

ist, die per Secunde ausströmende Windmenge bestimmt werden; so hat man nach derselben Formel (4), wegen $h = 2.1$, $b = 27.6$, $L = 1032$, $D = \frac{3}{8}$, $d = .1394$, $t = 10$ und wenn man wieder wie vorhin $z'' = .384$, dagegen $z' = 0$ setzt, nämlich keine Contraction bei der Einmündung annimmt: $v = 211.70$ Fufs und damit $M = 3.23$ Kubikfufs.

In so ferne nun in dem genannten Beispiele (Comp. §. 458) die Weite der Düsenöffnung so zu bestimmen war, dafs unter den genannten Umständen per Secunde $3\frac{1}{2}$ Kubikfufs Luft ausfliessen sollte; so zeigt sich der gefundene, und hier in Rechnung gebrachte Durchmesser derselben um etwas zu klein, was wohl seinen Grund mit darin findet, dafs hier der Widerstandcoefficient mit .024 etwas gröfser als dort, wo er = .0238 gesetzt ist, angenommen wurde.

Hochfengebläse.

(§. 460.)

259. Bezeichnet V in Kubikfufs ausgedrückt das Volumen, welches die Luft, die per Secunde in den Hochofen getrieben werden soll, bei 0^0 und unter dem mittlern Druck der Atmosphäre einnimmt; P die Pressung der Luft in der Windleitung, so wie p jene der äufsern Luft, auf 1 Quadratfufs; endlich N den Nutzeffect in Pferdekräften zu 430 Fufspfund ausgedrückt, welchen die Betriebsmaschine dafür entwickeln mufs; so hat man, wenn der Nutzeffect gut ausgeführter eiserner Cylinder- und hölzerner Kastengebläse der Erfahrung zu Folge 60 Procent beträgt, und da die nöthige Wirkung um 1 Kubikfufs Luft von der Pressung oder Spannung p auf jene P zu bringen, nach Nr. **247**, Relat. (b) gleich $p \log n. \frac{P}{p}$ ist, sofort:

$$430 N = \frac{V \times p}{.60} \log n. \frac{P}{p} = 1.7 V p \log n. \frac{P}{p}$$

und daraus

$$N = \frac{1.7}{430} V p \log n. \frac{P}{p}$$

oder, da man die Luft auf die Temperatur 0 und den Barometerstand 2.4043 Fufs (= .76 M.) zu reduciren hat, so ist Nr. **251**, Anmerk.) $p = 1845$ Pfund und wenn man die Pressung P in der Windleitung durch ein oben offenes Quecksilbermanometer, welches die Höhe h zeigt und den äufsern Druck p durch den mittlern Barometerstand b ausdrückt, wodurch $\frac{P}{p} = \frac{b+h}{b}$ wird, auch

$$N = \frac{1.7}{430} \times 1845 V \times 2.3026 \log v. \left(\frac{b+h}{b} \right),$$

oder wenn man reducirt, endlich nahe genug:

$$N = 16.8 V \log v. \left(\frac{b+h}{b} \right) \dots (1)$$

wobei $b = 2.4043$ Fufs oder nahe $= 28.85$ Zoll ist.

Beispiel 1. Beträgt das Luftvolumen, welches unter einem Barometerstand von $28\frac{1}{2}$ Zoll und einer Temperatur von $15^{\circ} C.$ per Secunde ausgeblasen werden soll, 17 Kubikfufs und die Pressung im Gebläse 2 Zoll Quecksilbersäule; so hat man, um zuerst dieses Luftvolumen für 0° und 28.85 Zoll Barometerstand zu reduciren nach der Formel (1) in §. 439, in welcher man $v' = 17$, $t' = 15$, $p' = 28.5$, $t = 0$ und $p = 28.85$ zu setzen hat:

$$v = \frac{28.5}{28.85} \times 17 \left(\frac{1}{1.0549} \right) = 15.92,$$

wofür wir die ganze Zahl 16 nehmen wollen.

