac{5a}{16} x'^2 + \frac{5}{96} x'^3 \right)$$

**Zusatz 3.** Setzt man wieder den Pfeil oder die Ordinate des Aufhängpunctes  $BC = \delta$ , so erhält man sowohl aus der Relation (I) als aus jener (II) für  $x = a$  sofort  $y = y' = \delta$  und zwar:

$$\delta = \frac{Qa^3}{12l^3 E'} [4l^3 - a(3l - a)^2] \dots (3)$$

Für  $l = a + \frac{a}{\sqrt{2}}$  wird  $\delta = \frac{Qa^3}{12E'} (2 - \sqrt{2})$

welcher Werth in der That, wie es seyn soll, mit der größten Ordinate  $y$  in (I) oder  $y'$  in (II), welche für  $x = x' = a$  entsteht, übereinstimmt.

Anmerkung. Für  $l = 2a$  ist nach Zusatz 2 die größte Ordinate in dem

Aste  $A'M'C$  und zwar ist  $y'_{\max.} = \frac{Qa^3}{6\sqrt{5}E'}$ , oder nahe  $= \frac{Qa^3}{13.4E'}$ , wäh-

rend die Ordinate des Aufhängpunctes  $\delta = \frac{7Qa^3}{96E'}$ , oder nahe  $= \frac{Qa^3}{13.7E'}$ ,

also in der That  $y'_{\max.} > \delta$  ist.

### 38. Aufgabe.

Der elastische, gewichtlose Stab  $BAB'$  (Fig. 44) liegt horizontal auf 3 Stützen  $A, B, B'$ , von denen sich jene  $A$  in der Mitte zwischen

den beiden andern  $B, B'$  befindet, frei auf; wenn nun jede Hälfte des Stabes in der Mitte  $C$  und  $C'$  mit den Gewichten  $Q$  und  $Q'$  belastet ist, so soll der auf jede der 3 Stützen entfallende Druck und zugleich die Biegung bestimmt werden, welche der Stab dadurch erleidet.

### Auflösung.

Es sey  $AB = AB' = a$ , der Druck auf den Punct  $A$  gleich  $p$  und auf die Puncte  $B$  und  $B'$  beziehungsweise  $q$  und  $q'$ , so wie der Winkel, welchen die im Puncte  $A$  an die Curve gezogene Tangente mit der zur Abscissenachse genommenen Geraden  $BB'$  bildet  $= \alpha$ ; so hat man zuerst:

$$p + q + q' = Q + Q' \dots (1)$$

ferner, wenn man sich die Pressungen  $p, q, q'$  als Kräfte vorstellt, welche den in den Puncten  $A, B, B'$  nach aufwärts wirkenden Kräften  $p, q, q'$  gleich und entgegengesetzt sind, nach statischen Gesetzen (wenn man  $B$  als Drehungspunct ansieht):

$$2 a q' + p a = Q \cdot \frac{1}{2} a + Q' \cdot \frac{3}{2} a$$

und ( $B'$  als Drehungspunct):

$$2 a q + p a = Q \cdot \frac{3}{2} a + Q' \cdot \frac{1}{2} a$$

folglich

$$2 (q - q') = Q - Q' \dots (2)$$

Setzt man für die rechth. Coordinaten eines Punctes  $M$  der Curve  $ACB$ ,  $AP = x$ ,  $PM = y$  und denkt sich von dem Theile  $BCM$  der Curve den Punct  $M$  befestigt, dagegen in  $C$  und  $B$  die Kräfte  $Q$  und  $q$  ab- und aufwärts angebracht; so ist das stat. Moment in Beziehung auf diesen Punct  $= q(a - x) - Q\left(\frac{a}{2} - x\right)$ , folglich (genau so wie bei den vorhergehenden Aufgaben):

$$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = Q \left( \frac{a}{2} - x \right) - q(a - x)$$

und daraus  $E' \frac{dy}{dx} = Q \left( \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} \right) - q \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) + C$

oder da für  $x = 0$  der Quotient  $\frac{dy}{dx} = \text{tang } \alpha$  seyn soll, mithin die Constante  $C = E' \text{ tang } \alpha$  wird, auch:

$$E' \frac{dy}{dx} = Q \left( \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} \right) - q \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) + E' \text{ tang } \alpha \dots (\alpha)$$

woraus durch abermaliges Integriren, sofort

$$E' y = Q \left( \frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) - q \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + x E' \text{ tang } \alpha \dots (I)$$

folgt, wozu keine Constante kömmt, weil für  $x = 0$  auch  $y = 0$  seyn muß.



Diese Gleichung bezieht sich auf alle Punkte der Hälfte  $AMC$ , so, daß darin  $x$  nur von 0 bis  $\frac{a}{2}$  genommen werden darf.

Auf die zweite Hälfte  $BC$  der Curve  $ACB$  übergehend, sey für irgend einen Punkt  $M'$ ,  $AP' = x'$  und  $P'M' = y'$ , so, daß hier  $x'$  nur von  $\frac{a}{2}$  bis  $a$  genommen werden darf; so ist (wenn man sich den Punkt  $M'$  befestigt, dagegen im Punkte  $B$  die Kraft  $p$  aufwärts wirkend denkt) das stat. Moment in Beziehung auf den Punkt  $M' = q(a - x')$

folglich wieder 
$$E' \frac{d^2 y'}{dx'^2} = -q(a - x')$$

und daraus:

$$E' \frac{dy'}{dx'} = C - q \left( ax' - \frac{x'^2}{2} \right).$$

Um die Constante  $C$  zu bestimmen, bemerke man, daß die beiden Hälften  $AC$  und  $BC$  der Curve  $ACB$  in  $C$  eine gemeinschaftliche Tangente haben müssen, daß also der vorige Quotient  $\frac{dy}{dx}$  für  $x' = \frac{a}{2}$  denselben Werth, wie der obige Quotient  $\frac{dy}{dx}$  in ( $\alpha$ ) für  $x = \frac{a}{2}$  erhalten muß; dies gibt die Bedingungsgleichung:

$$\frac{1}{8} Q a^2 - \frac{3}{8} q a^2 + E' \tan \alpha = -\frac{3}{8} q a^2 + C$$

woraus  $C = \frac{1}{8} Q a^2 + E' \tan \alpha$  folgt, so, daß wenn man diesen Werth substituirt, sofort

$$E' \frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{8} Q a^2 + E' \tan \alpha - q \left( ax' - \frac{x'^2}{2} \right)$$

und daraus durch abermaliges Integriren

$$E' y' = C' + \frac{1}{8} Q a^2 x' + x' E' \tan \alpha - q \left( \frac{ax'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right)$$

folgt. Zur Bestimmung der Constanten  $C'$  bemerke man, daß  $y'$  für  $x' = \frac{a}{2}$  denselben Werth wie  $y$  für  $x = \frac{a}{2}$  in der vorigen Gleichung (I) annehmen muß; stellt man daher wieder wie vorhin die dieser Bemerkung entsprechende Bedingungsgleichung auf und bestimmt daraus  $C'$ , so erhält man

$$C' = -\frac{1}{48} Q a^3$$

und damit aus der vorigen Relation die Gleichung der Curvenhälfte  $BM'C$ :

$$E' y' = \frac{Q a^2}{8} x' + x' E' \tan \alpha - q \left( \frac{ax'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right) - \frac{Q a^3}{48}. \quad (II)$$

Aus diesen Gleichungen (I) und (II), welche den Curventheilen  $AMC$  und  $BM'C$  der Hälfte  $ACB$  entsprechen, erhält man jene für die Curventheile  $AC'$  und  $BC'$  der Hälfte  $ACB'$ , ganz einfach, indem

man in diese Gleichungen  $Q'$  statt  $Q$  und  $q'$  statt  $q$  setzt und  $\tan \alpha$  mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt; man erhält dadurch:

$$E'y = Q' \left( \frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) - q' \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - x E' \tan \alpha \quad (I')$$

und  $E'y' = \frac{Q'a^2}{8} x' - x' E' \tan \alpha - q' \left( \frac{ax'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right) - \frac{Q'a^3}{48} \quad (II')$

dabei ist in der erstern Gleichung  $x$  von 0 bis  $\frac{a}{2}$  und in der letztern  $x'$  von  $\frac{a}{2}$  bis  $a$  zu nehmen.

Setzt man in (II) und (II')  $x' = a$ , so wird  $y' = 0$ , folglich, wenn man gehörig reducirt und mit  $a$  abkürzt:

$$0 = E' \tan \alpha + \frac{5}{48} Q a^2 - \frac{1}{3} q a^2 \quad (3)$$

und  $0 = -E' \tan \alpha + \frac{5}{48} Q' a^2 - \frac{1}{3} q' a^2 \quad (4)$

so, daß sich aus den vier Gleichungen (1), (2), (3), (4), die noch unbestimmten Größen  $\alpha$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $q'$  bestimmen lassen. Man erhält nämlich durch die Subtraction von (3) — (4):

$$0 = 2 E' \tan \alpha + \frac{5}{48} a^2 (Q - Q') - \frac{1}{3} a^2 (q - q')$$

oder, wenn man für  $q - q'$  den aus (2) folgenden Werth substituirt und  $\tan \alpha$  bestimmt:

$$\tan \alpha = \frac{a^2 (Q - Q')}{32 E'} \quad (III)$$

Mit diesem Werthe von  $\tan \alpha$  folgt ferner aus (3):

$$q = \frac{13 Q - 3 Q'}{32} \quad (IV)$$

und eben so aus (4):

$$q' = \frac{13 Q' - 3 Q}{32} \quad (V)$$

und damit aus (1):

$$p = \frac{22 (Q + Q')}{32} \quad (VI)$$

Anmerkung. Wie man sieht, so trägt die mittlere Stütze  $A$  um  $\frac{1}{16}$  der ganzen Last  $Q + Q'$  mehr als das Doppelte von dem, was die beiden Stützen  $B$  und  $B'$  zusammen tragen, oder mit andern Worten, diese Stütze trägt etwas weniges (und zwar um  $\frac{1}{48}$ ) mehr als  $\frac{2}{3}$  der ganzen Last.

Auch sieht man, daß die Pressungen auf die Stützen von der Größe  $E'$  unabhängig sind, folglich dieselben bleiben, der Stab mag viel oder wenig biegsam seyn. Aus diesem Grunde fällt auch die bei der Vertheilung des Druckes einer in 3 Punkten unterstützten geraden steifen Linie bestehende Unbestimmtheit, wie sie in der 4. Aufgabe vorkömmt, sogleich hinweg, wenn man dieser Linie auch nur die allgeringste Biegsamkeit zugesteht.

Zusatz. Für den besondern Fall, dafs  $Q' = Q$  wird, erhält man aus den vorigen Relationen:

$$p = \frac{2^2}{16} Q, \quad q = q' = \frac{5}{16} Q \quad \text{und} \quad \tan \alpha = 0$$

so, dafs also die Abscissenachse  $BAB'$  zugleich eine Tangente an die Curve im Punkte  $A$  bildet. Die Gleichungen (I) und (II) oder (I') und (II') gehen dabei in die Gleichungen über:

$$E' y = \frac{Q}{96} (9 a x^2 - 11 x^3)$$

und 
$$E' y' = \frac{Q}{96} (-2 a^3 + 12 a^2 x' - 15 a x'^2 + 5 x'^3)$$

wovon die erstere den Curvenhälften  $AC$  und  $AC'$  und die letztere jenen  $BC$  und  $B'C'$  entspricht.

Für  $x = \frac{a}{2}$  gibt die erstere, und für  $x' = \frac{a}{2}$  die letztere denselben Werth:

$$\delta = y = y' = \frac{7 Q a^3}{768 E'}$$

Für  $x = 0$  gibt die erstere, und für  $x' = a$  die letztere  $y = y' = 0$ , Alles wie es seyn soll.

Zur Bestimmung der größten Ordinate folgt aus der ersten dieser beiden Gleichungen  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{96 E'} (18 a x - 33 x^2) = 0$  und daraus

$x = 0$  für ein Minimum und  $x = \frac{18}{33} a$ , welcher Werth größer als  $\frac{a}{2}$ ,

folglich für diese Curvenhälfte  $AC$  unbrauchbar ist. Aus der zweiten Gleichung dagegen erhält man  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{96 E'} (12 a^2 - 30 a x + 15 x^2) = 0$

und daraus  $x' = a \pm a \sqrt{\frac{1}{5}}$ , wovon, da  $x'$  nicht größer als  $a$  seyn darf, nur der zweite Werth  $x' = a \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ , welcher, wie es für den Cur-

ventheil  $BC$  seyn soll, größer als  $\frac{a}{2}$  und kleiner als  $a$  ist, in der That einem Maximum von  $y'$  entspricht, indem dafür der Quotient

$\frac{d^2 y}{dx^2} = A (-30 a + 30 x)$  negativ ausfällt, und zwar ist dafür

$$y'_{\max.} = \frac{Q a^3}{48 \sqrt{5} E'} \quad \text{oder nahe} = \frac{Q a^3}{107 E'}$$

während der obige Werth für die Ordinate des Aufhängpunktes  $C$  nahe den Werth  $\delta = \frac{Q a^3}{109 \cdot 7 E'}$  gibt, dieser also jedenfalls etwas kleiner als der vorige Werth von  $y'$  ist.

Was endlich den Krümmungshalbmesser betrifft, so läßt sich dieser

für jeden der beiden Curventheile  $AC$  und  $BC$  wieder eben so, wie bei den vorhergehenden Aufgaben ohne Schwierigkeit bestimmen.

Anmerkung. Setzt man hier (in diesem Zusatz) überall  $2a$  statt  $a$ , so erhält man genau dieselben Gleichungen und Werthe wie im Zusatz 2, der vorigen Aufgabe. Jede Hälfte des Stabes  $ACB$  und  $ACB'$  ist also hier genau in derselben Lage, als ob dieselbe in  $A$  eingemauert wäre und beziehungsweise in  $B$  und  $B'$  frei aufläge.

### 39. Aufgabe.

Die vorige Aufgabe mit Rücksicht auf das eigene Gewicht des elastischen Stabes oder Balkens aufzulösen.

#### Auflösung.

Behält man durchaus dieselbe Bezeichnung wie in der vorigen Aufgabe bei und setzt das Gewicht der Längeneinheit des Stabes (oder wenn dieser gewichtlos betrachtet wird, die noch aufser der Belastung  $Q$  auf die Längeneinheit kommende gleichförmige Belastung)  $= g$ ; so muß man jetzt für das erstere, auf den Punct  $M$  bezogene stat. Moment der vorigen Aufgabe

$$\mathfrak{M} = q(a - x) - Q \left( \frac{a}{2} - x \right) - \frac{1}{2} g (a - x)^2$$

und daher 
$$E' \frac{d^2 y}{dx^2} = Q \left( \frac{a}{2} - x \right) + \frac{1}{2} g (a - x)^2 - q(a - x)$$

setzen (also hier noch das Glied  $g(a - x) \cdot \frac{1}{2}(a - x)$  hinzufügen, woraus man, genau wie früher verfahren, nach und nach

$$E' \frac{dy}{dx} = Q \left( \frac{a}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2} g \left( a^2 x - a x^2 + \frac{x^3}{3} \right) - q \left( a x - \frac{x^2}{2} \right) + E' \tan \alpha$$

und

$$E' y = Q \left( \frac{a}{4} x^2 - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{2} g \left( \frac{a^2}{2} x^2 - \frac{a}{3} x^3 + \frac{x^4}{12} \right) - q \left( \frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + x E' \tan \alpha \quad (I)$$

erhält.

Für die Hälfte  $BC$  ist jetzt das stat. Moment  $= q(a - x) - \frac{1}{2} g (a - x)^2$  folglich

$$E' \frac{d^2 y'}{dx'^2} = \frac{1}{2} g (a - x')^2 - q(a - x')$$

und daraus (da die Constante  $C = \frac{Q a^2}{8} + E' \tan \alpha$  wird):

$$E' \frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{2} g \left( a^2 x' - a x'^2 + \frac{x'^3}{3} \right) - q \left( a x' - \frac{x'^2}{2} \right) + \frac{Q a^2}{8} + E' \tan \alpha$$

und

$$E' y' = \frac{1}{2} g \left( \frac{a^2 x'^2}{2} - \frac{a x'^3}{3} + \frac{x'^4}{12} \right) - q \left( \frac{a x'^2}{2} - \frac{x'^3}{6} \right) + \frac{Q a^2}{8} x' + x' E' \tan \alpha - \frac{Q a^3}{48} \quad (\text{II})$$

die den 4 Gleichungen (1), (2), (3), (4) der vorigen Aufgabe analogen Gleichungen sind hier:

$$p + q + q' = Q + Q' + 2 a g \quad (1)$$

$$2(q - q') = Q - Q' \quad (2)$$

ferner, wenn man in (II) und (II') (welche letztere Gleich. aus jener (III) entsteht, wenn man wieder  $Q'$  und  $q'$  statt  $Q$  und  $q$  schreibt und  $\tan \alpha$  negativ nimmt)  $x' = a$  setzt, wofür  $y' = 0$  wird:

$$0 = \frac{1}{8} g a^4 - \frac{1}{3} q a^3 + \frac{5}{48} Q a^3 + a E' \tan \alpha \quad (3)$$

$$\text{und} \quad 0 = \frac{1}{8} g a^4 - \frac{1}{3} q' a^3 + \frac{5}{48} Q' a^3 - a E' \tan \alpha \quad (4)$$

Aus diesen Gleichungen folgt ganz einfach, wie in der vorigen Aufgabe:

$$\tan \alpha = \frac{a^3(Q - Q')}{32 E'}$$

dagegen

$$q = \frac{13 Q - 3 Q' + 12 a g}{32}$$

$$q' = \frac{13 Q' - 3 Q + 12 a g}{32}$$

und

$$p = \frac{22(Q + Q') + 40 a g}{32}$$

Endlich erhält man für die Ordinate des Aufhängpunktes (für  $x = \frac{a}{2}$ ) aus (I) oder  $x' = \frac{a}{2}$  aus (II):

$$\delta = \frac{7 Q a^3}{768 E'} + \frac{g a^4}{12 E'},$$

welche Ausdrücke sämmtlich, wie es seyn soll, für  $g = 0$  in die correspondirenden der vorigen Aufgabe übergehen.

#### 40. Aufgabe.

Wenn zwei materielle Kugeln aus homogenen Schichten oder Schalen gebildet sind, deren sämmtliche Punkte sich im geraden Verhältnifs ihrer Massen und im umgekehrten Verhältnifs des Quadrates ihrer Entfernung anziehen, die Resultante der Kräfte zu finden, welche jede Kugel auf die andere ausübt.

## Auflösung.

**I.** Betrachtet man zuerst die Anziehung einer homogenen Kugelschale, deren Mittelpunkt  $C$  (Fig. 45) ist, gegen einen materiellen Punkt  $O$ , welcher außerhalb der Schale liegt; so sey  $r$  der Halbmesser der Schale und  $\delta$  ihre unendlich kleine Dicke, folglich  $V = 4r^2 \pi \delta$  ihr Volumen; ferner bezeichne  $p$  die anziehende Kraft, welche zwei materielle Punkte in dem Abstände  $= 1$  gegen einander ausüben, wenn jeder Punkt die Masse  $= 1$  besitzt,  $m$  sey die Masse des materiellen Punktes in  $O$  und  $m'$  die Masse der Volumeneinheit der Kugelschale, folglich  $M = 4r^2 \pi \delta m'$  jene der Schale selbst; ferner sey  $CO = a$  der Abstand des materiellen Punktes  $O$  vom Mittelpunkt  $C$  und für irgend eine unendlich kleine, im Punkte  $M$  liegende Oberfläche  $\omega$  der Kugelschale, der Abstand  $MO = z$ , folglich, da das Volumen dieses Elementes der Schale  $= \omega \delta$  und dessen Masse  $= \omega \delta m'$  ist, die Anziehungskraft gegen den Punkt  $O$ , nach dem angenommenen Gesetze:

$$p' = \frac{\omega \delta m m'}{z^2} p \quad (\alpha)$$

Denkt man sich die Kugelschale durch zwei Ebenen  $MM'$  und  $mm'$  geschnitten, welche auf der Geraden  $CO$  perpendicular stehen und einander unendlich nahe liegen, so, daß für  $OP = x$   $Op = x + dx$  ist; so hat die Resultirende aus allen ähnlichen Kräften wie  $p'$  in  $(\alpha)$  der dadurch abgeschnittenen unendlich schmalen Zone, die Richtung  $OC$  und als Gröfse oder Intensität die Summe aus den Projectionen der sämtlichen elementaren Kräfte  $p'$  auf die Achse  $OC$  \*).

Nun ist die Projection der Kraft  $p'$ , welche in  $M$  wirkt, auf die Achse  $CO$  offenbar  $\frac{x}{z} p' = \omega \delta m m' p \frac{x}{z^3}$  (Relat.  $\alpha$ ), folglich gibt die

\*) Nimmt man nämlich in Nr. 15 die Richtung der Resultante  $\mathcal{R}$  für die Achse der  $x$ , so wird in der dortigen Relation  $a = 0$ ,  $b = c = 90^\circ$  und daher

$$\mathcal{R} = \Sigma (P \cos \alpha), \quad \Sigma (P \cos \beta) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (P \cos \gamma) = 0.$$

Von diesen Relationen sagt die erstere aus, daß die Gröfse der Resultante mehrerer auf einen Punkt wirkenden Kräfte gleich ist der algebr. Summe aus den Projectionen dieser Seitenkräfte auf die Richtung der Resultante, so wie jede der beiden letztern, daß die algebr. Summe aus den Projectionen dieser Seitenkräfte auf eine zur Resultirenden perpendicularen Achse gleich Null ist.

Summe aus allen ähnlichen Werthen, welche den auf der genannten unendlich schmalen Zone liegenden Elementen  $\omega$  entsprechen, die Gesammtanziehung dieser schmalen Zone auf den materiellen Punct  $O$ . Setzt man daher, da alle auf dieser Zone liegenden Elemente  $\omega$  dasselbe  $x$  und  $z$  haben, für die Summe dieser Elemente den Sector selbst, d. i.  $2r\pi dx$ , so ist die eben genannte Anziehung der materiellen Zone  $MM'm'$  gegen den materiellen Punct  $O$  und umgekehrt des Punctes  $O$  gegen die Zone, sofort:

$$dP = 2r\pi\delta m'p \frac{x dx}{z^3} = \frac{M}{2r} m p \frac{x dx}{z^3}.$$

Da aber  $z^2 = x^2 + MP^2 = x^2 + r^2 - (a-x)^2 = r^2 - a^2 + 2ax$ , folglich

$$x = \frac{z^2 + a^2 - r^2}{2a} \quad \text{und} \quad dx = \frac{2z dz}{2a}$$

ist, so folgt auch nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$dP = \frac{Mmp}{4a^2r} \left[ dz + (a^2 - r^2) \frac{dz}{z^2} \right]$$

Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man für den allgemeinen Fall:

$$P = \frac{Mmp}{4a^2r} \left[ z - \frac{(a^2 - r^2)}{z} \right] + C$$

Liegt nun

a) der Punct  $O$ , wie oben angenommen worden, aufserhalb der Kugelschale, so muß dieses Integral innerhalb der Grenzen von  $z = a - r$  bis  $z = a + r$  genommen werden; dadurch erhält man:

$$P = \frac{Mmp}{4a^2r} \left[ a + r - \frac{a^2 - r^2}{a + r} - (a - r) + \frac{a^2 - r^2}{a - r} \right]$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$P = \frac{Mm}{a^2} p \quad (1)$$

Liegt aber

b) der Punct  $O$  (Fig. 46) innerhalb der Kugelschale, so muß das vorige Integral zwischen den Grenzen von  $z = r - a$  bis  $z = r + a$  genommen werden, wodurch man aber

$$P = \frac{Mmp}{4a^2r} \left[ r + a + \frac{r^2 - a^2}{r + a} - (r - a) - \frac{r^2 - a^2}{r - a} \right]$$

oder nach gehöriger Reduction

$$P = 0 \quad (2) \quad \text{erhält.}$$

Aus der Relation (1) folgt, daß die anziehende Kraft, welche die Kugelschale von der Masse  $= M$  auf den

äußern Punct  $O$  von der Masse  $= m$  (und umgekehrt  $m$  gegen  $M$ ) ausübt, genau dieselbe ist, als wenn die gesammte Materie der Kugelschale in ihrem Mittelpunct vereinigt wäre.

Dagegen zeigt die Relation (2), daß die Anziehungskraft, welche die Kugelschale gegen einen innerhalb liegenden Punct ausübt, Null ist.

**II.** Da nun das eben Bewiesene von jeder mit dieser concentrischen Kugelschale gilt, so folgt, daß ein aus homogenen concentrischen Kugelschalen zusammengesetzter Körper, dessen sämtliche Puncte einen außerhalb liegenden materiellen Punct nach dem umgekehrten quadratischen Verhältniß der Entfernung anziehen, dieselbe Wirkung auf diesen Punct, so wie auch umgekehrt dieser Punct auf den Körper ausübt, als wenn die ganze Materie dieses Körpers in seinem Mittelpuncte vereinigt wäre.

Weiters folgt, daß sich bei demselben Anziehungsgesetze die Wirkung eines aus homogenen Kugelschalen gebildeten Körpers gegen einen in seinem innern befindlichen Punct auf die Wirkung jener Materie beschränkt, welche von der durch diesen Punct gehenden Kugelfläche eingeschlossen wird, gegen welche nämlich dieser Punct als ein äußerer erscheint, während die Wirkung der ihn einschließenden concentrischen Schichten Null ist.

Anmerkung. Wäre demnach unsere Erde genau kugelförmig und homogen, so würde ihre Anziehung auf einen Punct im innern derselben dem Abstände dieses Punctes vom Mittelpuncte der Erde direct proportional seyn, während ihre Anziehung auf einen außerhalb oder über ihrer Oberfläche liegenden Punct dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional wäre. Denn man müßte nach dem letztern Satze für einen innern Punct  $O$  (Fig. 46) die Masse  $M$  der anziehenden Kugel dem Cubus des Halbmessers  $CO = a$  proportional, also in der obigen Formel (1)  $M = \mu a^3 M'$  setzen, wodurch  $P = \mu M' m . a$  wird, während für äußere Puncte die Masse  $M (= \frac{4}{3} \pi r^3)$  constant, also auch die Formel (1) un geändert bleibt.

**III.** Liegen endlich die Mittelpuncte  $C, C'$  zweier aus homogenen concentrischen Schichten bestehenden Kugeln von den Massen  $M$  und  $M'$  um die Entfernung  $a$  auseinander, so ist die Wirkung der ersten Kugel  $C$  auf jeden materiellen Punct der zweiten Kugel  $C'$  eben so, als wenn die Masse  $M$  der ersten Kugel in ihrem Mittelpuncte vereinigt wäre; ihre Wirkung ist daher auf die Gesammtmasse der zweiten Kugel die nämliche, als wenn im Puncte  $C$  die Masse  $M$  befindlich



wäre, welche ihre Wirkung auf diese zweite Kugel  $C'$  ausübte. Die Resultante dieser Wirkung ist aber

$$W = \frac{MM'}{a^2} p$$

gerade so, als wenn auch die Masse  $M'$  der zweiten Kugel in ihrem Mittelpunkte  $C'$  vereinigt wäre; hieraus folgt der Satz, daß die Resultierende der Kräfte, welche jede Kugel auf die andere ausübt, genau die nämliche ist, wie wenn die gesammte Masse oder Materie jeder Kugel in ihrem Schwer- oder Mittelpunkte vereinigt wäre.

§ 1. Aufgabe.

Ein auf einer schießen Ebene  $AB$  (Fig. 47) liegender Körper vom Gewichte  $Q$  ist durch einen mit der Ebene  $AB$  parallel laufenden, über eine Rolle geführten Faden mit dem Gewichte  $P$  verbunden; es sollen die Gesetze der durch die Fäden bewirkten Bewegung des Körpers wozug, mit Rücksicht auf die Reibung, welche zwischen dem Körper und der schießen Ebene Statt findet, bestimmt werden.

§ 2. Auflösung.

Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel der schießen Ebene und  $\mu$  der betreffende Reibungscoefficient, so ist  $Q \sin \alpha$  das relative Gewicht des Körpers und  $Q \cos \alpha$  der normale Druck, folglich  $\mu Q \cos \alpha$  der Betrag oder die Größe der Reibung. Die nötige Kraft um den Körper über die schieße Ebene hinauf zu ziehen ist demnach  $K = Q \sin \alpha + \mu Q \cos \alpha$ ; ist daher  $P > K$ , so ist die bewegende Kraft  $K' = P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha$  und die bewegte Masse  $M = P + Q$ , folglich entsteht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung für welche die Beschleunigung (§ 146, Gl. 2)

$$a = \frac{K' - 0}{M} = \frac{P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha}{P + Q}$$

und womit sofort Alles gegeben ist; denn es ist z. B. hier in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg  $s = \frac{1}{2} a t^2$ , die dabei erlangte Endgeschwindigkeit  $v = a t$  u. s. w.

Zusatz. Soll die Bewegung gleichförmig werden, so muß  $a = 0$  seyn; dies gibt also  $0 = P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha$ , woraus

$$P = Q (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

folgt, wenn nämlich (außer  $Q$ ) die Größen  $P$  und  $\alpha$  gegeben, oder wenn die Größen  $\mu$  und  $\alpha$  gegeben, oder endlich

## B) Aus der Dynamik.

### 41. Aufgabe.

Ein auf einer schiefen Ebene  $AB$  (Fig. 47) liegender Körper vom Gewichte  $Q$  ist durch einen mit der Ebene  $AB$  parallel laufenden, über eine Rolle geführten Faden mit dem Gewichte  $P$  verbunden; es sollen die Gesetze der durch das Herabsinken des Gewichtes entstehenden Bewegung, mit Rücksicht auf die Reibung, welche zwischen dem Körper und der schiefen Ebene Statt findet, bestimmt werden.

### Auflösung.

Ist  $\alpha$  der Neigungswinkel der schiefen Ebene und  $\mu$  der betreffende Reibungscoefficient, so ist  $Q \sin \alpha$  das relative Gewicht des Körpers und  $Q \cos \alpha$  der normale Druck, folglich  $\mu Q \cos \alpha$  der Betrag oder die Gröfse der Reibung. Die nöthige Kraft um den Körper über die schiefe Ebene hinauf zu ziehen ist demnach  $K = Q \sin \alpha + \mu Q \cos \alpha$ ; ist daher  $P > K$ , so ist die bewegende Kraft  $K' = P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha$  und die bewegte Masse  $M = P + Q$ , folglich entsteht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung für welche die Beschleunigung (§. 146, Gl. 2)

$$G = \frac{K'}{M} g = \frac{P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha}{P + Q} g$$

und womit sofort Alles gegeben ist; denn es ist z. B. der in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg

$$s = \frac{1}{2} G t^2,$$

die dabei erlangte Endgeschwindigkeit  $v = G t$  u. s. w.

Zusatz. Soll die Bewegung gleichförmig werden, so muß  $G = 0$  seyn, dies gibt also  $0 = P - Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha$ , woraus

$$\mu = \frac{P}{Q \cos \alpha} - \tan \alpha$$

folgt, wenn nämlich (außer  $Q$ ) die Gröfsen  $P$  und  $\alpha$  gegeben, oder

$$P = Q (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

wenn die Gröfsen  $\mu$  und  $\alpha$  gegeben, oder endlich

$$\sin \alpha = \frac{P \pm \mu \sqrt{[(1 + \mu^2) Q^2 - P^2]}}{(1 + \mu^2) Q}$$

wenn die Gröfsen  $P$  und  $\mu$  gegeben sind

Anmerkung. Ist  $Q \sin \alpha > P + \mu Q \cos \alpha$ , so gleitet der Körper  $O$  mit gleichförmig beschleunigter Bewegung über die schiefe Ebene herab, und zwar ist die Beschleunigung:

$$G = \frac{Q \sin \alpha - P - \mu Q \cos \alpha}{P + Q} g.$$

Die Bewegung wird dabei gleichförmig, wenn  $G = 0$  d. i.  $Q \sin \alpha = P + \mu Q \cos \alpha$  oder  $P = Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$  ist.

## 42. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen das Gewicht  $P$  den Körper  $O$  vom Gewichte  $Q$  (Fig. 47) in der kürzesten Zeit über die schiefe Ebene  $AB$ , bei welcher die Höhe  $BC = h$  gegeben ist, hinaufzieht.

### Auflösung.

Wird auf die Reibung keine Rücksicht genommen, so ist, wenn  $P > Q \sin \alpha$ , die Beschleunigung:

$$G = \frac{P - Q \sin \alpha}{P + Q} g \quad \text{und} \quad AB = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Wird demnach der Weg  $AB$  in der Zeit  $t$  zurückgelegt, so ist  $AB = \frac{1}{2} G t^2$  oder  $t = \sqrt{\left(\frac{2AB}{G}\right)}$ , oder wenn man für  $AB$  und  $G$  die Werthe setzt, auch:

$$t = \sqrt{\left[\frac{2h(P+Q)}{g \sin \alpha (P - Q \sin \alpha)}\right]} \dots (1)$$

Da nun der Zähler dieses Bruches constant ist, so wird  $t$  am kleinsten, wenn der Nenner, oder der Factor  $P \sin \alpha - Q \sin^2 \alpha$  am grösst ist; setzt man daher

$$x = P \sin \alpha - Q \sin^2 \alpha,$$

so ist nach der Regel:

$$\frac{dx}{d\alpha} = P \cos \alpha - 2Q \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad \text{und daraus}$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{als die eine, und} \quad \sin \alpha = \frac{P}{2Q} \quad \text{als die zweite Wurzel.}$$

Der zweite Differenzialquotient

$$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = -P \sin \alpha - 2Q (-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

ist für den erstern Werth, nämlich für  $\text{Cos } \alpha = 0$ , wofür  $\alpha = 90^\circ$  und  $\text{Sin } \alpha = 1$  ist, sofort  $= 2Q - P$ , dagegen für den zweiten Werth, d. i. für  $\text{Sin } \alpha = \frac{P}{2Q}$ , wie leicht zu sehen  $= \frac{(P+2Q)(P-2Q)}{2Q}$ .

Da nun, wenn  $\alpha$  möglich seyn soll,  $P \leq 2Q$  seyn muß, so ist für den letztern Werth, d. i. für  $P < 2Q$ , wofür  $\alpha < 90^\circ$  ist, dieser zweite Differenzialquotient negativ, folglich dafür  $\alpha$  ein Maximum.

Für  $P = 2Q$  dagegen, wofür  $\alpha = 90^\circ$ , also  $\text{Cos } \alpha = 0$  ist, wird dieser zweite Quotient und damit auch der dritte Differenzialquotient  $= \text{Cos } \alpha (-P + 8Q \text{Sin } \alpha)$ , Null und endlich der vierte Differenzialquotient  $= P \text{Sin } \alpha + 8Q (\text{Cos}^2 \alpha - \text{Sin}^2 \alpha)$  dafür negativ, so, daß auch für diesen Werth  $\alpha$  ein Maximum oder  $t$  ein Minimum wird, d. h. die Zeit  $t$  wird am kleinsten, wenn  $\text{Sin } \alpha = \frac{P}{2Q}$  ist, es mag dabei  $P =$  oder  $< 2Q$  seyn

Ohne Anwendung der Differenzialrechnung gelangt man zu demselben Resultate auch auf folgende Art.

Setzt man nämlich den gesuchten größten Werth des obigen Nenners  $\alpha$ , d. i.  $P \text{Sin } \alpha - Q \text{Sin}^2 \alpha = A$ , so folgt daraus

$$\text{Sin } \alpha = \frac{P \pm \sqrt{(P^2 - 4AQ)}}{2Q};$$

soll nun  $\alpha$  möglich seyn, so kann  $A$  höchstens so groß werden, daß  $P^2 - 4AQ = 0$ , d. i.  $A = \frac{P^2}{4Q}$  wird, was sofort

$$\text{Sin } \alpha = \frac{P}{2Q} \dots (\gamma)$$

wie zuvor gibt.

Um aber den kleinsten Werth von  $t$  aus der Gleichung (1) zu erhalten, darf man nur für  $\text{Sin } \alpha$  diesen gefundenen Werth  $\frac{P}{2Q}$  setzen; dadurch erhält man:

$$t = \sqrt{\left[ \frac{8hQ(P+Q)}{gP^2} \right]} \dots (2)$$

Ist außerdem noch  $P = 2Q$ , also  $\alpha = 90^\circ$ , so wird dafür der kleinste Werth:

$$t = \sqrt{\left( \frac{6h}{g} \right)} \dots (3)$$

Zusatz. Ist  $\varphi$  jener Winkel der schiefen Ebene, bei welchem unter Beibehaltung derselben Höhe  $h$ ,  $P$  mit  $Q$  im Gleichgewichte steht, also  $P = Q \text{Sin } \varphi$  oder  $\frac{P}{2Q} = \frac{1}{2} \text{Sin } \varphi$  ist; so hat man, wenn  $\alpha$  jenen

Winkel der schiefen Ebene bedeutet, für welchen die Hubzeit  $t$  ein Minimum wird, zufolge der vorigen Bedingungsgleichung (7),

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

Ist z. B. in Fig. 48  $AB = L$  und  $A'B = l$ , so ist, wegen  $BC = h$  sofort  $h = l \sin \varphi = L \sin \alpha$ , folglich nach der vorigen Bedingungsgleichung

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{2} \frac{h}{l} \quad \text{d. i.} \quad L = 2l.$$

Anmerkung. Ohne Rücksicht auf die Bedingungen des Maximum und Minimum, also ohne Beziehung des Winkels  $\alpha$  auf die Größen  $P$  und  $Q$ , folgt aus (1) für  $\alpha = 90^\circ$  sofort:

$$t = \sqrt{\frac{2h(P+Q)}{g(P-Q)}}$$

wobei offenbar weder ein Maximum noch ein Minimum möglich ist, weil sich, wenn  $P$  ohne Ende zunimmt, die Zeit  $t$  ohne Ende dem Werthe (für den freien Fall von  $P$ ) von  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ , und wenn  $P$  sich ohne Ende dem Werthe von  $Q$  nähert, die Zeit  $t$  fortwährend zunimmt und zuletzt unendlich groß wird.

Ist jedoch der Winkel  $\alpha$  nicht im voraus gegeben, sondern ist es freigelassen den Körper  $O$  über eine schiefe Ebene oder vertical zu heben und fragt man nur, wie diefs in der kürzesten Zeit geschehen könne; so geben die obigen Relationen hierauf die Antwort und zwar sagen sie aus, dafs wenn  $P < 2Q$  ist, diese Bedingung nur bei jener schiefen Ebene möglich wird, für welche  $\sin \alpha = \frac{P}{2Q}$  ist, wofür dann die nöthige Zeit in (2) gegeben, dafs diese Bedingung jedoch, wenn  $P = 2Q$  ist, nur durch das verticale Heben, also durch gar keine schiefe Ebene zu erreichen sey, in welchem Falle diese kürzeste Zeit durch die Gleichung (3) bestimmt ist, und dafs endlich wenn  $P > 2Q$ , diese Bedingung weder durch eine schiefe Ebene, noch durch das verticale Heben zu erreichen sey.

### 43. Aufgabe.

Ein Körper fällt von einer so bedeutenden Höhe herab, dafs man dabei die Anziehungskraft der Erde nicht mehr (wie diefs in gewöhnlichen Fällen annähernd geschieht) als constant ansehen kann, sondern diese nach dem Gesetze in Rechnung gebracht werden mufs, nach welchem diese Kraft genau so abnimmt wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunct der Erde zunimmt; es soll die Geschwindigkeit bestimmt werden, welche der fallende Körper erlangt hat, nachdem er durch eine gewisse Höhe gefallen ist.

### Auflösung.

Ist  $A$  (Fig. 49) der Punkt, von wo aus der Körper fällt,  $C$  der Mittelpunkt der Erde, also  $AC$  eine lothrechte Linie, welche die Oberfläche der Erde im Punkte  $B$  schneidet und  $P$  jener Punkt der Geraden  $AC$ , in welchem sich der fallende Körper am Ende der Zeit  $t$  befindet; so sey der Halbmesser der Erde  $CB = r$ , die Höhe  $BA = h$ , das Stück  $AP = x$  und die Distanz  $CP = z$ , ferner sey, wie immer,  $g$  die beschleunigende Kraft der Schwere an der Oberfläche der Erde, dagegen  $\varphi$  ihre Intensität im Punkte  $P$ , d. h. in der Entfernung  $CP$ . Dieß vorausgesetzt, hat man zuerst nach dem ausgesprochenen Gesetze:

$$\varphi : g = r^2 : z^2$$

und daraus 
$$\varphi = \frac{r^2}{z^2} g \dots (m)$$

Nun ist aber  $\varphi$  während der unendlich kleinen Zeit  $dt$  als constant anzusehen, so, daß während dieser Zeit die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, folglich hat man nach den bekannten Relationen, wenn  $v$  die Geschwindigkeit bezeichnet, die der fallende Körper im Punkte  $P$ , d. i. am Ende der Zeit  $t$  besitzt:

$$dv = \varphi dt = \frac{gr^2}{z^2} dt \text{ oder auch } v dv = \frac{gr^2}{z^2} v dt,$$

oder wegen  $v dt = dx$ , auch  $v dv = gr^2 \frac{dx}{z^2}$  und wegen  $z = r + h - x$

endlich: 
$$v dv = gr^2 \frac{dx}{(r + h - x)^2},$$

aus welcher Gleichung durch Integration ganz einfach

$$\frac{v^2}{2} = gr^2 \cdot \frac{1}{r + h - x} + C$$

folgt.

Da nun für  $x = 0$  auch  $v = 0$  ist, so erhält die unbestimmte Constante den Werth  $C = -\frac{gr^2}{r + h}$  und damit ist

$$v^2 = 2gr^2 \left( \frac{1}{r + h - x} - \frac{1}{r + h} \right)$$

oder 
$$v = r \sqrt{\left[ \frac{2gx}{(r + h)(r + h - x)} \right]} \quad (1)$$

Für  $x = AB = h$  folgt daraus für die erlangte Geschwindigkeit

$$v = r \sqrt{\frac{2gh}{r(r + h)}} = \sqrt{\left( \frac{r}{r + h} \right)} \cdot \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

Zusatz. Diese Geschwindigkeit ist also, des Factors  $\sqrt{\left( \frac{r}{r + h} \right)}$

wegen, kleiner, als wenn die Schwerkraft durch die ganze Höhe  $h$  constant geblieben wäre. Ist die Fallhöhe  $h$  so unbedeutend, daß man  $h$  gegen  $r$  auslassen kann, so geht die vorige Formel (2) in die gewöhnliche von  $v = \sqrt{2gh}$  über, welcher die Voraussetzung zum Grunde liegt, daß die Schwerkraft durch diese geringe Fallhöhe  $h$  als eine constant wirkende Kraft angesehen werden könne.

#### 44. Aufgabe.

Es soll für die vorhergehende Aufgabe die Fallzeit  $t$  bestimmt werden.

#### Auflösung.

Setzt man wieder wie vorhin  $CB$  (Fig. 49)  $= r$ ,  $AP = x$ , dagegen  $CA = a$ , so ist nach der vorigen Relation (m) die Intensität der Schwerkraft im Punkte  $P$ :

$$\varphi = \frac{gr^2}{(a-x)^2}$$

folglich da nach Relat. (1) in Nr. 55,  $\varphi = \frac{dv}{dt}$  und nach Relat. (2)

derselben Nr. auch  $\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$  ist, sofort

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit  $2 dx$ , so erhält man:

$$\frac{2 dx \cdot d^2x}{dt^2} = \frac{2gr^2 dx}{(a-x)^2} \quad \text{d. i.} \quad \frac{d(dx^2)}{dt^2} = 2gr^2 \frac{dx}{(a-x)^2}$$

oder da  $dt$  constant ist, auch:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = d\left(\frac{2gr^2}{a-x}\right)$$

und daraus durch Integration, und da auch  $\frac{dx}{dt} = v$  ist:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{2gr^2}{a-x} + C.$$

Zur Bestimmung der Constanten  $C$  hat man, da für  $x=0$  auch  $v=0$  wird,  $0 = \frac{2gr^2}{a} + C$ , folglich  $C = -\frac{2gr^2}{a}$  und damit

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gr^2 \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a-x}.$$

Diese Gleichung gibt:  $dt = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \frac{(a-x) dx}{\sqrt{(a-x)x^2}}$  . . . (β)

und daraus folgt durch Integration:

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int \frac{(a-x) dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$$

oder wegen  $a-x = \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}$  auch

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int \frac{\left(\frac{a}{2} - x\right) dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \int \frac{\frac{a}{2} dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}.$$

Nun ist ganz einfach [man darf nur  $ax-x^2 = z$  setzen und auf die bekannte Weise (Comp. §. 790) verfahren]

$$\int \frac{\left(\frac{a}{2} - x\right) dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \sqrt{(ax-x^2)} \text{ und (Comp. §. 778)}$$

$$\int \frac{\frac{a}{2} dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{a}{2} \text{arc Sin} \left( \frac{2x-a}{a} \right) = \frac{a}{2} \text{arc Cos} \left( \frac{a-2x}{a} \right)$$

folglich, wenn man diese Werthe substituirt und gehörig reducirt:

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{2g}} \left[ \sqrt{(ax-x^2)} + \frac{a}{2} \text{arc Cos} \left( \frac{a-2x}{a} \right) \right] \quad (1)$$

wozu keine Constante kommt, weil für  $x=0$  auch  $t=0$  ist.

**Zusatz 1.** Durch Vergleichung der obigen Differenzialgleichung ( $\beta$ ) mit jener (1) in der 21. Aufgabe ersieht man, dafs, wenn man über  $CD$  eine halbe Cycloide construirt, deren Scheitel in  $A$  und Ursprung in  $D$  liegt, wobei  $CD$  auf  $AC$  perpendicularär ist, und durch den Punct  $P$  die Ordinate  $MP$  gezogen wird, sofort  $MP = t \sqrt{\frac{2gr^2}{a}}$  ist, so, dafs also die Ordinate  $MP$  dieser Cycloide die Zeit angibt, welche der Körper braucht, um durch die entsprechende Abscisse  $AP$  zu fallen, und umgekehrt.

**Zusatz 2.** Für  $x=AB=h$  folgt aus der Gleichung (1) für die Fallzeit durch die Höhe  $h$ , wenn man zugleich auch für  $a$  seinen Werth  $r+h$  setzt:

$$t = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{r+h}{2g}} \left[ \sqrt{rh} + \frac{r+h}{2} \text{arc Cos.} \left( \frac{r-h}{r+h} \right) \right] \quad (2)$$

Ist die Fallhöhe  $h$  sehr klein gegen den Erdhalbmesser  $r$ , so kann man  $\frac{1}{r} \sqrt{\frac{r+h}{2g}} \cdot \sqrt{rh} = \sqrt{\frac{h}{2g}}$  und  $\text{arc Cos} \left( \frac{r-h}{r+h} \right) =$

$$\text{arc Sin} \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{r-h}{r+h} \right)^2 \right]} = \text{arc Sin} \left( \frac{\sqrt{4rh}}{r+h} \right) = \text{arc Sin} \left( 2\sqrt{\frac{h}{r}} \right)$$

oder wegen  $\text{arc Sin} X = X + \frac{1 \cdot X^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot X^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$  wenn man



$X = 2 \sqrt{\frac{h}{r}}$  setzt und in der Reihe alle höhern Potenzen dieses kleinen

Bruches ausläßt, also  $\text{arc Sin} \left( 2 \sqrt{\frac{h}{r}} \right) = 2 \sqrt{\frac{h}{r}}$  setzt, sofort

$$\frac{1}{r} \sqrt{\frac{r+h}{2g}} \cdot \frac{r+h}{2} \text{arc Cos} \left( \frac{r-h}{r+h} \right) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{r}{2} \cdot 2 \sqrt{\frac{h}{r}} = \sqrt{\frac{h}{2g}}$$

$$\text{folglich } t = \sqrt{\frac{h}{2g}} + \sqrt{\frac{h}{2g}} = 2 \sqrt{\frac{h}{2g}} \text{ d. i. } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

setzen, welche Formel sofort mit jener für die Fallzeit durch die Höhe  $h$  übereinstimmt, wenn dabei die Schwere als eine constante Kraft angesehen wird, indem aus dieser Relation (3) jene  $h = \frac{1}{2} g t^2$  folgt.

**Zusatz 3.** Die in diesen beiden letzten Aufgaben entwickelten Formeln gelten nur in so lange, als der Körper oder materielle Punkt nicht in das Innere der Erde eindringt, weil dann ein anderes Anziehungsgesetz eintritt und die Schwerkraft (40. Aufgabe, Anmerk.) nur mehr der ersten Potenz der Entfernung des materiellen Punctes vom Mittelpunct der Erde, und zwar direct proportional ist.

Nimmt man nun für diesen letztern Fall an, daß der Körper von dem Puncte  $B$  (Fig. 49) der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit Null zu fallen anfängt, und daß man, wenn der Körper durch die Höhe  $BP'$  gefallen ist, den Abstand des Punctes  $P'$  in entgegengesetzter Richtung, nämlich von  $C$  gegen  $A$  zählt und  $CP' = x$  setzt; so hat man, wenn wieder  $\varphi$  die Intensität der Schwerkraft im Puncte  $P'$  und  $g$  jene in  $B$  ist, nach diesem Gesetze:

$$\varphi : g = x : r \text{ also } \varphi = \frac{g}{r} x$$

$$\text{und daher (Nr. 55) auch } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{r} x,$$

weil  $t$  zunimmt, wenn  $x$  abnimmt, oder, wenn man wieder mit  $2 dx$  multiplicirt:

$$d. \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{2g}{r} x dx.$$

Diese Gleichung integrirt, gibt:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = C - \frac{g x^2}{r} = v^2 \quad (\text{wegen } \frac{dx}{dt} = v)$$

oder da für  $x=r$  die Geschwindigkeit  $v=0$  seyn soll, wodurch die Constante  $C=gr$  wird, auch:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = v^2 = \frac{g}{r} (r^2 - x^2).$$

Aus dieser Gleichung folgt zuerst:

$$v = \sqrt{\left[ \frac{g}{r} (r^2 - x^2) \right]} \quad (4)$$

und dann  $dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$   
 oder wenn man integrirt:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \text{arc Cos.} \frac{x}{r} \quad (5)$$

wozu keine Constante kommt, weil für  $x = r$ ,  $t = 0$  ist.

Wird diese Gleichung (aus  $x = \text{arc Cos } y$  folgt nämlich  $y = \text{Cos } x$ ) nach  $x$  aufgelöst, so erhält man:

$$\frac{x}{r} = \text{Cos } t \sqrt{\frac{g}{r}} \quad \text{oder} \quad x = r \text{Cos } t \sqrt{\frac{g}{r}} \quad (6)$$

die Gleichung (4) zeigt, daß  $v$  am größten für  $x = 0$  wird, und zwar ist dafür

$$v = \sqrt{rg};$$

ferner, daß für  $x = -r$ ,  $v = 0$ , d. h. die Geschwindigkeit im untern Endpunct  $B'$  des Durchmessers eben so groß als im Anfangspunct  $B$  desselben ist. Da sich der Körper oder materielle Punct von  $B'$  aus wieder eben so gegen  $B$  hinbewegt, als von  $B$  gegen  $B'$ , so wird er in ganz gleiche ohne Ende fortdauernde Schwingungen zwischen den Endpuncten des Durchmessers  $BB'$  versetzt. Da endlich die Geschwindigkeit  $v$  von der zweiten Potenz von  $x$  abhängt, so wird diese für  $+\alpha$  und  $-\alpha$ , d. i. für zwei Positionen, welche vom Mittelpunct  $C$  gleich weit abstehen, wie z. B. in den Puncten  $P'$  und  $P''$  (wenn  $CP' = CP''$ ) gleich groß.

Die Gleichung (5) zeigt, daß der Körper oder materielle Punct, um von der Oberfläche der Erde  $B$  bis zum Mittelpunct  $C$  zu fallen, die Zeit  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}$ , folglich, um eine der genannten Oscillationen von  $B$  bis  $B'$  zu vollenden, die Zeit  $T = 2t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$  braucht, welche (Nr. 59) mit der Schwingungszeit des einfachen Kreispendels von der Länge  $r$  zusammenfällt. Für zwei Epochen, welche von diesem Zeitmomente (in welchem der materielle Punct im Mittelpunct  $C$  ist) gleich weit entfernt sind, sind auch die Längenenfernungen vom Mittelpuncte gleich groß.

Anmerkung. Auch diese Formeln gehen in jene für die gleichförmig beschleunigte Bewegung über, wenn man den Fallraum  $h = r - x$  als sehr klein gegen den Abstand  $CP'$  vom Mittelpuncte, also die Anziehungskraft nahezu als constant ansieht. Denn da unter dieser Voraussetzung aus (4), wegen  $r^2 - x^2 = (r + x)(r - x) = h(r + x)$  und  $x = r - h = r$  gesetzt werden kann:

$$v = \sqrt{\left(\frac{g}{r} \cdot h \cdot 2r\right)} = \sqrt{2gh};$$

ferner folgt aus (6), wenn man den Cosinus in die bekannte Reihe auflöst,

$$x = r \left[ 1 - \frac{gt^2}{1.2r} + \frac{g^2 t^4}{1.2.3.4r^2} - \dots \right] = r - \frac{gt^2}{2},$$

wenn man nämlich die folgenden Glieder, mit Potenzen von  $r$  im Nenner als verschwindend ausläßt, daher ist

$$h = r - x = \frac{1}{2} g t^2.$$

### 45. Aufgabe.

Es befinde sich in einer verticalen Ebene die Cycloide  $BAC$  (Fig. 50) deren Basis  $BC$  horizontal liegt und Scheitel  $A$  den tiefsten Punkt bildet; dieß vorausgesetzt, soll die Zeit für das Herabgehen eines schweren Punctes in dieser Curve bestimmt werden, wenn die Bewegung ohne Reibung Statt findet.

### Auflösung.

Beginnt der schwere Punct seine Bewegung im Puncte  $L$  der Cycloide, so ziehe man durch diesen Punct die Horizontale  $LL'$ , welche die verticale Achse  $AD$  im Puncte  $A'$  schneidet, und setze für irgend einen unterhalb  $L$  liegenden Punct  $M$  der Curve,  $AP = x$  und Bog.  $AM = s$ , ferner  $AA' = h$  und den Durchmesser des Erzeugungskreises  $AD = NT = 2r$ ; so ist die Geschwindigkeit, welche der schwere Punct in  $M$  erlangt:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[2g(h-x)]}, \text{ woraus}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g} \cdot \sqrt{(h-x)}} \dots (a)$$

folgt. Ist aber  $MT$  die Tangente und  $MN$  die Normale im Puncte  $M$  der Cycloide, ferner in dem Elementardreieck  $Mmn$ ,  $Mm = ds$  und  $mn = dx$ , so ist (aus den beiden ähnlichen Dreiecken  $Mnm$  und  $MTO$ )  $Mm:mn = MT:TO$  oder  $ds:dx = \sqrt{2rx}:x$  (wegen  $MT^2 = TO \times TN$ ) folglich  $ds = \frac{dx \sqrt{2rx}}{x}$  und wenn man diesen Werth in der vorigen Relation (a) substituirt und berücksichtigt, dafs  $dx$  und  $dt$  verschiedene Zeichen erhalten müssen (indem  $x$  abnimmt, wenn  $t$  zunimmt), auch:

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(hx-x^2)}}$$

oder wenn man von  $x = h$  bis  $x = 0$  integrirt und gleich die Grenzen umkehrt:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(hx-x^2)}}$$

und da das allgemeine Integral  $\int \frac{dx}{\sqrt{(hx-x^2)}} = \text{arc Sin} \left( \frac{2x-h}{h} \right)$  ist, sofort  $t = \sqrt{\frac{r}{g}} [\text{arc Sin } 1 - \text{arc Sin } -1] = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot 2 \text{ arc Sin } 1$ , d. i.

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (1)$$

als Fallzeit in der krummen Linie  $LMA$  durch den Bogen  $LM$ . Da aber diese Zeit von der Höhe  $AA' = h$  ganz unabhängig ist, so folgt, dafs, wenn mehrere schwere Punkte von verschiedenen Punkten der Cycloide gleichzeitig ausgehen, diese sämmtlich in derselben Zeit im tiefsten Punkte  $A$  der Curve anlangen. Aus diesem Grunde heifst die Cycloide auch *Tautochrone*, oder Curve gleicher Schwingungsdauer.

Zusatz. Da der schwere Punkt dieselbe Zeit zum Steigen durch den Bogen  $AL'$ , wie zum Fallen durch jenen  $LA$  braucht, so ist die für eine Oscillation von  $L$  bis  $L'$  nöthige Zeit  $T = 2t = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ , und zwar bleibt diese Zeit genau dieselbe, wenn die Oscillationen anstatt von  $L$  aus, von irgend einem andern Punkte  $M$  der Curve aus beginnen und daher nicht  $LAL'$ , sondern überhaupt  $MAM'$  der Schwingungs- bogen ist.

Für einen kleinen Bogen  $AM$  fällt die Cycloide mit dem entsprechenden Bogen des Krümmungskreises für den Scheitel  $A$  zusammen, und da dessen Halbmesser für diesen Scheitelpunct  $= 4r$  [gleich der doppelten Normale (Comp. §. 728)] ist, so hat man, wenn dieser Halbmesser  $= l$  gesetzt wird,

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

als Schwingungszeit im Kreispendel, für kleine Schwingungsbögen (vergl. Nr. 59).

Anmerkung. Beim Herabsinken eines schweren Punktes durch einen kleinen Kreisbogen  $MT$  vom Halbmesser  $l$ , ist  $t = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , dagegen durch die entsprechende Sehne  $MT$  (§. 148)  $t' = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$ , also ist

$$t:t' = \frac{\pi}{2} : 2 = 785 : 1.$$

#### 46. Aufgabe.

Die Linie des schnellsten Falles zu finden.

### Auflösung.

Es seyen  $M, M', M''$  (Fig. 51) drei unendlich nahe liegende Punkte der gesuchten Curve, so wie die lothrechten Abstände der Punkte  $M$  und  $M'$  von der durch jenen Punkt gezogenen horizontalen Abscissenachse  $AX$ , von welchem der schwere Punkt seine Bewegung ohne Geschwindigkeit beginnt,  $PM = y$  und  $PM' = y'$ ; so ist die Zeit des Herabsinkens von  $M$  nach  $M''$  (Relat.  $a$  der vorigen Aufgabe):

$$t' = \frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}} \quad (m)$$

Ist aber, wie verlangt wird, diese Zeit  $t'$  ein Minimum für alle Wege, welche das Bewegliche, um von  $M$  nach  $M''$  abwärts zu kommen, einschlagen kann; so darf die durch eine Verschiebung des Punktes  $M'$  in horizontaler Richtung, z. B. von  $M'$  nach  $R$ , wobei  $M'R$  gegen die Längen  $MM'$  und  $M'M''$  unendlich klein ist, unter Weges zugebrachte Zeit nur eine Änderung erleiden, welche hinsichtlich der vorigen Zeit  $t'$  in  $(m)$  unendlich klein ist. Nun ist die Zeit für den Weg  $MRM''$  sehr nahe

$$t'' = \frac{MR}{\sqrt{2gy}} + \frac{RM''}{\sqrt{2gy'}}$$

wobei der Fehler, welchen man begeht, unendlich abnimmt, wenn sich  $R$  dem Punkte  $M'$  ohne Ende nähert. Es muß also, da  $t''$  von  $t'$  nur um unendlich wenig verschieden seyn soll,

$$\frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}} = \frac{MR}{\sqrt{2gy}} + \frac{RM''}{\sqrt{2gy'}}$$

oder

$$\frac{MM' - MR}{\sqrt{y}} = \frac{RM'' - M'M''}{\sqrt{y'}}$$

Statt finden.

Zieht man  $RN$  perpendicularär auf  $MM'$  und  $M'N'$  perpendicularär auf  $M'R$ , so läßt sich für  $MR$  die Projection  $MN$  (welche bekanntlich nur um unendlich wenig von der Linie selbst abweicht) und statt  $M'M''$  die Projection  $M'N'$  setzen; dadurch wird im ersten Theil der vorigen Gleichung der Zähler  $MM' - MR = M'N = M'R \cos. S'M'N$ , und im zweiten Theil  $RM'' - M'M'' = RN' = RM' \cos. S'R M'' = RM' \times \cos. S'M'M''$ , so, daß also diese Gleichung übergeht in

$$\frac{\cos. S'M'N}{\sqrt{y}} = \frac{\cos. S'M'M''}{\sqrt{y'}}$$

Setzt man nun, da  $MM', M'M''$  zwei aufeinander folgende Elemente der Curve und  $M'Q, M'Q''$  ihre Horizontalprojectionen (auf die Achse der  $x$ ) sind,  $MM' = ds, M'M'' = ds', M'Q = dx$  und  $M'Q'' = dx'$ ;

so erhält man  $\text{Cos. } S M' N = \frac{M' Q}{M M'} = \frac{dx}{ds}$ ,  $\text{Cos. } S' M' M'' = \frac{M' Q''}{M' M''} = \frac{dx'}{ds'}$   
 und daher, wenn man diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{dx'}{ds'} \cdot \frac{1}{\sqrt{y'}}$$

Diese Gleichung sagt aber aus, daß in jedem Punkte der gesuchten Curve der Ausdruck  $\frac{dx}{ds \sqrt{y}}$  constant ist, eine Eigenschaft, welche bekanntlich der Cycloide oder gemeinen Radlinie zukömmt\*).

Die gemeine Cycloide wird daher dieser Eigenschaft wegen auch *Brachystochrone* oder Curve des schnellsten Falles genannt. (Eigentlich gehört dieses, zuerst von *Johann Bernoulli* im J. 1696 aufgeworfene Problem, in das Gebiet der Variationsrechnung, m. s. Lehrb. Bd. III. S. 585.)

#### 47. Aufgabe.

Das Moment der Trägheit eines homogenen Ellipsoides in Beziehung auf eine der Hauptachsen zu bestimmen.

#### Auflösung.

Die Gleichung des in Fig. 52 dargestellten Ellipsoides, in welchem die Hauptachsen  $AA' = 2a$ ,  $BB' = 2b$  und  $CC' = 2c$  sind, und wobei die rechtwinkeligen Achsen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mit diesen Achsen der Figur zusammenfallen, ist (Lehrb. III. S. 431):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

folglich, wenn man das Moment der Trägheit zuerst in Beziehung auf

\*) Ist nämlich  $a$  der Halbmesser des Erzeugungskreises der Cycloide, so ist

(Comp. §.726, III. S. 219) bei dieser Bezeichnung  $dx = \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$  und

$$ds = \sqrt{2a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(2a - y)}}, \text{ daher } \frac{dx}{ds \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} \times \frac{\sqrt{(2a - y)}}{dy \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \text{ also constant.}$$

Oder es ist in Fig. 50, wenn man für irgend einen Punct  $M$  der Cycloide  $BN = x$ ,  $NO = y$  und Bog.  $BM = s$  setzt,  $Mn : Mm = NO : MN$  oder wegen  $MN = \sqrt{(2r \cdot NO)} = \sqrt{2ry}$ , auch  $dx ds = y : \sqrt{2ry} = \sqrt{y} : \sqrt{2r}$ , woraus sofort wieder  $\frac{dx}{ds \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$  folgt.

die Achse der  $z$  (als Umdrehungsachse) sucht, die durch den Punkt  $m$  gehende zur Achse der  $z$  parallele Ordinate

$$m n = z = c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} \text{ oder die Doppelordinate}$$

$$n n' = 2 c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Das Volumen eines Prisma von der Grundfläche  $dx dy$  (Fig. 52') und dieser Höhe  $n n'$  ist daher, wenn man das Volumen des ganzen Ellipsoides mit  $V$  bezeichnet:

$$d^2 V = 2 c dx dy \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

da ferner dieses Prisma (als materielle gerade Linie, welche mit der Achse der  $z$  parallel ist) von der Umdrehungsachse den Abstand  $Om = \sqrt{(x^2 + y^2)}$  hat, so ist dessen Moment der Trägheit, wenn man das Volumen gleich für die Masse gelten läßt und das Moment der Trägheit des Ellipsoides mit  $\mu$  bezeichnet:

$$d^2 \mu = (x^2 + y^2) d^2 V,$$

oder, wenn man substituirt:

$$\mu = 2 c \iint (x^2 + y^2) dx dy \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} \text{ d. i.}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 2 c \iint x^2 dx dy \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + 2 c \iint y^2 dx dy \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Da nun  $x$  und  $y$  von einander unabhängig sind, so hat man für das erstere Integral  $A$ , wenn man zuerst nach  $y$  integrirt, dabei also  $x$  als constant ansieht, für das allgemeine Integral (Comp. §. 801, 2):

$$\begin{aligned} \int dy \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} &= \frac{1}{2} y \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{1}{2} b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \times \\ &\quad \text{arc. Sin} \left( \frac{a y}{b \sqrt{(a^2 - x^2)}} \right); \end{aligned}$$

da jedoch dieses Integrale zwischen den Grenzen von  $y = PM$  bis  $y = PM'$  (Fig. 52') d. i. von  $y = +b \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$  bis

$y = -b \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$  genommen werden muß, so geht dasselbe,

wenn man gehörig substituirt und reducirt, über in

$$\frac{b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \pi + \frac{b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \pi = \frac{b \pi}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Mit diesem Werthe wird nun

$$A = 2 c \int \frac{b \pi}{2} x^2 dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

und zwar muß dieses Integrale von  $x = -a$  bis  $x = +a$  (d. i. von  $OA$  bis  $OA'$ ) genommen werden. Diefes gibt ganz einfach

$$A = bc\pi \left[ \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{1}{a^2} \left( \frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{5} \right) \right] = \frac{4}{15} a^3 bc\pi$$

oder da das Volumen des Ellipsoides  $V = \frac{4}{3}\pi abc$  ist, auch  $A = \frac{1}{5} Va^2$ , und da man hier das Volumen statt der Masse genommen hat, endlich  $A = \frac{1}{5} Ma^2$ , wenn man nämlich die homogene Masse des Ellipsoides durch  $M$  bezeichnet.

Das zweite Integrale  $B$  des obigen Ausdruckes  $\mu$  erhält man offenbar aus jenem  $A$  ganz einfach, wenn man darin  $x$  und  $y$ , dann gleichzeitig  $a$  und  $b$  mit einander verwechselt; dadurch wird  $B = \frac{1}{5} Mb^2$  und daher ist das gesuchte Moment der Trägheit des Ellipsoides in Beziehung auf die Achse der  $z$ :

$$\mu = \frac{1}{5} M(a^2 + b^2).$$

Eben so erhält man (durch bloßes Vertauschen der Buchstaben) dieses Moment der Trägheit in Beziehung auf die Achsen der  $x$  und  $y$ , respective:  $\mu' = \frac{1}{5} M(a^2 + c^2)$  und  $\mu'' = \frac{1}{5} M(b^2 + c^2)$ .

Zusatz. Für  $a = b = c$  erhält man als Moment der Trägheit der Kugel vom Halbmesser  $a$ , welche sich um einen Durchmesser als Achse dreht:

$$\mu = \mu' = \mu'' = \frac{2}{5} Ma^2$$

wie es seyn soll (Nr. 78).

Setzt man die Dichte der Kugel  $= \delta$ , so ist auch:

$$\mu = \frac{8}{15} \pi \delta a^5$$

### 48. Aufgabe.

Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht eines um eine Achse rotirenden Körpers zu finden.

### Auflösung.

Die in Nr. 21, Anmerk. 2 aufgestellten allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht eines freien Systemes von fest miteinander verbundenen Punkten, gehen, wenn das System aus irgend einem festen Körper gebildet wird, über in die folgenden:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} dm = \int X dm, \quad \int \frac{d^2y}{dt^2} dm = \int Y dm, \quad \int \frac{d^2z}{dt^2} dm = \int Z dm$$

$$\int \frac{x d^2y - y d^2x}{dt^2} dm = \int (xY - yX) dm$$



$$\int \frac{z d^2x - x d^2z}{dt^2} dm = \int (z X - x Z) dm$$

$$\int \frac{y d^2z - z d^2y}{dt^2} dm = \int (y Z - z Y) dm$$

Nimmt man nun die Rotationsachse des betreffenden Körpers zu einer der 3 rechtwinkligen Coordinatenachsen, z. B. zur Achse der  $z$ , so genügt (man vergl. die Anmerk. in Nr. 21) die einzige Gleichung:

$$\int \frac{x d^2y - y d^2x}{dt^2} dm = \int (x Y - y X) dm$$

und zwar ist dieses die allgemeine Gleichung der Bewegung eines Körpers um die Achse der  $z$ .

Ist ferner, wenn man eine ungleichförmige Rotationsbewegung voraussetzt,  $w$  die Winkelgeschwindigkeit am Ende der Zeit  $t$  und  $r$  die Länge des aus dem Elemente des Körpers  $dm$  auf die Rotationsachse  $z$  gefällten Perpendikels; so ist  $v = rw$  die absolute Geschwindigkeit des Elementes  $dm$  am Ende der Zeit  $t$ ; zerlegt man diese in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten  $v'$  und  $v''$  nach  $AX$  und  $AY$  (Fig. 53), so erhält man, wenn  $m$  die Projection des Elementes  $dm$  auf die Ebene der  $xy$  ist und durch diesen Punkt die Gerade  $Am$  und darauf in derselben Ebene  $NN'$  perpendicular gezogen wird, welche die Achsen  $AX$  und  $AY$  unter den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  (Fig. 53') schneiden mag, sofort, weil die Rotationsgeschwindigkeit  $v$  mit  $NN'$  parallel ist:

$$v' = v \cos \alpha = v \cdot \frac{mn}{Am} \quad \text{und} \quad v'' = v \cos \beta = v \cdot \frac{An}{Am}$$

oder wegen  $v = rw$ ,  $Am = r$ ,  $An = x$  und  $mn = -y$  auch:

$$v' = -yw \quad \text{und} \quad v'' = xw.$$

Da nun aber auch  $v' = \frac{dx}{dt}$  und  $v'' = \frac{dy}{dt}$  ist, so erhält man durch Gleichsetzung dieser Werthe:

$$\frac{dx}{dt} = -wy, \quad \frac{dy}{dt} = wx \quad \text{und noch außerdem} \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit  $y$ , die zweite mit  $x$  multiplicirt und dann subtrahirt, so entsteht

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = w(x^2 + y^2) = r^2 w \quad \text{oder} \quad x dy - y dx = r^2 w dt.$$

Diese Gleichung differenziirt gibt, da  $x, y, w$  Functionen von  $t$ , dagegen  $r$  und  $dt$  constant sind, wenn man abkürzt:

$$x d^2y - y d^2x = r^2 dw dt.$$

Da nun  $dw$  für alle Elemente  $dm$  des Körpers denselben Werth behält, also bei der Integration nach  $dm$  constant ist, so hat man:

$$\int \frac{x d^2y - y d^2x}{dt^2} dm = \frac{dw}{dt} \int r^2 dm$$

so, daß also die obige Gleichung ( $\alpha$ ) in die folgende

$$\frac{dw}{dt} \int r^2 dm = \int (xY - yX) dm \quad (\beta)$$

übergeht. Da aber ferner das Integrale  $\int r^2 dm$  nichts anderes als das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die angenommene Rotationsachse ist, so erhält man endlich, wenn dieses Moment mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet wird:

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = \int (xY - yX) dm \quad (1)$$

woraus sich sofort  $dw$  für irgend eine Position des Körpers bestimmen läßt.

#### 49. Aufgabe.

Die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein auf einer schiefen Ebene  $AB$  (Fig. 54) liegendes gerades Prisma, dessen Längenkanten auf der verticalen Ebene  $ABC$  perpendikulär stehen, durch den bloßen Einfluß der Schwere, eher um eine dieser Kanten umstürzt, als über die schiefe Ebene herabgleitet.

#### Auflösung.

Es sey  $O$  der Schwerpunkt des Prisma, also auch des Querschnittes  $ab$  desselben, welcher aus einem verticalen, durch diesen Punkt  $O$  geführten Schnitt entsteht,  $Q$  das Gewicht des Prisma,  $\alpha$  der Neigungswinkel der schiefen Ebene  $AB$ ,  $OD$  perpendikulär auf  $AB$ , und wenn  $O$  mit dem Punkte  $E$ , um welchen das Umstürzen möglich ist (d. h. durch welchen die betreffende Kante geht), verbunden wird,  $\angle DOE = i$ , und endlich  $\mu$  der betreffende Reibungscoefficient; so entstehen, wie bekannt, aus dem Gewichte  $Q$  zwei durch den Schwerpunkt  $O$  wirksame Kräfte  $P = Q \sin \alpha$  und  $P' = Q \cos \alpha$ , wovon die erstere mit  $AB$  parallel und die letztere darauf senkrecht ist. Da man nun den Betrag der Reibung  $\mu P'$  als eine durch den Schwerpunkt  $O$  wirksame, der Kraft  $P$  gerade entgegengesetzte Kraft ansehen kann (Nr. 61, Anm. 2, 8.), so folgt, daß das Prisma, wenn es nicht umstürzt, eine gleitende Bewegung über die schiefe Ebene anfängt, sobald  $P > \mu P'$  d. i.

$Q \sin \alpha > \mu Q \cos \alpha$  oder

$$\tan \alpha > \mu \quad (1) \text{ ist.}$$

Damit jedoch ein Umstürzen um den Punct  $E$  (im Querschnitt  $ab$ ) oder eine drehende Bewegung des Prisma um diesen Punct eintrete, muß, auf den Punct  $E$  bezogen, das stat. Moment der Kraft  $P$  größer als jenes der Kraft  $P'$ , d. i.  $P \cdot OD > P' \cdot DE$ , nämlich

$$OD \cdot Q \sin \alpha > DE \cdot Q \cos \alpha, \text{ oder } \tan \alpha > \frac{DE}{OD}, \text{ und wegen}$$

$$\frac{DE}{OD} = \tan i, \text{ endlich}$$

$$\tan \alpha > \tan i \dots (2)$$

d. i.  $\alpha > i$  seyn.

Ist also der Reibungscoefficient  $\mu$  so klein, daß  $\mu < \tan \alpha$ , (nach 1) und doch noch  $\tan \alpha < \tan i$  (nämlich die Bedingung 2 nicht erfüllt), also auch  $\mu < \tan i$  ist; so wird der Körper eher gleitend über die schiefe Ebene fortrücken, als zum Umstürzen kommen.

Ist dagegen der Winkel  $i$  sehr klein, wie z. B. bei einem Cylinder, einer Kugel u. s. w. (wobei, wenn die Berührung zwischen absolut harten und glatten Flächen, also nur in einem geometrischen Puncte  $D$  Statt fände, sogar  $i = 0$  wäre), so kommt der Körper schon bei dem geringsten Neigungswinkel  $\alpha$  der schiefen Ebene in eine wälzende Bewegung.

Nimmt der Winkel  $i$  zu, so kann der Körper nur gleitend über die schiefe Ebene herabgehen, so lange  $\tan \alpha$  zwischen der kleinern Grenze  $\mu$  und der größern  $\tan i$  liegt; so wie aber  $\alpha > i$  wird, so stürzt der Körper auch bei diesem größern Werth von  $i$  um.

**Anmerkung.** Nimmt man an, daß die Berührung einer Kugel mit einer Ebene wirklich nur in einer unendlich kleinen Fläche Statt findet, d. h. setzt man voraus, daß die Kugel und Ebene vollkommen hart und glatt sind, ohne jedoch dabei eine gleitende Reibung auszuschließen, so ist der Widerstand der wälzenden oder rollenden Reibung auf einer horizontalen Ebene gleich Null und eine horizontale, durch den Schwerpunkt oder Mittelpunkt der homogenen Kugel wirkende Kraft, setzt die Kugel in eine wälzende Bewegung, bei welcher sehr bald die Geschwindigkeit des berührenden Punctes  $= 0$  und die Bewegung, je nachdem die Kraft eine momentane oder constante ist, gleichförmig oder gleichförmig beschleunigt wird, d. h. die drehende Bewegung des untersten Punctes nach rückwärts (im größten Kreisbogen) genau dieselbe Geschwindigkeit, wie der Mittelpunkt nach horizontaler Richtung vorwärts besitzt, eine Bewegung, welche *Euler* die vollkommene Wälzung nennt, um sie von der gemischten Wälzungsbewegung zu unterscheiden, welche dann Statt findet, wenn bei der Wälzung zugleich auch ein Gleiten eintritt und der unterste Punct nicht die Geschwindigkeit Null besitzt, also der Wälzungsbogen größer oder kleiner als der vom Mittelpunkt zurückgelegte Weg ist.

Wird die Kugel auf eine schiefe Ebene gelegt, so fängt (durch das Gewicht der Kugel) sogleich die Wälzung an und *Euler* war Anfangs der Meinung, daß dabei die fortschreitende Bewegung ste's größer als die wälzende seyn müsse und die vollkommene Wälzung (wobei sich der jedesmalige Berührungspunct eben so schnell im Bogen rückwärts bewegt, als der Mittelpunkt fortschreitet) hier niemals Statt finde. Dem wurde jedoch von *Dan. Bernoulli* und durch die Experimente von *Krafft* widersprochen, so daß *Euler* diese Meinung dahin abänderte, daß die beschleunigende Kraft, welche die Kugel über die schiefe Ebene herabtreibt, allerdings das Bestreben habe, dem jedesmaligen Berührungspunct statt der Geschwindigkeit Null (wie sie bei vollkommener Wälzung Statt hat) eine größere fortrückende Bewegung zu ertheilen, daß diese jedoch bei nicht zu großer Neigung der schiefen Ebene, stets durch die Reibung, welche das Fortgleiten aufhält, unterdrückt wird. Bei einem größeren Neigungswinkel, bei welchem die gleitende Reibung nicht mehr hinreicht um das Fortrücken gänzlich zu hemmen, entstehe dann eine gemischte Wälzungsbewegung, bei welcher der Wälzungsbogen kleiner als der vom Mittelpunkt zurückgelegte Weg ist. Bei einem Neigungswinkel von  $\alpha = 90^\circ$  hört endlich die Wälzung gänzlich auf und es findet nur eine fortschreitende Bewegung Statt.

### 50. Aufgabe.

Es wird einer, auf einer horizontalen Ebene liegenden homogenen Kugel, eine rotirende Bewegung um einen horizontalen Durchmesser, und gleichzeitig auch ihrem Mittelpuncte eine fortschreitende Bewegung in horizontaler, auf diesem Durchmesser perpendicularen Richtung mitgetheilt; es sollen die Gesetze dieser zusammengesetzten Bewegung bestimmt werden, wenn dabei auch auf die Reibung Rücksicht genommen wird.

### Auflösung.

I. Stellt die Figur (Fig. 55) einen Schnitt der Kugel und der horizontalen Ebene mit einer auf der Rotationsachse perpendicularen (also verticalen) Ebene vor, so bewegt sich der Mittelpunkt der Kugel *C* auf der Geraden *AB*, welche durch *C* mit der Geraden *DE* (als Durchschnitt dieser verticalen mit der horizontalen Ebene) parallel läuft.

Es sey in einem Augenblicke, nämlich am Ende der Zeit *t*, in welchem die Berührung der Kugel mit der horizontalen Ebene im Punkte *M* Statt findet, der Abstand des Mittelpunctes *C* von einem festen Punkte *A* der Geraden *AB*, nämlich  $AC = x$ , also die Geschwindigkeit des Punctes *C* nach *CB* in diesem Zeitmomente  $v = \frac{dx}{dt}$ , ferner sey in

demselben Augenblicke  $w$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um ihre Rotationsachse, welche als positiv oder negativ angesehen werden soll, je nachdem die Rotation in der durch den Pfeil angedeuteten, oder in entgegengesetzter Richtung Statt findet, endlich sey für denselben Zeitmoment  $u$  die absolute Geschwindigkeit des Punctes  $M$  und  $CM = r$  der Halbmesser der Kugel; so hat man zuerst:

$$u = v + rw = \frac{dx}{dt} + rw \dots (a)$$

Je nachdem nun dieser Ausdruck positiv oder negativ ausfällt, bewegt sich der Punct  $M$  gegen  $E$  oder  $D$ , und dabei ist die in diesem Puncte nach entgegengesetzter Richtung von  $u$  Statt findende Reibung beziehungsweise nach  $D$  oder  $E$  gerichtet. Ist  $u = 0$ , also der jedesmalige Berührungspunct  $M$  in der Ruhe, so rollt die Kugel ohne zu gleiten (vollkommene Wälzung) und die dabei entstehende Reibung ist die der zweiten Art, nämlich die sogenannte rollende oder wälzende.

II. Diefs vorausgesetzt, sey  $Q$  das Gewicht und  $M$  die Masse der Kugel,  $\mu$  der Reibungscoefficient, also  $\mu Q$  der Betrag der Reibung in der Richtung  $ME$  oder  $MD$ , ferner  $g$  die Beschleunigung der Schwere, daher (Nr. 54, Anmerk. 3)  $M = \frac{Q}{g}$  die Masse der Kugel und  $Mk^2$  ihr Moment der Trägheit (in der allgemeinen Form, welche für alle Körper von der Masse  $M$  gilt, Nr. 67) in Beziehung auf ihre Rotationsachse. Nimmt man nun an, dafs  $u$  positiv, also die Reibung  $\mu Q$  gegen  $MD$  gerichtet sey, so sind die Gleichungen für die fortschreitende und rotirende Bewegung beziehungsweise (Nr. 56)  $M \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu Q$  oder wegen  $\frac{Q}{M} = g$  (und weil man sich die Masse der Kugel in ihrem Mittelpunkt vereinigt, und die Kraft durch diesen Punct parallel mit ihrer Richtung wirkend denken kann)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g \dots (1)$$

und (da man sich bei dieser Rotation die Rotationsachse als fest denken kann) vorige Aufgabe, Relat. (1), wegen  $Y = 0$ ,  $y = -r$ ,

$X = -\mu \frac{Q}{M}$ ,  $m = M$  und  $\mathfrak{M} = Mk^2$  sofort:

$$Mk^2 \cdot \frac{dw}{dt} = -\int r \mu \frac{Q}{M} dM = -r \mu \frac{Q}{M} M \dots (m)$$

d. i.  $k^2 \cdot \frac{dw}{dt} = -\mu r g$

oder da für die Kugel das Moment der Trägheit (Nr. 79)  $\mathfrak{M} = \frac{2}{5} M r^2$ , also  $k^2 = \frac{2}{5} r^2$  ist, auch:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{5}{2} \frac{\mu}{r} g \dots (2)$$

Werden diese beiden Gleichungen (1) und (2) integrirt, so erhält man aus (1) wegen  $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\mu g dt$  sofort

$$\frac{dx}{dt} = C - \mu g t \dots (\beta)$$

und aus (2):

$$w = C' - \frac{5}{2} \frac{\mu}{r} g t \dots (\gamma)$$

dabei bezeichnen die Constanten  $C$  und  $C'$  beziehungsweise die Anfangsgeschwindigkeiten  $\frac{dx}{dt}$  und  $w$  im Punkte  $A$  (für  $t = 0$ ). Aus der obigen Gleichung ( $\alpha$ ) erhält man mit diesen Werthen:

$$u = C + r C' = \frac{7}{2} \mu g t \dots (\delta)$$

III. Da nun der gemachten Annahme zufolge die Constante  $C + r C'$  positiv ist, so bleibt auch  $u$  während einer gewissen Zeit  $t = T$  positiv, wird am Ende derselben Null und hierauf negativ. Diese Zeit  $T$  folgt aber aus der Bedingungsgleichung

$$0 = C + r C' - \frac{7}{2} \mu g T \text{ und zwar ist}$$

$$T = \frac{2}{7} \frac{(C + r C')}{\mu g} \dots (\epsilon)$$

Während dieser Zeitperiode  $T$  bestehen die beiden Werthe von ( $\beta$ ) und ( $\gamma$ ) wirklich und die beiden Bewegungen der Kugel (die fortschreitende und rotirende) sind gleichförmig verzögert.

IV. Am Ende der Zeit  $t' = \frac{C}{\mu g}$  wird  $\frac{dx}{dt} = 0$  und wenn  $t' < T$  was für  $\frac{C}{\mu g} < \frac{2}{7} \frac{(C + r C')}{\mu g}$  d. i. für

$$C < \frac{2}{5} r C' \dots (n)$$

Statt findet, wird  $\frac{dx}{dt}$  über die Zeit  $t'$  hinaus negativ, so, daß sich der Mittelpunkt  $C$  der Kugel von  $C$  gegen  $A$  zurückbewegt.