Setzt man daher in der vorigen Formel (1), $V = 16$, $b = 28.85$ und $h = 2$; so erhält man ganz einfach

$$N = 7.8 \text{ Pferdekraft.}$$

Beispiel 2. Um das in §. 464 angeführte 1ste Beispiel, nach welchem die Betriebskraft für ein Cylindergebläse bestimmt werden soll, welches einem Hochofen per Secunde 30 Kubikfufs Luft mit 475 Fufs Geschwindigkeit und zwar durch eine 300 Fufs lange und $11\frac{1}{2}$ Zoll weite Windleitung zuzuführen im Stande seyn soll, nach der gegenwärtigen Formel (1) behandeln zu können, muß man zuerst die für diese Bedingung und bei einer Düsenweite von .294 Fufs nöthige Luftpressung am Anfange der Windleitung bestimmen.

Setzt man zu diesem Ende in der Formel (2) in Nr. 258, $v = 475$,

$D = \frac{11.5}{12}$, $L = 300$, $d = .294$ und $b = 28.85$; so findet man am einfachsten durch einige Versuche nahe genug $h = 4.77$, so, daß also die gesuchte Pressung durch eine Quecksilbersäule von $b + h = 33.62$ Zoll gemessen wird.

Mit diesem Werthe erhält man nun aus der obigen Formel (1), wegen $V = 30$, $b = 28.85$ und $b + h = 33.62$ sofort:

$$N = 33.49 \text{ d. i. nahe } 33\frac{1}{2} \text{ Pferdekraft.}$$

Würde man, wie es in dem erwähnten §. geschehen, den Nutzeffect des Gebläses anstatt mit 60 bloß mit 50 Procent in Rechnung nehmen, so würde $N = 33.49 \times \frac{5}{6} = 40$ Pferdekraft seyn, während im angezogenen §. $39\frac{1}{2}$ Pferdekraft gefunden wurden.

260. Zur Bestimmung des Querschnittes eines Gebläscylinders oder eines Gebläsekastens, muß man berücksichtigen, daß die ausgeblasene Luftmenge immer kleiner als die eingesogene ist. Man nimmt für gewöhnlich an, daß diese bei eisernen Cylindergebläsen $\frac{3}{4}$ und bei hölzernen Kastengebläsen $\frac{3}{5}$ von der eingesaugten Luftmenge beträgt.

Setzt man daher den gesuchten Querschnitt eines Cylinders oder eines Kastens $= A$, das Luftvolumen, welches ein Cylinder oder ein Kasten per 1 Secunde ausblasen soll, auf 0^0 reducirt $= \mathfrak{B}$. Die Temperatur der eingesaugten Luft $= t$, so wie die Geschwindigkeit des Kolbens $= v$; so ist für ein einfach wirkendes Kastengebläse:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} v A (1 + \cdot 004 t) \mathfrak{B}$, und für ein doppelt wirkendes Cylindergebläse: $\frac{3}{4} v A = (1 + \cdot 004 t) \mathfrak{B}$, folglich ist der Querschnitt für einfach wirkende Kastengebläse:

$$A = 2 \cdot \frac{5}{3} (1 + \cdot 004 t) \frac{\mathfrak{B}}{v}$$

und für doppelt wirkende eiserne Cylindergebläse:

$$A = \frac{4}{3} (1 + \cdot 004 t) \frac{\mathfrak{B}}{v}.$$

Anmerkung. Was die übrigen wesentlichen Dimensionen betrifft, so nimmt man für den Querschnitt der Saugventile bei Kastengebläse $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{12} A$ und bei Cylindergebläsen $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{9} A$. Für den Querschnitt der Druckventile kann man $\frac{1}{22}$ bis $\frac{1}{20} A$ nehmen.

Für den Querschnitt der Windleitung nimmt man für kalte Luft $\frac{1}{20}$ von der Summe der Querschnitte sämtlicher doppelt wirkender Cylinder oder $\frac{1}{10}$ von der Summe der Querschnitte sämtlicher einfach wirkender Kasten. Für erhitze Luft muß dieser Querschnitt, wenn T die Temperatur der erhitzten Luft ist, noch im Verhältniß von 1 zu $(1 + \cdot 004 T)$ vergrößert werden.

Benützt man einen Regulator von unveränderlichem Volumen (§. 461), so soll dieser 40 bis 60 Mal so groß seyn als das Luftvolumen, welches derselbe in jeder Secunde aufzunehmen und abzugeben hat. (Über die Summe der Querschnitte sämtlicher Düsenöffnungen findet man u. A. eine Tabelle in *Redtenbacher's Resultate für den Maschinenbau*, S. 309.)

Die Geschwindigkeit des Kolbens beträgt im Durchschnitt bei kleinen hölzernen Kastengebläsen 2·4 bis 3·2 und bei größeren eisernen Cylindergebläsen 2·8 bis 3·8 Fufs (per Secunde).

Den Kolbenshub nimmt man bei Cylindergebläsen gleich dem Durchmesser des Cylinders und bei Kastengebläsen gleich $\frac{3}{4}$ von der Weite des Kastens.

Was den Luftbedarf eines Hochofens betrifft, so kann man diesen nach dem größten horizontalen Durchmesser oder Querschnitt des Ofens bestimmen, und zwar beträgt diese Luftmenge im Durchschnitt für jeden Quadratfuß dieses größten Querschnittes per Minute

für Holzkohlöfen 32 bis 40 und

„ Koksöfen . . 20 Kubikfuß.

Endlich beträgt die Pressung der Luft in der Windleitung in Quecksilberhöhen ausgedrückt sofort:

für leichte Kohlen aus Tannenholz	$\frac{1}{4}$	bis	1 Zoll,
„ Kohlen aus harzigem Holz . .	1	„	2 „
„ Kohlen aus hartem Holz . .	$1\frac{1}{2}$	„	$2\frac{1}{2}$ „
„ leichte Koks	3	„	5 „
„ dichte Koks	5	„	7 „

Von der geradlinigen Bewegung geworfener oder fallender Körper in widerstehenden Mitteln.

(§. 467.)

261. Hat ein, durch eine stetige Kraft in geradliniger Richtung getriebener Körper fortwährend den Widerstand des umgebenden elastischen Mittels, wie z. B. der Luft, zu überwinden und besitzt der Körper eine solche Form, daß die Resultante dieses Widerstandes in der Richtung der Bewegung liegt und zugleich durch den Angriffspunct der erwähnten bewegenden Kraft geht; so bezeichne M die Masse des Körpers, P die in der Richtung der Bewegung stetig auf ihn einwirkende Kraft, Q den Widerstand des Mittels in einer der Bewegung direct entgegengesetzten Richtung, s den Abstand des Körpers von irgend einem festen Anfangspunct der Bahn, am Ende der Zeit t und v die Geschwindigkeit des Körpers in demselben Augenblicke. Diefs vorausgesetzt, ist die wirksame Kraft des Körpers (Nr. 56.) gleich $M \frac{dv}{dt}$ und da nach dem d'Alembert'schen Principe, zwischen den auf den Körper angebrachten Kräften und den in entgegengesetzten Richtungen genommenen wirkenden Kräften in jedem beliebigen Zeitmomente Gleichgewicht bestehen muß (Nr. 61, Anmerk. 2 u. 7 und Nr. 170, Anmerk.), so hat man, da Q und $M \frac{dv}{dt}$ die wirksamen Kräfte sind, welche in der, der Bewegung entgegengesetzten Richtung zu nehmen sind und P die Kraft in der Richtung der Bewegung ist, sofort:

$$M \frac{dv}{dt} + Q - P = 0 \dots (a)$$

Anmerkung. Im Falle die Kraft P nach einer, der Bewegung des Körpers direct entgegengesetzten Richtung wirksam wäre, dürfte man in dieser Differenzialgleichung nur P mit entgegengesetztem Zeichen nehmen.