Dieser letztere Fall tritt z. B. bei einer Billardkugel ein, wenn man diese so trifft, daß sie sehr schnell um einen horizontalen Durchmesser in der Richtung des Pfeiles (Fig. 55) rotirt und sich gleichzeitig ihr Mittelpunkt, jedoch nur langsam von  $C$  gegen  $B$  vorwärts bewegt, so, daß beide obige Constanten  $C$  und  $C'$  positiv sind und der Bedingung (n) Genüge leisten. Bei dieser rotirenden und fortschreitenden Bewegung

der Kugel erschöpft aber die am Billardtuche Statt findende Reibung sehr bald diese letztere Bewegung, während die rotirende noch fortbestehen bleibt und daher die von  $M$  gegen  $D$  wirkende Reibung (welche man sich in den Mittelpunkt  $C$  transferirt und von  $C$  gegen  $A$  wirksam denken kann) die Kugel von  $C$  gegen  $A$  zurückführt.

V. Hat die Kugel im Anfange, d. i. wenn der Punct  $C$  noch in  $A$  ist, keine rotirende Bewegung, ist also  $C' = 0$ , oder ist noch allgemeiner  $C > \frac{2}{5} r C'$ , so wird die Geschwindigkeit  $\frac{dx}{dt}$  nicht früher als jene  $u$  gleich Null, folglich kann der Mittelpunkt  $C$  nicht zurückgehen. Übrigens hat in allen Fällen der Berührungspunct  $M$  nach Verlauf der Zeit  $T$  keine Geschwindigkeit mehr, so, daß die gleitende Reibung verschwindet und die Kugel ohne zu gleiten fortrollt; dabei werden die Geschwindigkeiten  $\frac{dx}{dt}$  und  $w$  allmählig constant oder nehmen nur mehr sehr wenig ab (indem der Betrag der rollenden Reibung gleich Null ist). Man erhält ihre Werthe aus den Relationen ( $\beta$ ) und ( $\gamma$ ), wenn man  $t = T$  setzt, und zwar ist:

$$\frac{dx}{dt} = C - \frac{2}{7} C - \frac{2}{7} r C' = \frac{5C - 2rC'}{7}$$

und 
$$w = C' - \frac{5}{7} \frac{C}{r} - \frac{5}{7} C' = \frac{2rC' - 5C}{7r}.$$

Zusatz. Die obigen Gleichungen (1) und (2) gelten auch noch für andere durch Umdrehung erzeugte Körper, jedoch mit den betreffenden Werthen von  $k^2$ ; so ist z. B. für einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis, welcher sich um seine geometrische Achse dreht,  $k^2 = \frac{1}{2} r^2$  u. s. w.

Anmerkung. In der hier behandelten Aufgabe, in welcher die Rotationsachse parallel mit der horizontalen Ebene und senkrecht auf die Richtung der Bewegung ist, welche von  $A$  nach  $B$  Statt findet, können folgende 3 Fälle eintreten:

1) Es kann die Wälzung eine vollkommene seyn, nämlich der Punct  $M$  im Bogen  $MF$  eben so viel zurückgehen als der Mittelpunkt  $C$  nach der Richtung  $CB$  vorwärts geht; dann ist die Geschwindigkeit des jedesmaligen Berührungspunctes im Augenblicke der Berührung gleich Null.

2) Es kann der Punct  $M$  eine schnellere drehende Bewegung nach rückwärts (d. i. gegen  $MF$ ) als der Mittelpunkt  $C$  nach vorwärts haben; in diesem Falle nimmt die Beschleunigung der Rotationsbewegung durch die Reibung allmählig ab und es tritt sehr bald eine vollkommene Wälzung ein.

3) Rotirt der Körper in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung von  $M$  gegen  $F'$ , so wird die rotirende Bewegung (mit der vollkommenen Wälzung verglichen) vermindert und diese kann unter gewissen Umständen sogar in die entgegengesetzte übergehen; es kann aber auch (wie bereits in dem Beispiele der Billardkugel bemerkt) der nach  $CB$  fortgehende Körper umkehren und die entgegengesetzte Richtung  $CA$  annehmen.

### 51. Aufgabe.

Eine homogene Kugel vom Halbmesser  $CM$  (Fig. 56) wird auf eine schiefe Ebene  $AB$  gelegt, es soll mit Rücksicht auf die Reibung das Gesetz bestimmt werden, nach welchem diese Kugel über die schiefe Ebene hinabrollt.

#### Auflösung.

I. Es stelle die Figur einen verticalen Schnitt der Kugel und schiefen Ebene durch den Mittelpunkt  $C$  vor und es sey der Neigungswinkel der schiefen Ebene  $ABD = \alpha$ , ferner nach Verlauf einer gewissen Zeit  $t$ ,  $C$  der Ort des Mittelpunctes und  $M$  jener des Berührungspunctes der Kugel mit der schiefen Ebene, folglich  $CM = r$  perpendicular auf  $AB$ , weiters sey in demselben Zeitmomente  $v$  die Geschwindigkeit des Mittelpunctes nach  $CE$  parallel mit  $AB$  und  $w$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um einen horizontalen Durchmesser als Rotationsachse, wobei diese als positiv gelten soll, wenn die Rotation in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung Statt hat; so ist die in diesem Augenblicke Statt findende absolute Geschwindigkeit des Punctes  $M$ :

$$u = v - rw$$

oder wegen  $v = \frac{dx}{dt}$ , wenn man nämlich irgend einen Punct  $A'$  der durch  $C$  mit  $AB$  geführten Parallelen zum Anfangspuncte nimmt und  $A'C = x$  für das Ende der Zeit  $t$  setzt, auch:

$$u = \frac{dx}{dt} - rw \quad \dots \quad (\alpha)$$

Ist ferner  $Q$  das Gewicht der Kugel, also  $M = \frac{Q}{g}$  ihre Masse,  $Mk^2$  wieder ihr Moment der Trägheit in Beziehung auf einen Durchmesser, und  $\mu$  der Reibungscoefficient für die Kugel und schiefe Ebene; so hat man, wenn das Gewicht  $Q$  in zwei Seitenkräfte  $q$  und  $q'$  nach  $CE$  und  $CM$  zerlegt wird, sofort  $q = Q \sin \alpha$  und  $q' = Q \cos \alpha$ , folglich  $\mu q'$  die aus der Reibung entstehende, nach der Richtung  $MA$  wirkende Kraft (welche man wieder, Nr. 61, Anmerk. 2, in 8. mit  $MA$  parallel



in den Schwerpunkt  $C$  transferiren, also nach der Richtung  $CA'$  wirkend annehmen kann).

Die Resultante aus den auf den Mittel- oder Schwerpunkt  $C$  der Kugel wirkenden bewegenden Kräften ist daher die nach der Richtung  $CE$  wirkende Kraft  $p = q - \mu q'$ , d. i.

$$p = Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

welche positiv, Null oder negativ wird, je nachdem beziehungsweise der Reibungscoefficient  $\mu < = > \tan \alpha$ , oder wenn  $\mu$  gegeben ist, für den Neigungswinkel der schiefen Ebene,  $\tan \alpha > = < \mu$  ist.

Für die progressive Bewegung hat man daher (Nr. 56):

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = p = Q (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \text{ oder wegen } \frac{Q}{M} = g:$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \dots (1)$$

und für die rotirende Bewegung derselben [vorige Aufg., Relat. (m), wobei  $w$  nach der hier angenommenen Bedeutung mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen ist]:

$$M k^2 \cdot \frac{dw}{dt} = r \mu q' = r \mu Q \cos \alpha$$

oder wegen  $k^2 = \frac{2}{5} r^2$  und  $\frac{Q}{M} = g$ , auch:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{5}{2} \frac{\mu}{r} g \cos \alpha \dots (2)$$

durch Integration der beiden Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$\frac{dx}{dt} = C + g t (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \dots (\beta)$$

$$w = C' + \frac{5}{2} \frac{\mu}{r} g t \cos \alpha \dots (\gamma)$$

und mit diesen Werthen aus der obigen Gleichung ( $\alpha$ ):

$$u = C - r C' + g t (\sin \alpha - \frac{7}{2} \mu \cos \alpha) \dots (\delta)$$

Läfst man die beiden Bewegungen in dem Augenblicke beginnen, in welchem sich der Mittelpunkt  $C$  im Anfangspuncte  $A'$ , in welchem nämlich  $t = 0$  ist, befindet, so werden die Constanten  $C$  und  $C'$  gleich Null und es ist nach Verlauf der Zeit  $t$  die absolute Geschwindigkeit des betreffenden Berührungspunctes  $M$  in der Richtung  $MB$ :

$$u = g t (\sin \alpha - \frac{7}{2} \mu \cos \alpha) \dots (\epsilon)$$

dagegen die Geschwindigkeit des Mittelpunctes  $C$  nach der Richtung  $CE$  (aus  $\beta$ ):

$$v = g t (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \dots (\lambda)$$

so, daß also der Unterschied  $v - u = \frac{5}{2} \mu g t \cos \alpha$  ist.

Soll nun  $u$  positiv seyn, so muß (aus  $\epsilon$ )  $\text{Sin } \alpha > \frac{7}{2} \mu \text{ Cos } \alpha$ ,  
d. i. a)  $\text{tang } \alpha > \frac{7}{2} \mu$ , oder wenn  $\alpha$  gegeben,  $\mu < \frac{2}{7} \text{tang } \alpha$   
seyn, dagegen wird  $u$  Null, wenn

$$b) \text{tang } \alpha = \frac{7}{2} \mu \text{ oder } \mu = \frac{2}{7} \text{tang } \alpha \text{ ist.}$$

**II.** Der jedesmalige Berührungspunct  $M$  gleitet also im erstern Falle von  $M$  gegen  $B$  abwärts, so, daß so lange gleichzeitig die Rotation der Kugel Statt findet (welche nur, wie die Relat. ( $\gamma$ ) zeigt, für  $\mu = 0$ , oder für  $\alpha = 90^\circ$  verschwindet) eine gemischte Bewegung eintritt; im zweiten Falle dagegen, in welchem der Berührungspunct  $M$  genau so viel im Bogen zurückweicht als der Mittelpunkt  $C$  nach  $CE$  vortrückt, findet eine vollkommene Wälzung Statt. (Aufg. 49, Anm.)

**III.** Daß endlich im gegenwärtigen Falle  $u$  nicht auch negativ seyn, d. i. der Punct  $M$  nicht mehr zurückweichen kann, als der Mittelpunkt  $C$  vorwärts geht, ist leicht einzusehen, weil die Reibung wohl das Abwärtsgleiten der Kugel verzögern oder selbst ganz aufheben, niemals aber eine Bewegung nach entgegengesetzter Richtung, d. i. ein Aufwärtschieben der Kugel bewirken kann.

Ist also  $\text{tang } \alpha < \frac{7}{2} \mu$ , so wird dabei nichts anderes, als was bei  $\text{tang } \alpha = \frac{7}{2} \mu$ , d. i. nur eine vollkommene Wälzung bewirkt. Man kann daher sagen, daß für einen Neigungswinkel  $\alpha$ , von jener Grenze angefangen, bei welcher das Herabrollen der Kugel überhaupt beginnen kann (Aufgabe 49) bis zu jener Größe, wofür  $\text{tang } \alpha = \frac{7}{2} \mu$  ist, immer eine vollkommene Wälzung, dagegen für noch größere Werthe von  $\alpha$ , ein Abwärtsgleiten des Berührungspunctes  $M$ , d. i. eine gemischte Bewegung eintritt, welche endlich bei  $\alpha = 90^\circ$  in eine bloß gleitende übergeht.

**IV.** In jenen Fällen, in welchen die Kugel mit vollkommener Wälzung herabgeht, in welchen also  $\text{tang } \alpha$  nicht größer als  $\frac{7}{2} \mu$ , nämlich  $u = 0$  ist, folgt aus Relation ( $\epsilon$ )  $\mu \text{ Cos } \alpha = \frac{2}{7} \text{Sin } \alpha$  und wenn man diesen Werth in der Relation ( $\lambda$ ) substituirt, so erhält man für die Geschwindigkeit des Mittelpunctes  $C$ :

$$v = \frac{5}{7} g t \text{Sin } \alpha \quad . \quad . \quad (m)$$

und für den in der Zeit  $t$  zurückgelegten Weg:

$$x = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} g t^2 \text{Sin } \alpha,$$

während ohne Reibung, d. i. für  $\mu = 0$  die Endgeschwindigkeit

$V = g t \text{Sin } \alpha$  und der zurückgelegte Weg  $X = \frac{1}{2} g t^2 \text{Sin } \alpha$  wäre.

**V.** So lange daher der Neigungswinkel  $\alpha$  innerhalb der in **III.** angeführten Grenzen liegt, hat die Größe der Reibung auf die Zeit, binnen

welcher die Kugel auf der schiefen Ebene (bei vollkommener Wälzung) einen gewissen Weg  $x$  zurücklegt, gar keinen Einfluss, und es verhält sich der Weg  $x$ , welcher bei dem Vorhandenseyn irgend einer Reibung (ob grösser oder kleiner) von der Kugel oder ihrem Mittelpuncte in einer bestimmten Zeit  $t$  zurückgelegt wird, zu dem Wege  $X$ , welcher bei vollkommen glatten Oberflächen von der Kugel in derselben Zeit  $t$  zurückgelegt würde, d. i.

$$x : X = \frac{5}{7} : 1 = 5 : 7,$$

eben so verhalten sich auch die Endgeschwindigkeiten nach der Zeit  $t$  in diesen beiden Fällen, d. i.  $v : V = 5 : 7$ .

Übrigens folgt von selbst, dass die Grösse der Reibung  $\mu$  wenigstens in so weit dabei Einfluss hat, als dadurch der obere Grenzwert von  $\alpha$  (nämlich aus  $\tan \alpha = \frac{7}{2}\mu$ ) bestimmt wird, bis zu welchem noch die vollkommene Wälzung Statt findet.

Ist z. B. der Reibungscoefficient  $\mu = \frac{1}{10}$ , so erhält man für diesen Grenzwert  $\alpha = 19^\circ 17' 24''$ , dagegen bei  $\mu = \frac{1}{3}$ , dafür  $\alpha = 49^\circ 24'$  und es würde in diesem letztern Falle die Kugel über alle Ebenen, bei welchen die Neigungswinkel von beinahe Null angefangen, bis  $\alpha = 49^\circ 24'$  mit vollkommener Wälzung herabgehen.

**VI.** Für absolut glatte Flächen würde  $\mu = 0$  und die Geschwindigkeit des Mittelpunctes  $C$  (Relation  $\lambda$ ):

$$v = g t \sin \alpha,$$

so wie jene des Berührungspunctes  $M$  (Relation  $\epsilon$ ):

$$u = g t \sin \alpha,$$

folglich  $v = u$ , so, dass also in diesem Falle, wie es seyn soll (und wie auch aus der Relat.  $\gamma$  folgt, indem für  $\mu = 0$  und  $C' = 0$  auch  $w = 0$  wird) gar keine Rotation der Kugel Statt finden, sondern diese wie jeder andere Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung über die schiefe Ebene herabgleiten würde.

**Zusatz.** Die vorige Relation ( $m$ ) in **IV.** lässt sich auch durch folgende Betrachtungen ableiten.

Rollt ein Cylinder oder eine Kugel auf der schiefen Ebene  $AB$  (Fig. 57) herab, so wird die Bewegung des Punctes  $n$ , welcher für den untersten Punct  $a$  des Durchmessers  $ab$  den Mittelpunct des Schwunges bildet, durch die in  $a$  Statt findende Reibung in nichts gestört, weil eine in  $a$  auf  $ab$  perpendicular wirkende Kraft nichts weiteres als eine Drehung des Punctes  $a$  um diesen Punct  $n$  hervorbringt. Nach einer unendlich kleinen Zeit wird der Durchmesser  $ab$  im Allge-

meinen die Lage  $a'b'$  angenommen haben, so, daß also der Mittelpunkt  $c$  durch die im Punkte  $a$  Statt findende Reibung um die Größe  $nn' - cc'$  zurückgehalten worden, während  $cc' - aa'$  die Zunahme oder eigentlich die Größe der Rotation angibt (indem die Rotation  $aa' = cc'$  gleich Null ist).

Es verhält sich also die aus der Reibung entstehende Verzögerung des Mittelpunctes  $c$  zu der durch das Gleiten verminderten Rotation (nach der Richtung des Pfeils), wie  $cn$  zu  $ca$ , man hat nämlich

$$(nn' - cc') : (cc' - aa') = cn : ca.$$

Sobald aber die vollkommene Wälzung eingetreten, ist  $aa' = 0$  und daher

$$(nn' - cc') : cc' = cn : ca \text{ oder } nn' : cc' = an : ac.$$

Ist nun wieder  $v$  die Geschwindigkeit des Mittelpunctes  $c$  in diesem Augenblicke, d. i. am Ende der Zeit  $t$ , und  $v'$  jene des Punctes  $n$ , also  $v' = Gt = gt \sin \alpha$ ; so ist der in der Zeit  $dt$  zurückgelegte Weg  $cc' = v dt$  und jener  $nn' = v' dt = g t dt \sin \alpha$ , folglich, wenn man diese Werthe in der letzten Proportion substituirt und dann  $v$  bestimmt:

$$v = \frac{ac}{an} g t \sin \alpha.$$

Nun ist aber für die Kugel vom Halbmesser  $r$  der Abstand des Mittelpunctes des Schwunges  $n$  vom Endpunct  $a$  des Durchmessers

(§. 170)  $an = \frac{7}{5} r$ , mithin  $\frac{ac}{an} = \frac{5}{7}$  und daher

$$v = \frac{5}{7} g t \sin \alpha,$$

welches sofort die erwähnte Relation ( $m$ ) ist.

Anmerkung. Man kann offenbar statt der Kugel jeden andern runden Körper annehmen, welcher durch den mittlern (in der halben Länge geführten) Querschnitt in zwei gleiche symmetrische Längenhälften getheilt wird, wenn man nur jedes Mal für  $k^2$  den entsprechenden Werth setzt.

So ist z. B. für einen geraden Cylinder von kreisförmiger Basis, dessen Halbmesser  $= r$  ist,  $k^2 = \frac{1}{2} r^2$ , folglich die Grenze des Neigungswinkels  $\alpha$  bis zu welcher immer noch die vollkommene Wälzung Statt findet, aus  $\tan \alpha = \left(1 + \frac{r^2}{k^2}\right) \mu$ , sofort  $\tan \alpha = 3\mu$ , so, daß also für das obige Beispiel von  $\mu = \frac{1}{10}$  hier nahe  $\alpha = 16^\circ 42'$  würde, während für die Kugel dieser Grenzwert über  $19^\circ$  betrug, mithin, unter übrigens gleichen Umständen, der Cylinder eher als die Kugel zu gleiten anfängt. Für  $\mu = \frac{1}{8}$ , wird hier  $\alpha = 45^\circ$ .

Ferner beträgt der Weg des Mittelpunctes oder eigentlich der Achse des Cylinders während der Zeit  $t$ , nach der allgemeinen Formel:

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{r^2 + k^2} \right) g t^2 \sin \alpha,$$

für den Cylinder sofort

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} g t^2 \sin \alpha$$

und die Endgeschwindigkeit:

$$v = \frac{2}{8} g t \sin \alpha,$$

während bei der Kugel statt dem Bruche  $\frac{2}{8}$  jener  $\frac{5}{7}$  steht, so, daß also der Cylinder mehr als die Kugel zurückbleibt u. s. w.

## C) Aus der Hydrostatik.

### 52. Aufgabe.

Ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$  (Fig. 58) wird in eine Flüssigkeit vollständig und zwar so eingetaucht, daß die eine Seite  $AC$  lothrecht, d. i. perpendicular auf die Oberfläche  $NR$  zu stehen kommt; es soll das Verhältniß der Pressungen bestimmt werden, welche die Flüssigkeit auf diese drei Seiten ausübt.

#### Auflösung.

Sind  $O, O', O''$  die Halbirungs- also zugleich auch die Schwerpunkte der Seiten  $AC, AB, BC$ , und zieht man aus diesen Punkten auf die lothrechte Seite  $AC$  die Perpendikel  $OB, O'D, O''E$ ; so liegen, wenn der Punkt  $A$  den Spiegel  $NR$  der Flüssigkeit berührt, diese genannten Schwerpunkte um die Tiefen  $AD = \frac{1}{4}AC$ ,  $AO = \frac{1}{2}AC$  und  $AE = \frac{3}{4}AC$  unter der Oberfläche  $NR$  der Flüssigkeit, so, daß wenn man diese Tiefen beziehungsweise durch  $h, h', h''$ , die gesuchten Drücke auf die Seiten  $AB, AC, BC$  mit  $D, D', D''$  bezeichnet und  $AB = AC = BC = a$  setzt, sofort (§. 310)

$$D = \gamma a h, D' = \gamma a h', D'' = \gamma a h'', \text{ folglich}$$

$$D : D' : D'' = h : h' : h'' = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = 1 : 2 : 3$$

Statt findet.

### 53. Aufgabe.

Das Rechteck  $AD$  (Fig. 59) wird vertical in eine Flüssigkeit so eingetaucht, daß die Seite  $AB$  im Spiegel  $NR$  derselben liegt; es soll das Verhältniß der Pressungen bestimmt werden, welche die Flüssigkeit auf die, durch die Diagonale  $BC$  entstehenden beiden Dreiecke  $ABC$  und  $BCD$  ausübt.

**Auflösung.**

Sind  $O$  und  $O'$  die Schwerpunkte dieser beiden Dreiecke  $ABC$  und  $BCD$ , so liegt der Punkt  $O$ , die Ebene des Rechteckes  $AD$  mag vertical oder schief stehen, um  $\frac{1}{3}AC$  und jener  $O'$  um  $\frac{2}{3}AC$  unterm Spiegel  $NB$  der Flüssigkeit. Bezeichnet man daher die Fläche der beiden genannten Dreiecke durch  $F$ , die Seite  $AC$  mit  $h$  und die gesuchten Pressungen auf diese Dreiecke durch  $D$  und  $D'$ , so ist  $D = \gamma \cdot F \cdot \frac{1}{3}h$  und  $D' = \gamma \cdot F \cdot \frac{2}{3}h$ , mithin hat man:

$$D : D' = 1 : 2.$$

**54. Aufgabe.**

Ein Rechteck  $AD$  (Fig. 60) wird senkrecht in eine Flüssigkeit so eingetaucht, daß die Seite  $AB$  im Spiegel der Flüssigkeit liegt; man soll in diesem Rechteck vom Winkelpunkt  $B$  aus eine Gerade  $BE$  so ziehen, daß sich die auf die beiden Flächen  $ABEC$  und  $BED$  Statt findenden Pressungen wie  $m : n$  verhalten.

**Auflösung.**

Es seyen, wenn  $BE$  die gesuchte Gerade ist,  $D$ ,  $d$  und  $d'$  die Drücke oder Pressungen, welche die Flüssigkeit beziehungsweise auf die ganze Fläche  $ABCD$  und ihre Theile  $BED$  und  $ABCE$  ausübt; so ist der Bedingung der Aufgabe zufolge

$$d : d' = n : m \text{ oder } d : D = n : n + m.$$

Nun ist aber  $d = \gamma \cdot \frac{1}{2}BD \cdot DE \cdot \frac{2}{3}BD = \frac{1}{3}\gamma DE \cdot BD^2$ ,  
und  $D = \gamma \cdot AB \cdot BD \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\gamma AB \cdot BD^2$ ,  
folglich auch  $n : n + m = \frac{1}{3}DE : \frac{1}{2}AB$ ,

woraus sofort  $DE = \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{m+n} AB$

folgt.

Zusatz. Soll  $m : n = 1 : 2$  seyn, so ist wegen  $n = 2m$  sofort

$$DE = \frac{3}{2} \cdot \frac{2m}{3m} AB = AB = DC,$$

also die Diagonale  $BC$  die gesuchte Theilungslinie (übereinstimmend mit dem Resultate der vorigen Aufgabe).

**55. Aufgabe.**

Das bis zur Seite  $AB$  (Fig. 61) vertical in eine Flüssigkeit eingetauchte Rechteck, ist durch eine mit  $AB$  parallele Gerade  $EF$  in zwei

bestimmte Theile getheilt; es soll das Verhältniß der Pressungen bestimmt werden, welches die Flüssigkeit auf diese beiden Theile ausübt.

### Auflösung.

Es seyen  $D$ ,  $d$  und  $d'$  die Pressungen, welche die Flüssigkeit beziehungsweise auf die Flächen  $AD$ ,  $AF$  und  $ED$  ausübt; so ist

$$D : d = \frac{1}{2} \gamma AB \cdot AC^2 : \frac{1}{2} \gamma AB \cdot AE^2 = AC^2 : AE^2$$

und daraus:  $D - d : d = d' : d = AC^2 - AE^2 : AE^2$ .

Zusatz. Sollen die beiden Pressungen oder Drücke einander gleich seyn, so muß wegen  $d' = d$  auch  $AC^2 - AE^2 = AE^2$ , d. i.  $AC = AE\sqrt{2}$  oder  $AE : AC = 1 : \sqrt{2}$  Statt finden.

### 56. Aufgabe.

Es soll das Rechteck  $AD$  (Fig. 61) der vorigen Aufgabe durch eine mit  $AB$  parallel geführte Gerade  $EF$  in zwei Theile dergestalt getheilt werden, daß sich die Pressungen auf die obere und untere Fläche  $AF$  und  $ED$  wie  $m : n$  verhalten.

### Auflösung.

Nach der vorigen Aufgabe ist  $d : d' = AE^2 : AC^2 - AE^2$  und nach der gegenwärtigen Bedingung  $d : d' = m : n$ , folglich ist

$$AE^2 : AC^2 - AE^2 = m : n \text{ oder } AE^2 : AC^2 = m : m + n \dots (\alpha)$$

woraus sofort  $AE = AC \sqrt{\left(\frac{m}{m+n}\right)}$  folgt.

Zusatz. Für  $m = n$  wird wieder wie in der vorigen Aufgabe

$$AE = AC \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ oder } AC = AE \sqrt{2}.$$

### 57. Aufgabe.

Das vorige Rechteck  $AD$  (Fig. 61) durch mit  $AB$  parallele Linien in  $n$  Theile so zu theilen, daß die Pressungen, welche die Flüssigkeit auf die einzelnen Theile oder horizontalen Streifen ausübt, alle einander gleich werden.

### Auflösung.

Ist  $ED$  der  $n^{\text{te}}$  oder unterste Streifen, so ist nach der Proportion (α) der vorigen Aufgabe  $AC^2 : AE^2 = n : n - 1$ , folglich:



$$AE = AC \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \text{ und } EC = AC - AE = AC \left[1 - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right]$$

$$\text{d. i. } EC = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n}} AC \dots (1)$$

Setzt man im Zähler dieser Formel (1) für  $n$  nach und nach  $n-1$ ,  $n-2 \dots$  so erhält man die entsprechenden Höhen der verschiedenen Streifen oder Theile, diese von unten nach aufwärts gezählt.

So ist z. B. für  $n=4$ , d. i. wenn die Höhe  $AC$  des Rechteckes in 4 Theile von der genannten Beschaffenheit getheilt werden soll, in Fig. 61,  $CE = \cdot 134 AC$ ,  $EE' = \cdot 159 AC$ ,  $E'E'' = \cdot 207 AC$  und endlich  $AE'' = \cdot 500 AC$ .

### 58. Aufgabe.

Ein hohler gerader Kegel  $ABC$  (Fig. 62) ist in eine Flüssigkeit so eingetaucht, daß dessen Achse  $CD$  gegen den Horizont oder Spiegel  $NR$  unter dem Winkel  $AEC = \alpha$  geneigt ist und der Endpunkt  $A$  des Durchmessers  $AB$  der Basis in diesem Flüssigkeitsspiegel liegt; es soll jener mit der Basis parallele Querschnitt  $MM'$  des Kegels gefunden werden, in welchem der Druck am größten ist.

### Auflösung.

Da sich der Druck irgend eines Querschnittes  $MM'$  wie die Größe desselben und die Tiefe dessen Schwer- oder Mittelpunctes unter dem Spiegel  $NR$  verhält, so läßt sich hier, indem die Querschnitte abnehmen, wenn die Tiefe ihrer Schwerpunkte zunimmt, im Voraus vermuthen, daß in irgend einem dieser Querschnitte der Druck am größten ist.

Es sey nun  $OP$  das vom Mittelpunct  $O$  des gesuchten Querschnittes  $MM'$  auf die Oberfläche der Flüssigkeit  $NR$  gezogene Perpendikel, also eine Verticallinie,  $CD = h$ ,  $AD = BD = r$ ,  $CO = x$  und

$$EC = ED + DC = \frac{r}{\tan \alpha} + h = a; \text{ so hat der durch } O \text{ mit der Basis}$$

$AB$  parallele geführte Querschnitt die Fläche (aus  $F : r^2 \pi = CO^2 : CD^2$ )

$$F = \left(\frac{CO}{CD}\right)^2 r^2 \pi = \frac{x^2}{h^2} r^2 \pi \text{ und es ist daher der auf diesen Querschnitt}$$

ausgeübte Druck  $\varepsilon = \gamma F \cdot PO$ , oder, wenn man für  $F$  den Werth setzt und berücksichtigt, daß  $PO = EO \cdot \sin \alpha = (a-x) \sin \alpha$  ist, auch

$$\varepsilon = \frac{\gamma r^2 \pi \sin \alpha}{h^2} (a x^2 - x^3).$$

Da nun  $x$  ein Maximum werden soll, so hat man nach der Regel:

$$\frac{dz}{dx} = A(2ax - 3x^2) = 0 \text{ und daraus } x = 0 \text{ und } x = \frac{2}{3}a.$$

Da nun mit diesen Werthen der zweite Differenzialquotient

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A(2a - 6x)$$

beziehungsweise positiv und negativ ausfällt, so entspricht der erstere (wenn man sich den Kegel über die Spitze  $C$  hinaus fortgesetzt denkt) einem Minimum und der letztere einem Maximum von  $z$ . Dieser größte Druck oder Werth von  $z$  ist sofort

$$Z = \frac{4}{27} \gamma \frac{r^2 a^3 \pi \sin \alpha}{h^2}.$$

**Zusatz.** Ist die Achse des Kegels vertical und die Spitze  $C$  nach abwärts gerichtet (liegt also die Basis  $AB$  im Spiegel der Flüssigkeit), so ist  $\alpha = 90^\circ$  und  $a = h$ , folglich  $x = \frac{2}{3}h$  und  $Z = \frac{4}{27} \gamma \pi r^2 h$ .

### 59. Aufgabe.

Zwei ganz gleiche Cylinder  $A$  und  $B$  (Fig. 63) vom specifischen Gewichte  $2s$  sind mittelst eines über eine Rolle  $C$  geführten Fadens miteinander verbunden und dabei jeder in eine Flüssigkeit, und zwar  $A$  in eine, deren Dichtigkeit im Verhältniß der Tiefe, vom Spiegel an gerechnet, zunimmt, und  $B$  in eine Flüssigkeit getaucht, deren Dichtigkeit durchaus  $= s$  ist. Wenn nun bei irgend einer Stellung dieser Cylinder das Gleichgewicht besteht und hierauf der Cylinder  $B$  um eine gewisse Tiefe weiter herabgezogen wird (wodurch also der Cylinder  $A$ , da er in die weniger dichte Schichte der betreffenden Flüssigkeit kommt, relativ schwerer wird), so ist die Frage, um wie viel dieser Cylinder  $B$  verlängert werden muß, damit durch das zunehmende Gewicht desselben das Gleichgewicht wieder hergestellt werde.

### Auflösung.

Es sey  $a$  die Grundfläche und  $b$  die Höhe eines jeden der beiden Cylinder, und in der ursprünglichen oder ersten Lage des Gleichgewichts  $c$  der Abstand der obern Basis des Cylinders  $A$  von der Oberfläche der betreffenden Flüssigkeit. Ist ferner  $h$  die Tiefe, in welcher das specifische Gewicht dieser nämlichen Flüssigkeit  $= s$  ist, so erhält man das specifische Gewicht  $s'$  in der Tiefe  $x$  (aus der Proportion  $s : s' = h : x$ , der Bedingung der Aufgabe zufolge)  $s' = \frac{s}{h} x$ .

Das Gewicht jedes der beiden Cylinder ist, im leeren Raume gewogen  $= 2\gamma a b s$  (wobei  $\gamma$ , wie hier durchaus, das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers bezeichnet) und das Gewicht des vom Cylinder  $A$  in der ersten oder ursprünglichen Lage verdrängten Flüssigkeit

$$\int_c^{b+c} \gamma a s' dx = \gamma a \int_c^{b+c} \frac{s}{h} x dx = \frac{\gamma a s}{h} \left[ \frac{(b+c)^2 - c^2}{2} \right] = \frac{\gamma a s}{2h} (b^2 + 2bc)$$

so, daß also dabei die Spannung des Fadens  $DA$  nämlich

$$S = 2\gamma a b s - \frac{\gamma a s}{2h} (b^2 + 2bc) \dots (1)$$

ist.

Geht nun in der zweiten Position der beiden Cylinder, für welche das Gleichgewicht hergestellt werden soll, der Abstand  $c$  in den  $k$  einern  $c'$  über, so wird die Spannung desselben Fadenstückes  $DA$  eben so:

$$S' = 2\gamma a b s - \frac{\gamma a s}{2h} (b^2 + 2bc') \dots (2)$$

seyn, welche sofort um  $S' - S = \frac{\gamma a b s}{h} (c - c')$  größer als die vorige ist.

Was ferner die Spannung des Fadentheiles  $EB$  betrifft, so ist diese in der ersten oder ursprünglichen Lage, in welcher der Cylinder  $B$  noch seine anfängliche Länge  $b$  besitzt, sofort:

$$S_1 = 2\gamma a b s - \gamma a b s = \gamma a b s,$$

dagegen in der zweiten Lage, in welcher der Cylinder die Höhe  $b'$  besitzen soll:

$$S'_1 = 2\gamma a b' s - \gamma a b' s = \gamma a b' s,$$

folglich um  $S'_1 - S_1 = \gamma a s (b' - b)$  größer als in der ursprünglichen Lage des Gleichgewichtes. Da nun aber, wenn das Gleichgewicht auch in der zweiten Position bestehen soll, diese Zunahmen der Spannungen beiderseits einander gleich seyn müssen, so hat man die Bedingungsgleichung  $S' - S = S'_1 - S_1$ , oder wenn man substituirt und dann daraus  $b' - b$  bestimmt, für die gesuchte Verlängerung des Cylinders  $B$ :

$$b' - b = \frac{b}{h} (c - c').$$

## 60. Aufgabe.

Wie tief sinkt ein durch Umdrehung erzeugtes Paraboloid  $ABD$  (Fig. 64) in eine Flüssigkeit ein, deren specifisches Gewicht  $n$  Mal so groß als jenes des festen Körpers ist, wenn dabei die Achse  $AC$  vertical und der Scheitel  $A$  nach aufwärts gekehrt ist?

### Auflösung.

Ist  $MEM'$  jener Querschnitt des Paraboloides bis zu welchem

dasselbe in die gegebene Flüssigkeit einsinkt, und setzt man  $AC = a$  und  $AO = x$ ; so ist der Bedingung der Aufgabe zufolge:

$$\text{Vol. } MM'BD : \text{Vol. } ABD = 1 : n$$

oder

$$\text{Vol. } AMEM' : \text{Vol. } ABD = n - 1 : n.$$

Setzt man in diese Proportion für die Volumina die entsprechenden Werthe, d. i. wenn  $BC = R$  und  $MO = r$  ist,  $\text{Vol. } AMEM' = \frac{1}{2} \pi r^2 x$  und  $\text{Vol. } ABFD = \frac{1}{2} \pi R^2 a$ , so erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$r^2 x : R^2 a = n - 1 : n$$

oder wegen  $r^2 = px$  und  $R^2 = pa$ , wenn  $p$  der Parameter der erzeugenden Parabel ist, auch

$$px^2 : pa^2 = n - 1 : n \text{ d. i. } x : a = \sqrt{(n-1)} : \sqrt{n}$$

woraus sofort

$$x = a \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \text{ oder } CO = a - x = a \left[ \frac{\sqrt{n} - \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n}} \right]$$

folgt.

### 61. Aufgabe.

Ein Kubikzoll eines Metalles, dessen specifisches Gewicht  $= s$  ist, wird in einen hohlen geometrischen Kegel verwandelt; es soll dabei jenes Verhältniß zwischen der Höhe und dem Halbmesser der Basis gefunden werden, für welches, wenn man den Kegel in reines Wasser mit der Spitze abwärts einsenkt, die im Stande des Gleichgewichtes Statt findende eingetauchte Fläche ein Minimum wird.

#### Auflösung.

Setzt man für den bis zum Querschnitt  $DE$  (Fig. 65) in das Wasser einsinkenden Kegel  $ABC$ ,  $AO = r$ ,  $CO = x$ ,  $CP = z$  und  $DP = r'$ ; so ist zuerst  $r : r' = x : z$ , also der Halbmesser jenes Querschnittes, bis zu welchem der Kegel einsinkt,  $r' = \frac{r z}{x}$ .

Das vom Kegel dadurch verdrängte Wasser beträgt daher :

$$\frac{1}{3} r'^2 \pi \cdot CP = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{z^3}{x^2}$$

folglich ist dessen Gewicht, wenn man den Zoll als Einheit nimmt und  $\gamma$  für das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser gelten läßt  $= \frac{1}{3} \gamma \pi r^2 \frac{z^3}{x^2}$ .

Zufolge der Bedingung der Aufgabe ist das Gewicht des Kegels  $= \gamma s$ , folglich muß für das Gleichgewicht

$$\frac{1}{3} \gamma \pi r^2 \frac{x^3}{x^2} = \gamma s$$

seyh, woraus sofort

$$x = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\left(\frac{3s}{\pi r^2}\right)} \dots (\alpha)$$

folgt.

Die Mantelfläche des ganzen Kegels ist  $= r \pi \sqrt{(r^2 + x^2)}$  und da sich ähnliche Flächen wie die Quadrate ähnlicher Seiten verhalten, so ist, wenn man die eingetauchte Mantelfläche  $DEC = y$  setzt:

$$r \pi \sqrt{(r^2 + x^2)} : y = x^2 : x^2$$

woraus, wenn man  $y$  bestimmt und für  $x$  seinen Werth aus der Relation  $(\alpha)$  setzt, sofort nach allen Reductionen

$$y = r \pi \sqrt[3]{\frac{9s^2}{\pi^2 r^4}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \sqrt{(r^2 + x^2)} \text{ folgt.}$$

Setzt man Kürze halber den constanten Factor dabei  $= A$  und quadirt diese Gleichung, so erhält man auch

$$y' = y^2 = A^2 (r^2 x^{-\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}).$$

Soll nun  $y$  ein Minimum werden, so wird es auch für denselben entsprechenden Werth von  $x$  das Quadrat davon, d. i.  $y' = y^2$  seyn müssen und man hat nach der Regel:

$$\frac{dy'}{dx} = A^2 \left( -\frac{4}{3} r^2 x^{-\frac{7}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \right) = 0$$

und daraus  $x = r \sqrt{2}$ , welcher Werth in der That einem Kleinsten entspricht, indem damit der zweite Differenzialquotient positiv ausfällt.

Das gesuchte Verhältnifs von  $AO : OC$  ist daher:

$$r : x = 1 : \sqrt{2}.$$

Mit diesem Werthe von  $x$  (als die im Kreise der Basis  $AB$  eingeschriebenen regelmässigen Viereckseite) erhält man für die Tiefe der Einsenkung aus der Relation  $(\alpha)$ :

$$x = \sqrt[3]{\left(2 r^2 \cdot \frac{3s}{\pi r^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6s}{\pi}}.$$

## 62. Aufgabe.

Auf einen bis zu einer gewissen Tiefe in eine Flüssigkeit eintauchenden Körper wird ein Gewicht so aufgelegt, dafs der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit und jener des schwimmenden Körpers in eine und dieselbe Verticallinie fallen; es soll die durch das aufgelegte Gewicht bewirkte Einsenkung des Körpers bestimmt werden.

### Auflösung.

I. Es sey  $X$  (Fig. 66) das variable in  $D$  aufgelegte Gewicht, bei welchem der Körper bis zum Querschnitt  $MM'$  einsinkt, wofür  $AP = x$  seyn mag. Für  $X = 0$  soll das Einsinken bis zum Querschnitt  $bb'$ , wofür  $Ac = a$ , und für  $X = P$ , bis zum Querschnitt  $BB'$  Statt finden, wofür  $cC = z$ , also  $AC = a + z$  seyn soll; endlich sey die Fläche des Querschnitts  $MM' = Z$ . Diefs vorausgesetzt, wird, wenn  $X$  um  $dX$  zunimmt, auch das Einsinken, d. i.  $x$  um  $dx$  zunehmen und das Volumen des dabei einsinkenden Körperelementes ist  $dV = Z dx$ , so wie das Gewicht des dadurch verdrängten Wassers  $= \gamma s dV = \gamma s Z dx$ , wenn nämlich wieder  $s$  das specifische Gewicht der Flüssigkeit und  $\gamma$  das Gewicht einer cubischen Einheit Wasser bezeichnet. Für das Gleichgewicht hat man also  $dX = \gamma s Z dx$ , oder wenn man integrirt:

$$\int_0^P dX = \gamma s \int_a^{a+z} Z dx \quad \text{d. i.} \quad P = s \gamma \int_a^{a+z} Z dx \quad \dots \quad (1)$$

II. Ist der betreffende Körper durch Rotation um die verticale Achse  $AD$  entstanden, so geht die vorige Formel, wegen  $Z = y^2 \pi$ , wobei  $y = PM = PM'$  die der Abscisse  $AP = x$  entsprechende Ordinate in der erzeugenden Curve  $AMB$  ist, über in

$$P = \gamma s \pi \int_a^{a+z} y^2 dx \quad \dots \quad (2)$$

1) Für einen Cylinder vom Halbmesser  $r$  ist  $y = r$ , folglich aus (2);

$$P = \gamma s \pi r^2 \int_a^{a+z} dx = \gamma s \pi r^2 z = \gamma s A z$$

wenn man nämlich die Basis oder den constanten Querschnitt des Cylinders durch  $A$  bezeichnet, so, daß also

$$z = \frac{P}{\gamma s A} \quad \text{ist.}$$

Ist für das Gewicht  $P'$  die Einsenkung  $= z'$ , so ist eben so

$$z' = \frac{P'}{\gamma s A'}, \quad \text{folglich}$$

$$z : z' = P : P'.$$

Uebrigens gilt dasselbe für jeden prismatischen Körper, dessen Querschnitte constant und  $= A$  sind.

2) Für einen geraden Kegel, dessen Achse vertical und Spitze nach abwärts gekehrt ist, folgt, wenn  $r$  den Halbmesser der Grundfläche

und  $h$  die Höhe des Kegels bezeichnet  $x : y = h : r$ , also  $y = \frac{r}{h} x$  und aus (2):

$$P = \gamma s \pi \frac{r^2}{h^2} \int_a^{a+z} x^2 dx = \frac{\gamma s \pi r^2}{3 h^2} (3 a^2 z + 3 a z^2 + z^3)$$

aus welcher Gleichung  $z$  zu bestimmen ist.

3) Für ein Paraboloid mit vertikaler Achse und abwärts gekehrtem Scheitel ist  $y^2 = p x$ , folglich

$$P = \gamma s \pi p \int_a^{a+z} x dx = \frac{\gamma s \pi p}{2} (2 a z + z^2)$$

woraus wieder  $z$  bestimmt werden muss. Es ist hier ganz einfach, wenn man die quadratische Gleichung nach  $z$  auflöst:

$$z = -a + \sqrt{a^2 + \frac{2P}{\gamma s \pi p}}$$

Anmerkung. Hier wie in allen diesen Fällen hängt der Werth  $a$  vom ursprünglichen Gewichte des eintauchenden Körpers ab und kann derselbe durch Versuche gefunden werden. Will man jedoch  $a$  durch Rechnung finden, so sey  $G$  das Gewicht des Körpers, folglich ist, da das Volumen des Theiles  $b A b' = \frac{1}{2} (b c)^2 \cdot \pi$ .  $A c = \frac{1}{2} p a$ .  $\pi \cdot a = \frac{1}{2} \pi p a^2$ , also  $\frac{1}{2} \gamma s \pi p a^2$  das Gewicht der von demselben verdrängten Flüssigkeit ist, sofort

$G = \frac{1}{2} \gamma s \pi p a^2$  und daraus  $a = \sqrt{\left(\frac{2G}{\gamma s \pi p}\right)}$ , welchen Werth man noch einfacher aus dem vorigen Werthe von  $z$  erhält, wenn man, wie es in der Ordnung,  $z = a$ ,  $a = 0$  und  $P = G$  setzt.

4) Für einen geraden Cylinder  $D G C$  (Fig. 67), welcher als Basis die von der Parabel begrenzte Ebene  $D C E$  besitzt, hat man, wenn a) die Kanten  $D F$ ,  $E G$  horizontal sind und der Scheitel  $C$  nach abwärts liegt,  $Z = 2 y l$ , wenn  $D F = E G = l$  ist, oder wegen  $y = \sqrt{p x}$ , auch  $Z = 2 l \sqrt{p \cdot x^{\frac{1}{2}}}$ . Mit diesem Werthe folgt aus der ursprünglichen Relation (1):

$$P = 2 \gamma s l \sqrt{p} \int_a^{a+z} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{3} \gamma s l \sqrt{p} \cdot [(a+z)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}]$$

aus welcher Gleichung sofort  $z$  bestimmt werden muss.

Liegt dagegen b) der Scheitel wie in Fig. 67, a nach aufwärts, und ist die Höhe  $C F = b$ , so muss man in dem vorigen Ausdruck  $y = \sqrt{[p(b-x)]}$  setzen.

5) Liegen bei dem vorigen parabolischen Cylinder die Grundflächen  $D E C$  horizontal, stehen also die Kanten  $D F$ ,  $E G$  vertical; so bildet die Querschnittsfläche  $Z$  ein parabolisches Segment und

zwar ist  $Z = \frac{2}{3} b c$ , wenn  $CF = b$  und  $DE = c$  ist. (Fig. 67, a). Es folgt daher wieder aus Relation (1):

$$P = \frac{2}{3} \gamma s b c \int_a^{a+z} dx = \frac{2}{3} \gamma s b c z$$

$$\text{und daraus } z = \frac{3P}{2\gamma s b c}.$$

**Zusatz.** Taucht der Körper oder das Gefäß vom Gewichte  $G$  ursprünglich bis auf die Tiefe  $AB$  (Fig. 68) in die Flüssigkeit ein und wird dasselbe durch ein Gegengewicht  $X$  bis  $MM'$  gehoben; so darf man, um diese Höhe  $AM = z$  zu bestimmen, in der obigen Relation (1) nur  $z$  und  $P$  negativ nehmen.

So ist z. B. für ein cylindrisches oder prismatisches Gefäß vom Querschnitt  $A$ , wie dies bei Gasometern vorkommt, nach dem 1. Beispiel

$$X = \gamma s A z$$

oder wenn man, um das Gewicht  $G$  des Gefäßes in die Formel zu bringen, die Höhe desselben  $AC = h$  setzt, wodurch  $G = \gamma s A h$  wird, auch

$$X = G \frac{z}{h},$$

so, daß also das Gegengewicht  $X$  genau so wie die Höhe  $AM$  zunimmt, für  $z = 0$  ebenfalls Null und für  $z = h$  gleich  $G$  wird.

### 63. Aufgabe.

In einem Gefäße befinden sich zwei verschiedene Flüssigkeiten, die sich mit einander nicht vermischen, eine über der andern, und zwar hat die Obere, als die leichtere, das spezifische Gewicht  $s$  und die untere oder schwerere jenes  $s'$ ; wenn nun ein fester Körper vom specifischen Gewichte  $\sigma > s$  und  $< s'$  in diese Flüssigkeiten eingetaucht wird, so wird er, sobald das Gleichgewicht eingetreten, zum Theil in der einen, und zum Theil in der andern Flüssigkeit schwimmen, es soll das Verhältniß angegeben werden, in welchem die beiden, in diese Flüssigkeiten eintauchenden Theile des Körpers zu einander stehen.

### Auflösung.

Es sey  $v$  das Volumen jenes Theiles des Körpers, welcher in die obere oder leichtere, und  $v'$  jener Theil, welcher in die untere oder



schwerere Flüssigkeit eintaucht; so folgt unmittelbar für das Gleichgewicht

$$v s + v' s' = (v + v') \sigma$$

oder  $v(\sigma - s) = v'(s' - \sigma)$  d. i.  $v : v' = s' - \sigma : \sigma - s$

und daraus folgt auch noch, wenn man das Volumen des Körpers  $v + v' = V$  setzt:

$$v : V = s' - \sigma : s' - s$$

und

$$v' : V = \sigma - s : s' - s \dots (a)$$

### 64. Aufgabe.

Ein Körper vom Volumen  $V$  und dem specifischen Gewichte  $\sigma$  schwimmt einmal zum Theil im Wasser, zum Theil in der Luft, und ein zweites Mal im Wasser und leeren Raume; es soll das Verhältniß angegeben werden, in welchem in diesen beiden Fällen die in das Wasser tauchenden Theile zu einander stehen.

#### Auflösung.

Es sey der in das Wasser einsinkende Theil des Körpers im erstern Falle gleich  $v_1$  und im letztern  $= v_2$ , so ist nach der Relation (a) der vorigen Aufgabe, im erstern Falle, wenn  $s$  das specifische Gewicht der Luft und  $s'$  jenes des Wassers bezeichnet:

$$\frac{v_1}{V} = \frac{\sigma - s}{s' - s}$$

und im zweiten Falle, wegen  $s = 0$ :  $\frac{v_2}{V} = \frac{\sigma}{s'}$ .

Es ist daher

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sigma}{s'} \cdot \frac{s' - s}{\sigma - s}$$

besteht der betreffende Körper z. B. aus einem Stück Eschenholz vom specifischen Gewicht  $\cdot 904$ , so ist, wegen  $\sigma = \cdot 904$ ,  $s' = 1$  und wenn man für die Luft  $s = \cdot 00125$  setzt:

$$\frac{v_2}{v_1} = 1\cdot 0001.$$

### 65. Aufgabe.

Es soll das Maß oder die Größe der Stabilität eines Schiffes bestimmt werden.

### Auflösung.

I. Es bezeichne  $DEZ$  (Fig. 69) den grössten Querschnitt des Schiffes, welcher durch den Schwerpunkt  $O$  desselben senkrecht auf die Längsachse geführt wird,  $AB$  die Schwimmlinie, wenn das Schiff aufrecht schwimmt, und  $A'B'$  diese Linie, wenn das Schiff durch eine kleine Drehung oder Schwankung in die in der Zeichnung dargestellte schiefe Lage gebracht wird. Ist  $o$  der Schwerpunkt des verdrängten Wassers in der ursprünglichen oder aufrechten, und  $o'$  dieser Punkt in der schiefen Lage des Schiffes; so sucht (§. 320) die im Punkte  $O$  senkrecht nach abwärts wirkende Kraft  $G$  (gleich dem Gewicht des Schiffes) und die im Punkte  $o'$  vertical nach aufwärts wirkende Kraft  $P = G$ , d. h. das Kräftepaar  $P = G$ , die ursprüngliche Lage des Schiffes wieder herzustellen, wenn nämlich das Metacentrum  $F$  höher als der Schwerpunkt  $O$  des Schiffes liegt.

Da aber, wenn  $FJ$  perpendicularär auf die Richtung der Kräfte  $P$  gezogen wird, das Moment  $S$  dieses Kräftepaares  $P$  nach einem bekannten Satze  $S = G \cdot FJ$  ist \*), so dient dasselbe zugleich als Mafs für die Grösse der Stabilität. Setzt man die Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunct des Schiffes, d. i.  $OF = a$ , und den Drehungswinkel  $ACA' = \alpha$ , so wird auch die Grösse der Stabilität:

\*) Bekanntlich läfst sich zu zwei gleichen parallelen Kräften, welche auf eine gerade Linie nach entgegengesetzten Richtungen wirken, d. i. zu einem sogenannten Kräftepaar  $P$  (§. 21) keine dritte Kraft, wohl aber ein zweites Kräftepaar  $Q$  finden, welches mit dem erstern im Gleichgewichte steht. Um nämlich die Bedingung fürs Gleichgewicht zu finden, sey in Fig. I. das Kräftepaar  $P$  in den Punkten  $BB'$  und jenes  $Q$  in den Punkten  $CC'$  der Geraden  $AD$  in derselben Ebene angebracht. Fällt man aus irgend einem Punkte  $A$  dieser Geraden auf die Richtungen dieser vier Kräfte die Perpendikel  $AD$ ,  $AE$  und setzt  $DD' = a$  und  $EE' = b$ ; so besteht das Gleichgewicht, wenn (Nr. 20, Anmerkung 2)

$$P \cdot AD + Q \cdot AE' = P \cdot AD' + Q \cdot AE \text{ oder } P(AD - AD') = Q(AE - AE')$$

d. i. wenn die Relation 
$$Pa = Qb$$

Statt findet, d. h. das Kräftepaar  $P$  ist mit jenem  $Q$  im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft in ihren Abstand von der Gegenkraft bei dem einen Kräftepaar eben so groß wie bei dem andern ist, oder da man das Product  $Pa$  das Moment des Kräftepaares  $P$ , so wie jenes  $Qb$  das Moment des Kräftepaares  $Q$  nennt, wenn die Momente der beiden Kräftepaare einander gleich sind.

$$S = G a \sin \alpha \dots (1)$$

wobei man jedoch den kleinen Winkel  $\alpha$  als eine constante Grösse, die bei der Beurtheilung von  $S$  nicht mit in Anschlag kommt, zu betrachten hat.

II. Um diese Entfernung oder den Factor  $a$  dieser Formel näher zu bestimmen, bemerke man, dass durch den Uebergang des Schiffes aus der aufrechten in die schiefe Lage, der Schwerpunkt  $o$  des verdrängten Wassers nach  $o'$  rückt und sich der keilförmige Raum  $ACA'$  aus dem Wasser heraus, dagegen der eben so grosse  $BCB'$  in das Wasser hineinzieht, so als ob die Drehung um die durch  $C$  gehende Längsachse Statt gefunden hätte, wodurch sonach der Auftrieb auf der einen Seite um die Grösse einer im Schwerpunkte  $c$  des Dreieckes  $ACA'$  angreifenden Kraft  $p$  vermindert, dagegen auf der andern Seite des Punktes  $C$  durch eine im Schwerpunkte  $c'$  des Dreieckes  $BCB'$  angreifende, eben so grosse Kraft  $p$  vergrößert wird.

Der in  $o$  wirksame Auftrieb  $P$  sammt dem Kräftepaar  $p$  wird also durch den in  $o'$  wirksamen Auftrieb  $P$  ersetzt, so, dass wenn man sich in  $o'$  eine nach abwärts wirkende gleiche Gegenkraft  $P$  angebracht denkt, diese mit dem in  $o$  wirksam gedachten Auftrieb  $P$  und dem genannten Kräftepaar  $p$ , folglich mit andern Worten, die beiden Kräftepaare  $P = G$ , in  $o$  und  $o'$  angebracht, und  $p$  in  $c$  und  $c'$  angebracht, sofort mit einander im Gleichgewichte seyn müssen. Diefs gibt nach dem bekannten Satze der Momente (vergleiche die vorige Note), wenn  $Fi$  perpendicular auf die durch  $o$  gehende Verticale ist,

$$P \cdot Fi = p \cdot rr'$$

Ist aber der Querschnitt des eingetauchten Theiles  $AZB = A'ZB' = F$ , jener des Theiles  $ACA' = BCB' = f$ , ferner der horizontale Abstand der beiden Schwerpunkte  $c, c'$  der Dreiecke  $ACA'$  und  $BCB'$  d. i.  $rr' = b$ , und der Horizontalabstand der beiden Schwerpunkte  $c, c'$  des verdrängten Wassers, d. i. die Horizontalprojection des Weges, welchen der Schwerpunkt  $o$  bei dem Neigen des Schiffes beschreibt, nämlich  $Fi = c$ ; so geht die vorige Bedingungsgleichung, wegen  $P : p = F : f$ , in jene  $Fc = fb$  über, woraus sofort

$$c = \frac{bf}{F}, \text{ und } oF = \frac{c}{\sin \alpha} = \frac{bf}{F \sin \alpha} \text{ folgt.}$$

Nun ist, um auf die obige Relation (1) zurückzukommen, der Factor  $a = OF = Oo + oF$  oder, wenn man die Entfernung der beiden Schwerpunkte  $O$  und  $o$  des Schiffes und verdrängten Wassers in

der aufrechten Stellung des Schiffes, d. i.  $Oo = e$  setzt und für  $oF'$  den eben gefundenen Werth substituirt, auch

$$a = e + \frac{bf}{F \sin \alpha}, \text{ folglich damit } S = G \left( e \sin \alpha + \frac{bf}{F} \right) \dots (2)$$

Ist nun der Drehungswinkel  $\alpha$  sehr klein, so kann man  $\sin \alpha = \alpha$ , und für die Flächen der beiden schmalen Dreiecke  $ACA' = BCB'$ , wenn man die Breite des Schiffes  $AB = A'B' = B$  setzt,

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} B \cdot \frac{1}{2} B \varphi = \frac{1}{8} B^2 \varphi, \text{ so wie } r r' = b = 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{B}{2} = \frac{2}{3} B \text{ setzen;}$$

dadurch wird der vorige Ausdruck  $S = G \left( \frac{B^3}{12F} + e \right) \alpha$  oder im Falle der Schwerpunct  $o$  unter jenem  $O$  fällt, wodurch  $e$  negativ wird, auch  $S = G \left( \frac{B^3}{12F} - e \right) \alpha$ , folglich ist allgemein das Mafs der Stabilität:

$$S = G \left( \frac{B^3}{12F} \pm e \right) \alpha \dots (3)$$

Die Stabilität des Schiffes ist daher um so gröfser, je breiter das Schiff ist, je tiefer der Schwerpunct des Schiffes unter jenem des verdrängten Wassers liegt und je gröfser dessen Gewicht ist.

Liegt der Schwerpunct  $O$  über jenem  $o$ , wird nämlich  $e$  negativ, so hat das Schiff für  $e > \frac{B^3}{12F}$ , wodurch  $S$  negativ ist, keine Stabilität, ist dagegen  $e = \frac{B^3}{12F}$  also  $S = 0$ , so schwimmt das Schiff im sogenannten indifferenten Gleichgewicht.

Zusatz 1. Für ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Querschnitt  $AE$  (Fig. 70) die Breite  $AB = b$  und Höhe  $AD = h$  hat und wofür die Tiefe der Einsenkung  $FD = c$  ist, hat man  $F = bc$  und  $e = Oo = - \left( \frac{h-c}{2} \right)$ , folglich nach der Formel (3) für das Mafs der Stabilität:

$$S = G \left( \frac{b^3}{12bc} - \frac{h}{2} + \frac{c}{2} \right)$$

oder wenn  $n:1$  das Verhältnifs zwischen dem specifischen Gewicht des Parallelopedes und jenem der betreffenden Flüssigkeit ist, wodurch  $c = nh$  wird, auch

$$S = G \left[ \frac{b^3}{12nh} - \frac{h}{2} (1-n) \right].$$

Soll  $S = 0$  werden, so muß  $\frac{b^2}{12nh} = \frac{(1-n)h}{2}$  Statt finden, woraus  $n^2 - n = -\frac{b^2}{6h^2}$  oder  $n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{b^2}{6h^2}\right)}$  . . . (s) folgt.

Für  $\frac{b^2}{6h^2} < \frac{1}{4}$ , d. i.  $\frac{b}{h} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  erhält  $n$  zwei Werthe, für welche das indifferente Gleichgewicht eintritt; so ist z. B. für  $h = b$  sofort

$$n = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ d. i. } n = \cdot 7887 \text{ und } n = \cdot 2113.$$

Ist  $n$  sehr klein, also das specifische Gewicht des Körpers gegen jenes der Flüssigkeit gering, so ist auch  $\frac{b^2}{12nh} > \frac{1}{2}h(1-n)$  und es schwimmt der Körper mit Stabilität, wobei  $AB$  horizontal ist.

Ist  $\frac{b}{h} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  d. i.  $b:h = \sqrt{3}:\sqrt{2}$ , so gibt es nur einen Werth für  $n$ , nämlich  $n = \frac{1}{2}$ , bei welchem das Parallelopiped ohne Stabilität oder im indifferenten Gleichgewichte schwimmt. Für  $\frac{b}{h} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$  gibt es dagegen gar keinen Werth von  $n$ , für welchen dieses Gleichgewicht eintreten kann, sondern der Körper schwimmt bei allen Werthen seines specifischen Gewichtes mit Stabilität, so lange dieses Gewicht nur kleiner als jenes der Flüssigkeit ist, und zwar in aufrechter Stellung.

**Zusatz 2.** Die obige Formel (2) kann auch dazu dienen, die verschiedenen Lagen eines Körpers zu finden, bei welchen er im indifferenten Gleichgewichte schwimmt; man darf nämlich darin nur  $S = 0$  setzen und die entstehende Gleichung nach  $\alpha$  auflösen.

So ist z. B. für ein Parallelopiped von der Breite  $AB = a$  (Fig. 71) und Einsenkung  $FD = c$  die Fläche  $FDEG = F'DEG' = F \leftarrow ac$ , so wie jene  $OFF' = OGG' = f = \frac{1}{2}OF \cdot FF'$  oder wegen  $OF = \frac{1}{2}a$  und  $FF' = \frac{1}{2}a \tan \alpha$  auch  $f = \frac{1}{8}a \tan \alpha$ ; ferner ist, wenn  $c$  und  $c'$  wieder die Schwerpunkte dieser rechtwinkligen Dreiecke bezeichnen, und  $ca$  auf  $OF$  und  $c'r$  so wie  $ab$  auf  $NR$  perpendicular sind, sofort  $ac = \frac{1}{3}FF' = \frac{1}{6}a \tan \alpha$  und  $Oa = \frac{2}{3}OF = \frac{1}{3}a$ , folglich ist der Horizontalabstand des Schwerpunktes  $c$  von  $O$  d. i.

$$Or = Ob + br = Oa \cdot \cos \alpha + ac \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3}a \cos \alpha + \frac{1}{6}a \sin \alpha \tan \alpha$$

und sonach der Horizontalabstand beider Schwerpunkte  $c$  und  $c'$  von einander, d. i.  $rr' = b = \frac{2}{3}a \cos \alpha + \frac{1}{3}a \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$ .

Mit diesen Werthen erhält man aus der genannten Bedingungsgleichung, in welcher, da hier der Schwerpunkt  $o$  des verdrängten

Wassers tiefer als jener  $O$  des Körpers liegt,  $e$  negativ zu nehmen, also

folgt  $0 = \frac{bf}{F} - e \sin \alpha$  zu setzen ist, sofort

$$0 = \frac{1}{8} \frac{a^2 \tan \alpha}{ac} \cdot \frac{a}{3} \left( 2 \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) - e \sin \alpha$$

oder

$$\sin \alpha \left[ \frac{a^2}{24c} \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) - e \right] = 0 \text{ oder wegen } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\text{auch: } \sin \alpha \left[ \frac{a^2}{24c} (2 + \tan^2 \alpha) - e \right] = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt als die eine Wurzel  $\sin \alpha = 0$  und als zweite Wurzel

$$\tan \alpha = \sqrt{\left( \frac{24ce}{a^2} - 2 \right)};$$

von diesen beiden Werthen entspricht der erstere (wofür  $\alpha = 0$ ) dem aufrechten und der letztere dem schiefen Schwimmen.

Dieser letztere Fall ist jedoch nur möglich, wenn  $\frac{24ce}{a^2} > 2$  d. i.

$\frac{ce}{a^2} > \frac{1}{12}$ , oder wenn die Höhe des Parallelopides  $= h$  und dessen spezifisches Gewicht  $= s$ , wodurch, da das spezifische Gewicht des Wassers  $= 1$  ist,  $c = sh$  und  $e = \frac{h-c}{2} = \frac{h}{2}(1-s)$  wird, wenn die Be-

dingung  $\frac{h^2}{a^2} > \frac{1}{6s(1-s)}$  Statt findet.

Für  $\frac{h^2}{a^2} = \frac{1}{6s(1-s)}$  wird  $\tan \alpha = 0$ , also abermals  $\alpha = 0$ , so, daß auch in diesem Falle das Paralleloiped aufrecht schwimmt.

Ist z. B.  $h = a$ , und  $s = \frac{1}{2}$ , so wird

$$\tan \alpha = \sqrt{\left( \frac{12s(1-s)h^2}{a^2} - 2 \right)} = 1, \text{ daher } \alpha = 45^\circ.$$

Im letztern Falle ist für denselben Werth von  $s = \frac{1}{2}$ :

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{2}{3}, \text{ also } \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

was sofort auch aus der obigen Relation ( $s$ ) im Zusatz 1 folgt, indem

für diesen Werth von  $\frac{h}{a}$  (dort  $\frac{h}{b}$ ) die Verhältniszahl  $n = \frac{1}{2}$  wird.

## D) Aus der Hydrodynamik.

### 66. Aufgabe.

In einem mit einer kleinen Bodenöffnung versehenen prismatischen Gefäße  $AD$  (Fig. 72) befinden sich mehrere Flüssigkeiten, welche sich nicht mit einander vermischen, übereinander; es soll die Ausflufszeit für alle diese Flüssigkeiten bestimmt werden.

#### Auflösung.

Es seyen von unten auf gezählt  $s, s', s'' \dots$  die specifischen Gewichte der einzelnen Flüssigkeitsschichten  $CE', EF', FG' \dots$ ,  $A$  der constante Querschnitt des Gefäßes und  $a$  die Größe der Bodenöffnung; so ist während die unterste Schichte vom specifischen Gewichte  $s$  und der Höhe  $CE$  ausfließt, der Druck gegen die Öffnung eben so groß, als wenn anstatt der über der Schichte  $CE'$  stehenden Flüssigkeiten von den specifischen Gewichten  $s', s'' \dots$  und den Höhen  $EF, FG \dots$  eine einzige Flüssigkeit vom specifischen Gewichte  $s$  und der Höhe

$$h = \frac{s'}{s} EF + \frac{s''}{s} FG + \frac{s'''}{s} GH + \dots \text{ stände.}$$

Es handelt sich also zuerst blofs darum, die Ausflufszeit für die untere Schichte  $CE'$ , d. i. die Zeit zu bestimmen, binnen welcher der Spiegel einer gleichartigen Flüssigkeit, welcher ursprünglich um die Höhe  $H = CE + h$  über der Öffnung steht, um die Höhe  $h$  herabsinkt; diese Zeit ist aber (§. 335 und Nr. 163):

$$t = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man auch die Ausflufszeit für die nächste Schichte  $EF'$ , wenn man für die darüber stehenden Flüssigkeiten wieder eine einzige homogene Flüssigkeit von dem specifischen

Gewichte  $s'$  und der Höhe  $h' = \frac{s''}{s'} FG + \frac{s'''}{s'} GH + \dots$  annimmt und

die Zeit bestimmt, in welcher der imaginäre Flüssigkeitsspiegel von der Höhe  $H' = EF + h'$  auf jene  $h'$  herabsinkt; diese Zeit ist aber

$$t' = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{H'} - \sqrt{h'}).$$

Fährt man auf diese Art fort die einzelnen Zeiten bis zur letzten oder obersten Schichte  $HB$  zu bestimmen, so erhält man zuletzt für die gesuchte Ausflufszeit aller Flüssigkeitsschichten:

$$T = t + t' + t'' + \dots$$

### 67. Aufgabe.

Ein senkrecht prismatisches, mit Wasser gefülltes Gefäß besitzt sowohl im Boden, als auch in einer Seitenwand, und zwar in der halben Höhe, eine kleine Öffnung; es soll, wenn beide diese Öffnungen zu gleicher Zeit aufgemacht werden, die Ausleerungszeit für die obere Hälfte des Gefäßes gefunden werden.

#### Auflösung.

Es sey  $A$  der Querschnitt und  $2h$  die Höhe des Gefäßes, ferner  $a$  die Größe oder Fläche jeder der beiden Öffnungen und  $x$  die Höhe des Wasserspiegels über der Mitte der obern Öffnung am Ende der Zeit  $t$ ; so würde, wenn  $x$  constant bliebe, während einer Secunde aus der obern Öffnung die theoretische Wassermenge (§ 327)  $a\sqrt{2gx}$  und aus der untern jene  $a\sqrt{[2g(h+x)]}$  ausfließen. Sucht man daher die Ausflufsmenge für die Zeit  $dt$ , binnen welcher  $x$  als constant angesehen werden kann, so ist diese

$$dM = a dt \sqrt{2gx} + a dt \sqrt{[2g(h+x)]}$$

und da auch  $dM = A dx$  ist, so folgt, wenn man gleich  $dx$  und  $dt$  mit verschiedenen Zeichen einführt (weil  $x$  abnimmt während  $t$  zunimmt)

$$dt \cdot a\sqrt{2g} [\sqrt{x} + \sqrt{h+x}] = -A dx \text{ und daraus}$$

$$dt = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{h+x}}.$$

Wird diese Gleichung von  $x=0$  bis  $x=h$  integrirt, so erhält man für die gesuchte Ansleerungszeit der obern Hälfte des Gefäßes (bei Umkehrung der Grenzen):

$$t = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{h+x}} = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_0^h dx \left[ \frac{\sqrt{h+x} - \sqrt{x}}{h} \right]$$

oder da das allgemeine Integral



$$\int dx [\sqrt{(h+x)} - \sqrt{x}] = \frac{2}{3} (h+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

ist, nach gehöriger Reduction:

$$t = \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1) \frac{A\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} \quad \text{oder nahe} = 0.552 \frac{A}{\sqrt{2g}} \sqrt{h}.$$

**Zusatz** Wäre blofs die untere Öffnung geöffnet worden, so würde sich diese obere Hälfte des Gefäßes erst während der Zeit

$$T = 2 (\sqrt{2} - 1) \frac{A\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}}$$

entleert haben, es ist daher  $t : T = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$ .

### 68. Aufgabe.

Ein aus zwei prismatischen oder cylinderischen Theilen zusammengesetztes Gefäß *ADEH* (Fig. 73) besitzt bei *O* eine kleine Bodenöffnung; wenn nun das Gefäß mit einer Flüssigkeit bis *AB* gefüllt wird, so soll die Zeit bestimmt werden, innerhalb welcher während des Ausfließens aus dieser Öffnung der Flüssigkeitsspiegel erstens in dem weitem Theile *AD* bis *JK*, und zweitens in dem engern Theile *EH* bis *LM* herabsinkt.

### Auflösung.

So lange der Flüssigkeitsspiegel *AB* nicht unter *CD* herabsinkt, fließt die Flüssigkeit genau so aus, als ob sich die Öffnung im Boden *NR* des Gefäßes *ANRB* befände; erst wenn der Spiegel unter die Linie *EF* herabgesunken, kommt die Weite des kleinern oder engern Gefäßes in Betracht.

Setzt man daher den Querschnitt des obern, weitem Gefäßes = *A*, jenen des untern, engern = *A'* und die Fläche der Ausflußöffnung = *a*; so ist die Zeit, die der Flüssigkeitsspiegel bedarf, um von *AB* bis *JK* und *CD* zu sinken, beziehungsweise:

$$t' = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{AN} - \sqrt{JN}) \quad \text{und} \quad t'' = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{AN} - \sqrt{CN})$$

so wie die Zeit, während welcher der Spiegel von *CD* oder *EF* bis *LM* herabgeht:

$$t''' = \frac{2A'}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{GE} - \sqrt{GL}).$$

Es ist daher die Zeit, binnen welcher der Flüssigkeitsspiegel von *AB* bis *LM* herabsinkt  $T = t' + t''$ , d. i.

$$T = \frac{2}{a\sqrt{2g}} [A(\sqrt{AN} - \sqrt{CN}) + A'(\sqrt{EG} - \sqrt{LG})].$$

Für die ganze Entleerungszeit ist blofs  $LG = 0$  zu setzen.

**Zusatz.** Bei der umgekehrten Lage des Gefäßes und der Ausflufsöffnung im Boden  $AB$ , wäre eben so die Zeit, innerhalb welcher die Flüssigkeit von  $GH$  bis  $JK$  herabsinkt:

$$T = \frac{2}{a\sqrt{2g}} [A(\sqrt{AC} - \sqrt{AJ}) + A'(\sqrt{AN} - \sqrt{AC})].$$

Die Entleerungszeit erhält man, wenn man in diesem Ausdrucke  $AJ = 0$  setzt.

Ist z. B.  $AC = CN = h$ , so verhalten sich die Entleerungszeiten in diesen beiden Fällen  $T : T' = A(\sqrt{2} - 1) + A' : A'(\sqrt{2} - 1) + A$ , so, daß wenn z. B. noch  $A' = \frac{1}{2}A$  wäre, sofort  $T : T' = 1.828 : 2.414$  Statt fände.

### 69. Aufgabe.

In der verticalen Wand eines mit Wasser beständig voll erhaltenen Gefäßes befindet sich eine rechteckige Oeffnung mit zwei horizontalen Seiten; es soll erstens die Ausflufsmenge, zweitens der Ort der mittlern Ausflufsgeschwindigkeit, und drittens für den Fall als die obere Kante der Oeffnung im Wasserspiegel liegt und die Summe der Seiten des Rechteckes eine constante Größe ist, jenes Verhältniß der Seiten dieses Rechteckes bestimmt werden, für welches die Ausflufsmenge ein Maximum wird.

### Auflösung.

Es sey  $DE$  (Fig. 74) die verticale ebene Gefäßwand und zuerst allgemein die Oeffnung von der Horizontalen  $aa'$  und den beiden gegen die verticale Achse  $AD$  symmetrischen Curvenästen  $AMa$  und  $AM'a'$  begrenzt; ferner sey  $CD = h$ ,  $CA = h'$  und für den unendlich schmalen horizontalen Streifen  $M'm$  die Abscisse  $AP = x$  und die Ordinate  $PM = PM' = y$ .

**I.** Diefs vorausgesetzt ist die während der Zeit  $t$  aus dieser unendlich schmalen Oeffnung  $M'm = 2y dx$  ausfließende Wassermenge

$$dM = 2ty dx \sqrt{[2g(h' + x)]}, \text{ folglich, wenn man}$$

$$\text{integriert: } M = 2t\sqrt{2g} \int_0^{h-h'} y dx \sqrt{(h' + x)} \dots (1)$$

wobei für  $y$  der jedesmalige Werth  $y = f(x)$  aus der Gleichung der betreffenden Curve  $AMa$  oder  $AM'a'$  zu setzen ist.

**II.** Ist ferner  $H$  die mittlere Höhe, d. h. der Abstand jenes unendlich schmalen horizontalen Streifens der Oeffnung vom Wasser-

spiegel, in welchem das ausfliessende Wasser die mittlere, d. i. jene Geschwindigkeit besitzt, welche nach der ganzen Höhe der Oeffnung in den sämmtlichen horizontalen Streifen Statt finden müfste, damit in derselben Zeit  $t$  wieder die nämliche Wassermenge  $M$  der Formel (1) ausfliessen würde; so folgt, da die Gröfse der ganzen Seitenöffnung

$a M A M' a' = \int_0^{h-h'} 2y dx$  ist, die Bedingungsgleichung:

$$2t\sqrt{2gH} \int_0^{h-h'} y dx = 2t\sqrt{2g} \int_0^{h-h'} y dx \sqrt{(h'+x)} \text{ und daraus:}$$

$$\sqrt{H} = \frac{\int_0^{h-h'} y dx \sqrt{(h'+x)}}{\int_0^{h-h'} y dx} \dots (2)$$

Ist also die Oeffnung ein Rechteck von der Höhe  $h = h' = a$  und der Breite  $2y = b$ , so folgt aus der Formel (1), wegen

$\int dx \sqrt{(h'+x)} = \frac{2}{3} (h'+x)^{\frac{3}{2}}$  für die in der Zeit  $t$  ausfliessende Wassermenge:

$$M = \frac{2}{3} b t \sqrt{2g} [(a+h')^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}] = \frac{2}{3} b t \sqrt{2g} (h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}) \text{ (§. 332)}$$

und aus der Formel (2) für die mittlere Höhe:

$$H = \frac{\frac{2}{9} (h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}})^2}{(h-h')^2}$$

Zusatz. Liegt die obere Kante des Rechteckes im Wasserspiegel, so ist  $h' = 0$  und daher  $M = \frac{2}{3} b h t \sqrt{2gh}$  und  $H = \frac{4}{9} h = \frac{4}{9} a$ . (§. 331.)

III. Ist in diesem letztern Falle  $b + h = a$  eine constante Gröfse und soll das Verhältnifs  $\frac{b}{h}$  so bestimmt werden, dafs die Wassermenge

$M = \frac{2}{3} b h t \sqrt{2gh}$  am grössten wird; so hat man, da auch

$\infty = b h^{\frac{3}{2}} = h^{\frac{3}{2}} (a-h) = a h^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{5}{2}}$  in diesem Falle ein Maximum seyn mufs, nach der Regel:

$$\frac{d\infty}{dh} = \frac{3}{2} a h^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{2} h^{\frac{3}{2}} = 0$$

und daraus, da die Wurzel  $h^{\frac{1}{2}} = 0$  hier unbrauchbar ist,  $3a - 5h = 0$

oder  $h = \frac{3}{5} a$ , und damit  $b = a - h = \frac{2}{5} a$ , so, dass  $\frac{b}{h} = \frac{2}{3}$  wird. Da mit diesen Werthen von  $h$  und  $b$  der zweite Differenzialquotient  $n e g a$

tiv ausfällt, so entspricht dieses Verhältniß von  $b$  zu  $h$  in der That einem Maximum von  $M$  und zwar ist

$$M_{\max} = \frac{4}{9} h^2 t \sqrt{2gh}.$$

### 70. Aufgabe.

Die theoretische Ausflußzeit aus horizontalen Bodenöffnungen für verschiedene durch Umdrehung um ihre verticale Achse entstandenen Gefäße zu bestimmen, wenn dieselben mit Wasser gefüllt sind und kein weiterer Zufluss mehr Statt findet.

#### Auflösung.

Ist  $h$  die Höhe des Gefäßes und  $a^2$  die horizontale Ausflußöffnung, so ist (Nr. 164) die gänzliche Ausflußzeit

$$T = \frac{\pi}{a^2 \sqrt{2g}} \int_0^h y^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \dots (\alpha)$$

I. Bildet das Gefäß einen geometrischen Cylinder (oder ein Prisma) von der Grundfläche  $A^2$ , so ist  $\pi y^2 = A^2$  und daher die theoretische Ausflußzeit:

$$T = \frac{2A^4}{a^2 \sqrt{2g}} \sqrt{h} \dots (1)$$

II. Bildet das Gefäß einen abgekürzten Kegel (oder eine Pyramide) von den horizontalen Grundflächen  $A^2$  und  $a^2$ , wobei  $A^2$  der ursprüngliche Wasserspiegel ist, so wird, wenn  $R$  und  $r$  die Halbmesser dieser beiden Grundflächen bezeichnen,  $y^2 = \left[ r + \frac{(R-r)}{h} x \right]^2$  und daher nach allen Reductionen (und wenn  $a^2$  nur klein gegen  $A^2$  ist):

$$T = \frac{2}{15 a^2 \sqrt{2g}} (3A^2 + 4Aa + 8a^2) \sqrt{h} \quad (2)$$

Ist  $a^2$  äußerst klein gegen  $A^2$ , so hat man sehr nahe

$$T = \frac{2A^2}{5 a^2 \sqrt{2g}} \sqrt{h} \dots (2')$$

III. Bildet das Gefäß denselben Kegel aber in der umgekehrten Lage, so wird  $y^2 = \left( R - \frac{R-r}{h} x \right)^2$  und daher

$$T = \frac{2}{15 a^2 \sqrt{2g}} (8A^2 + 4Aa + 3a^2) \sqrt{h} \quad (3)$$

Ist wieder die Grundfläche  $a^2$  gegen jene  $A^2$  sehr klein, so kann man auch nahe  $T = \frac{16\sqrt{h}}{15a^2\sqrt{2g}}$  .. (3') setzen.

IV. Bildet das Gefäß ein Paraboloid von den horizontalen Grundflächen  $A^2$  und  $a^2$  und ist  $A^2$  der ursprüngliche Wasserspiegel, so ist, wenn wieder  $h$  die Höhe des Gefäßes,  $R$  der Halbmesser der größern und  $r$  jener der kleinern Grundfläche ist,

$$y^2 = r^2 + px \text{ oder wegen } p = \frac{R^2 - r^2}{h} \text{ auch } y^2 = r^2 + \frac{R^2 - r^2}{h} x$$

und damit aus der Formel (a) nach einer einfachen Reduction:

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^2\sqrt{2g}} (A^2 + 2a^2)\sqrt{h} \dots (4)$$

oder wenn  $\frac{a}{A}$  sehr klein ist, nahe  $T = \frac{2A^2\sqrt{h}}{3a^2\sqrt{2g}}$  .. (4')

V. Bildet das Gefäß dasselbe Paraboloid, jedoch in der umgekehrten Lage, so wird  $y^2 = R^2 - \frac{R^2 - r^2}{h} x$  und

$$T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^2\sqrt{2g}} (2A^2 + a^2)\sqrt{h} \dots (5)$$

und wenn  $\frac{a}{A}$  ein sehr kleiner Bruch ist,  $T = \frac{4A^2\sqrt{h}}{3a^2\sqrt{2g}}$  .. (5')

Bildet das Gefäß eine Kugelzone von den horizontalen Grundflächen  $A^2$  und  $a^2$ , wobei  $A^2$  die größte Kreisfläche und der ursprüngliche Wasserspiegel ist; so hat man, wenn wieder  $h$  die Höhe des Gefäßes ist und  $R, r$  die Halbmesser der Kreisflächen  $A^2$  und  $a^2$  bezeichnen,  $y^2 = R^2 - (h - x)^2$  und  $h^2 = R^2 - r^2$ , folglich

$$T = \frac{\pi}{a^2\sqrt{2g}} \left[ 2r^2 + \frac{14}{15}h^2 \right] \sqrt{h} = \frac{2\pi}{15a^2\sqrt{2g}} [7R^2 + 8r^2] \sqrt{h} \text{ d. i.}$$

$$T = \frac{2}{15a^2\sqrt{2g}} (7A^2 + 8a^2)\sqrt{h} \dots (6)$$

Für sehr kleine Werthe von  $\frac{a}{A}$  kann man auch nahe

$$T = \frac{14A^2\sqrt{h}}{15a^2\sqrt{2g}} \dots (6') \text{ setzen.}$$

VII. Für dieselbe Zone in umgekehrter Lage ist  $y^2 = R^2 - x^2$  und

$$T = \frac{2}{5a^2\sqrt{2g}} (4A^2 + a^2)\sqrt{h} \dots (7)$$

oder wenn  $\frac{a}{A}$  sehr klein ist,  $T = \frac{8A^2\sqrt{h}}{5a^2\sqrt{2g}}$  .. (7')

VIII. Bildet das Gefäß eine volle Kugel vom Halbmesser  $r$ , so ist wegen  $y^2 = 2rx - x^2$  die Ausflußzeit für die obere Halbkugel:

$$t = \frac{\pi}{a^2 \sqrt{2g}} \int_r^{2r} (2rx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2\pi r^{\frac{5}{2}}}{15 a^2 \sqrt{2g}} (8\sqrt{2} - 7) \dots (8)$$

und für die untere Halbkugel:

$$t' = \frac{\pi}{a^2 \sqrt{2g}} \int_0^r (2rx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{14\pi r^{\frac{5}{2}}}{15 a^2 \sqrt{2g}} = \frac{14A^2 \sqrt{h}}{15 a^2 \sqrt{2g}} \dots (9)$$

daher für die ganze Kugel:  $T = t + t' = \frac{16\pi \sqrt{2} \cdot r^{\frac{5}{2}}}{15 a^2 \sqrt{2g}} \dots (10)$   
(Nr. 166)

IX. Befindet sich endlich die Oeffnung  $a^2$  nicht im Scheitel, sondern in der Basis  $A^2 = r^2 \pi$  einer vollen Halbkugel, so ist  $y^2 = r^2 - x^2$  und

$$T = \frac{\pi}{a^2 \sqrt{2g}} \int_0^r dx (r^2 x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) = \frac{8}{5} \frac{\pi r^{\frac{5}{2}}}{a^2 \sqrt{2g}} \dots (11)$$

oder auch, wegen  $h = r$

$$T = \frac{8}{5} \frac{A^2 \sqrt{h}}{a^2 \sqrt{2g}} \dots (12)$$

Zusatz. Ist der Bruch  $\frac{a}{A}$  sehr klein und haben  $A, a, h$  in den Formeln (1), (2'), (3'), . (7') dieselben Werthe, so verhalten sich die durch diese 7 Formeln ausgedrückten Entleerungs- oder Ausflußzeiten beziehungsweise wie die Zahlen 15 : 3 : 8 : 5 : 10 : 7 : 12.