262. Was ferner den Widerstand Q betrifft, so ist dieser eine Function von der Geschwindigkeit v und zwar kann man allgemein

$$Q = \alpha (1 + \beta v) v^2 \dots (b)$$

setzen, wobei α und β constante, von der Natur des umgebenden oder widerstehenden Mittels und der Form des Körpers abhängige Coefficienten sind. Ist z. B. der bewegte Körper eine Kugel und das umgebende Mittel atmosphärische Luft; so ist nach §. 469, Relat. (2):

$$Q = \cdot 513 A q' \frac{v^2}{2g} \text{ oder wegen (§. 466, Relat. } w) \text{ } q' = q \left(1 + \frac{v}{1317} \right)$$

auch:
$$Q = \cdot 513 A q \left(1 + \frac{v}{1317} \right) \frac{v^2}{2g}$$

wobei A die grösste Kreisfläche der Kugel, q das Gewicht einer Volumeneinheit der Luft und 1317 die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher unter den im §. 466 gemachten Voraussetzungen die Luft in den leeren Raum fliessen würde. Es wären also in diesem Beispiele die beiden genannten Coefficienten $\alpha = \cdot 513 \frac{Aq}{2g}$ und $\beta = \frac{1}{1317}$.

Setzt man nun in der obigen Differenzialgleichung (a) für Q den Werth aus der Relation (b) und betrachtet jenen Fall, in welchem die Kraft P eine stetig oder constant wirkende ist, wodurch P eine von t und v unabhängige Grösse wird; so hat man:

$$M \frac{dv}{dt} + \alpha (1 + \beta v) v^2 - P = 0$$

und daraus:

$$dt = - \frac{M dv}{\alpha (1 + \beta v) v^2 - P} \dots (1)$$

Außerdem folgt noch, wegen $ds = v dt$:

$$ds = - \frac{M v dv}{\alpha (1 + \beta v) v^2 - P} \dots (2)$$

Anmerkung. Statt der obigen Zahl 1317 sollte man eigentlich (Formel (4) in Nr. 250, wegen $b = 0$) $\sqrt{2gk}$ und für k den Werth $25932 \times 1\cdot 072 = 27799$ setzen, wenn man nämlich (Note zu Nr. 249) die gewöhnliche äussere mit Wasserdampf gemischte Luft von $18^\circ C$. als 850 Mal leichter als Wasser, bei dessen grösster Dichtigkeit, annimmt; mit diesem Werthe erhält man $\sqrt{2gk} = 1313$ Fufs, statt der obigen Zahl von 1317.

Übrigens erscheint diese Zahl ohne strengen Zusammenhang mit der Ausflusgeschwindigkeit der Luft in den leeren Raum, wofür die oben (in Nr. 254, Anmerk. 2) angeführten Experimentatoren nur 544 Fufs gefunden haben, blofs nur als ein Erfahrungscoeffizient in der obigen Formel (b). Für das oben angeführte Gewicht q würde man sonach (Note zu Nr. 249) $\cdot 06635$ Pfund per Kubikfufs zu setzen haben.

263. Wird nun z. B. ein Körper auf einer absolut glatten horizontalen Ebene mit der anfänglichen Geschwindigkeit V fortgeschleu-

dert und wirkt auf denselben während seiner Bewegung keine andere Kraft als der Widerstand der ihn umgebenden atmosphärischen Luft ein; so hat man in den beiden vorigen Differenzialgleichungen (1) und (2) $P=0$ zu setzen. Dadurch gehen sie über in folgende:

$$dt = -\frac{M dv}{\alpha(1+\beta v)v^2} \quad \text{und} \quad ds = -\frac{M v dv}{\alpha(1+\beta v)v^2}.$$

Da sich jedoch der Factor $1+\beta v$, in welchem β immer eine sehr kleine Gröfse (z. B. für atmosphärische Luft $= \frac{1}{1317}$) ist, mit der Geschwindigkeit v nur sehr wenig ändert; so kann man dafür einen Mittelwerth setzen und diesen während der ganzen Bewegung durch die Zeit t als constant ansehen. Hat nun v für $t=0$ den Werth V und für das Ende der Zeit t den Werth v , so kann man als einen solchen Mittel-

$$\text{werth} \quad B = \frac{(1+\beta V) + (1+\beta v)}{2} = 1 + \frac{1}{2}\beta(V+v) \dots (c)$$