Die Ausleerungszeit für die obere Halbkugel durch den Scheitel der untern verhält sich zur Ausflußzeit der untern Halbkugel durch dieselbe Oeffnung:

(8) : (9) oder  $t : t' = (8\sqrt{2} - 7) : 7$  oder nahe wie 4·312 : 7; dagegen, wenn sich die Oeffnung in der Basis dieser obern Halbkugel befände

$$(8) : (12) = (8\sqrt{2} - 7) : 12 \text{ oder nahe wie } 4 \cdot 312 : 12.$$

Ferner verhalten sich die Ausleerungszeiten einer Halbkugel, einmal durch den Scheitel und dann durch die Basis:

$$(9) : (11) = 7 : 12$$

u. s. w.

## 71. Aufgabe.

In der verticalen Seitenwand eines mit Wasser beständig voll erhaltenen Gefäßes befinden sich zwei ganz gleiche, jede von einer Pa-

rabel, deren Achse vertical ist, und der grössten Doppelordinate begrenzte Oeffnung, und zwar liegt bei der einen der Scheitel und bei der andern Oeffnung die Basis oder Doppelordinate im Wasserspiegel; es soll das Verhältnifs zwischen den Ausflussmengen aus diesen beiden Seitenöffnungen bestimmt werden.

### Auflösung.

I. Nimmt man in der Tiefe  $x$  unterm Wasserspiegel einen unendlich schmalen horizontalen Streifen von der Höhe  $dx$ , so ist für die erste Oeffnung die Breite dieses Streifens  $2y = 2\sqrt{px}$ , also die per Secunde aus dieser schmalen Oeffnung  $2y dx$  ausfliessende Wassermenge  $dM = 2y dx \sqrt{2gx}$ , so dafs also die in einer Secunde aus der ganzen Oeffnung von der Höhe  $h$  ausfliessende Wassermenge

$$M = 2\sqrt{2pg} \int_0^h x dx = h^2 \sqrt{2pg} \text{ ist.}$$

II. Für die zweite Oeffnung ist dagegen  $dM' = 2y dx \sqrt{[2g(h-x)]}$ , folglich

$$M' = 2\sqrt{2pg} \int_0^h dx \sqrt{(hx - x^2)}.$$

Nun ist (Comp. §. 809)

$$\int dx \sqrt{(hx - x^2)} = -\frac{1}{4}(h-2x)\sqrt{(hx-x^2)} + \frac{1}{8}h^2 \text{arc Sin}\left(\frac{2x-h}{h}\right)$$

und da der algebraische Theil für beide Grenzen verschwindet, sofort

$$\int_0^h dx \sqrt{(hx - x^2)} = \frac{h^2}{8} \cdot \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{h^2}{8} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{h^2}{8} \pi, \text{ folglich}$$

$$M' = \frac{h^2}{4} \pi \sqrt{2pg}.$$

das gesuchte Verhältnifs ist daher  $M:M' = 1:\frac{\pi}{4} = 4:\pi$ .

Anmerkung. Befinden sich die Seitenöffnungen anstatt in einer verticalen, in einer schiefen Wand, welche mit dem Horizont den Neigungswinkel  $\alpha$  bildet, so mufs man überall statt der verticalen Höhe der Öffnung  $h$ ,

jene  $\frac{h}{\text{Sin } \alpha}$  setzen.

### 72. Aufgabe.

Die Ausflufszeit für die Seitenöffnung  $ABD$  (Fig. 75) eines geraden geometrischen Kegels zu finden, dessen Achse vertical und Spitze nach abwärts gekehrt ist.

### Auflösung.

Es sey die Höhe des Kegels  $AC = h$ , die Seite oder Kante  $AE = AB = l$ , der Halbmesser der Basis  $EC = CF = r$ , der Neigungswinkel  $CAF = CAB = \alpha$ , die obere Breite der Oeffnung  $BD = b$ , die Abscisse  $AP = x$ ,  $Pp = dx$  und  $PM$  perpendicularär auf  $AC$ ; so ist  $AM = x \operatorname{Sec} \alpha$  und  $Mm = dx \operatorname{Sec} \alpha$ , ferner  $AB : BD = AM : MM'$  oder  $l : b = x \operatorname{Sec} \alpha : MM'$ , woraus  $MM' = \frac{b \operatorname{Sec} \alpha}{l} x$  folgt; endlich ist die unendlich kleine Ausflußöffnung  $Mm' = MM' \cdot Mm = \frac{b \operatorname{Sec}^2 \alpha}{l} x dx$  die wir Kürze halber wieder durch  $a$  bezeichnen wollen.

Ist der Wasser- oder überhaupt Flüssigkeitsspiegel von  $C$  bereits bis  $P'$  gesunken und setzt man diese variable Höhe  $AP' = z$ , so fließt, wenn der Spiegel auf dieser Höhe erhalten wird, während einer Secunde aus der unendlich kleinen Oeffnung  $Mm' = a$  die Wassermenge (wenn man nämlich für die betreffende Flüssigkeit Wasser nimmt):

$$dM = a \sqrt{[2g(z-x)]} = - \frac{b \operatorname{Sec}^2 \alpha}{l} \sqrt{2g} \cdot x dx \sqrt{(z-x)^*}$$

folglich aus der bis  $ab$ , d. i. zum Wasserspiegel reichenden Seitenöffnung  $Aab$  die Wassermenge, wenn man Kürze halber den constanten Factor

$$\frac{b \operatorname{Sec}^2 \alpha}{l} \sqrt{2g} = A \text{ setzt:}$$

$$M = -A \int_z^0 x dx \sqrt{(z-x)} = A \int_0^z x dx \sqrt{(z-x)} = \frac{4}{15} A z^{\frac{5}{2}}$$

aus, weil (wie leicht zu finden) das allgemeine Integral

$$\int x dx \sqrt{(z-x)} = \frac{2}{3} (z-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} z (z-x)^{\frac{3}{2}} \text{ ist.}$$

Da nun aber  $z$  nur während der unendlich kleinen Zeit  $dt$  constant bleibt, so ist die während dieser Zeit aus der genannten Seitenöffnung  $Aab$  ausfließende theoretische Wassermenge

$$dM = \frac{4}{15} A z^{\frac{5}{2}} dt.$$

Da ferner während dieser Zeit der Wasserspiegel von der Höhe  $z$  auf jene  $z - dz$  herabsinkt und diese unendlich dünne Wasserschicht das Volumen  $dM' = Z dz$  besitzt, wenn  $Z$  den durch  $P'$  geführten horizontalen Querschnitt des Kegels bezeichnet, also (aus  $r^2 \pi : Z = h^2 : z^2$ )

\*)  $dM$  und  $dz$  erhalten entgegengesetzte Zeichen, weil  $M$  zunimmt, wenn  $z$  abnimmt.



$Z = \frac{r^2 \pi}{h^2} z^2$  folglich auch  $dM' = \frac{r^2 \pi}{h^2} z^2 dz$  ist; so hat man, da  $dM = dM'$  seyn muſs, sofort (wenn man wieder berücksichtigt, daſs  $dt$  und  $dz$  entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen):

$$\frac{4}{15} A z^{\frac{5}{2}} dt = - \frac{r^2 \pi}{h^2} z^2 dz \quad \text{oder} \quad dt = - \frac{15}{4} \frac{r^2 \pi}{A h^2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

und daraus folgt für die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe  $h$  auf jene  $h'$  herabgeht (wenn man gleich die Grenzen umkehrt):

$$t = \frac{15}{4} \frac{r^2 \pi}{A h^2} \int_{h'}^h z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{15}{4} \frac{r^2 \pi}{A h^2} 2 (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

oder wenn man für  $A$  den Werth wieder herstellt:

$$t = \frac{15}{2} \cdot \frac{\pi r^2 l}{b h^2 \sqrt{2g} \cdot \text{Sec}^2 \alpha} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

Setzt man für  $\frac{r}{h}$  den Werth  $\text{tang} \alpha$  und für  $\frac{\text{tang}^2 \alpha}{\text{Sec}^2 \alpha}$  den gleichgeltenden Werth  $\text{Sin}^2 \alpha$ , so erhält der vorige Ausdruck für  $t$  auch die Form

$$t = \frac{15 \pi l \text{Sin}^2 \alpha}{2 b \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

Endlich hat man für die ganze Entleerungszeit  $T$ , wegen  $h' = 0$ :

$$T = \frac{15 \pi l \text{Sin}^2 \alpha}{2 b \sqrt{2g}} \sqrt{h} = \frac{15 \pi r \text{Sin} \alpha}{2 b \sqrt{2g}} \sqrt{h}$$

### 73. Aufgabe.

Den Widerstand zu bestimmen, welchen eine Kugel bei der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. im Wasser oder in der Luft erleidet.

#### 1. Auflösung

a) nach der gewöhnlichen Theorie.

Es sey  $DA'$  (Fig. 49) die Richtung, nach welcher sich der Mittelpunkt  $C$  der Kugel vom Halbmesser  $r$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, und  $A'BEB'$  ein durch diese Richtung  $EA'$  gelegter größter Kreis, ferner seyen für einen beliebigen, im Umfange dieses größten Kreises genommenen Punct  $M$ ,  $CP = x$  und  $PM = y$  die rechtwinkligen Coordinaten, so wie  $\angle MCA' = \alpha$  und endlich für den, diesem unendlich nahe liegenden Punct  $m$ ,  $Mm = ds$ ,  $Pp = dx$  und  $mn = dy$ ; so ist auch  $x = r \text{Cos} \alpha$  und  $y = r \text{Sin} \alpha$ .

Der bei der angenommenen Bewegung auf die Flächeneinheit Statt findende normale Widerstand ist (§. 359):

$$p = k \gamma \frac{v^2}{2g} \quad \dots (a)$$

wobei  $\gamma$  das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit, z. B. des Wassers oder der Luft, und  $k$  den aus der auf S. 326 (des Comp.) aufgestellten Tabelle zu nehmenden Erfahrungscoeffizienten bezeichnet.

Diese auf den Punct  $M$  parallel mit  $A'E$  wirkende Kraft  $p$  zerlegt sich in eine nach der Richtung der Normale  $MC$  und in eine darauf senkrechte, nach der Richtung des Elementes  $Mm$ , wovon die erstere  $p' = p \cos \alpha$ , und die letztere für unsere Untersuchung nicht weiter zu beachten ist.

Zerlegt man ferner auch noch diese nach  $MC$  wirkende Kraft  $p'$  in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte nach den Richtungen  $CE$  und  $CB'$ , so ist die erstere  $p'' = p' \cos \alpha = p \cos^2 \alpha$  und die letztere  $= p' \sin \alpha$ , welche jedoch, wenn man auf den mit  $M$  im untern Quadranten  $A'B'$  symmetrisch liegenden Punct übergeht, von einer eben so großen nach  $CB$  wirkenden Kraft aufgehoben wird, also hier ebenfalls nicht weiter in Betracht kommt.

Da die Projection der zwischen den beiden durch  $MP$  und  $mp$  gehenden Parallelkreisen liegenden Kugelzone auf die durch  $BB'$  senkrecht auf die Richtung der Bewegung  $EA'$  gelegten größten Kreisebene  $dF = 2 \pi y dy$  ist, so hat diese eben genannte unendlich schmale Kugelzone bei der angenommenen Bewegung einen Widerstand zu überwinden, welcher durch die Formel  $dR = p'' dF = p \cos^2 \alpha \cdot dF$ , oder wenn man für  $p$  den obigen Werth aus (a) und für  $dF$  den vorigen Werth setzt, durch

$$dR = 2 \pi k \frac{\gamma v^2}{2g} \cos^2 \alpha \cdot y dy$$

ausgedrückt werden kann.

Da nun  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$  und für den vorliegenden Fall  $x^2 + y^2 = r^2$ , also  $\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^2}$  ist, so hat man, wenn dieser Werth für  $\cos^2 \alpha$  substituirt und dann innerhalb der Grenzen von  $y = 0$  bis  $y = r$  integrirt wird, für den Widerstand, welchen die vordere Hälfte, also auch die ganze Kugel bei der angenommenen Bewegung erleidet, den Ausdruck:

$$R = 2 \pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r y dy (r^2 - y^2) = 2 \pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^4}{4}$$

d. i. wenn man zugleich die grösste Kreisfläche  $\pi r^2 = F$  setzt:

$$R = \frac{1}{2} k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad (m)$$

Zu s a t z. Da für einen gleichseitigen Cylinder von derselben Grundfläche  $F$ , welcher sich mit der Geschwindigkeit  $v$  nach der Richtung seiner Achse bewegt (§. 359, Relat.  $r$ )

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

ist, wobei  $k$  den nämlichen Werth wie in der vorigen Formel (1) besitzt, so folgt, dafs die Kugel bei ihrer Bewegung nur halb so viel Widerstand als ein herum beschriebener Cylinder zu erleiden hat, welcher sich mit derselben Geschwindigkeit und in dem nämlichen Mittel, nach der Richtung seiner Achse bewegt.

Aus der oben angezogenen Tabelle (§. 359) folgt für den Widerstandscoeffizienten, wegen  $\frac{l}{d} = 1$  aus der letzten Rubrik  $k = 1.2824$ ;

dabei ist, je nachdem die Bewegung im Wasser oder in der Luft Statt findet, beziehungsweise  $\gamma = 56.4$  und (§. 466, da man den sehr kleinen

Bruch  $\frac{v}{1317}$  gegen die Einheit auslassen kann)  $\gamma = q = \frac{.000525 b}{1 + .004 t} \times 56.4$

zu setzen, wobei  $b$  den Barometer- und  $t$  den Thermometerstand bezeichnet. Nimmt man als mittleren Werth (von  $b = .76^m$  und  $t = 18^\circ C.$ )

$q = \frac{56.4}{850}$ , so wird der Zahlenwerth für Wasser:

$$\frac{k \gamma}{2g} = \frac{1.2824 \times 56.4}{62} = 1.1666$$

und jener für die Luft:

$$\frac{k q}{2g} = \frac{1.2824 \times 56.4}{62 \times 850} = .0013725.$$

Der Widerstand einer Kugel von der grössten Kreisfläche  $F$ , welche sich geradlinig mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist also endlich nach dieser Theorie, wenn die Bewegung im Wasser geschieht:

$$R = .5833 F v^2 \text{ Pfund}$$

und wenn sie in der Luft Statt findet:

$$R = .0006862 F v^2 \text{ Pfund}$$

wobei der W. Fufs und das W. Pfund als Einheiten zum Grunde liegen.

Anmerkung. Wie aus §. 466 erhellet, gilt diese letztere Formel nur für Geschwindigkeiten von  $v < 1317$  Fufs, indem nur dafür in dem vorigen

Ausdrücke von  $R = \frac{1}{2} \cdot k q' F \frac{v^2}{2g}$ , das Gewicht von 1 Kubikfuß Luft

$q' = q \left( 1 + \frac{v}{1317} \right)$  oder, wenn man  $\frac{v}{1317}$  gegen 1 auslassen kann,

$q' = q = \frac{000525 b}{1 + 004 t} \gamma$  gesetzt werden kann, sonst aber, d. i. für  $v > 1317 F$ .

$q' = 2q$  gesetzt werden muß.

## 2. Auflösung

### b) nach der Annahme von Duchemin.

1. Da die Beobachtungen und Versuche gezeigt haben, daß die gewöhnliche Theorie, nach welcher der Widerstand oder der Druck auf die vordere Fläche einer Ebene (in der Richtung der Bewegung genommen), welche sich im ruhigen Wasser nach einer schiefen Richtung bewegt, einfach dem Sinus des Einfallswinkels proportional ist, die Widerstände für einen von krummen Flächen begrenzten Körper etwas zu groß gibt, so kommt man der Wahrheit näher und zwar in der That sehr nahe, wenn man der Entwicklung folgende, von *Duchemin* aufgestellte Hypothese zum Grunde legt.

Ist nämlich allgemein  $AB'$  (Fig. 52') die Erzeugungslinie irgend einer krummen convexen Oberfläche, welche den vordern Theil eines Körpers begrenzt, der sich z. B. im ruhigen Wasser nach der durch den Mittelpunkt  $O$  der Figur gehenden Richtung  $OA$  bewegt, ferner  $BB'$  der Durchschnitt der größten auf  $OA$  perpendicularen Querschnittsfläche  $F$ ,  $v$  die Geschwindigkeit der Bewegung,  $\Delta$  die Dichtigkeit des Wassers oder der betreffenden Flüssigkeit überhaupt, und für irgend einen Punkt  $M$  der Erzeugungslinie  $OP = x$ ,  $PM = y$ ,  $B'M = s$  und  $MM_1 = ds$ ; so muß man nach der Annahme von *Duchemin*, um den Beobachtungen zu genügen, für den auf die Flächeneinheit im Punkte  $M$  Statt findenden Druck  $p$  setzen:

$$p = \frac{\Delta v^2 \sin^3 \varphi}{\sin^2 \varphi'}$$

wobei  $\varphi$  der Einfallswinkel des Elementes  $MM_1$  im Punkte  $M$  und  $\varphi'$  jener des Elementes im Punkte  $A$  mit der Bewegungsachse  $AO$  bezeichnet.

2. Ist nun der Körper ein Rotationskörper und  $AO$  dessen Achse, so beschreibt das Curvenelement  $MM_1 = ds$  bei der Erzeugung des Körpers, eine Zone vom Halbmesser  $y$ , deren Projection auf den durch  $BB'$  gehenden auf der Achse  $AO$  perpendicularen größten Querschnitt  $F$  gleich  $2\pi y dy$  ist. Diese Zone hat demnach bei der erwähnten

Bewegung nach der Richtung  $AO$  einen Druck zu erleiden, welcher durch  $2\pi p y dy = 2\pi \Delta v^2 y dy \frac{\sin^3 \varphi}{\sin^2 \varphi'}$ , oder wegen  $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$ , durch  $\frac{2\pi \Delta v^2}{\sin^2 \varphi'} y \frac{dy^4}{ds^3}$  ausgedrückt wird.

Setzt man den Durchmesser des größten Querschnitts  $BB' = a$ , drückt die in der cubischen Einheit der Flüssigkeit enthaltene Masse  $\Delta$  durch das Gewicht  $\gamma$  aus, setzt nämlich (Nr. 54, Anmerk. 3)  $\Delta = \frac{\gamma}{g}$  und nimmt für den Widerstandscoeffizienten  $k$  wieder den dem Verhältnifs von  $\frac{AA'}{BB'}$  entsprechenden Werth aus der Tabelle in §. 359; so erhält man für den gesuchten Widerstand  $R$  auf den ganzen Körper:

$$R = \frac{2\pi k \gamma}{\sin^2 \varphi'} \frac{v^2}{2g} \int_{\frac{a}{2}}^0 y \frac{dy^4}{ds^3} \text{ *)} \dots (1)$$

Was dabei den Werth von  $\sin \varphi'$  betrifft, so wird dieser aus dem allgemeinen Werth  $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$ , nämlich aus der Gleichung der Erzeugungscurve erhalten, wenn man diesen Quotienten auf den Punct  $A$  bezieht, so, dafs  $\sin \varphi' = \frac{dy'}{ds'}$  wird, wenn man die allgemeinen Werthe  $x, y, s$  für den Punct  $A$  mit einem Striche bezeichnet; es kann daher auch

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \left( \frac{ds'}{dy'} \right)^2 \int_{\frac{a}{2}}^0 y \frac{dy^4}{ds^3} \dots (1')$$

gesetzt werden.

3. Geht die krumme Oberfläche in den ebenen größten Querschnitt  $F$  durch  $BB'$  über, so wird für alle Puncte derselben  $dy = ds$  und  $\sin \varphi' = \frac{dy'}{ds'} = 1$ , folglich der Widerstand:

\*) Es hat also der Widerstand oder der Druck, welchen die Flüssigkeit auf die Flächeneinheit irgend eines Punctes der Vorderfläche des bewegten Körpers ausübt, das Gewicht einer Flüssigkeitssäule zum Mafse, deren Höhe der doppelten, der Geschwindigkeit des Körpers entsprechenden Fallhöhe gleich ist, multiplicirt mit dem Cubus des Sinus des Einfallswinkels des Elementes der Erzeugungslinie der vordern Fläche des Körpers in dem betreffenden Puncte, und dividirt durch das Quadrat des Sinus des Einfallswinkels jenes Elementes dieser Erzeugungslinie, welches an der Achse des Körpers liegt.

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \int_0^{\frac{a}{2}} y dy = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{a^2}{8}$$

oder wegen  $F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi$  als Grundfläche des Cylinders, auch:

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g} \dots (\alpha)$$

(vergleiche §. 359) wie es seyn soll.

4. Ist die Erzeugungslinie  $AMB'$  eine gerade Linie, so beschreibt diese bei ihrer Umdrehung um die in der Richtung der Bewegung  $A'A$  liegenden Achse  $OA$  einen geraden Kegel. Setzt man dafür den Halbmesser der Grundfläche  $OB' = r$  und die Höhe  $OA = h$ , so ist die Gleichung der Erzeugungslinie (wenn  $O$  der Ursprung der Coordinaten

ist):

$$y = \frac{r}{h} (h - x)$$

folglich  $\frac{dy}{dx} = -\frac{r}{h}$ ,  $ds = \frac{dx}{h} \sqrt{(r^2 + h^2)}$  und

$\frac{dy}{ds} = \frac{dy'}{ds'} = \text{Sin } \varphi' = \text{Sin } \varphi = -\frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}}$ , mithin nach der obigen

Formel (1):

$$R = -2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{r^2 + h^2}{r^2} \int_r^0 \frac{r^3}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} y dy \text{ d. i.}$$

$R = r^2 \pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}}$  d. i. wegen  $r^2 \pi = F$  und  $\frac{r}{\sqrt{(r^2 + h^2)}} = \text{Sin } \varphi$

wobei  $\varphi$  den Einfallswinkel der Kanten (mit der Achse des Kegels) bildet, sofort:

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g} \text{Sin } \varphi.$$

Der Widerstand eines Cylinders von derselben Grundfläche  $F$  und derselben Länge  $h$ , welcher sich mit der nämlichen Geschwindigkeit  $v$  nach der Richtung seiner Achse bewegt, wird bei demselben Werth von  $k$  durch

$$R = k \gamma F \frac{v^2}{2g}$$

ausgedrückt, welches zugleich auch der Widerstand des eben betrachteten Kegels für dessen Grundfläche ist, d. h. wenn bei der angenommenen Bewegung anstatt der Spitze die Grundfläche vorausgeht. Bezeichnet man diesen letztern Widerstand durch  $R'$ , so ist

$$R : R' = \text{Sin } \varphi : 1,$$

was auch mit den Erfahrungen ganz gut übereinstimmt.

5. Ist die Erzeugungslinie  $AB'$  ein Viertelkreis, die krumme Oberfläche also eine Halbkugel; so ist die Gleichung dieser Curve, die Coordinaten vom Mittelpunct  $O$  aus gezählt,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Daraus folgt, wegen  $ds = dy \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$  und  $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$

sofort  $\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}$  und da im Puncte  $A$   $y = 0$  ist, auch

$\sin \varphi' = \frac{dy'}{ds'} = \frac{r}{r} = 1$ , so, das wenn man diese Werthe in der vorigen Formel (1) substituirt und  $a = 2r$  setzt, der Widerstand der Halbkugel:

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \int_r^0 y dy \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{5} r^5$$

d. i. 
$$R = \frac{2}{5} \pi k \gamma r^2 \frac{v^2}{2g} = \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad \dots (s)$$

wird.

Nimmt man für  $k$  den entsprechenden Werth, d. i. für das Verhältniß  $\frac{AA'}{BB'} = 1$ , so gilt derselbe Ausdruck auch für die ganze Kugel, so, das wenn man den Widerstand des herumbeschriebenen Cylinders, welcher sich unter denselben Umständen in der Richtung seiner Achse bewegt, durch  $R'$  bezeichnet, sofort, wegen

$$R' = k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad (\text{vorige Relat. } a)$$

$$R = \frac{2}{5} R' \text{ ist.}$$

Anmerkung 1. Dieses mit den Beobachtungen und Versuchen sehr gut übereinstimmende Resultat weicht also von dem vorigen, durch die gewöhnliche Theorie erhaltenen, in so weit ab, als man dort  $R = \frac{3}{4} R'$ , folglich den Widerstand um  $\frac{1}{10} R'$  gröfser gefunden hat.

Anmerkung 2. Wird der vordere Theil eines Rotationskörpers, welcher sich in der Richtung seiner Achse im ruhigen Wasser oder in der Luft bewegt, von einer concaven Fläche begrenzt, wie eine solche z. B. durch die Umdrehung der Curve  $DB'$  oder  $B'DB$  um die Bewegungsachse  $A'D$  (Fig. 52') erzeugt wird; so mufs man nach *Duchemin*, um den Beobachtungsergebnissen zu entsprechen, den Druck auf die Flächeneinheit durch

$$p = \Delta v^2 \left(\frac{dx + dy}{ds}\right)$$

also den Widerstand des ganzen Körpers durch

$$R = 2\pi k \gamma \frac{v^2}{2g} \int_0^a y dy \left(\frac{dx + dy}{ds}\right) \quad \dots (2)$$

ausdrücken, wobei wieder der Werth von  $k$  aus der Tabelle in §. 359 für das Verhältniß des Durchmessers  $BB' = a$  und der Länge  $OA'$  zu nehmen ist.

Sucht man z. B. diesen Widerstand für eine kreisförmige concave Vorderfläche, nimmt zu diesem Ende  $DO$  zur Abscissenachse und  $D$  zum Anfangspunct der rechtwinkeligen Coordinaten; so hat man

$$y^2 = 2rx - x^2, \text{ und wenn Bog. } DB' = \varphi^0 \text{ ist, sofort } \frac{a}{2} = r \sin \varphi \text{ und} \\ F = \frac{a^2}{4} \pi = \pi r^2 \sin^2 \varphi.$$

Bezeichnet man den variablen Werth des Mittelpunctswinkels für irgend einen Punct  $N$  durch  $\alpha$ , so ist  $y = r \sin \alpha$ ,  $dy = r \cos \alpha d\alpha$ ,  $\frac{dx}{ds} = \sin \alpha$  und  $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$ , folglich wird das vorige Integrale

$$\int_0^{\frac{a}{2}} y dy \left( \frac{dx + dy}{ds} \right) = \int_0^{\varphi} r^2 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) d\alpha \\ \text{oder ausgeführt (Comp. §. 820, Form. 1.)}$$

$$= \frac{r^2}{3} (1 + \sin \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi - \cos^3 \varphi) = \frac{r^2}{3} (1 + \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi)$$

so, daß also endlich wegen  $\pi r^2 = \frac{F}{\sin^2 \varphi}$  sofort

$$R = \frac{2}{3} k \gamma F \frac{v^2}{2g} \left( \frac{1 + \sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right) \text{ wird.}$$

Sucht man jenen Werth von  $\varphi$ , wofür der Widerstand  $R$  am größten wird, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$\sin^3 \varphi + 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2 \cos^3 \varphi - 2 = 0$$

woraus man nahe  $\varphi = 61^\circ 38'$  findet. Dafür wird der Pfeil  $OD$  nahe genug  $= \frac{1}{2} r$ .

## 74. Aufgabe.

Den Widerstand zu bestimmen, welchen ein um eine Achse rotirender Körper in einem widerstehenden Mittel zu überwinden hat.

### 1. Auflösung.

a) nach der gewöhnlichen Theorie.

1. Es sey  $C$  (Fig. 76) der Durchschnittspunct der auf der Ebene der Tafel senkrechten Rotationsachse,  $MC = \rho$  das von irgend einem Puncte  $M$  der Vorderfläche des Körpers auf diese Achse gefällte Perpendikel,  $ab$  die Durchschnittslinie der durch dieses Perpendikel und die



Rotationsachse gelegten Ebene mit dem Flächenelement in  $M$ , welches man in allen Fällen als eben ansehen kann und hier durch  $dF$  bezeichnet werden soll; ferner sey  $Mm$  ein in der Ebene dieses Elementes auf  $ab$  errichtetes Perpendikel und  $mn$  senkrecht auf  $CM$ , so ist  $mMC = \alpha$  der Neigungswinkel dieses Flächenelementes mit der genannten durch  $CM$  gehenden Achsenebene, und  $nm$  die Richtung, nach welcher sich das Flächenelement  $dF$  in dem Augenblicke der gegenwärtigen Lage und zwar mit der Geschwindigkeit  $v = \rho w$  bewegt, wenn  $w$  die constante Winkelgeschwindigkeit des rotirenden Körpers bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, ist die Projection des Elementes  $dF$  auf die Achsenebene  $= dF \cdot \cos \alpha$  und daher, wenn sich der Widerstand hier eben so, wie bei der geradlinigen Bewegung ausdrücken läßt und  $\beta$  den betreffenden Widerstandscoeffizienten bezeichnet, sofort der gesuchte Widerstand auf das Element  $dF$  der Vorderfläche (§. 359):

$$dq = \beta v^2 \cos \alpha dF = \beta \rho^2 w^2 \cos \alpha dF.$$

Zerlegt man diese, in der Richtung  $mn$  wirksame Kraft  $dq$  in zwei aufeinander senkrechte, wovon die eine  $dp$  normal auf das Flächenelement, so ist  $dp = dq \cdot \cos \alpha$ , während die zweite, mit diesem Elemente parallel, für die gesuchte Wirkung verloren geht.

Aus diesem normalen Drucke  $dp$  entsteht aber eine in der Richtung  $mn$  wirksame Kraft  $dr = dp \cdot \cos \alpha$  und ein mit der Achsenebene paralleler Druck  $dp'$ , welcher jedoch von der Achse aufgehoben wird.

Da nun das statische Moment dieser Kraft  $dr$  in Beziehung auf die Rotationsachse  $= \rho dr$  oder, wenn man für  $dr$ ,  $dp$  und  $dq$  die vorigen Werthe substituirt:

$$dM = \beta \rho^3 w^2 \cos^3 \alpha dF$$

ist, so erhält man für das statische Moment des Gesamtwiderstandes, welchen die Vorderfläche des rotirenden Körpers erleidet, den Ausdruck:

$$M = \beta w^2 \int \rho^3 \cos^3 \alpha dF \dots (1)$$

wobei das Integrale, je nach der Form und Ausdehnung des Körpers, innerhalb der betreffenden Grenzen zu nehmen ist.

**Zusatz 1.** Da dieses Integrale für irgend einen bestimmten oder gegebenen Körper eine constante GröÙe bildet, so folgt, daß das Moment des Widerstandes dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

**Zusatz 2** Ist der betreffende Körper ein Rotationskörper und findet die Schwingung oder Kreisbewegung um dessen Achse Statt, so ist für alle Elemente der Winkel  $\alpha = 90^\circ$  und daher:

$\int \rho^3 \cos^3 \alpha dF = 0$ , woraus sofort folgt, daß runde Körper, wie z. B. Kugeln, cylindrische Wellen, Radkränze u. dgl. bei ihrer Rotation oder Achsendrehung (z. B. in der Luft) keinen Widerstand erfahren\*).

2. Fallen die sämtlichen Elemente der Vorderfläche in eine gemeinschaftliche Achsenebene, so wird dafür der Winkel  $\alpha = 0$  und daher das Moment des Widerstandes:

$$M = \beta w^2 \int \rho^3 dF . . \quad (2)$$

Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn sich das Rechteck  $A'B$  (Fig. 77) um eine Achse  $RS$  dreht, welche in der Ebene des Rechteckes und mit den Seiten  $AB$  und  $A'B'$  parallel liegt.

Zieht man nämlich durch den Schwerpunct  $O$  des Rechteckes die Gerade  $CD$  senkrecht auf die Achse  $RS$  und setzt  $CO = e$ ,  $AB = b$ ,  $ED = a$ ,  $CP = x$  und  $Pp = dx$ ; so geht der vorige Ausdruck (2) für diesen speciellen Fall, wegen  $\rho = x$  und  $dF = b dx$  über in:

$$M = \beta w^2 b \int_{e-\frac{a}{2}}^{e+\frac{a}{2}} x^3 dx = \frac{1}{4} b \beta w^2 \left[ \left( e + \frac{a}{2} \right)^4 - \left( e - \frac{a}{2} \right)^4 \right]$$

oder, wenn man entwickelt, reducirt und bemerkt, daß  $ab = F$  ist, auch:

$$M = \beta w^2 F e \left( e^2 + \frac{a^2}{4} \right) . . \quad (3)$$

Erstreckt sich die Fläche des Rechteckes bis zur Achse, so, daß  $A'B'$  mit  $RS$  zusammenfällt, so wird wegen  $CO = e = \frac{a}{2}$ , sofort das Moment des Widerstandes:

$$M = \frac{1}{4} \beta F a^3 w^2 . . \quad (4)$$

Was den Widerstandscoeffizienten  $\beta$  anbelangt, so kann man unter der gemachten Voraussetzung, daß nämlich der Widerstand bei der Kreisbewegung jenem bei der geradlinigen Bewegung gleich sey, sofort

$$\beta = \frac{k \gamma}{2g} . . \quad (n)$$

setzen, wobei  $\gamma$  das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit,  $g$  die Beschleunigung der Schwere (folglich  $\frac{\gamma}{g} = \Delta$  die

\* Es wird nämlich hier durchaus von jenem geringen Widerstande abstrahirt, welcher durch die bloße Adhäsion, oder wenn man es so nennen will, Reibung des widerstehenden Mittels an der Oberfläche des Körpers entsteht.

Dichtigkeit oder die in der cubischen Einheit enthaltene Masse) und  $k = 1.254$  den in §. 359 für dünne Platten angegebenen Erfahrungscoefficienten (welcher nicht bloß für das Wasser oder die Luft, sondern nach *Duchemin* für alle Flüssigkeiten überhaupt gilt) bezeichnet.

Will man den Widerstand selbst, und zwar auf den Mittelpunkt der Fläche bezogen bestimmen, so hat man, wenn dieser Widerstand durch  $\mathfrak{R}$  bezeichnet wird, wegen  $M = \mathfrak{R}e$  aus den beiden Gleichungen (3) und (4) beziehungsweise

$$\mathfrak{R} = k \gamma F \frac{w^2}{2g} \left( e^2 + \frac{a^2}{4} \right) \dots (5) \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2} k \gamma F \alpha^2 \frac{w^2}{2g} \dots (6)$$

Ist z. B. bei diesem Rechteck  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $e = 4$  Fufs, und bewegt sich dieser Flügel im Wasser mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $w = 1$  Fufs; so erhält man nach den Formeln (3) und (5), wegen  $\gamma = 56.4$  und  $g = 31$ :

$$M = 155.176 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = 38.794 \text{ Pfund.}$$

Findet dagegen dieselbe Bewegung in der Luft Statt und nimmt man für das Gewicht derselben den mittleren Werth von  $\gamma = \frac{56.4}{850}$ , so wird dafür

$$M' = \frac{155.176}{850} = .18256 \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}' = \frac{38.794}{850} = .04564 \text{ Pfund.}$$

3. Bezieht man allgemein den rotirenden Körper auf 3 rechtwinkelige Coordinatenachsen  $AX$ ,  $AY$ ,  $AZ$  (Fig. 78) und läßt eine derselben, z. B. die Achse der  $y$  mit der Rotationsachse zusammen fallen, setzt für irgend einen Punkt  $M$  der Vorderfläche des Körpers die Coordinaten  $AP = x$ ,  $Pm = y$  und  $mM = z$ , läßt  $x$  und  $y$  um  $dx$  und  $dy$  zunehmen, construirt in der Ebene der  $xy$  das unendlich kleine Rechteck  $dx dy = n n'$  und legt durch die vier Seiten desselben, senkrecht auf die Ebene der  $xy$ , die vier Ebenen; so schneiden diese auf der Oberfläche des Körpers im Punkte  $M$  das Flächenelement  $dF$  ab, dessen Projection auf die Ebene der  $xy$  das eben genannte Rechteck  $dx dy$  ist.

Die im Punkte  $M$  an die Fläche des Körpers gezogene Normale  $MN$  schneidet die Ebene der  $xy$  in einem Punkte  $N$ , wofür (Comp. §. 739) die Coordinaten sind  $AQ = x' = x + \left( \frac{dz}{dx} \right) z$  und  $QN = y' = y + \left( \frac{dz}{dy} \right) z$ , während die Länge der Normale durch

$$MN = a = z \sqrt{\left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right]} \text{ ausgedrückt wird.}$$

Ist ferner  $\alpha$  der Neigungswinkel des Flächenelementes  $dF$  gegen die Ebene der  $xy$ , folglich auch der Winkel, welchen die auf diese beiden Ebenen gezogenen Normalen  $a$  und  $z$  miteinander einschließen, so ist  $\text{Cos } \alpha = \frac{z}{a}$ , folglich  $dx dy = dF \cdot \text{Cos } \alpha$  oder  $dF = a \frac{dx dy}{z}$ .

Da der Druck der Luft, oder der betreffenden Flüssigkeit überhaupt, auf das Flächenelement  $dF$  in der Richtung der Normale  $MN$  Statt findet, so kann man sich diesen Druck, mit Beihehaltung der genannten Richtung, von  $M$  nach  $N$  verlegt denken; dadurch erscheint die Ebene der  $xy$  für das in  $N$  gedachte Element  $dF$  als eine Achsenebene, welche mit diesem Elemente den Winkel  $\alpha$  bildet, wofür  $\text{Cos } \alpha = \frac{z}{a}$  ist, wobei die Entfernung des Elementes von der Rotationsachse  $\rho = x' = x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z$  und endlich dessen Projection auf diese Achsenebene

$dF \cdot \text{Cos } \alpha = \frac{z}{a} dF = dx dz$ , folglich  $dF = \frac{a}{z} dx dz$  ist.

Man hat daher nach dem allgemeinen Ausdrücke (1) für das statische Moment des Widerstandes, wenn man berücksichtigt, dafs hier eine doppelte Integration, und zwar eine nach  $y$ , die andere nach  $x$  eintreten mufs:

$$M = \beta w^2 \iint x'^3 \text{Cos}^3 \alpha dF = \beta w^2 \iint \left[ x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z \right]^3 \cdot \frac{z^3}{a^3} \cdot \frac{a}{z} dx dy$$

$$\text{d. i. } M = \beta w^2 \iint \frac{z^2}{a^2} dx dy \left[ x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z \right]^3 \dots (7)$$

Will man die Normale  $a$  eliminiren, so darf man nur dafür den vorhin angegebenen Werth substituiren, und man erhält

$$M = \beta w^2 \iint \frac{dx dy \left[ x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z \right]^3}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \dots (8)$$

Beispiel. Schwingt z. B. eine Kugel vom Halbmesser  $r$  um eine Achse, welche von ihrem Mittelpuncte um die Gröfse  $e$  absteht, so ist die Gleichung der Kugeloberfläche, wenn man den Mittelpunct zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten nimmt (Comp. §. 596)

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Benützt man, weil hier die Normale  $a = r$  constant ist, die Formel (7), bestimmt also aus der Gleichung der Kugel den Differentialquotienten  $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ; so erhält man ganz einfach  $x + \left(\frac{dz}{dx}\right)z = 0$  und

damit aus der genannten Formel (7), in welcher man  $e + x$  statt  $x$  setzen muß (und wegen  $x^2 = r^2 - x^2 - y^2$ ):

$$M = \beta w^2 \frac{e^3}{r^2} \iint dx dy (r^2 - x^2 - y^2).$$

Integrirt man nun zuerst nach  $y$  und zwar innerhalb der Grenzen von  $-y$  bis  $+y$ , so erhält man

$$\int_{-y}^{+y} dy (r^2 - x^2 - y^2) = 2 \int_0^y dy (r^2 - x^2 - y^2) = 2 \left[ (r^2 - x^2) y - \frac{1}{3} y^3 \right]$$

wobei  $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$  ist. Mit diesem Werthe folgt weiters:

$$M = \beta w^2 \frac{e^3}{r^2} 2 \int_{-r}^{+r} dx \left[ (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] = \\ \frac{2}{3} \beta w^2 \frac{e^3}{r^2} \int_{-r}^{+r} dx (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \beta w^2 \frac{e^3}{r^2} \int_0^r dx (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Nun ist (nach der Reductionsformel C im Comp. §. 799)

$$\int dx (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \left[ \frac{r^2 - x^2}{4} + \frac{3r^2}{8} \right] x \sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{3r^4}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}},$$

folglich, wegen  $\int \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \text{Arc Sin } \frac{x}{r}$  und da der erste Theil dieses Integrales für beide Grenzen, d. i. sowohl für  $x = 0$  als auch für  $x = r$  verschwindet, dagegen der zweite Theil in  $\text{Arc Sin } \frac{r}{r} = \frac{\pi}{2}$  übergeht, sofort

$$M = \frac{4}{3} \beta w^2 \frac{e^3}{r^2} \times \frac{3}{8} r^4 \frac{\pi}{2}$$

oder wenn man die Geschwindigkeit des Mittelpunctes mit  $v$  bezeichnet, wodurch  $v = ew$  wird, so wie wegen  $r^2 \pi = F$  und (Relat. (n) in 2)

$$\beta = \frac{k\gamma}{2g}, \text{ auch: } M = \frac{1}{2} k e \gamma F \frac{v^2}{2g};$$

endlich folgt daraus für den Widerstand  $\mathfrak{R}$ , diesen auf den Mittelpunct der Kugel bezogen, wegen  $M = \mathfrak{R} e$ :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} k \gamma F \frac{v^2}{2g}.$$

**Zusatz.** Diese Relation mit jener (m) in der vorigen Aufgabe (erste Auflösung) verglichen, zeigt, daß nach der gewöhnlichen Theorie der Widerstand der Kugel bei der kreisförmigen Bewegung jenem bei der geradlinigen Bewegung genau gleich ist, wenn bei der erstern der Mittelpunct dieselbe Geschwindigkeit  $v$  hat, welche bei der letztern Bewegung die sämtlichen Punkte der Kugel besitzen.

## 2. Auflösung

### b) nach Duchemin.

Nach den Beobachtungen und Versuchen von *Duchemin* findet jedoch bei der kreisförmigen Bewegung, durch den Einfluß der Centrifugalkraft, welche durch die Reaction der umgebenden ruhigen Flüssigkeit aufgehoben werden muß, ein größerer Widerstand als unter übrigen gleichen Umständen bei der geradlinigen Bewegung Statt, und er findet, daß wenn  $R$  den Widerstand bei der geradlinigen, und  $R'$  jenen bei der kreisförmigen Bewegung bezeichnet und der Mittelpunkt der Figur dieselbe Geschwindigkeit  $v$  besitzt, welche bei der erstern Bewegung Statt findet, sofort (§. 359, Anmerk. 2)

$$R' = R \left[ 1 + \frac{3 \cdot 2488 z}{k(a-s)} \right] \dots (1)$$

gesetzt werden müsse, wobei  $k$  den vorigen (in der Relation  $n$  angegebenen) Erfahrungscoeffizienten,  $a$  den Abstand des Mittelpunctes  $O$  der Figur des auf dem beschriebenen Kreisbogen normalen größten Querschnitts  $F$  des Körpers von der Rotationsachse, und  $s$  den Abstand desselben Punctes  $O$  vom Schwerpuncte  $o$  jenes Theiles der Fläche  $F$ , welche vom Mittelpuncte  $O$  aus gegen die Rotationsachse zu liegt, und endlich  $z$  eine lineare Gröfse bezeichnet, welche die Dicke der parallel zur vordern Fläche des Körpers abgelenkten Wasserfäden ausdrückt; dabei ist für einen Rotationskörper, wenn  $D$  der Durchmesser des größten, auf der Richtung der Bewegung normalen Querschnitts  $F$ , und  $\varphi$  der Einfallswinkel des nächsten an der Achse des Körpers liegenden Elementes der Vorderfläche bezeichnet, wobei jedoch vorausgesetzt wird, daß diese Achse zur Richtung der Bewegung parallel ist:

$$z = \frac{1}{2} D \sin \varphi,$$

dagegen für jeden andern Körper  $z = \frac{1}{2} \sqrt{F} \cdot \sin \varphi$ .

Beispiel 1. So wäre z. B. für das vorige Rechteck, in welchem  $F = 2$ ,  $a = 4$  und  $v = 4$  ist, wegen  $\varphi = 90^\circ$ ,  $s = \frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \cdot 707$ , und  $k = 1 \cdot 254$ , sofort

$$\frac{3 \cdot 2488 z}{k(e-s)} = \frac{3 \cdot 2488 \times \cdot 707}{1 \cdot 254 \times 3 \cdot 5} = \cdot 523$$

folglich nach dieser Relation (1):

$$R' = 1 \cdot 523 R.$$

Bewegt sich dieses Rechteck geradlinig, in einer auf seiner Ebene perpendicularen Richtung mit 4 Fufs Geschwindigkeit im ruhigen Wasser, so ist (§. 359)  $R = 1 \cdot 254 \times 56 \cdot 4 \times 2 \times \frac{16}{62} = 36 \cdot 5$  und daher

$$R' = 1.523 \times 36.5 = 55.59 \text{ Pf.}$$

während oben nach der gewöhnlichen Theorie für diesen Widerstand nur  $R = 38.8$  Pf. gefunden wurde, so, daß also hier nahe

$$R' = 1.4 R \text{ ist.}$$

Beispiel 2. Bei einem der von *Borda* angestellten Versuche, um den Widerstand einer im ruhenden Wasser sich kreisförmig bewegendem Kugel zu finden, betrug (Alles in französischem Maf und Gewicht ausgedrückt) der Durchmesser der Kugel 59 Linien, der Abstand des Mittelpunctes der Kugel von der Drehungsachse 4, und die Geschwindigkeit dieses Punctes  $\frac{32\pi}{83.17}$  Fufs; dies gibt auf das W. Maf

bezogen (wobei das Verhältniß von  $1^{\text{P.F.}} = 1.2764^{\text{W.F.}}$  zum Grunde liegt) für den Durchmesser  $D = \frac{60.631''}{144} = .4210'$ , die größte Kreis-

fläche  $F = .139236^{\square}$ , die Geschwindigkeit des Mittelpunctes  $v = 1.24215'$ , die lineare Gröfse  $x = \frac{1}{2} D \sin 90^{\circ} = .210525'$ , den Abstand des Mittelpunctes der Kugel von der Drehungsachse  $a = 4.1106'$  und den Abstand desselben Punctes vom Schwerpunct des Halbkreises (§. 50)

$$s = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{D}{2} = .08935'.$$

Mit diesen Werthen geht die Formel (1) über in

$$R' = 1.13263 R,$$

wobei  $R$  den Widerstand bezeichnet, welchen dieselbe Kugel bei der geradlinigen Bewegung im ruhigen Wasser erfährt, wenn dabei die Geschwindigkeit 1.24215 Fufs beträgt.

Nun ist aber nach der vorigen Aufgabe (2. Auflösung, Relat.  $s$ )

$$R = \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g} = \frac{2}{5} \times 1.2824 \times 56.4 \times .139236 \times \frac{(1.24215)^2}{62}$$

$$\text{d. i. } R = .10258 \text{ Pf.}$$

folglich

$$R' = 1.13263 R = .116187 \text{ Pfund.}$$

Zusatz. Drückt man diesen Widerstand in Pariser Pfunden (nach der Relation von  $100^{\text{P.Pf.}} = 87.41^{\text{W.Pf.}}$ ) aus, so erhält man  $R' = .132922$  Par. Pf., während der *Borda'sche* Versuch dafür .1242 Par. Pf. gegeben hat.

Anmerkung. *Duchemin* findet nach seiner Berechnung (er nimmt jedoch von  $k$  nur zwei Decimalstellen, in welchem Falle wir  $R = .10239$  W. Pf. und  $R' = .13267$  Par. Pf. gefunden hätten)  $R' = .1265$ .

Für die Geschwindigkeiten von  $v = .42598, .59574, .85376, 1.2087, 1.7016, 2.4154$  Pariser Fufs, geben die Beobachtungen für den Widerstand

$R'$  beziehungsweise '0155, '0310, '0621, '1242, '2483, '4966 Par. Pfund, während *Duchemin* nach der genannten Formel '0156, '0311, '0626, '1265, '2517, '5076 P. Pf. findet.

### 75. Aufgabe.

Die Zeit zu bestimmen, in welcher eine Kugel, welche spezifisch schwerer als Wasser ist, in dieser Flüssigkeit von einer gegebenen Höhe herabfällt.

### Auflösung.

Es sey  $D$  der Durchmesser und  $\delta$  die Dichtigkeit der Kugel, also ihre Masse  $M = \frac{1}{6} \pi D^3 \delta = \frac{2}{3} DF \delta$ , wenn man nämlich wieder die größte Kreisfläche mit  $F$  bezeichnet. Da der Widerstand, welchen die Kugel bei ihrer Bewegung im ruhigen Wasser erfährt (Aufgabe 63, Relat.  $s$ )  $R = \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g}$  ist, so wird die auf sie einwirkende verzögernde (oder negative beschleunigende Kraft, nach Nr. 56) durch  $\frac{R}{M} = \frac{3}{5} \frac{k \gamma v^2}{D \delta 2g}$  oder wenn  $p$  das Gewicht der cubischen Einheit der Kugel im leeren Raume ist, wegen  $\delta = \frac{p}{g}$  auch durch

$$\frac{R}{M} = \frac{3}{10} \frac{k \gamma}{Dp} v^2$$

ausgedrückt, wobei (Nr. 359)  $k = 1.2824$  und  $\gamma = 56.4$  ist, wenn man den Wiener Fufs und das W. Pfund zum Grunde legt.

Das Gewicht der Kugel ist im leeren Raume  $= \frac{2}{3} DFp$  und im Wasser  $P = \frac{2}{3} DF(p - \gamma)$ , also ihre beschleunigende Kraft:

$G' = \frac{P}{M} g = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g$  und da ihr die verzögernde Kraft  $\frac{R}{M}$  entgegenwirkt, so bleibt noch als beschleunigende Kraft:

$$(b) \dots G = G' - \frac{R}{M} = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{3}{10} \frac{k \gamma}{Dp} v^2.$$

Nun ist aber auch (Nr. 56, Anmerk.) die beschleunigende Kraft (c)  $G = \frac{dv}{dt}$  und außerdem (Nr. 51)  $ds = v dt$ , folglich, wenn man gehörig substituirt:

$$dt = \frac{dv}{\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{3}{10} \frac{k \gamma}{Dp} v^2} \quad \text{und} \quad ds = \frac{v dv}{\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right) g - \frac{3}{10} \frac{k \gamma}{Dp} v^2} \quad *)$$

\*) Diese beiden Ausdrücke erhält man auch ganz einfach aus der Relation (a)



Setzt man Kürze halber  $\left(1 - \frac{\gamma}{p}\right)g = a$  und  $\frac{3}{10} \frac{k\gamma}{Dp} = \frac{a}{b^3}$ , so erhält man durch Integration von  $o$  bis  $t$  für  $t$ , von  $o$  bis  $v$  für  $v$  und von  $o$  bis  $s$  für  $s$ , sofort

$$t = \frac{b^2}{a} \int_0^v \frac{dv}{b^2 - v^2} \quad \text{und} \quad ds = \frac{b^2}{a} \int_0^s \frac{v dv}{b^2 - v^2}$$

oder (Comp. S. 767 und 762):

$$t = \frac{b}{2a} \log n. \left( \frac{b+v}{b-v} \right) \quad \text{und} \quad s = \frac{b^2}{2a} \log n. \left( \frac{b^2}{b^2 - v^2} \right)$$

Setzt man  $\frac{b+v}{b-v} = A$ , so ist  $\frac{2at}{b} = \log n. A \dots (\alpha)$  und

$$v = b \left( \frac{A-1}{A+1} \right), \quad \text{so wie} \quad s = \frac{b^2}{a} \log n. \left( \frac{A+1}{2\sqrt{A}} \right).$$

Ist  $A$  eine sehr große Zahl, so kann man  $A$  statt  $A+1$  setzen wodurch man  $s = \frac{b^2}{a} \log n. \frac{1}{2} \sqrt{A} = \frac{b^2}{a} (\log n. A - \log n. 2)$  und daraus  $\log n. A$  oder (Relat.  $\alpha$ )  $\frac{2at}{b} = \frac{2as}{b^2} + 2 \log n. 2$ , d. i. wenn man die Werthe  $a$  und  $b$  wieder herstellt und  $\log n. 2 = 2.3026 \log. 2$  setzt, um nämlich den natürlichen Logarithmus in den Tafel-Logarithmus zu verwandeln, endlich:

$$t = \left( s + \frac{10}{3} \frac{Dp}{k\gamma} \times 2.3026 \log 2 \right) \sqrt{\left[ \frac{3k\gamma}{10D(p-\gamma)g} \right]} \dots (2)$$

Beispiel. Unter den von *Newton* über den Fall von Kugeln im Wasser angestellten Versuchen, hatte eine der Kugeln einen Durchmesser von 0.84224 englische Zolle und im destillirten Wasser gewogen ein Gewicht von 77 Gran (Troygewicht), die Fallhöhe im Wasser betrug 112 Zoll und die beobachtete Fallzeit 4 Sekunden.

Da das Gewicht eines Londoner Kubikfuß destillirten Wassers 76 Pfund (Troygewicht) beträgt, so wiegt eine Kugel dieser Flüssigkeit von 5 engl. Zoll Durchmesser nahe genug 16600 Gran. Bezeichnet man daher allgemein das Gewicht einer solchen Flüssigkeitskugel von  $D$  Zoll Durchmesser mit  $q'$  und das Gewicht der festen Kugel bei gleichem Durchmesser, im destillirten Wasser gewogen, mit  $q$ ; so hat man  $q' = \frac{D^3}{(5)^3} 16600$  Gran und  $\frac{p}{\gamma} = \frac{q+q'}{q'}$ . Mit diesem Werthe wird in der

in Nr. 261, aus welcher  $\frac{dv}{dt} = \frac{P}{M} - \frac{Q}{M}$  folgt und wobei  $\frac{P}{M} = G' \left( 1 - \frac{\gamma}{p} \right) g$

und  $\frac{Q}{M} = \frac{R}{M} = \frac{3}{10} \frac{k\gamma}{Dp} v^2$  zu setzen ist.

vorigen Formel (2) der Bruch  $\frac{\gamma}{p-\gamma} = \frac{1}{\frac{p}{\gamma} - 1} = \frac{q'}{q}$  und daher wegen

$$s = 112, D = \cdot 84224, k = 1 \cdot 2824 \text{ und } g = 12 \times 31 \text{ sofort} \\ t = 4 \cdot 035 \text{ Sekunden,}$$

welches Resultat mit jenem der Beobachtung sehr genau übereinstimmt.

Anmerkung. *Duchemin*, welcher diese Formel überhaupt auf 8 solche Beobachtungen anwendet, findet dafür den etwas größern Werth von 4·10 Sec.

Die Beobachtungs- und Rechnungsresultate dieser *Newton*'schen Versuchsreihe sind folgende:

Die Durchmesser der Kugel waren ·84224, ·81296, ·99868, 1·00010, 1·00010, ·99970, ·99970, 1·000990 Zolle; ihre Gewichte im Wasser beziehungsweise 77,  $5\frac{1}{10}$ ,  $7\frac{1}{3}$ ,  $21\frac{1}{2}$ ,  $79\frac{1}{2}$ ,  $6\frac{1}{2}$ ,  $140\frac{3}{4}$ ,  $4\frac{3}{8}$  Gran; die Fallhöhen 112, 112, 182, 182, 182, 182, 182, 182 Zoll; die beobachteten Fallzeiten 4, 15,  $24\frac{7}{8}$ ,  $14\frac{5}{8}$ , 8,  $25\frac{1}{2}$ ,  $6\frac{1}{4}$ ,  $31\frac{3}{4}$  und die berechneten 4·01, 14·89, 25·00, 14·42, 7·53, 26·20, 5·69, 32·26 Sekunden.

Zusatz. *Duchemin* bemerkt mit Recht, daß ungeachtet der sehr guten Übereinstimmung dieser Rechnungs- mit den Beobachtungsresultaten, gleichwohl die obige Formel (2) nicht alle Umstände der Aufgabe umfasse, indem sich diese Formel nur auf den bei der gleichförmigen Bewegung vorkommenden Widerstand bezieht, bei welcher nämlich der Körper und die ihn umgebenden Flüssigkeitsfäden nach der durchlaufenen Linie eine constante Geschwindigkeit besitzen, während es sich hier um eine veränderliche Bewegung handelt, wobei die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit  $t + dt$  die Gröfse  $v + dv$  erlangt.

Der Erfahrung zu Folge bestehen die den in Bewegung befindlichen Körper umgebenden Flüssigkeitsfäden aus Molecülen, welche in beständiger fortrückender Bewegung begriffen sind, deren Anzahl aber gleichwohl in jedem Augenblicke dieselbe ist, und deren Strömung so angesehen werden kann, als fänden sie in schmalen, an dem beweglichen Körper befestigten Kanälen Statt. Was nun die Anzahl dieser Molecülen betrifft, so findet *Duchemin*, daß bei dieser veränderlichen Bewegung das Volumen  $Q'$  der Masse der Flüssigkeitsfäden, welche sich mit dem Körper mit fortbewegt, wenn dieser ein Rotationskörper ist, durch die Formel

$$Q' = \approx \left[ \frac{2}{5} F + \cdot 26 b \sqrt{F} + \frac{2\pi}{\sin^3 \varphi'} \int_a^{\circ} y \frac{dy^4}{ds^3} \right] \quad (m)$$

ausgedrückt werden könne, wobei die darin vorkommenden Größen dieselbe Bedeutung wie in den Formeln (1) (73. Aufgabe, 2. Auflös. und 74. Aufgabe, 2. Auflös.) haben; die dort nicht vorkommende Größe  $b$  bezeichnet hier die Länge jenes Cylinders (wenn überhaupt ein solcher vorhanden), welcher den Vordertheil des Rotationskörpers vom Hintertheil trennt (für eine Kugel z. B. ist  $b = 0$ ) und dessen Achse in der Richtung der Bewegung liegt.

Bezeichnet  $Q$  das Volumen des bewegten Körpers,  $\delta$  seine Dichtigkeit,  $\Delta$  jene der Flüssigkeit und  $R$  den Widerstand bei der gleichförmigen Bewegung des Körpers; so reducirt sich die obige hier angewendete Relation ( $b$ ), wenn man zugleich für  $G$  den Werth aus ( $c$ ), d. i.  $G = \frac{dv}{dt}$  setzt, auch auf die Form (wegen  $\frac{\gamma}{p} = \frac{\Delta}{\delta}$ ):

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{\gamma}{p}\right)g - \frac{R}{M} \text{ oder wegen } M = Q\delta \text{ auf jene}$$

$$Q\delta \frac{dv}{dt} = (\delta - \Delta) Qg - R.$$

*Duchemin* findet nun, daß man statt dieser Relation, für die veränderliche verticale Bewegung setzen müsse:

$$(Q\delta \pm Q'\Delta) \frac{dv}{dt} = \pm Q(\delta - \Delta)g - R \quad (n)$$

wobei sich von den doppelten Zeichen das obere auf die beschleunigte, und das untere auf die verzögerte Bewegung bezieht.

Wird dieser Ausdruck für die erstere Bewegung, und zwar auf eine Kugel vom Durchmesser  $D$  angewendet, so hat man wegen  $Q = \frac{1}{6}\pi D^3$ ,  $F = \frac{1}{4}\pi D^2$ ,  $\sin \varphi' = 1$ ,  $b = 0$  und (S. 499)

$$2\pi \int_D^0 y \frac{dy^4}{ds^3} = \frac{2}{5}F, \text{ nach der vorigen Formel (m):}$$

$$(q) \dots Q' = \frac{1}{10}\pi D^3, \text{ also } \frac{Q'}{Q} = \cdot 6 \dots (r)$$

und damit aus der Relation ( $n$ ), als den genauern Werth für die Fallzeit, wenn man wieder statt den Massen  $\Delta$  und  $\delta$  die Gewichte  $r$  und  $p$  setzt:

$$t = \left[ s + \frac{10D(p + \cdot 6\gamma)}{3k\gamma} \times 2 \cdot 3026 \log 2 \right] \sqrt{\left[ \frac{3k\gamma}{10D(p - \gamma)g} \right]}.$$

Indem man also die durch die beschleunigte Bewegung mit fortgerissene Flüssigkeit in Betracht zieht, erscheint die Fallzeit um den Ausdruck  $\cdot 6 \times \frac{10D}{3k} \times 2 \cdot 3026 \log 2 \sqrt{\left[ \frac{3k\gamma}{10D(p - \gamma)g} \right]}$  größer als der nach der obigen Formel (2).

Diese Vergrößerung beträgt jedoch bei den vorhin angeführten 8 Versuchen nach der Berechnung *Duchemin's* beziehungsweise nur  $\cdot 032$ ,  $\cdot 116$ ,  $\cdot 147$ ,  $\cdot 085$ ,  $\cdot 044$ ,  $\cdot 154$ ,  $\cdot 033$ ,  $\cdot 192$  Secunden, welche Bruchtheile sofort ohne Fehler noch vernachlässigt werden können.

Indefs ist der Einfluss dieser Masse der Flüssigkeitsfäden bei dünnen Platten, welche sich in einer auf ihren Ebenen senkrechten Richtung bewegen, viel bedeutender, indem dafür, wenn  $a$  die Dicke und  $F$  die Fläche derselben bezeichnet,

$$\frac{Q'}{Q} = \cdot 13 + \cdot 7 \frac{\sqrt{F}}{a},$$

also z. B. für  $F = 4$  und  $a = \frac{1}{100}$  sofort  $\frac{Q'}{Q} = 14 \cdot 13$ , nämlich über 23 Mal größer als im vorigen Falle wird.

## E) Aus der Aërostatik.

### 76. Aufgabe.

Es soll der in irgend einem Punkte  $N$  (Fig. 53') einer schweren elastischen Flüssigkeit herrschende Druck bestimmt werden.

#### Auflösung.

Wirken auf zwei gleiche Quantitäten einer elastischen Flüssigkeit die Drücke oder Spannkräfte  $p$  und  $p'$ , und nehmen diese Flüssigkeitsmengen dabei die Volumina  $Q$  und  $Q'$ , so wie die Dichtigkeiten  $\Delta$  und  $\Delta'$  an; so hat man nach dem *Mariotte'schen* Gesetze (§. 437):

$$\frac{p}{p'} = \frac{Q'}{Q} = \frac{\Delta}{\Delta'} \dots (1)$$

Ist ferner das Gewicht der cubischen Einheit dieser Flüssigkeit unter dem Drucke  $p = q$  und unter dem Drucke  $p' = q'$ ; so ist (Nr. 54, Anmerk. 3)  $q = g \Delta$  und  $q' = g \Delta'$ , folglich auch (Gleich. 1.):

$$\frac{q}{q'} = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{p}{p'} \text{ oder } p = \frac{p'}{q'} q$$

und wenn man den Quotienten  $\frac{p'}{q'} = k$  setzt, auch:

$$p = k q \dots (2)$$

Es sey nun der durch die Schwere auf die elastische Flüssigkeit im Punkte  $N'$  (Fig. 53') hervorgebrachte und bekannte Druck auf die Flächeneinheit  $= p'$ , und der gesuchte Druck auf den Punkt  $N = p$ , ferner sey  $AY$  eine durch  $N'$  gehende lothrechte Linie,  $NA$  horizontal  $N'N = s$ ,  $W. AN'N = \beta$ ,  $YN' = z_1$ ,  $YA = z$ ,  $\Delta$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit in  $m$ ,  $q$  das Gewicht der cubischen Einheit in demselben Punkt, also, wenn  $g$  die Beschleunigung der Schwere ist,  $q = g \Delta$ , endlich sey  $a$  der unendlich kleine Querschnitt einer in der Richtung  $N'N$  gedachten Flüssigkeitsröhre; so ist das Volumen dieser Röhre bei

$m = a ds$ , folglich ihre Masse  $= a \Delta ds$  und ihr Gewicht  $= a g \Delta ds = a g ds$ , als Druck im Punkte  $m$  nach verticaler Richtung. Zerlegt man diesen Druck nach  $mN'$  und eine darauf senkrechte, so ist der erstere  $= a g \cos \alpha ds$ , folglich der Druck auf die Flüssigkeitsröhre vom Querschnitt  $a = \int a g \cos \alpha ds$  und auf die Flächeneinheit  $= \int g \cos \alpha ds$ .

Nun ist aber  $p' = p + \int g \cos \alpha ds$ , folglich wenn man diese Gleichung, in welcher  $p$  die einzige Variable ist, differenziirt:

$0 = dp + g \cos \alpha ds$  und daraus  $dp = -g \cos \alpha ds$ , oder wegen (Gleich. 2)  $g = \frac{p}{k}$  auch  $dp = -\frac{\cos \alpha}{k} p ds$  d. i.  $\frac{dp}{p} = -\frac{\cos \alpha}{k} ds$ .

Diese Gleichung innerhalb der gehörigen Grenzen integrirt, gibt:

$$\int_{p'}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\cos \alpha}{k} \int_0^s ds \text{ d. i. } \ln p - \ln p' = -\frac{\cos \alpha}{k} s$$

oder  $\ln \frac{p}{p'} = -\frac{\cos \alpha}{k} s$  und wenn  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet,  $\frac{p}{p'} = e^{-\frac{\cos \alpha}{k} s}$ .

Setzt man  $\cos \alpha = \frac{N'A}{s} = \frac{z - z_1}{s}$ , so erhält man endlich

$$p = p' e^{-\frac{(z-z_1)}{k}} \dots (3) \text{ und } z - z_1 = k \ln \frac{p'}{p} \dots (4)$$

Aus dieser Relation (3) folgt, dafs der Druck  $p$  nur von dem verticalen Niveauunterschiede  $z - z_1$  der beiden Punkte  $N$  und  $N'$  abhängig, dieser also in allen Punkten einer und derselben horizontalen Ebene derselbe ist, oder dafs die Flächen von gleichem Niveau auch hier (wie es bei den tropfbaren Flüssigkeiten von geringer Ausdehnung der Fall) Horizontalebene sind.

## 77. Aufgabe.

Es sollen die Gesetze für das Aufsteigen eines Luftballons mit Rücksicht auf die veränderliche oder abnehmende Dichtigkeit der Luft bestimmt werden.

### Auflösung.

1. Setzt man voraus, dafs die Temperatur und hygroskopische Beschaffenheit der Luft durch die ganze Höhe, die der Ballon durchsteigt,

dieselbe sey, setzt das Gewicht der cubischen Einheit der Luft im Anfangspuncte der Bewegung  $= q'$  und den in diesem Puncte herrschenden Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit  $= p'$ , bezeichnet durch  $q$  und  $p$  dieselben Gröfsen für eine Luftschichte, welche um die Höhe  $s$  über dem Anfangspuncte liegt, und welche der Ballon nach Verlauf der Zeit  $t$  erreichen soll; so hat man zuerst, wenn  $k$  einen constanten Erfahrungscoeffizienten bezeichnet (vorige Aufgabe, Gleichung 2)  $p = kq$  und (vorige Aufgabe, Gleich. 3, wegen  $x_1 = 0$  und  $x = s$ ):

$$p = p' e^{-\frac{s}{k}} \quad \text{oder wegen } p = kq \text{ und } p' = kq' \text{ auch:}$$

$$q = q' e^{-\frac{s}{k}} \quad \dots \quad (a)$$

Ist  $Q$  das Volumen und  $G$  das Gewicht des Ballons, so wirken auf ihn während er aufsteigt in jedem Augenblick der Widerstand  $R$  der Luft und das Gewicht  $G$  abwärts, dagegen der sogenannte Auftrieb  $qQ$  aufwärts. Man darf daher nur in der Gleichung (2) Nr. 262  $M = \frac{G}{g}$  und  $P = qQ - G$ , oder wenn man auch noch das Gewicht jener Luftquantität berücksichtigen will, welche sich während der Bewegung an den Ballon anhängt, statt  $G$ ,  $G + \cdot 6 qQ$  (folgende Aufgabe) setzen und berücksichtigen, dafs (Gleich. b, in Nr. 262)  $R = \alpha (1 + \beta v) v^2$  und dabei, wenn  $A$  die grösste Kreisfläche des kugelförmigen Ballons bezeichnet,  $\alpha = \cdot 513 \frac{Aq}{2g} = aq$  ist, wenn man nämlich den constanten Factor  $\cdot 513 \frac{A}{2g} = a$  setzt, und dafs man die kleine Gröfse  $\beta v = \frac{v}{1317}$  vernachlässigen, also  $R = aqv^2$  setzen kann\*).

Dadurch erhält man aus der genannten Formel (2):

$$ds = - \frac{G + \cdot 6qQ}{g} \cdot \frac{v dv}{aqv^2 - qQ + G} \quad (1)$$

2. Aus dieser Relation (1) folgt fürs erste, dafs sich der Ballon mit beschleunigter Bewegung vom Boden erheben und mit einer solchen so lange fortsteigen wird, so lange die Resultante der nach aufwärts wirkenden Kräfte, nämlich  $qQ - aqv^2 - G$  positiv ist, indem dann auch  $ds$  positiv ausfällt. Kommt der Ballon in eine Höhe, für welche

\*) Auch könnte man, um strenger zu verfahren, wie es in Nr. 263 geschehen, für  $1 + \beta v$  einen constanten Mittelwerth  $B = 1 + \frac{1}{2}\beta(V + v)$  setzen, wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Ballons für die Zeit  $t = 0$  und  $V$  jene für die beliebige Zeit  $t$  bezeichnet.

(a')  $qQ - G = 0$  ist, oder befindet er sich gleich von vorne herein in einer solchen Höhe über dem Erdboden, so hat er kein Bestreben weiter zu steigen und bleibt sonach in Ruhe. Die größte Höhe, welche der Ballon erreichen kann, folgt daher aus der vorigen Bedingungsgleichung (a') aus welcher man zuerst  $q = \frac{G}{Q}$  und wenn man diesen Werth in der Gleichung (a) substituirt,  $\frac{G}{Qq'} = e^{-\frac{s}{k}}$  oder  $l \frac{G}{Qq'} = -\frac{s}{k}$  und endlich:

$$s = k l \frac{Qq'}{G} \dots (b)$$

erhält.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, daß im Augenblicke als der Ballon diesen durch die Relation (b) ausgedrückten Höhenpunct erreicht oder durchläuft, nicht bloß die Kraft  $qQ - G = 0$ , sondern auch noch der Widerstand der Luft  $aqv^2$  von oben nach unten auf ihn einwirkt, so, daß also der Ballon die Höhe  $s$  schon mit verzögerter Geschwindigkeit passirt und daher das Maximum der Geschwindigkeit in einen Punct fällt, welcher unterhalb der Höhe  $s$  liegt. Übrigens wird der Ballon diese Höhe  $s$  bis zu einem gewissen Puncte überschreiten, hierauf zurücksinken und so in immer enger werdenden Excursionen um diesen Höhenpunct oscilliren.

3. Ist die Geschwindigkeit  $v$  des Ballons überhaupt nur eine mäßige, so wird der Widerstand der Luft  $aqv^2$  gegen das Gewicht der vom Ballon verdrängten Luft  $qQ$  nur gering, und da  $v$  sehr bald einen mittlern Werth anzunehmen strebt, welcher sich bei der weitem Bewegung nur mehr sehr wenig ändert, so kann man in der im Nenner der obigen Formel (1) vorkommenden Differenz  $aqv^2 - qQ = (av^2 - Q)q$  bei der auszuführenden Integration, ohne merklichen Fehler das Glied  $av^2$  als constant behandeln und für  $v$  entweder jenen Werth  $v'$  setzen, welchen die Geschwindigkeit  $v$  am Ende der Zeit  $t$  erlangt, oder dafür auch den mittlern, zwischen 0 und  $v'$  liegenden Werth  $\frac{1}{2}v'$  nehmen.

Dadurch wird, wenn man im erstern Falle  $v'$ , im letztern  $\frac{1}{2}v'$  mit  $c$  bezeichnet, in der genannten Formel (1):

$$v dv = - \frac{g[(ac^2 - Q)q + G] ds}{G + 6qQ}$$

Nun folgt aber aus der obigen Relation (b)  $\frac{q'}{q} = e^{\frac{s}{k}}$  oder

$s = k l \frac{q'}{q}$ , also, wenn man  $s$  als eine Function von  $q$  betrachtet,

$$ds = -k \frac{dq}{q} \dots (c)$$



es ist daher, wenn man diesen Werth für  $ds$  in der vorigen Gleichung substituirt:

$$v dv = \frac{gk[(ac^2 - Q)q + G] dq}{q(G + 6Qq)}$$

$$\text{und daraus } \int_0^v v dv = \frac{gk}{6Q} \int_{q'}^q \frac{[ac^2 - Q]q + G}{q\left(q + \frac{G}{6Q}\right)} dq.$$

Zerlegt man den Bruch unterm zweiten Integralzeichen in die beiden Partialbrüche:

$$\frac{6Q}{q} + \frac{ac^2 - Q - 6Q}{q + \frac{G}{6Q}}, \text{ so erhält man}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gk}{6Q} \left\{ \int_{q'}^q \frac{6Q}{q} dq + (ac^2 - 1 \cdot 6Q) \int_{q'}^q \frac{dq}{q + \frac{G}{6Q}} \right\}$$

oder, wenn man diese einfachen Integrationen ausführt und möglichst reducirt:

$$v^2 = 2gk \left[ l \frac{q}{q'} + \frac{ac^2 - 1 \cdot 6Q}{6Q} l \left( \frac{6Qq + G}{6Qq' + G} \right) \right]$$

Setzt man, da dieser Werth von  $v$  der Endgeschwindigkeit nach Verlauf der Zeit  $t$  entspricht, nach der vorigen Bemerkung, im zweiten Theile dieser Gleichung wieder  $v$  statt  $c$  und löst dann die Gleichung nach  $v$  auf; so erhält man

$$v^2 = 2gk \frac{\frac{8}{3} l \left( \frac{6Qq + G}{6Qq' + G} \right) - l \frac{q}{q'}}{-1 + \frac{10}{3} gk \frac{a}{Q} l \left( \frac{6Qq + G}{6Qq' + G} \right)}$$

oder wenn man, um die natürlichen Logarithmen  $l$  in *Brigg'sche log.* zu verwandeln, Zähler und Nenner mit dem Modul  $\cdot 4342945$  multiplicirt und zugleich berücksichtigt, dafs  $q' > q$  ist:

$$v^2 = 2gk \frac{\frac{8}{3} \log \left( \frac{6Qq' + G}{6Qq + G} \right) - \log \frac{q'}{q}}{\cdot 4342945 + \frac{10}{3} gk \frac{a}{Q} \log \left( \frac{6Qq' + G}{6Qq + G} \right)} \quad (2)$$

durch welche Gleichung also die Geschwindigkeit, so nahe als es hier nur immer nöthig ist, als eine Function der Größe  $q$ , d. i. des Gewichtes der cubischen Einheit der Luft in der Höhe  $s$  ausgedrückt erscheint.

Um also die Geschwindigkeit des Ballons in der Höhe  $s$  zu finden, muß man zuerst den in dieser Höhe herrschenden Werth von  $q$  aus der obigen Gleichung ( $a$ ) bestimmen und dann in die vorige Gleichung (2) substituiren. Es kann noch bemerkt werden, dafs (aus Gleichung  $a$ )

$t \frac{q'}{q} = \frac{s}{k}$ , also  $\log. \frac{q'}{q} = \cdot 4342945 \frac{s}{k}$  ist. Was endlich die Werthe von  $k$  und  $q'$  betrifft, so kann man für gewöhnliche, mit Wasserdampf geschwängerte Luft (welche bei  $18^{\circ}$  C. 850 Mal leichter als Wasser ist) nach Nr. 249 (Note)  $k = 25932 (1 + \cdot 004 t)$  und (§. 439,  $\alpha$ , wo man nach den Bemerkungen in Nr. 249 Note, genauer  $\cdot 029585$  statt  $\cdot 03042$  setzen kann)  $q' = \cdot 029585 \frac{b}{1 + \cdot 004 t}$  setzen, wobei  $t$  die betreffende Temperatur nach der 100theiligen Skala und  $b$  den Barometerstand in W. Fufs bezeichnet.

4. Um endlich auch die Höhe  $s$ , in welcher sich der Ballon am Ende der Zeit  $t$  befindet, durch diese Zeit, oder umgekehrt, auszudrücken, hat man wegen  $dt = \frac{ds}{v}$ , sofort

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v} \dots (3)$$

und da sich  $v$  als Function von  $s$ , für jeden beliebigen Werth von  $s$  nach der vorigen Bemerkung aus der Formel (2) bestimmen läßt, so kann man hier mit Vortheil zur Bestimmung dieses Integrales (3) die in Nr. 255 angegebene Näherungsformel (A) anwenden.

Theilt man z. B. die Differenz  $s - 0$  in 4 gleiche Theile, setzt dieser Näherungsmethode zufolge  $\frac{1}{v} = y$  und bezeichnet die Werthe, welche  $y$  für  $s = 0, \frac{1}{4}s, \frac{1}{2}s, \frac{3}{4}s$  und  $s$  annimmt, der Reihe nach durch  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ ; so hat man nach dieser genannten Formel:

$$t = \int_0^s \frac{ds}{v} = \frac{s}{12} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \quad (4)$$

dabei ist der größte Werth, welchen man der Gröfse  $s$  geben kann, durch die obige Relation (b) gegeben.

Anmerkung. Da für  $s = 0$  auch  $v = 0$  und daher  $y_0$  Unendlich, also diese Formel (4) unbrauchbar wird, so muß man diese Rechnung erst für die bereits eingeleitete Bewegung des Ballons beginnen, und z. B. die Zeit von dem Augenblicke an zählen, in welchem der Ballon bereits eine, wenn auch noch so kleine Geschwindigkeit erhalten hat. Setzt man z. B. voraus, daß sich der Ballon bereits um 1 Fufs über den Aufsteigepunct erhoben

habe, so wird man die Zeit aus der Formel  $t = \int_1^s \frac{ds}{v}$  bestimmen, indem man ohnehin nur Werthe erhält, welche blofs annähernd richtig sind.

Beispiel. Es habe z. B. ein sphärischer Ballon ein Volumen von 10000 Kubikfufs und im gefüllten und ausgerüsteten Zustand ein Gewicht von  $604\frac{1}{2}$  Pfund, der Barometerstand sey 23124 Fufs und die mittlere Tem-

peratur der Luft  $15^{\circ} C.$ ; so ist die grösste Kreisfläche  $A = 561'169$ ,  
 $a = 513 \frac{A}{2g} = 513 \times \frac{561'169}{62} = 4'6432$ ,  $q' = '064541$  und  
 $k = 25932 \times 1'06 = 27487'92$ , folglich damit aus Relat. (b) sehr nahe  
 $s = 1800$  Fufs als grösste Höhe, in welcher der Ballon allmählig zur Ruhe  
 kommt. In dieser Höhe ist (wenn auch hier die Temperatur mit  $15^{\circ}$  an-  
 genommen wird)  $q = '0604496$ .

Theilt man nun zur Bestimmung der Zeit, nach der *Simpson'schen* Formel  
 diese Höhe  $s$  in 8 gleiche Theile (man kann dabei ohne Fehler  $\frac{1800}{8}$  statt  
 $\frac{1800-1}{8}$  nehmen) und berechnet  $t$  annähernd nach der Formel:

$$t = \int_1^{1800} \frac{ds}{v} = \frac{1800}{24} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8)$$

so findet man für  $s = 1$  aus der Relation (a) d. i. aus

$$\log q = \log q' - \frac{s}{k} \log e \quad (\text{wobei } \log q' = '8098325 - 2 \text{ und}$$

$$\log e = '4342945) \quad q = '0645382 \text{ und damit aus der Formel (2):}$$

$$v = 1'1919, \text{ also damit den reciproken Werth } y_0 = \frac{1}{v} = '8391 \text{ Verfäht}$$

$$\text{man auf dieselbe Weise mit den Werthen von } s = \frac{1800}{8} = 225,$$

$$2. \frac{1800}{8} = 450, \quad 3. \frac{1800}{8} = 675 \text{ u. s. w. bis } s = 8. \frac{1800}{8} = 1800; \text{ so er-}$$

hält man der Reihe nach folgende Werthe:

für	wird			
$s = 1$ ,	$q = '0645382$ ,	$v = 1'1919$ ,	$y_0 = '8391$	
$= 225$	$= '0640143$	$= 10'2446$	$y_1 = '0977$	
$= 450$	$= '0634925$	$= 10'4131$	$y_2 = '0960$	
$= 675$	$= '0629749$	$= 10'2125$	$y_3 = '0980$	
$= 900$	$= '0624615$	$= 9'9033$	$y_4 = '1010$	
$= 1125$	$= '0619537$	$= 9'5460$	$y_5 = '1047$	
$= 1350$	$= '0614472$	$= 9'1417$	$y_6 = '1094$	
$= 1575$	$= '0609463$	$= 8'7030$	$y_7 = '1149$	
$= 1800$	$= '0604496$	$= 8'2353$	$y_8 = '1214$	

und damit wird aus der vorigen Formel nahe  $t = 242\frac{1}{2}$  Secunde oder  
 etwas über 4 Minuten, welche der Ballon braucht, um in eine Luftschichte  
 zu gelangen, die in runder Zahl um 300 Klafter über dem Aufsteigepunct  
 des Ballons liegt.

Die hier gerechneten Werthe von  $v$  bestätigen das in der vorigen An-  
 merkung über die Bewegung des Ballons Gesagte vollkommen, und man  
 sieht, dafs der Ballon jene, um 1800 Fufs über dem Aufsteigepunct gele-  
 gene Luftschichte anfangs noch mit einer Geschwindigkeit von etwas  
 über 8 Fufs passirt, um hierauf wieder bis in diese zurückzukehren.

Setzt man in der obigen Relation (c) für  $ds$  den Werth  $v dt$ , so erhält man  $dt = -\frac{k dq}{v}$ , daher, wenn man  $v$  als constant ansieht:

$$t = -\frac{k}{v} \int_{q'}^q \frac{dq}{q} = \frac{k}{v} \int_q^{q'} \frac{dq}{q} = \frac{k}{v} l \frac{q'}{q}.$$

Nimmt man für  $q'$  jenen Werth, welcher der Höhe von 1800 Fufs entspricht, so ist  $l \frac{q'}{q} = (8098325 - 2) (7813935 - 2) = 0284390$ .

Würde man nun für  $v$  den mittlern Werth nehmen, welcher der vorigen Reihe von  $v = 10.24$  bis  $v = 8.22$  entspricht, d. i.

$$v = \frac{76.3975}{8} = 9.55 \text{ setzen, so würde man annähernd } t = 188\frac{1}{2} \text{ Secunden}$$

für die Zeit finden, welche der Ballon braucht, um von der Höhe von 225 Fufs auf jene von 1800 Fufs zu gelangen, so, dafs er für die ersten 225 Fufs (die Zeit für den ersten Fufs nicht gerechnet) nahe  $242\frac{1}{2} - 188\frac{1}{2} = 54$  Secunden benöthigte.

## 78. Aufgabe.

Die Schwingungszeit eines Kugelpendels zu bestimmen, welches in einem widerstehenden Mittel, z. B. in der Luft, oder im Wasser schwingt.

### Auflösung.

1. Bezeichnet man überhaupt, ohne Rücksicht auf die Form des Pendels, dessen Volumen mit  $Q$  und Dichtigkeit mit  $\delta$ , so wie die Dichtigkeit des betreffenden Mittels, in welchem das Pendel schwingt, durch  $\Delta$ ; so ist die absolute Masse des Pendels  $= Q\delta$ , dagegen dessen relative Masse, deren Gewicht die Bewegung des Pendels in der Flüssigkeit bewirkt (a) . .  $M = Q(\delta - \Delta)$  \*).

Bezeichnet man ferner das Moment der Trägheit des Pendels in der betreffenden Flüssigkeit und auf die Schwingungsachse bezogen durch  $\mathfrak{M}$ , so ist, da die absolute Masse  $Q\delta$  des Pendels von der Flüssigkeitsmasse  $Q'\Delta$  begleitet wird, wenn nämlich  $Q'$  das Volumen dieser Masse bezeichnet, dessen Werth allgemein in der 75. Aufgabe, durch die Relation (m) gegeben ist, sofort  $\mathfrak{M}$  gleich der Summe der Trägheitsmomente beider Massen  $Q\delta$  und  $Q'\Delta$ . Nun ist, wenn  $a$  den Abstand

\*) Es ist nämlich  $Q\delta g$  das Gewicht des Pendels im leeren Raume, folglich, weil  $Q'\Delta g$  das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist, sofort  $Q(\delta - \Delta)g$  das Gewicht des Pendels in der betreffenden Flüssigkeit.

des Schwerpunktes des Pendels von der Schwingungsachse, und  $Q \delta m^2$ . das Moment der Trägheit des Pendels in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt mit der Schwingungsachse parallele Achse bezeichnet, fürs Erste das Moment der Trägheit der Masse  $Q \delta$  gleich  $Q \delta (a^2 + m^2)$ . Um ferner das Moment der Trägheit  $\mathfrak{M}'$  der Masse  $Q' \Delta$  zu finden, kann man annehmen, dafs, so wie es bei der geradlinigen Bewegung der Fall, auch bei der kreisförmigen Bewegung, das Volumen  $Q$  des Pendels, von jenem  $Q'$  der Flüssigkeit so umgeben werde, dafs beide Volumina dieselbe Achse und denselben Mittelpunkt der Figur haben; dann ist, wenn  $(Q + Q') \Delta m'^2$  das Moment der Trägheit der Masse  $(Q + Q') \Delta$  in Beziehung auf eine durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gehende, mit der Schwingungsachse parallele Achse bezeichnet, sofort

$$\Delta (Q + Q') (a^2 + m'^2) = \Delta Q (a^2 + m^2) + \mathfrak{M}'$$

folglich  $\mathfrak{M}' = \Delta (Q + Q') (a^2 + m'^2) - \Delta Q (a^2 + m^2)$ .

Mit diesen Werthen ist endlich das gesuchte Moment der Trägheit des Pendels in der betreffenden Flüssigkeit genommen, wenn man noch der Kürze halber

$$\frac{a^2 + m'^2}{a^2 + m^2} = c \text{ und } \frac{\Delta}{\delta} = f \text{ setzt, sofort}$$

$$\mathfrak{M} = \delta (a^2 + m^2) [(1 - f) Q + cf(Q + Q')]$$

oder, da  $a$  gegen die Dimensionen der Volumina  $Q$  und  $Q + Q'$ , folglich auch gegen  $m$  und  $m'$  gewöhnlich so groß sind, dafs man ohne Fehler  $c = 1$  setzen kann, auch

$$\mathfrak{M} = \delta (a^2 + m^2) (Q + fQ') \dots (1)$$

2. Geht man jetzt speziell auf das Kugelpendel über und nimmt an, dafs die Kugel, deren Durchmesser =  $D$  und größte Kreisfläche  $\frac{1}{4} D^2 \pi = F$  seyn soll, an einem so dünnen (undehnbaren) Faden aufgehängt sey, dafs man dessen Gewicht und Widerstand unberücksichtigt lassen kann, setzt ferner nicht gar zu kleine Schwingungsbögen voraus, in welchem Falle man den Widerstand des Mittels dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional zu setzen pflegt; so kann man nach *Duchemin* (74. Aufgabe, 2. Auflösung, Relat. 1) den Widerstand der Kugel bei der kreisförmigen Bewegung (da dieser bei der geradlinigen Bewegung 73. Aufgabe, 2. Auflösung,  $= \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g}$  ist)

durch

$$R = \frac{2}{5} k \gamma F \frac{v^2}{2g} \left[ 1 + \frac{3 \cdot 2488 s}{k(a-s)} \right]$$

ausdrücken, wobei (74. Aufgabe, 2. Beispiel)

$\varkappa = \frac{1}{2}D$ ,  $s = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{D}{2} = \frac{2}{3} \frac{D}{\pi}$ ,  $k = 1.2824$  (§. 359)  $\gamma = g\Delta$  das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit, und  $a$  der Abstand des Mittelpunctes der Kugel von der Drehungs- oder Schwingungsachse ist. Mit diesen Werthen wird auch, wenn man, was hier hinreichend ist, überall nur 4 Decimalstellen beibehält:

$$R = .00650 \gamma D^2 v^2 \left( 1 + \frac{1.2667 D}{a - .2122 D} \right) \dots (2)$$

3. Um nun die Differenzialgleichung für die Bewegung dieses Pendels aufzustellen, hat man zuerst für die kreisförmige Bewegung (Aufgabe 48, Gleich. 1) die Relation:

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = \int (xY - yX) dm,$$

wobei die Rotationsachse in die Coordinatenachse der  $x$  fällt, und  $X$ ,  $Y$  die beschleunigenden Kräfte bezeichnen, welche parallel mit den Achsen der  $x$  und  $y$  auf das Massenelement  $dm$  einwirken. Nimmt man im vorliegenden Falle die Achse der  $y$  in lothrechter Richtung und zwar im Sinne der Schwere, so wird, da  $g$  die Intensität der Schwere bezeichnet, sofort  $X = 0$  und  $Y = g$ , folglich

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = g \int x dm,$$

oder wenn man die Abscisse des Schwerpunktes des Pendels durch  $x_1$  und dessen gesammte Masse durch  $M_1$  bezeichnet, wodurch (Nr. 33)

$\int x dm = x_1 M_1$  wird, auch

$$\mathfrak{M} \frac{dw}{dt} = g M_1 x_1.$$

Bildet der Pendelfaden im Augenblicke als die Oscillation beginnt, mit der Verticalen oder der Ebene der  $yx$  den Winkel  $\alpha$  und am Ende der Zeit  $t$  jenen  $\varphi$ , so ist die Winkelgeschwindigkeit des

Schwerpunktes in diesem Augenblicke  $w = - \frac{d\varphi}{dt}$ , also dessen absolute

Geschwindigkeit  $v = aw = -a \frac{d\varphi}{dt}$ , und daher wegen

$x_1 = a \sin \varphi$ , auch

$$- \mathfrak{M} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g a M_1 \sin \varphi.$$

Mit Rücksicht jedoch auf den Widerstand, welchen das Pendel zu überwinden hat, muß man in dieser Gleichung fürs Erste statt der absoluten Masse  $M_1$  die relative  $M$  [aus ( $\alpha$ )] und ferner  $gM \sin \varphi - R$  statt  $gM \sin \varphi$  setzen, indem es eigentlich diese Differenz ist, welche

hier die bewegende Kraft des Pendels bildet. Dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in die nachstehende oder gesuchte Differentialgleichung der Bewegung:

$$-\mathfrak{M} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (gM \sin \varphi - R) a$$

oder was dasselbe ist, in jene:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{agM}{\mathfrak{M}} \sin \varphi + \frac{aR}{\mathfrak{M}} \quad (3)$$

4. Diese letztere Gleichung mit  $2d\varphi$  multiplicirt und integrirt, gibt

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \cos \varphi + \frac{aR}{\mathfrak{M}} \varphi + C$$

wobei  $C$  die unbestimmte Constante bezeichnet; um diese zu bestimmen, bemerke man, dafs für  $t = 0$  erstlich  $\varphi = \alpha$  und dann auch  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dx}{dt} = 0$  seyn mufs, so, dafs also

$$0 = \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \cos \alpha + \frac{aR}{\mathfrak{M}} \alpha + C \text{ oder } C = -\frac{2agM}{\mathfrak{M}} \cos \alpha - \frac{aR}{\mathfrak{M}} \alpha$$

folglich

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g \frac{aM}{\mathfrak{M}} (\cos \varphi - \cos \alpha) + \frac{aR}{\mathfrak{M}} (\varphi - \alpha) \quad (4)$$

ist.

Aus dieser Gleichung läfst sich die Winkelgeschwindigkeit des Pendels (d. i. von dessen Schwerpunct) in jedem Augenblicke, je nach der Position seines Schwerpunctes bestimmen.

Zusatz. Reducirt sich die Kugel auf ihren Mittelpunct, also die Masse  $M_1$  auf einen materiellen Punct und setzt man den Widerstand des Mittels  $R = 0$ ; so erhält man das einfache, im leeren Raume schwingende Pendel. Da nun für diesen Fall  $M_1 = M$  und  $\mathfrak{M} = Ma^2 = Q\delta a^2$  ist, so folgt aus der obigen Relation (1), wegen  $Q' = 0$  sofort auch  $m = 0$  und damit erhält man, aus der vorigen Gleichung (4), da auch  $R = 0$  ist,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2g \frac{aM}{Ma^2} (\cos \varphi - \cos \alpha) \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{a}{2g(\cos \varphi - \cos \alpha)} \text{ d. i. } dt = -\sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos \varphi - \cos \alpha)}}.$$

Nun ist, da man für kleine Schwingungsbögen die vierten und höhern Potenzen von  $\varphi$  und  $\alpha$  vernachlässigen kann,

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \text{ und } \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \varphi^2}{2}\right)}}$$

und daher, wenn man diesen Werth substituirt und integrirt:

$$t = -\sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}} = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}}$$

und wegen  $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\alpha^2 - \varphi^2)}} = \text{arc Sin } \frac{\varphi}{\alpha}$ , auch  $t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}$

so, daß also die Schwingungszeit des einfachen Pendels, im leeren Raume

$$T = 2t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ wird (Nr. 59).}$$

5. Geht man auf die Gleichung (3) zurück und substituirt für  $R$  den Werth aus der Relation (2), setzt aber darin Kürze halber:

$$0.06508 D^2 \left( 1 + \frac{1.2667D}{a - 2.122D} \right) = \mu \dots (s)$$

also  $R = \mu v^2$ ; so erhält man, wegen  $v = \frac{ds}{dt} = -\frac{ad\varphi}{dt}$  sofort:

$$\frac{d\varphi}{dt^2} = -\frac{agM}{\mathfrak{M}} \text{Sin } \varphi + \frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} \frac{d\varphi^2}{dt^2} \dots (5)$$

oder, wenn man durchaus mit  $2 d\varphi$  multiplicirt, auch

$$2 d\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2 \frac{agM}{\mathfrak{M}} \text{Sin } \varphi d\varphi + \frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} \frac{d\varphi^2}{dt^2} d\varphi.$$

Wird diese Differenzialgleichung integrirt und

$$\int \frac{d\varphi^2}{dt^2} d\varphi = y, \text{ also } \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{dy}{d\varphi}$$

gesetzt, so erhält man ganz einfach:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \text{Cos } \varphi + \frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} y,$$

als eine lineäre Gleichung der ersten Ordnung, diese nimmt die Form

$$dy - \frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} y d\varphi = 2 \frac{agM}{\mathfrak{M}} \text{Cos } \varphi d\varphi$$

oder, wenn man

$$-\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} = P \text{ und } \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \text{Cos } \varphi = Q \text{ setzt, jene}$$

$$dy + Py d\varphi = Q d\varphi$$

an, welche sich ganz einfach (Comp. §. 847) integriren läßt. Es ist nämlich das allgemeine Integral

$$y = e^{-\int P d\varphi} \left( \int e^{\int P d\varphi} Q d\varphi + C \right)$$



oder wegen  $\int P d\varphi = -\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} \int d\varphi = -\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} \varphi = -\mu' \varphi$ , wenn man nämlich  $\frac{2a^3\mu}{\mathfrak{M}} = \mu'$  setzt, auch

$$y = e^{\mu' \varphi} \left( \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \int e^{-\mu' \varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi + C \right) = \\ C e^{\mu' \varphi} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}} e^{\mu' \varphi} \int e^{-\mu' \varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi.$$

Setzt man zur Bestimmung dieses letztern Integrals  $e^{-\mu' \varphi} = a$ , so wird  $\int e^{-\mu' \varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi = \int a^{\varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi$ , und da

$\int a^{\varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi = \frac{a^{\varphi}}{1+l^2a} (la \cdot \text{Cos } \varphi + \text{Sin } \varphi \text{ ist } *)$ , so hat man, wegen  $la = -\mu'$ :

$$\int e^{-\mu' \varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi = \frac{e^{-\mu' \varphi}}{1+\mu'^2} (\text{Sin } \varphi - \mu' \text{Cos } \varphi)$$

folglich ist, wenn man substituirt und reducirt:

$$y = C e^{\mu' \varphi} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \frac{1}{1+\mu'^2} (\text{Sin } \varphi - \mu' \text{Cos } \varphi).$$

Wird diese Gleichung nach  $\varphi$  differenziert und setzt man für  $\frac{d\varphi}{d\varphi}$  wieder den Werth  $\frac{d\varphi^2}{dt^2}$  zurück, so erhält man endlich die Gleichung

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = C \mu' e^{\mu' \varphi} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{1}{1+\mu'^2} (\text{Cos } \varphi + \mu' \text{Sin } \varphi)$$

als erstes Integral der obigen Differenzialgleichung (5) in endlicher Form.

Zur Bestimmung der Constante  $C$  hat man für  $\varphi = \alpha$  sofort  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ,

$$\text{folglich} \quad 0 = C \mu' e^{\mu' \alpha} + \frac{2agM}{\mathfrak{M}} \frac{1}{1+\mu'^2} (\text{Cos } \alpha + \mu' \text{Sin } \alpha)$$

\*) Es ist nämlich (Comp. §. 814)  $\int X a^x dx = \frac{X a^x}{la} - \frac{1}{la} \int X' a^x dx$ , und

dabei  $X' = \frac{dX}{dx}$ , folglich  $\int a^{\varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi = \frac{a^{\varphi} \text{Cos } \varphi}{la} + \frac{1}{la} \int a^{\varphi} \text{Sin } \varphi d\varphi =$

$\frac{a^{\varphi} \text{Cos } \varphi}{la} + \frac{1}{la} \left[ \frac{a^{\varphi} \text{Sin } \varphi}{la} - \frac{1}{la} \int a^{\varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi \right]$  und daraus

$\int a^{\varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi \left( 1 + \frac{1}{l^2 a} \right) = \frac{a^{\varphi}}{l^2 a} (la \cdot \text{Cos } \varphi + \text{Sin } \varphi)$  oder endlich

$$\int a^{\varphi} \text{Cos } \varphi d\varphi = \frac{a^{\varphi}}{1+l^2a} (la \cdot \text{Cos } \varphi + \text{Sin } \varphi).$$

oder 
$$\mu' C = -\frac{2agM}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{1}{1 + \mu'^2} (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) e^{-\mu' \alpha}$$

es ist daher, wenn man diesen Werth substituirt, allgemein für jeden beliebigen Zeitmoment:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2agM}{(1 + \mu'^2)\mathfrak{M}} \left[ \cos \varphi + \mu' \sin \varphi - (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) e^{-\mu'(\alpha - \varphi)} \right] \quad \dots (6)$$

6. Für den tiefsten Punct hat man aus dieser letzten Gleichung wegen  $\varphi = 0$ :

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2agM}{(1 + \mu'^2)\mathfrak{M}} \left[ 1 - (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) e^{-\mu' \alpha} \right]$$

als Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Pendels in diesem Puncte, welche sofort kleiner als in jenem Falle ist, in welchem das Pendel im leeren Raume schwingt.

Das Pendel steigt also mit dieser verminderten Geschwindigkeit auf der andern Seite bis auf eine Höhe, welche um etwas kleiner als jene ist, von welcher es herabgegangen. Bezeichnet man den entsprechenden, entgegengesetzten Winkel von  $\varphi$  durch  $-\alpha_1$ , so muß dafür  $\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\alpha_1}{dt} = 0$ , folglich, wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung (6) substituirt:

$$\cos \alpha_1 - \mu' \sin \alpha_1 = (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) e^{-\mu'(\alpha + \alpha_1)}$$

oder auch

$$(\cos \alpha_1 - \mu' \sin \alpha_1) e^{\mu' \alpha_1} = (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) e^{-\mu' \alpha} \text{ seyn.}$$

Entwickelt man die Exponentialgrößen nach Potenzen von  $\mu'$ , läßt aber schon die zweite Potenz dieser sehr kleinen Gröfse aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha_1 - \mu' \sin \alpha_1) + (\cos \alpha_1 - \mu' \sin \alpha_1) \alpha_1 \mu' = \\ (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) - (\cos \alpha + \mu' \sin \alpha) \alpha \mu'^* \end{aligned}$$

oder, wenn man nach  $\mu'$  ordnet, näherungsweise:

$$\cos \alpha_1 - (\sin \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_1) \mu' = \cos \alpha + (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \mu'$$

Da nun der, dieser Gleichung entsprechende Werth von  $\alpha_1$  nur sehr wenig kleiner als  $\alpha$  ist, so setze man  $\alpha_1 = \alpha - \delta$  und vernachlässige die Glieder in  $\delta^2$  und  $\mu' \delta$ , so erhält man:

$$\delta \sin \alpha = 2 \mu' (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

---

\*) Es ist nämlich nach der bekannten Reihe von  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \dots$

sofort  $e^{\mu' \alpha_1} = 1 + \alpha_1 \mu'$  und  $e^{-\mu' \alpha} = 1 - \alpha \mu'$  zu setzen.

mithin, wenn man daraus  $\delta$  bestimmt und den Werth in die vorhergehende Relation setzt:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\mu'}{\sin \alpha} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

als jenen Werth des Winkels  $\varphi$ , welcher am Ende der ersten Schwingung Statt findet. Sind unbeschadet der gemachten Voraussetzung (von nicht zu kleinen Schwingungen) die Oscillationen noch so klein, daß man die vierten und höheren Potenzen von  $\alpha$  vernachlässigen kann; so geht der vorige Ausdruck über in den einfacheren:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2}{3} \mu' \alpha^2 \dots \quad (7)$$

bezeichnet  $\alpha_2$  den Winkel der zweiten halben Schwingung, so wird  $\alpha_2$  aus  $\alpha_1$  eben so, wie  $\alpha_1$  aus  $\alpha$  gefunden; es ist nämlich

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{2}{3} \mu' \alpha_1^2 \dots \quad (8)$$

und eben so ist  $\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{2}{3} \mu' \alpha_2^2$  u. s. w.

7. Um endlich die irgend einem Winkel  $\varphi$  entsprechende Schwingungszeit  $t$  zu finden, müßte man den aus der Gleichung (6) zu bestimmenden Werth von  $t$  integrieren; da es sich jedoch hier nur um kleine Schwingungsbögen handelt, so kann man sich dafür eine hinreichend genaue convergente Reihe, und zwar auf folgende Weise verschaffen.

Da nämlich  $\varphi$  eine Function von  $t$  und  $\alpha$  ist, welche sich für  $\alpha = 0$  auf Null reduciren muß, so kann man

$$\varphi = \varphi_1 \alpha + \varphi_2 \alpha^2 + \varphi_3 \alpha^3 + \dots \quad (9)$$

setzen, wobei  $\varphi_1, \varphi_2 \dots$  von  $\alpha$  unabhängige Coefficienten bezeichnen. Aus dieser Annahme folgt, wenn man durchaus die dritte und höhern Potenzen von  $\alpha$  ausläßt:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \alpha^2 \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \alpha \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \alpha^2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \quad \text{und}$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \dots = \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2.$$

Substituirt man diese Werthe für  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  und  $\sin \varphi$  in der obigen Gleichung (5), ordnet beiderseits nach Potenzen von  $\alpha$  und setzt dann die gleichnamigen (weil von  $\alpha$  unabhängigen) Coefficienten einander gleich, so erhält man

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{agM}{\mathfrak{M}} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 - \frac{agM}{\mathfrak{M}} \varphi_2 \quad (10)$$

Wird die erste dieser beiden Gleichungen, in welcher wir der Kürze wegen

$$\frac{agM}{\mathfrak{M}} = A \dots \quad (11)$$

setzen wollen, mit  $2d\varphi_1$  multiplicirt und dann integrirt, so erhält man

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = C - A\varphi_1^2.$$

Zur Bestimmung der unbestimmten Constanten bemerke man überhaupt, daß, damit für  $t=0$  auch  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  und  $\varphi = a$  seyn kann, sofort (wie aus Relat. 9 folgt) erstlich die Anfangswerthe von  $\varphi_2, \varphi_3 \dots$  so wie  $\frac{d\varphi_2}{dt}, \frac{d\varphi_3}{dt} \dots$  dafür sämmtlich Null seyn müssen, dagegen  $\varphi_1 = 1$  und  $\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$  werden mufs. Es ist daher

$$C = A, \text{ mithin } \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = A(1 - \varphi_1^2) \text{ d. i.}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{(1 - \varphi_1^2)}} = dt\sqrt{A},$$

folglich, wenn man abermals integrirt:

$$\text{arc. Sin } \varphi_1 = t\sqrt{A} + C$$

und nach der vorigen Bemerkung  $\text{arc. Sin } 1 = C = \frac{\pi}{2}$ , mithin

$$\text{arc. Sin } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + t\sqrt{A}$$

oder 
$$\varphi_1 = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} + t\sqrt{A}\right) = \text{Cost}\sqrt{A} \dots (12)$$

daraus folgt  $\frac{d\varphi_1}{dt} = -\sqrt{A} \cdot \text{Sint}\sqrt{A}$  und  $\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 = A \text{Sin}^2 t\sqrt{A}$

so, daß mit diesem letztern Werthe, die zweite der vorigen Gleichungen (10) übergeht in jene

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} A \text{Sin}^2 t\sqrt{A} - A\varphi_2 \dots (13)$$

oder auch in die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + A\varphi_2 = \frac{a^3\mu}{2\mathfrak{M}} A (1 - \text{Cos } 2t\sqrt{A})$$

Wird diese Gleichung (13) integrirt und werden die Constanten dabei so bestimmt, daß für  $t=0$  sowohl  $\varphi_2 = 0$  als auch  $\frac{d\varphi_2}{dt} = 0$  wird; so erhält man

$$\varphi_2 = \frac{B}{2A} + \frac{B}{6A} \text{Cos } 2t\sqrt{A} - \frac{2}{3} \frac{B}{A} \text{Cost}\sqrt{A}^*) \dots (14)$$

wenn man nämlich noch Kürze halber  $\frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} A = B$ , also  $\frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} = \frac{B}{A}$  setzt.

\*) Setzt man nämlich indefs  $\varphi_2 = y$ ,  $t = x$  und  $\frac{a^3\mu}{\mathfrak{M}} A = B$ , so erhält die genannte, zu integrirnde Gleichung die Form:

Setzt man diese für  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  gefundenen, in den Relationen (12) und (14) ausgedrückten Werthe in die (aus 9 folgende) Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = B \sin^2 x \sqrt{A},$$

oder, wenn man  $x \sqrt{A} = \alpha$ , also  $dx = \frac{d\alpha}{\sqrt{A}}$  setzt, auch:

$$A \frac{d^2y}{d\alpha^2} + Ay = B \sin^2 \alpha,$$

oder, wenn man  $\frac{B}{A} = a$  und  $x$  statt  $\alpha$  setzt, endlich

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = a \sin^2 x \dots (a)$$

Um nun diese Gleichung zu integrieren, setze man:

$$y = Yz \dots (b)$$

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = Y \frac{dz}{dx} + z \frac{dY}{dx} \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = Y \frac{d^2z}{dx^2} + 2 \frac{dY}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2Y}{dx^2} \dots (c)$$

Dieser Werth in der Gleichung (a) substituirt, gibt, wenn man noch  $a \sin^2 x = X \dots (d)$

$$\text{setzt, sofort: } \left( \frac{d^2z}{dx^2} + z \right) Y + 2 \frac{dY}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2Y}{dx^2} = X.$$

Bestimmt man nun, was, wie wir sehen werden, immer möglich ist  $z$  so, dafs

$$\frac{d^2z}{dx^2} + z = 0 \dots (e)$$

wird, so geht die vorige Gleichung über in

$$2 \frac{dY}{dx} \frac{dz}{dx} + z \frac{d^2Y}{dx^2} = X,$$

oder, wenn man  $\frac{dY}{dx} = Y' \dots (f)$

setzt, wodurch  $\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{dY'}{dx}$  wird, in jene

$$\frac{dY'}{dx} + \frac{2}{z} \frac{dz}{dx} Y' = \frac{X}{z}$$

oder endlich, wenn man

$$\frac{2}{z} \frac{dz}{dx} = P \text{ und } \frac{X}{z} = Q \dots (g)$$

setzt, wobei  $P$  und  $Q$  bekannte (oder leicht zu bestimmende) Functionen von  $x$  sind, in die Gleichung

$$\frac{dY'}{dx} + P Y' = Q \dots (h)$$

Hat man aus dieser Gleichung  $Y'$  gefunden, so folgt aus jener (f):

$\varphi = \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2$ , so erhält man nach einer einfachen Reduction und wegen  $\frac{B}{A} = \frac{a^3 \mu}{\mathfrak{M}}$ , die Gleichung:

$$Y = \int Y dx + C \text{ und dann ist (Relat. a)}$$

$$y = Yz = z \left[ \int Y dx + C \right]. \quad (i)$$

Um nun zuerst  $z$  aus der Relation (e) zu finden, multiplicire man diese Gleichung mit  $2 dz$ , so folgt nachdem man integrirt hat

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + z^2 = c_1 \text{ oder } \frac{dz}{\sqrt{c_1 - z^2}} = dx$$

wobei  $c_1$  die unbestimmte Constante ist. Wird diese letztere Gleichung abermals integrirt, so erhält man

$$\text{arc Sin } \frac{z}{\sqrt{c_1}} = x + c_2$$

oder, da für  $x = 0$  auch  $z = 0$  seyn muß, folglich die Constante  $c_2 = 0$

ist, auch  $\text{arc Sin } \frac{z}{\sqrt{c_1}} = x$  oder  $\frac{z}{\sqrt{c_1}} = \text{Sin } x$  d. i.

$$z = \sqrt{c_1} \text{ Sin } x \quad (k)$$

Aus dieser Gleichung folgt  $\frac{dz}{dx} = \sqrt{c_1} \text{ Cos } x$  und daher aus (g):

$$P = 2 \text{ Cot } x \text{ und (mit Rücksicht auf die Relation d)}$$

$$Q = \frac{a}{\sqrt{c_1}} \text{ Sin } x.$$

Es ist also  $\int P dx = 2 \int dx \text{ Cot } x = 2 l \text{ Sin } x$ , und wenn man

$e^{\int P dx} = e^{2 l \text{ Sin } x} = w$  setzt, wegen  $w = \text{Sin}^2 x$ , sofort  $e^{\int P dx} = \text{Sin}^2 x$

und  $e^{-\int P dx} = \frac{1}{\text{Sin}^2 x}$ , folglich ist weiters:

$$\int Q e^{\int P dx} dx = \frac{a}{\sqrt{c_1}} \int \text{Sin}^3 x dx = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}} (2 \text{ Cos } x + \text{Cos } x \text{ Sin}^2 x) + C$$

(Comp. §. 820, Form. 7). Nun folgt aus der Relation (h), wie oben

(Comp. §. 847)  $Y' = e^{-\int P dx} \left( \int Q e^{\int P dx} dx + C \right)$ , also ist, wenn man

diese eben gefundenen Werthe substituirt:

$$Y' = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}} \left( \frac{2 \text{ Cos } x}{\text{Sin}^2 x} + \text{Cos } x \right) + \frac{C}{\text{Sin}^2 x}$$

und daher

$$Y = \int Y' dx = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}} \int \left( \frac{2 \text{ Cos } x dx}{\text{Sin}^2 x} + \text{Cos } x dx \right) + \int \frac{C dx}{\text{Sin}^2 x} \text{ d. i.}$$

$$Y = -\frac{a}{3\sqrt{c_1}} \left( \text{Sin } x - \frac{2}{\text{Sin } x} \right) - C \text{ Cot } x.$$

$$\varphi = \left( \alpha - \frac{2}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha^2 \right) \text{Cost} \sqrt{A} + \frac{\mu a^3}{2\mathfrak{M}} \alpha^2 + \frac{\mu a^5}{6\mathfrak{M}} \alpha^2 \text{Cos } 2t \sqrt{A}. \quad (15)$$

wobei noch  $\mu$  den in (s) (Absatz 5.) angegebenen Werth hat und (Relat. 11)  $A = \frac{agM}{\mathfrak{M}}$  ist.

8. Wegen  $v = -a \frac{d\varphi}{dt}$  ist, wenn man die vorige Gleichung (15)

nach  $t$  differenziert und den Quotienten  $\frac{d\varphi}{dt}$  bestimmt, sofort:

$$v = a \sqrt{A} \left( \alpha - \frac{2}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha^2 \right) \text{Sint} \sqrt{A} + \frac{\mu a^4}{3\mathfrak{M}} \alpha^2 \sqrt{A} \cdot \text{Sin } 2t \sqrt{A}. \quad (16)$$

Da am Ende einer jeden Oscillation oder Schwingung  $v = 0$  ist, so erhält man für diese Momente aus der vorigen Gleichung, wenn man  $2 \text{Sint} \sqrt{A} \cdot \text{Cost} \sqrt{A}$  statt  $\text{Sin } 2t \sqrt{A}$  setzt und mit  $\alpha a \sqrt{A}$  abkürzt:

$$0 = \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha + \frac{2}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha \text{Cost} \sqrt{A} \right) \text{Sint} \sqrt{A}.$$

Da nun  $\alpha$  ein sehr kleiner Winkel ist, so kann der erste dieser beiden Factoren nicht Null seyn, dagegen wird es der zweite Factor und zwar für die Werthe von  $t \sqrt{A} = 0, \pi, 2\pi \dots n\pi$ ; es folgt also, daß das Zeitintervall  $T$  zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Geschwindigkeiten Null, d. i. die Schwingungszeit  $T$  oder die Dauer einer vollen Schwingung erhalten wird, wenn man  $T \sqrt{A} = \pi$  setzt

Endlich folgt mit diesen Werthen von  $z$  und  $Y$  aus der Relation (i):

$$y = -\frac{a}{3} (2 - \text{Sin}^2 x) - C \sqrt{c_1} \text{Cos } x.$$

Zur Bestimmung der Constanten  $C$  und  $c_1$  hat man, da für  $x = 0$  sowohl  $y = 0$  als auch  $\frac{dy}{dx} = 0$  seyn muß, die beiden Bedingungsgleichungen  $0 = \frac{2a}{3} - C \sqrt{c_1}$  und  $0 = 0$ , folglich ist aus der erstern

$$C \sqrt{c_1} = \frac{2a}{3} \text{ und damit, wenn man auch gleich } \text{Sin}^2 x = \frac{1 - \text{Cos } 2x}{2}$$

setzt und gehörig reducirt:

$$y = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} \text{Cos } 2x - \frac{2a}{3} \text{Cos } x.$$

Stellt man endlich die Werthe für  $a, x, y$  wieder her, d. i. setzt man  $\frac{B}{A}$  statt  $a, t \sqrt{A}$  statt  $x$  und  $\varphi_2$  statt  $y$ ; so erhält man die oben angegebene Integralgleichung (14):

$$\varphi_2 = \frac{B}{2A} + \frac{B}{6A} \text{Cos } 2t \sqrt{A} - \frac{2}{3} \frac{B}{A} \text{Cos } t \sqrt{A}.$$

(indem man z. B.  $t\sqrt{A}$  von  $(n-1)\pi$  bis  $n\pi$  nehmen kann), wodurch man  $T = \frac{\pi}{\sqrt{A}}$ , oder wenn man für  $A$  den Werth aus Relat. (11) herstellt, d. i.  $A = \frac{agM}{\mathfrak{M}}$  setzt, auch:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{agM}} \quad \dots \quad (17)$$

erhält.

**Zusatz.** Schwingt dasselbe Pendel im leeren Raume, so haben  $\mathfrak{M}$  und  $M$  dieselbe Bedeutung wie in §. 170 und das dortige  $a$  ist hier  $= a$ , folglich ist, wenn für den leeren Raum  $\mathfrak{M}$  und  $M$  in  $\mathfrak{M}'$  und  $M'$  übergehen, die Schwingungszeit im leeren Raume:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}'}{agM'}}$$

und da, wie man aus den Relationen (1) und (a) ersieht  $\mathfrak{M} > \mathfrak{M}'$  und  $M < M'$  ist, so folgt, das der Widerstand des Flüssigen auf die Schwingungszeit eines zusammen gesetzten Pendels keinen andern Einfluß hat, als das das Moment der Trägheit desselben etwas größer und dessen Gewicht ( $gM$ ) etwas kleiner, dadurch also die Schwingungsdauer  $T$  selbst etwas größer als jene  $T'$  wird.

Für das einfache Pendel dagegen wird in beiden Fällen  $\mathfrak{M} = Ma^2$ , folglich die Schwingungszeit in dem widerstehenden Mittel

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

eben so groß, wie im leeren Raume, so, das also der Widerstand der Luft oder der Flüssigkeit überhaupt auf die Dauer einer ganzen Schwingung bei diesem Pendel keinen Einfluß hat.

Gleichwohl wird durch diesen Widerstand die Zeit vergrößert, welche das Pendel braucht um den tiefsten Punct zu erreichen, d. i. bis  $\varphi = 0$  wird; bezeichnet man nämlich diese Zeit durch  $t'$ , so hat man aus der Relation (15):

$$0 = \left( \alpha - \frac{2}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha^2 \right) \text{Cos } t' \sqrt{A} + \frac{\mu a^3}{2\mathfrak{M}} \alpha^2 + \frac{\mu a^3}{6\mathfrak{M}} \alpha^2 \text{Cos } 2 t' \sqrt{A}.$$

Da nun, wie man sieht, der kleinste Werth von  $t' \sqrt{A}$ , welcher dieser Gleichung Genüge leistet, sehr wenig von  $\frac{\pi}{2}$  abweicht, so setze

$$\text{man} \quad t' \sqrt{A} = \frac{\pi}{2} + \delta$$

wobei  $\delta$  eine so kleine Größe ist, das man  $\delta^2$  und  $\alpha \delta$  vernachlässigen kann. Dadurch erhält man:



und  $\text{Cos } t' \sqrt{A} = \text{Cos}(90^\circ + \delta) = -\text{Sin } \delta = -\delta$   
 und  $\text{Cos } 2t' \sqrt{A} = \text{Cos}(180^\circ - 2\delta) = -\text{Cos } 2\delta = 1$ ,  
 folglich nach der vorigen Gleichung:

$$0 = -\alpha\delta + \frac{\mu a^3}{2\mathfrak{M}} \alpha^2 - \frac{\mu a^3}{6\mathfrak{M}} \alpha^2$$

und daraus  $\delta = \frac{\mu a^3}{2\mathfrak{M}} \alpha - \frac{\mu a^3}{6\mathfrak{M}} \alpha = \frac{1}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha$ ,

also damit

$$t' = \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha \right) \sqrt{\frac{1}{A}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{A}} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\mu a^3 \alpha}{\pi \mathfrak{M}} \right) \dots (n)$$

oder da für das einfache Pendel  $\mathfrak{M} = M a^2$  und  $\frac{1}{A} = \frac{\mathfrak{M}}{a g M} = \frac{a}{g}$  ist, endlich dafür

$$t' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\mu a \alpha}{\pi M} \right)$$

während im leeren Raume  $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}$  ist.

Setzt man den vorigen, in (n) ausgedrückten Werth von  $t'$  in die obige Gleichung (16) von  $v$ , so erhält man, da man nahe

$$\text{Sin } t' \sqrt{A} = \text{Sin} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\mu a^3 \alpha}{\pi \mathfrak{M}} \right) \frac{\pi}{2} = 1 \text{ und}$$

$\text{Sin } 2t' \sqrt{A} = \text{Sin} \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\mu a^3 \alpha}{\pi \mathfrak{M}} \right) \pi = 0$  setzen kann, sofort nahe genug die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte:

$$v = a \sqrt{\frac{a g M}{\mathfrak{M}}} \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha \right) \alpha,$$

während diese im leeren Raume durch

$$v = a \alpha \sqrt{\frac{a g M}{\mathfrak{M}}}$$

und für das einfache Pendel (wegen  $\mathfrak{M} = M a^2$ ) durch:

$$v = \alpha \sqrt{a g} \dots (k)$$

ausgedrückt würde.

Bezeichnet man endlich den Winkel  $\varphi$  für das Ende der ersten Schwingung durch  $-\alpha_1$ , welcher Werth sofort der Zeit  $t \sqrt{A} = \pi$  entspricht, so erhält man aus der Gleichung (15) nach einer einfachen Reduction:

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{4}{3} \frac{\mu a^3}{\mathfrak{M}} \alpha^2 \dots (18)$$

welcher Ausdruck mit jenem in Relation (7) (wegen  $\mu' = \frac{2 a^3 \mu}{\mathfrak{M}}$ ) vollkommen übereinstimmt.

Anmerkung. Der vorige Ausdruck für den Winkel  $\alpha_1$  ist den Versuchen zufolge aus dem Grunde etwas zu groß, weil die Geschwindigkeit des

Pendels im Anfange und am Ende einer jeden Schwingung sehr klein ist und in diesen Momenten auch noch der von der Zähigkeit der Flüssigkeit herrührende Widerstand in Rechnung gebracht werden muß. Nach *Duchemin* muß man, um den Beobachtungen des kugelförmigen Pendels im Wasser und in der Luft annähernd zu genügen, statt des obigen Coefficienten  $\frac{4}{3} = 1.33$ , jenen 1.5486 nehmen, also

$$\alpha_1 = \left( 1 - 1.5486 \frac{\mu a^3 \alpha}{\mathfrak{M}} \right) \alpha \dots (19)$$

setzen.

**Beispiel 1.** Bei einem Versuche von *Dubuat* über die Schwingungen des Kugelpendels im Wasser, war für die erste Schwingung  $D = 2.645$  Zoll,

$a = 36.637$  Zoll,  $\frac{\delta}{\Delta} = 11.057$  und  $a\alpha = 12$  Zoll. Nun ist für die Kugel überhaupt  $Q = \frac{1}{6} \pi D^3$  und (75. Aufgabe, Relat. q)  $Q' = \frac{1}{10} \pi D^3$  oder  $\frac{Q'}{Q} = .6$ , und in der Relation (1) d. i. in  $\mathfrak{M} = Q \delta (a^2 + m^2) \left( 1 + f \frac{Q'}{Q} \right)$

sofort  $m^2 = \frac{2}{5} \frac{D^2}{4} = \frac{1}{10} D^2$  (Nr. 79) und  $f = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{11.057}$ ; es wird also nach der vorigen Formel (19), wenn man darin für  $\mu$  den Werth aus der Relation (s) (in 5.) und dabei  $\gamma = g \Delta = 30.2 \Delta$  setzt, weil hier das französische Fußmaß zum Grunde liegt, sofort

$$\alpha_1 = \left[ 1 - \frac{1.5486 \times .00650 \times 30.2 D^2 a^3 \alpha \Delta}{Q (a^2 + m^2) \left( 1 + f \frac{Q'}{Q} \right) \delta} \left( 1 + \frac{1.2667 D}{a - 2.122 D} \right) \right] \alpha$$

und wenn man diesen Ausdruck berechnet:

$$\alpha_1 = .24670 \text{ oder } a\alpha_1 = 9.0381 \text{ Zolle.}$$

Die Beobachtung gibt dafür  $a\alpha_1 = 9.25$  Zoll, so, daß also der berechnete Werth bei dieser Größe des niedersteigenden Bogens von  $\alpha = 18^\circ 46'$  um .212 Zoll kleiner als der beobachtete ist, während diese Formel die Beobachtungsergebnisse für kleinere Bögen von  $\alpha$ , wie z. B. von  $6^\circ$  abwärts, sehr genau wieder gibt. *Duchemin* findet für dasselbe Beispiel:

$a\alpha_1 = 8.995$  Zoll, welcher Werth jedoch schon aus dem Grunde etwas unrichtig ist, weil er in  $m^2$  den Durchmesser mit dem Halbmesser verwechselt und  $m^2 = \frac{2}{5} D^2$  statt  $\frac{2}{5} r^2$  setzt.

**Beispiel 2.** Bei einem andern von *Dubuat* angestellten Versuche, wobei die Schwingungen des Kugelpendels in der Luft Statt fanden, war

$D = 4.0416$  Zoll,  $a = 36.535$  Zoll und  $\frac{\delta}{\Delta} = 11.33$ . Für den Werth von  $a\alpha = 12$  Zoll gab die Beobachtung  $a\alpha_1 = 10.00$  Zoll und die Rechnung 10.005 Zoll, was also eine sehr gute Übereinstimmung nachweist.

9. Nimmt man den Widerstand des Flüssigen bloß der ersten Potenz oder der einfachen Geschwindigkeit des Pendels proportional an, so stimmen die berechneten Werthe mit den beobachteten nur so lange überein, als die Schwingungsbögen kleiner als 20 Minuten sind,

Man nähert sich jedoch der Wahrheit weit mehr, wenn man den vollständigen Ausdruck des Widerstandes anwendet, in welchem nämlich ein Glied, welches der zweiten Potenz, und ein Glied vorkömmt, welches der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Mit Rücksicht auf den Umstand, daß der Widerstand bei mehreren unmittelbar aufeinander folgenden Pendelschwingungen etwas größer als bei der gleichförmigen, continuirlichen Kreisbewegung ist, setzt *Duchemin* diesen Widerstand:

$$R = \mu g \alpha (A a \alpha + B \sqrt{a g})$$

wobei  $\mu$  den in der obigen Relation (s) ausgedrückten Werth, (Relat.  $k$ )  $\alpha \sqrt{a g}$  die größte Geschwindigkeit, welche das einfache Pendel von der Länge  $a$  im leeren Raume (im tiefsten Punkt) erlangt und endlich  $A$  und  $B$  zwei Constanten bezeichnen.

Die Differenzialgleichung für die Bewegung des Pendels ist unter dieser Voraussetzung (nach der obigen Relation 3):

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{ag}{M} [M \sin \varphi - \mu \alpha (A a \alpha + B \sqrt{a g})] \dots (\alpha)$$

woraus man für den aufsteigenden Bogen  $\alpha_1$ , d. i. für den Werth von  $-\varphi$  am Ende der ersten Schwingung und für die Dauer  $T$  dieser Schwingung beziehungsweise erhält:

$$\alpha_1 = \alpha \left[ 1 - \frac{2\mu}{M} (A a \alpha + B \sqrt{a g}) \right] \dots (\beta)$$

und 
$$T = \pi \sqrt{\frac{M}{a g M}} \dots (\gamma)$$

wenn man nämlich den Schwingungswinkel  $\alpha$  so klein voraussetzt, daß man ohne Fehler schon die vierte Potenz von  $\alpha$  und  $\varphi$  vernachlässigen kann \*).

\*) Multiplicirt man nämlich die obige Differenzialgleichung ( $\alpha$ ) mit  $2 d\varphi$ , integriert und bestimmt die Constante so, daß für  $\varphi = \alpha$  der Quotient

$\frac{d\varphi}{dt} = 0$  wird, so erhält man ganz einfach:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{2 a g M}{M} \left[ (\cos \varphi - \cos \alpha) - \frac{\mu}{M} \alpha (A a \alpha + B \sqrt{a g}) (\alpha - \varphi) \right]$$

oder, wenn man nach der obigen Bemerkung  $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$  und

$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$  setzt, auch:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{a g M}{M} \left[ \alpha^2 - \varphi^2 - \frac{2\mu}{M} \alpha (A a \alpha + B \sqrt{a g}) (\alpha - \varphi) \right] \dots (\omega)$$

Setzt man für die  $n^{\text{te}}$  Schwingung:

$$\alpha_n = \alpha \left[ 1 - n \cdot \frac{2\mu}{M} (A\alpha + B\sqrt{ag}) \right]^* \dots (\delta)$$

und bestimmt die Constanten  $A$  und  $B$  dieser Formel aus den *Borda'schen* Versuchen, so erhält man  $A = \frac{1}{1.846} = .54171$  und  $B = \frac{1}{42.039} = .02379$ .

Anmerkung. Bei den hier erwähnten *Borda'schen* Versuchen bestanden die Schwingungen des Kugelpendels in der Luft in 12 aufeinander folgenden

Am Ende der ersten Schwingung ist  $\varphi = -\alpha_1$  und  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ , folglich

$$0 = \frac{agM}{\mathfrak{M}} (\alpha + \alpha_1) \left[ \alpha - \alpha_1 - \frac{2\mu}{M} \alpha (A\alpha + B\sqrt{ag}) \right]$$

und wenn man mit dem Factor  $\frac{agM}{\mathfrak{M}} (\alpha + \alpha_1)$ , welcher nicht Null werden kann, abkürzt und  $\alpha_1$  bestimmt, sofort:

$$\alpha_1 = \alpha \left[ 1 - \frac{2\mu}{M} (A\alpha + B\sqrt{ag}) \right].$$

Was ferner die Schwingungszeit  $T$  betrifft, so folgt zuerst, wenn man der Kürze wegen  $\frac{2\mu\alpha}{M} (A\alpha + B\sqrt{ag}) = q$  und  $\sqrt{\frac{agM}{\mathfrak{M}}} = N$  setzt, aus der vorigen Gleichung ( $\omega$ ) (da  $d\varphi$  und  $dt$  verschiedene Zeichen erhalten müssen):

$$N dt = \frac{-d\varphi}{\sqrt{[\alpha^2 - \varphi^2 - q(\alpha - \varphi)]}}$$

Ferner ist (Lehrb. I. I. S. 312, Form. 2'):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + bx - cx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx - b}{\sqrt{(4ac + b^2)}} + C$$

folglich, da hier  $a = \alpha^2 - q\alpha$ ,  $\beta = q$  und  $c = 1$  ist, sofort:

$$Nt = C - \arcsin \left[ \frac{2\varphi - q}{\sqrt{(4\alpha^2 - 4q\alpha + q^2)}} \right] = C - \arcsin \left( \frac{2\varphi - q}{2\alpha - q} \right).$$

Um die Constante  $C$  zu bestimmen, hat man, da für  $\varphi = \alpha$ ,  $t = 0$  ist,

$$C = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \text{ folglich allgemein } Nt = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{2\varphi - q}{2\alpha - q} \right)$$

und da für  $\varphi = -\alpha_1 = q - \alpha$  die Zeit  $t = T$  wird, sofort:

$$NT = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[ \frac{-(2\alpha - q)}{2\alpha - q} \right] = \frac{\pi}{2} + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Aus dieser Relation folgt endlich, wenn man für  $N$  den Werth wieder herstellt:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{agM}}.$$

\*) Indem man nämlich nach der Relat. ( $\beta$ )  $\alpha_1 = \alpha - q$ ,  $\alpha_2 = \alpha_1 - q = \alpha - 2q$  u. s. w. nimmt,

Perioden und zwar jede aus 1800 Schwingungen, d. h. es wurden die Schwingungsbögen nach jeder solchen, 1 Stunde dauernden Periode beobachtet und zwar war dabei  $D = 1.347$  Zoll,  $a = 144$  Zoll,  $\frac{\delta}{\Delta} = 17600$  und  $n = 1800$ ; der Bogen betrug beim Beginn des Versuches 120 Minuten und dieser nahm allmählig so ab, daß er am Ende jeder der 12 Perioden oder Stunden der Reihe nach die Werthe annahm: 61.2, 35.4, 21.9, 14.1, 9.4, 6.3, 4.1, 2.7, 1.8, 1.2, .8, .5 Minuten, so, daß also, wenigstens für die spätern Werthe sehr nahe  $\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{2}{3}$  ist.

Die obige Formel gibt (nach der Berechnung von *Duchemin*) für die abnehmenden Werthe des Winkels  $\alpha$  beziehungsweise 60.55, 35.50, 22.03, 14.18, 9.15, 6.04, 3.97, 2.64, 1.76, 1.17, .78, .52 Minuten, woraus die hinlängliche Übereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen hervorgeht.

Diese entwickelte Formel ( $\delta$ ) paßt jedoch nicht bloß für so kleine Schwingungsbögen, wie sie bei den vorstehenden *Borda'schen* Versuchen vorkommen, sondern sie ist auch noch für größere Bögen hinreichend genau. Denn bestimmt man daraus die Schwingungszahl  $n$ , so erhält man:

$$n = \frac{\left(1 - \frac{\alpha_n}{\alpha}\right)M}{2\mu(Aa\alpha + B\sqrt{ag})}$$

Nach den Versuchen von *Dubuat* mit dem bereits oben erwähnten Kugelpendel, wobei  $D = 2.645$ ,  $a = 36.637$  und  $a\alpha = 12$  Zoll war, und welches er in der Luft schwingen ließ, waren, wenn die Kugel in der Luft 2348 Gran wog,  $31\frac{2}{3}$ , wenn das Gewicht doppelt so groß war, 63, und wenn das Gewicht des Pendels 3 Mal so groß war, 95 aufeinander folgende Schwingungen nothwendig, um einen Bogen von  $a\alpha = 12$  auf jenen  $a\alpha_n = 10$  Zoll (d. i. von  $\alpha = 18^\circ 46'$  auf nahe  $\alpha_n = 15^\circ 38'$ ) herab zu bringen.

Nach der vorigen Formel erhält man, wegen  $\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ , für diese 3 Versuche beziehungsweise  $n = 31.59$ ,  $63.17$  und  $94.76$ , so, daß sich also auch bei diesen bedeutend größeren Schwingungsbögen noch eine genügende Übereinstimmung zeigt, man daher mit Recht schließen darf, daß der Ausdruck für den Widerstand der Flüssigkeit bei solchen Pendelschwingungen aus zwei Gliedern bestehen muß, wovon das eine dem Quadrate und das andere der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

**Schlussbemerkung.** Die hier behandelte Aufgabe dient natürlich auch zur sogenannten Reduction der in der Luft oder im Wasser angestellten Pendelversuche auf den leeren Raum, d. h. zur Bestimmung der Länge des einfachen Pendels, welches im leeren Raume eben so schwingt, d. i. dieselbe Schwingungsdauer besitzt, wie das betreffende zusammengesetzte Pendel in der Luft oder im Wasser.

Das gewöhnliche Verfahren bei dieser Reduction beruht auf dem hydrostatischen oder *Archimed'schen* Satze, dafs jeder in eine Flüssigkeit eingetauchte Körper eben so viel von seinem Gewichte verliert, als das Gewicht des von ihm verdrängten Flüssigkeitsvolumen beträgt. Sind nämlich  $L$  und  $l$  die Längen der einfachen Pendeln, welche ihre Schwingungen beziehungsweise im leeren Raume und in der Flüssigkeit in derselben Zeit oder synochron mit dem zusammengesetzten Pendel in dieser Flüssigkeit machen, ferner  $P$  und  $p$  die Gewichte des Pendels in der Flüssigkeit und der von dem Pendel verdrängten Flüssigkeit; so hat man nach diesem Verfahren  $L:l = P+p:P$  und daraus:

$$L = \left( \frac{P+p}{P} \right) l \dots (\alpha')$$

*Dubuat*, welcher zuerst auf die Unzulänglichkeit dieses Verfahrens und darauf aufmerksam machte, dafs man dabei auf die das Pendel begleitende Flüssigkeitsmasse Rücksicht nehmen müsse, setzt dafür:

$$L = \left( \frac{P+np}{P} \right) l \dots (\beta')$$

wobei  $n$  ein Erfahrungscoeffizient, jedoch immer gröfser als die Einheit ist. Aus seinen zahlreichen Versuchen, welche er mit Kugelpendeln aus verschiedenen Massen, von verschiedenen Durchmessern und Längen (die Kugeln an feinen Fäden aufgehängt) vornahm, ergibt sich als Mittelwerth  $n = 1.585$ , während aus drei andern von *Dubuat* mit solchen Pendeln gemachten Beobachtungen, die er in der Luft schwingen liefs, als Mittelwerth  $n = 1.560$  hervorgeht. Übrigens bemerkt *Dubuat*, dafs die einzelnen Werthe, welche diese Mittelwerthe von  $n$  geben, für dieselbe Kugel mit der Länge, und bei derselben Länge mit der Abnahme des Durchmessers etwas zunehmen

*Bessel* folgert aus seinen scharfsinnigen Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels (Berlin, 1828), dafs man

$$L = \frac{a^2 + m^2 + (n-1)a^2 f}{a(1-f)} \dots (\gamma')$$

setzen müsse, wobei (nach der frühern Bezeichnung)  $a$  der Abstand des Schwerpunktes des zusammengesetzten Pendels von der Rotationsachse,  $a^2 + m^2$  das Moment der Trägheit des Pendels in Beziehung auf diese

Achse dividirt durch dessen Masse,  $f = \frac{\Delta}{\delta}$  das Verhältnifs der Dichtigkeit der Flüssigkeit und der absoluten Dichtigkeit des Pendels, und endlich  $n$  einen durch die Beobachtung zu bestimmenden Coeffizienten bezeichnet. Übrigens bemerkt *Bessel*, dafs man bei der Anwendung dieser Formel

auf seine Versuche  $(a^2 + m^2)f^2 = a^2 f^2$  setzen, diese also wegen  $\frac{a^2 + m^2}{a} = l$  auf die Form der *Dubuat'schen* Formel ( $\beta'$ ) bringen könne.

*Bessel* fand aus den Versuchen mit zwei Kugeln, wovon die eine aus Elfenbein, die andere aus Messing bestand, und die er an einem, im Verhältnifs ihres Durchmessers sehr langen Drahte aufgehängt in der Luft

schwingen liefs,  $n = 19454$ , während er aus den Versuchen mit der Messingkugel, die er im Wasser und in der Luft schwingen liefs,  $n = 1602$ , wenn das Pendel nahezu die Länge des Secundenpendels hatte, dagegen  $n = 1648$ , wenn dasselbe ungefähr 3 Mal so lang war.

Endlich beweist *Bessel* in einer zweiten Abhandlung (vom J. 1832), dafs der Coefficient  $n$  von der Dichtigkeit des Pendels unabhängig sey.

Aus den von dem englischen Capitän *Sabine* unter dem gewöhnlichen und unter einem sehr geringen Drucke der Atmosphäre angestellten Versuchen ergab sich, dafs die Anzahl der Schwingungen seines Pendels in 24 Stunden im leeren Raume, um  $10\cdot36$  gröfser als in der gewöhnlichen Luft gewesen, während dieser Überschufs nach der gewöhnlichen, oben angegebenen Regel (Gleich.  $\alpha'$ ) der Reduction nur  $6\cdot26$  betragen haben würde. Dieser Versuch bezieht sich auf ein sphärisches Secundenpendel

$$\text{und gibt } n = \frac{10\ 36}{6\cdot26} = 1\cdot655.$$

Noch auffallender ergibt sich die Unzulässigkeit der gewöhnlichen Reductionsmethode aus den Versuchen von *Baily* (London, 1832), indem sie zeigen, dafs diese Correction in gewissen Fällen 27 Mal zu klein ist. Diese Versuche geben für ein Kugelpendel von denselben Dimensionen, wie das *Bessel'sche* war,  $n = 1751$  und für das Mittel aus den Versuchen mit 3 Kugeln von verschiedenen Durchmessern  $n = 1778$ .

Mehrere Gelehrte, und darunter auch der berühmte *Poisson*, waren geneigt, den Satz, welcher aus den *Bessel'schen* Beobachtungen hervorzugehen schien, aufzustellen, dafs der Gewichtsverlust, welchen ein Pendel in einer Flüssigkeit erfährt, während der Bewegung gröfser als in der Ruhe sey. Allein *Duchemin* bemerkt mit Recht, dafs dies nach dem neuern Stande der Wissenschaft beurtheilt, auf einer Täuschung beruht und dafs man die durch die Versuche constatirte Zunahme der Schwingungsdauer des Pendels, einer Ursache zuschreiben müsse, welche unter die zur Strömung der Flüssigkeit von dem vordern nach dem hintern Theile des Körpers erforderlichen Bedingungen gehört und sofort in der Erhaltung der Form des Fadenbündels oder der Masse der den bewegten Körper umgebenden Flüssigkeitsfäden, folglich in der gemeinschaftlichen Bewegung dieser Masse mit jener des Körpers besteht.

Aus dem 1. Absatze dieser Aufgabe folgt für die relative Masse des Pendels

$$M = Q\delta(1-f)$$

und für die Summe der Trägheitsmomente der absoluten Masse des Pendels und der dasselbe begleitende Flüssigkeitsmasse

$$\mathfrak{M} = Q\delta(a^2 + m^2) \left[ 1 - f + cf \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right) \right]$$

wobei  $f = \frac{\Delta}{\delta}$  und  $c = \frac{a^2 + m'^2}{a^2 + m^2}$ , also wenig von der Einheit verschieden, wenn  $a$  gegen  $m$  und  $m'$  bedeutend grofs sind.

Da nun die Länge  $L$  des einfachen Pendels, welches mit dem zusam-

mengesetzten dieselbe Schwingungsdauer besitzt (§. 170), aus der Formel  $L = \frac{\mathfrak{M}}{aM}$  bestimmt wird, so ist, wenn man für  $\mathfrak{M}$  und  $M$  die vorigen Werthe setzt:

$$L = \frac{a^2 + m^2}{a(1-f)} \left[ 1 - f + cf \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right) \right] \dots (\delta')$$

aus welcher Formel sofort folgt, daß die das Pendel begleitende Flüssigkeitsmasse  $Q'$  die Länge des einfachen Pendels um die Größe

$$\frac{a^2 + m^2}{a(1-f)} f \left[ c \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right) - 1 \right]$$

vermehrt, weil, wenn man diese Masse  $Q'$  unberücksichtigt läßt und daher nur, nach der gewöhnlichen Reductionsmethode, den Gewichtsverlust des Pendels in der Flüssigkeit in Rechnung bringt, sofort:

$$L = \frac{a^2 + m^2}{a(1-f)} \text{ ist.}$$

Man sieht leicht, daß wegen  $l = \frac{a^2 + m^2}{a}$  und  $f = \frac{p}{P+p}$ , diese Formel ( $\delta'$ ) mit jener ( $\beta'$ ) des *Dubuat* übereinstimmt, wenn man

$n = c \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right)$  setzt. Kann man nun, unter den erwähnten Bedingungen

näherungsweise  $c = 1$  setzen, so ist ebenfalls annähernd  $n = 1 + \frac{Q'}{Q}$

und daher z. B. für das Kugelpendel, wegen (75. Aufgabe, Relat.  $r$ )

$$\frac{Q'}{Q} = \cdot 6, \text{ sofort } n = 1\cdot 6.$$

Um jedoch den Beobachtungsergebnissen noch besser zu entsprechen und weil eigentlich  $1 + \frac{Q'}{Q}$  mit dem Factor  $c$ , welcher etwas größer als die Einheit ist, multiplicirt werden sollte, setzt *Duchemin* für das Kugelpendel:

$$n = c \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right) = 1\cdot 0625 \left( 1 - \frac{s}{a} \right)^2 \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right)$$

wobei  $s$  die in der 74. Aufgabe (2. Auflösung) angegebene Bedeutung hat

und für die Kugel (Beispiel 2, der genannten Aufg.)  $= \frac{2D}{3\pi}$  ist; mit die-

sem Werthe und wegen  $\frac{Q'}{Q} = \cdot 6$  wird also für dieses Pendel:

$$n = 1\cdot 7 \left( 1 - \frac{2D}{3\pi a} \right)^2 \dots (\epsilon)$$

Auf gleiche Weise setzt er für einen Cylinder, welcher seiner Länge nach aufgehängt ist:

$$n = c \left( 1 + \frac{Q'}{Q} \right) = 1\cdot 075 \left[ 1 + \frac{Q'}{Q} \left( 1 - \frac{s}{r} \right)^2 \right]$$



oder da für den Cylinder vom Durchmesser  $D$  und der Länge  $b$ ,

$$\frac{Q'}{Q} = \cdot 75 \left(\frac{b}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } s = \frac{1}{4} b \text{ ist, sofort:}$$

$$n = 1\cdot 075 \left[ 1 + \cdot 75 \left(\frac{b}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{4a}\right)^2 \right] \dots (\mu)$$

Die Formel ( $\epsilon$ ) enthält in der That die von *Dubuat* für das Kugelpendel gefundenen Consequenzen, dafs nämlich der Werth von  $n$  desto kleiner ist, je gröfser bei derselben Länge des Pendels die Kugel, dagegen für dieselbe Kugel desto gröfser wird, je länger das Pendel ist. Diese Formel gibt z. B. für  $a = 1$  Meter und für Kugeln von den Durchmessern  $D = \cdot 027, \cdot 054, \cdot 081, \cdot 108$  und  $\cdot 135$  Meter beziehungsweise  $n = 1\cdot 681, 1\cdot 661, 1\cdot 642, 1\cdot 623$  und  $1\cdot 604$ , woraus sofort folgt, dafs die Veränderungen des Durchmessers der Kugel auf die Werthe von  $n$  für das Secundenpendel wenig Einflufs haben.

Liegen hingegen die Werthe von  $\frac{D}{a}$  zwischen sehr weiten Grenzen, so variiren diese Werthe von  $n$  ziemlich stark, wie eine Vergleichung der folgenden nach dieser Formel berechneten und von *Dubuat* beobachteten Werthe zeigt.

Für den Durchmesser der Kugeln =  $6\cdot 67$  Zoll und den Pendellängen von  $9\cdot 178, 14\cdot 894, 55\cdot 5, 125\cdot 42$  und  $219\cdot 46$  Zoll, sind die Werthe von  $n$  beziehungsweise nach den Beobachtungen  $1\cdot 27, 1\cdot 394, 1\cdot 654, 1\cdot 664$  und  $1\cdot 674$ , dagegen nach der vorigen Formel  $1\cdot 216, 1\cdot 392, 1\cdot 614, 1\cdot 662$  und  $1\cdot 678$ .

Für den Durchmesser von  $6\cdot 625$  Zoll und der Länge von  $96\cdot 08$  Zoll ist nach der Beobachtung und Berechnung beziehungsweise  $n = 1\cdot 63$  und  $1\cdot 651$ . Dabei wurden die 5 ersten Versuche im Wasser, der 6te in der Luft angestellt.

Was endlich die Formel ( $\mu$ ) für das Cylinderpendel betrifft, so zeigen die folgenden Zahlen die genaue Übereinstimmung der nach dieser Formel berechneten mit den von *Baily* mit solchen Pendeln, die er in der Luft schwingen liefs, beobachteten Werthe.

Länge $b$ der Cylinder	Durchmesser $D$ der Cylinder	Werthe von $a$	Werthe von $n$	
			beobachtet	berechnet
Zoll	Zoll	Zoll		
2·06	2·06	39	1·860	1·860
4·00	2·06	39	2·032	2·141
56·40	1·50	28·20	2·318	2·311

Dabei war der Cylinder des erstern Pendels aus Messing und an einem Metalldrahte von  $\frac{1}{16}$  Zoll Durchmesser aufgehangen. Der Cylinder des zweiten Pendels bestand aus einem messingenen hohlen Cylinder, welcher mit Blei ausgegossen und an einem Messingdrahte von  $\cdot 185$  Zoll Durchmesser

aufgehungen war; das Gewicht derselben betrug 2050 Gran. Das dritte Pendel endlich bestand einzig aus einer Messingröhre, an deren obern Theile unmittelbar die Rotationsachse angebracht war. Es ist also merkwürdig, dafs dieselbe Formel ( $\mu$ ) eben so gut für das erste Pendel, wobei ein nur 2 Zoll langer, an einem Faden aufgehängener Cylinder, als für das letztere Pendel paßt, welches aus einem 56 Zoll langen hohlen Cylinder bestand. Der für das zweite Pendel nach dieser Formel berechnete Werth von  $n$  weicht aus dem Grunde von dem beobachteten etwas ab, weil dabei die Pendelstange schon zu stark war, als dafs man ihre Masse und jene der sie umgebenden Flüssigkeitsfäden unberücksichtigt lassen könnte.

Weitere wichtige und interessante Bemerkungen über diesen Gegenstand findet man in der citirten Schrift von *Duchemin* (*Recherches experimentales sur les lois de la résistance des fluides*) im Kapitel XI

## Z u s a t z 1.

### Ableitung der *Simpson'schen* Näherungsformel.

Um die in diesem Werke mehrere Male angewendete sogenannte *Simpson'sche* Regel auf eine einfache Weise abzuleiten, kann man folgenden geometrischen Weg einschlagen.

Bekanntlich beruht die Quadratur der ebenen Curven, d. h. die Bestimmung der krummlinigen ebenen Flächen auf der Entwicklung des bestimmten Integrales  $\int_{x'}^{x''} y dx$ , wobei  $y$  die der allgemeinen Abscisse  $x$  entsprechende Ordinate der betreffenden Curve, und  $x'$ ,  $x''$  die den beiden äufsern Ordinaten, welche die zu bestimmende Fläche mit begrenzen, zugehörigen Werthe von  $x$  sind. Läßt sich nun  $y$  nicht als eine Function von  $x$  ausdrücken, oder ist die Curve nur eine empirische, für welche die, gewissen Abscissen entsprechenden Ordinaten nur aus Beobachtungen gefunden wurden, oder ist endlich der Ausdruck  $y dx$  überhaupt nicht integrabel; so muß man zu Näherungsmethoden Zuflucht nehmen, nämlich die zu bestimmende Fläche durch nahe an einander liegende Ordinaten in schmale Trapeze, wovon eine Seite ein Theil der Curve ist, zerlegen und diese einzelnen Trapeze mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit zu berechnen suchen, indem dann ihre Summe sofort auch der näherungsweise Werth des obigen Integrales ist.

Man verfährt dabei am einfachsten, wenn man in allen diesen Fällen die betreffende Curve als eine gemeine oder Apollonische

Parabel ansieht und die bekannten Eigenschaften dieser Curve dabei gehörig benützt.

Um nämlich die von den beiden Ordinaten  $pm$ ,  $p'm'$  (Fig. 30) der Abscisse  $pp'$  und dem Bogen  $mam'$  der Curve  $AaD'$  begrenzte ebene Fläche näherungsweise zu bestimmen, denke man sich den Bogen  $mam'$  als einer gemeinen Parabel angehörig, welche durch die drei Punkte  $m$ ,  $a$ ,  $m'$  geht und wobei die Ordinate  $aq$  in der Mitte zwischen jenen  $pm$  und  $p'm'$  liegen soll. Da jedoch die völlige Bestimmung der Parabel (Lehrb. II. §. 135) vier Bedingungen erfordert, so kann man noch als vierte Bedingung hinzufügen, daß  $a$  der Scheitelpunct eines Durchmesser  $aq$  (Comp. §. 514) seyn soll.

Dies vorausgesetzt, wird (Comp. §. 516) die Sehne  $mm'$  durch die Ordinate  $aq$  im Punkte  $b$  halbirt und die zu  $mm'$  durch  $a$  gezogene parallele Gerade  $nan'$  bildet in diesem Punkte  $a$  eine Tangente an die Curve. Da nun bekanntlich das parabolische Segment  $mam'm = \frac{2}{3}$  Parallelogramm  $mn'$ , dieses also doppelt so groß als die Fläche  $mnam'n'$  ist; so hat man, wenn man das Trapez  $pmbm'p' = A$ , jenes  $pnn'p' = B$ , die parabolische Fläche  $pmam'p' = F$  und das parabolische Segment  $mam'm = f$  setzt, sofort  $f = F - A = 2(B - F)$  und daraus:

$$3F = A + 2B \dots (1)$$

Nun ist aber  $A = (pm + p'm')pq$  und  $B = (pn + p'n')pq$  oder wegen  $aq = \frac{pn + p'n'}{2}$  auch  $B = 2aq \times pq$ , folglich, wenn man diese Werthe in der vorigen Relation (1) substituirt:

$$F = \frac{pq}{3} (pm + p'm' + 4aq), \text{ oder wenn man } pp' = a \text{ setzt, auch:}$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} (pm + p'm' + 4aq) \dots (2)$$

Halbirt man ferner auch noch  $pq$  und  $qp'$  in  $\beta$  und  $\beta'$ , und zieht durch die Halbierungspunkte die Ordinaten  $\beta\alpha$  und  $\beta'\alpha'$ , so ist, wenn man  $pq = qp' = a'$  setzt, auf dieselbe Weise, die Fläche:

$$pmaq = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2} (mp + aq + 4\alpha\beta) \text{ und die Fläche}$$

$$qam'p' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2} (aq + m'p' + 4\alpha'\beta'), \text{ folglich:}$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2} (mp + aq + 4\alpha\beta + aq + m'p' + 4\alpha'\beta) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a'}{2} [mp + m'p' + 4(\alpha\beta + \alpha'\beta') + 2aq]$$

oder wegen  $a' = \frac{a}{2}$ , und wenn man die Ordinaten  $pm$ ,  $\beta\alpha \dots p'm'$  der Reihe nach mit  $y_0, y_1 \dots y_4$  bezeichnet, auch:

$$F = \frac{a}{3.4} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

eine Formel, welche sich leicht fortsetzen läßt, im Falle man die Intervalle  $p\beta, \beta q \dots$  abermals halbiren, d. i. die ursprüngliche Basis  $pp'$  in 8, und durch fortgesetztes Halbiren noch weiter in 16, 32 u. s. w. gleiche Theile theilen will.

Theilt man dagegen jedes der beiden vorigen Intervalle  $pq = qp'$  in 3 gleiche Theile, bezeichnet die aufeinander folgenden Theilungspunkte mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so wie die durch die Punkte  $p$  oder 0, 1, 2 .. 6 oder  $p'$  gezogenen Ordinaten der Reihe nach durch  $y_0, y_1 \dots y_6$  und setzt die Gröfse der Intervalle  $0, 1 = 1, 2 = \dots = 5, 6 = a''$ ; so hat man nach der durch die Relation (2) ausgedrückten Regel für die Flächen der aufeinander folgenden Trapeze oder Streifen der Reihe nach:

$$\frac{a''}{3.2} (y_0 + y_2 + 4y_1), \quad \frac{a''}{3.2} (y_2 + y_4 + 4y_3), \quad \frac{a''}{3.2} (y_4 + y_6 + 4y_5)$$

folglich, wenn man diese Flächen summirt, sofort, wegen  $a'' = \frac{a}{3}$ :

$$F = \frac{a}{3.6} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

Man sieht aus der bisherigen Entwicklung, daß wenn man die Basis  $pp' = a$  überhaupt nur in eine gerade Anzahl, z. B. in  $2n$  gleiche Theile theilt, sofort allgemein

$$F = \frac{a}{3.2n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

ist und daß man die gesuchte Fläche  $F$  um so genauer erhält, je größer  $n$  ist.

Setzt man die Summe der beiden äußern Ordinaten  $y_0 + y_{2n} = S_{2n}$ , jene der durch die ungeraden Theilungspunkte gehenden:

$y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1} = S_{2n-1}$  und die Summe der durch die geraden Theilungspunkte gehenden Ordinaten (wobei die letzte sofort ausgeschlossen ist)  $y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2} = S_{2n-2}$ ; so ist auch:

$$F = \frac{a}{3.2n} (S_{2n} + 4S_{2n-1} + 2S_{2n-2}).$$

Da nun aber nach der einleitenden Bemerkung diese Fläche nichts anderes als das bestimmte Integral  $\int_{x'}^{x''} y dx$  ist, wenn man nämlich die den Ordinaten  $y_0$  und  $y_{2n}$  entsprechenden Abscissen durch  $x'$  und  $x''$  bezeichnet; so hat man endlich wegen  $a = x'' - x'$ , als einen Näherungswerth von beliebiger Genauigkeit:

$$\int_{x'}^{x''} y dx = \frac{x'' - x'}{3 \cdot 2n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$= \frac{x'' - x'}{3 \cdot 2n} (S_{2n} + 4S_{2n-1} + 2S_{2n-2})$$

wobei es sich also nur darum handelt, die Differenz  $x'' - x'$  in eine beliebige, jedoch gerade Anzahl ( $= 2n$ ) gleicher Theile zu theilen, die durch die Theilungspunkte  $0, 1, 2 \dots 2n$  gedachten Ordinaten  $y_0, y_1, y_2 \dots y_{2n}$  zu berechnen oder durch Beobachtung zu bestimmen, und in die vorige Formel, welche eben die *Simpson'sche* ist und um so genauere Resultate gibt, je größer man  $2n$  nimmt, zu substituieren.

## Z u s a t z 2.

Die in vielen Fällen eben so brauchbare (und in §. 173 gleichfalls angewendete) Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \dots \right. \\ \left. \dots + f[a + (n-1)\delta] \right] \delta$$

wobei  $\delta = \frac{b-a}{n}$  und  $n$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, läßt sich auf folgende Weise ableiten.

Läßt man die Größe  $x = a$  nach und nach um die kleine Größe  $\delta$  zunehmen, also  $x$  allmählig in  $a, a + \delta, a + 2\delta \dots a + n\delta = b$  übergehen, so, daß zwischen den beiden Grenzwerten  $a$  und  $b$   $n - 1$  Werthe oder Zwischenglieder liegen, und setzt man das allgemeine In-

tegral: 
$$\int f(x) dx = F(x),$$

also das besondere:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \dots (1)$$

so hat man, wenn  $a$  in  $a + \delta$  übergeht, nach dem *Taylor'schen* Theorem:

$$F(a + \delta) = F(a) + \frac{d.F(a)}{da} \delta + \frac{d^2.F(a)}{da^2} \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3.F(a)}{da^3} \frac{\delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Setzt man Kürze halber

$$\frac{d.f(x)}{dx} = f'(x), \quad \frac{d^2.f(x)}{dx^2} = f''(x) \text{ u. s. w.}$$

so ist wegen  $F(x) = \int f(x) dx$  sofort  $\frac{d.F(x)}{dx} = f(x)$ , also auch:

$\frac{d.F(a)}{da} = f(a)$ , und eben so  $\frac{d^2.F(a)}{da^2} = f'(a)$ ,  $\frac{d^3.F(a)}{da^3} = f''(a)$  u. s. w.

fort, so, daß also der vorige Ausdruck auch die Form annimmt:

$$F(a+\delta) = F(a) + f(a) \cdot \delta + f'(a) \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + f''(a) \cdot \frac{\delta^3}{1.2.3} + \dots$$

Analog mit diesem Ausdrucke erhält man für die folgenden Werthe:

$$F(a+2\delta) = F(a+\delta) + f(a+\delta) \cdot \delta + f'(a+\delta) \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + \dots$$

$$F(a+3\delta) = F(a+2\delta) + f(a+2\delta) \cdot \delta + f'(a+2\delta) \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + \dots$$

.....

$$F(a+n\delta) = F[a+(n-1)\delta] + f[a+(n-1)\delta] \cdot \delta + f'[a+(n-1)\delta] \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + \dots$$

Werden diese Reihen addirt, so erhält man, wegen  $a + n\delta = b$  sofort:

$$(2) F(b) - F(a) = \sum f(a+i\delta) \cdot \delta + \sum f'(a+i\delta) \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + \sum f''(a+i\delta) \cdot \frac{\delta^3}{1.2.3} + \dots$$

wobei  $i$  der Reihe nach  $= 0, 1, 2 \dots (n-1)$  zu setzen ist, so, daß z. B.  $\sum f(a+i\delta) = f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \dots + f[a+(n-1)\delta]$  wird.

Nimmt man ferner nach und nach  $f(x), f'(x) \dots$  statt  $F(x)$  und  $f'(x), f''(x) \dots$  statt  $f(x)$ , so erhält man eben so:

$$f(b) - f(a) = \sum f'(a+i\delta) \cdot \delta + \sum f''(a+i\delta) \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + \dots$$

$$f'(b) - f'(a) = \sum f''(a+i\delta) \cdot \delta + \sum f'''(a+i\delta) \cdot \frac{\delta^2}{1.2} + \dots$$

$$f''(b) - f''(a) = \sum f'''(a+i\delta) \cdot \delta + \dots$$

Vernachlässigt man nun die dritten und höhern Potenzen der kleinen Größe  $\delta$ , so kann man zufolge der vorstehenden Relationen in der obigen Gleichung (2) statt

$$\sum f'(a+i\delta) \cdot \frac{\delta^2}{2} \text{ setzen: } [f(b) - f(a)] \frac{\delta}{2} - [f'(b) - f'(a)] \frac{\delta^2}{4}$$

und statt  $\sum f''(a+i\delta) \cdot \frac{\delta^3}{6}$  setzen:  $[f'(b) - f'(a)] \frac{\delta^2}{6}$

(während Alles folgende nach der gemachten Voraussetzung wegfällt).

Dadurch geht aber die genannte Gleichung (2) in die folgende über:

$$F(b) - F(a) = \sum f(a+i\delta) \cdot \delta + [f(b) - f(a)] \frac{\delta}{2} - [f'(b) - f'(a)] \frac{\delta^2}{12}$$

oder es ist (Relat. 1):

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] \delta + f(a+\delta) \delta + f(a+2\delta) \delta + \dots + f[a+(n-1)\delta] \delta - [f'(b) - f'(a)] \frac{\delta^2}{12} \dots (A)$$

Dieser Ausdruck gibt das gesuchte Integrale um so genauer, je kleiner  $\delta = \frac{b-a}{n}$ , d. i. je größer  $n$  ist, und je langsamer sich die Function  $f(x)$  zwischen ihren Grenzen  $a$  und  $b$  ändert.

In den meisten Fällen wird man das letzte in  $\delta^2$  multiplicirte Glied auslassen können, wodurch diese Formel (A) in die einfachere

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + f(a + \delta) + f(a + 2\delta) + \dots \right. \\ \left. \dots + f[a + (n-1)\delta] \right\} \delta \dots \quad (B)$$

übergeht, so, daß diese letztere Formel nur die speciellen Werthe von  $f(x)$  enthält, die in Zahlen gegeben seyn können, ohne daß die Form dieser Function  $f(x)$  selbst gegeben oder bekannt zu seyn braucht.

## Nachtrag

### zur Literatur im Compendium.

---

- Bataille et Jullien*, Traité des machines à vapeur. Paris 1847 49.
- Boucharlat, J. J.*, Éléments de Mécanique. 2<sup>me</sup> édition. Paris 1840.
- Brandes, Heinr. W.*, Lehrbuch der Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung fester und flüssiger Körper. 2 Thle. Leipzig 1817.
- Brewer, Joh. P.*, Lehrbuch der Mechanik. 3 Thle. Düsseldorf 1829—32.
- Brix, Ad. Ferd.*, Elementar-Lehrbuch der Statik fester Körper, mit besonderer Rücksicht auf technische Anwendungen. 1. Abtheilung. Berlin 1831.
- Broch, Dr. J. P.*, Lehrbuch der Mechanik. 1. Abtheilung, Mechanik fester Körper. Berlin 1849.
- Bürja, Abel*, Grundlehren der Statik. Leipzig 1789.
- — — — — „ der Dynamik. Leipzig 1791.
- — — — — „ der Hydrostatik. Leipzig 1790.
- — — — — „ der Hydraulik. Leipzig 1792.
- Duchemin*, (Colonel), Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides. Paris 1842. (Davon eine deutsche Übersetzung von Dr. H. C. Schnuse. Braunschweig, 1844).
- Euler, Leonh.*, Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaften von der Bewegung, mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Dr. J. P. Wolfers. 2 Theile. Greifswalde 1848—50.
- Fink, A.*, Elementar-Lehrbuch der Mechanik fester Körper. Wien 1845.
- Fischer, Georg Andr.*, Anfangsgründe der Statik und Dynamik fester Körper, ein Lehrbuch für Bau- und andere Schulen. 2. Aufl. Leipzig 1833.
- — — — — Anfangsgründe der Hydrostatik und Hydraulik zum Selbstunterricht für angehende Architekten und zunächst als Lehrbuch für den Unterricht in der k. sächs. Bauschule entworfen. Leipzig 1824.
- Forstner, Alex. v.*, Lehrbuch der theoretischen Mechanik oder der Gleichgewichts- und Bewegungslehre fester, tropfbarer und luftf. Körper. 3 Bde. Berlin 1831.
- Francoeur, L. B.*, Elementar-Lehrbuch der Mechanik für den öffentl. Unterricht. Aus dem Franz. nach der 4. Aufl. mit erläuternden Anmerk. und Zusätzen, von W. Opelt. Dresden 1825.
- Gaubert, C.*, Traité de Mécanique. Paris.
- Gregory, Olinth*, theoret, pract. und beschreibende Darstellung der mechanischen Wissenschaften. Nach der 3. Aufl. aus dem Engl. übersetzt und mit Anmerk. und Zusätzen, von J. F. W. Dietlein. 2 Bde. Halle 1825 28.
- Grunert, Joh. Aug.*, Statik fester Körper. Halle 1825.



- Holtzmann, Karl*, die Mechanik und Maschinenlehre, volksfalsch dargestellt. Stuttgart 1848
- Junvier*, Traité des machines à vapeur, appliquées à l'industrie. Bruxelles, Société Belge. 1838.
- Ide, J. J. A.*, System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. 2 Theile. Berlin 1802.
- Kronauer, J. H.*, Zeichnungen der ausgeführten, in verschiedenen Zweigen der Industrie angewandten Maschinen, Werkzeuge u. Apparate. Zürich 1845—47.
- Lagrange, J. L.*, analytische Mechanik. Aus dem Franz. mit einer erläuternden Anmerk. von *F. W. A. Murhard*. Göttingen 1797.
- Langsdoꝛf, Carl Christ.*, mechan. und hydrodynam. Untersuchungen, nebst vollst. Anwendung auf das Maschinenwesen bei Salzwerken. Altenburg 1783.
- — Lehrbuch der Hydraulik, mit besonderer Rücksicht auf die Erfahrung. 2 Bde. Altenburg 1794—96.
- — Handbuch der Maschinenlehre für Practiker und academ. Lehrer. 2 Bde. Altenburg 1796.
- — Grundlehren der mechanischen Wissenschaften, welche die Statik, Mechanik, Hydrostatik, Hydraulik und Maschinenlehre enthalten, mit besonderer Rücksicht für Physiker und Praktiker. Erlangen 1802.
- — Theorie des Krummzapfens Erlangen 1803.
- — Handbuch der gemeinen und höhern Mechanik fester und flüssiger Körper, mit besonderer Rücksicht auf Hydrotechnik. Heidelberg 1807.
- — neue Erweiterung der mechanischen Wissenschaften, besonders zur Vervollkommnung der Maschinenlehre, mit Anwendung auf Getraide-, Säge- u. Stampfmühlen; Hammerwerke, Röhrenleitungen, Kanäle. Mannheim 1816.
- — ausführliches System der Maschinenkunde etc., für den Praktiker bearbeitet. 2 Bde. Heidelberg 1826—28.
- Lanz et Betancourt*. Essai sur la composition des machines. Paris 1840.
- Lindner, Ignaz*, Anleitung zur Mechanik der festen Körper, nach den Elementarbegriffen der Mathematik für die mathematischen Schüler der k. k. Artillerie. Wien 1817.
- Magold, Maur.*, Lehrbuch der Mechanik fester Körper. 1. Band. München 1810.
- Meissner, W.*, Anleitung zum Bau der Mahlmühlen. Hamburg 1835.
- — Geschichte und erklärende Beschreibung der Dampfmaschinen, Dampfschiffe und Eisenbahnen. Leipzig 1839.
- Möbius, Aug. Ferd.*, Lehrbuch der Statik. 2 Thle. Leipzig 1837.
- Monge, Gasp.*, Anfangsgründe der Statik. Übersetzt aus dem Franz. und mit Erläuterungen versehen von *C. M. Hahn*. Berlin 1806.
- Morin, A.* Expériences sur le tirage des voitures et sur les effets destructeurs, qu'elles exercent sur les roues. Paris 1842.
- Ohm, Dr. M.*, Lehrbuch der Mechanik, zugleich mit den nöthigen Lehren der höhern Analysis und der höhern Geometrie, elementär vorgetragen. 3 Bde. Berlin 1836—38.
- — kurzes Elementar-Lehrbuch der gesammten mechanischen Wissenschaften für höhere Bürger-, Gewerb- und Militärschulen. Mit vielen Übungsbeispielen. Berlin 1840.

- Pambour*, Graf v., Theorie der Dampfmaschinen. Übersetzt aus dem Franz. von Dr. A. L. Crelle. Berlin 1849.
- Poinsot*, L., Elemente der Statik. Nach der 5. Aufl. aus dem Franz. übersetzt von J. G. Hartmann. Berlin 1831.
- — Anfangsgründe der Statik, nebst einer Abhandlung über die Theorie der Momente und Flächenräume. Nach der 4. Aufl. deutsch bearbeitet von J. W. Lambert. Gießen 1828.
- Raupach*, F., Grundriß der Dynamik. Halle 1819.
- Schmidt*, Dr. C. H., die Dampfmaschinen nach englischen Quellen bearbeitet. Heilbronn 1834.
- Tredgold*, Thom., the Steam Engine. a new Edition. 2 Bde. London 1838.
- Umpfenbach*, Heinr., Lehrbuch vom Gleichgewichte und der Bewegung fester und flüssiger Körper. Mainz 1824.
- Unger*, Ephr. Salom., Übung aus der Statik und Mechanik der festen Körper, für Techniker und besonders für Architekten, Artilleristen, Ingenieure, Forst- und Bergbeamte. 2 Bde. Breslau 1831 34.
- Vega*, Geo. v., die Mechanik der festen Körper. 4. Aufl. Wien 1818.

---

Bibliothek  
Technische Hochschule  
6103