nehmen und daher setzen:

$$dt = -\frac{M}{\alpha B} \frac{dv}{v^2} \quad \text{und} \quad ds = -\frac{M}{\alpha B} \cdot \frac{dv}{v}$$

so, dafs wenn man innerhalb der Grenzen von V bis v (d. von $t=0$ bis t) integrirt, sofort durch Umkehrung der Grenzen):

$$t = \frac{M}{\alpha B} \int_v^V \frac{dv}{v^2} = \frac{M}{\alpha B} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right) \quad (3)$$

und

$$s = \frac{M}{\alpha B} \int_v^V \frac{dv}{v} = \frac{M}{\alpha B} \log n. \left(\frac{V}{v} \right) \quad (4)$$

erhält.

Anmerkung. Aus der erstern dieser Gleichungen erhält man also die Zeit, und aus der letztern den Raum, nach deren Verlauf der Körper noch irgend eine bestimmte Geschwindigkeit v besitzt. Diese Gleichungen zeigen, dafs die Geschwindigkeit v mit der Zunahme von t immer mehr abnimmt und sich ohne Ende der Nulle nähert; soll aber zuletzt $v=0$ werden, so mufs sowohl die Zeit t als auch der Raum s Unendlich seyn.

264. Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen (3) und (4) die Geschwindigkeit v (wobei B immer als eine constante Gröfse behandelt wird), so erhält man:

$$s = \frac{M}{\alpha B} \log n. \left(1 + \frac{\alpha B}{M} V t \right) \dots (5)$$

So lange nun t noch besonders klein, also $\frac{\alpha B V t}{M}$ ein sehr kleiner Bruch ist, hat man nahe genug $\log n \left(1 + \frac{\alpha B}{M} V t \right) = \frac{\alpha B}{M} V t$, folglich

$$s = Vt \dots (6)$$

dagegen wenn t schon so groß geworden, daß man die Einheit gegen $\frac{\alpha B V t}{M}$ auslassen kann

$$s = \frac{M}{\alpha B} \log n. \frac{\alpha B}{M} V t \dots (7)$$

so wie für noch größere Werthe von t , für welche man in dem Ausdrucke $\log \frac{\alpha B V t}{M} = \log \frac{\alpha B V}{M} + \log t$ das erste Glied ohne Fehler auslassen kann, sofort:

$$s = \frac{M}{\alpha B} \log n. t \dots (8)$$

Anmerkung. Drückt man die Masse M des betreffenden Körpers durch das Gewicht W desselben aus, so, daß also (§. 35, Anmerk. oder Nr. 55,

Anmerk. 3) $M = \frac{W}{g}$ gesetzt wird; so folgt aus der letztern Gleichung (8),

daß wenn von zwei Körpern von ganz gleicher Größe und Form (wodurch also der Luftwiderstand für beide derselbe ist), der eine ein größeres specifisches (also auch größeres absolutes) Gewicht als der andere hat, der erstere nach einer gewissen Zeit t dem letztern vorausgeeilt seyn wird, wenn dieser letztere auch dieselbe oder selbst eine größere Anfangsgeschwindigkeit V als der erstere besaß.

265. In jenen Fällen, in welchen P als eine stetige oder constante Kraft erscheint, welche in directer Richtung der Bewegung wirksam ist, folgt aus den Differenzialgleichungen (1) und (2) (Nr. 262), wenn man den Werth von $B = 1 + \frac{1}{2}\beta(V + v)$ in (c) (Nr. 263), bei der Integration von $t = 0$ bis $t = t$, d. i. von $v = V$ bis $v = v$ wieder als einen constanten behandelt und noch Kürze halber den Bruch

$$\frac{\alpha B}{P} = m \dots (d)$$

setzt:

$$dt = \frac{M}{P} \cdot \frac{dv}{1 - mv^2} \text{ und } ds = \frac{M}{P} \cdot \frac{v dv}{1 - mv^2}$$

und daraus:

$$t = \frac{M}{P} \int_V^v \frac{dv}{1 - mv^2} \text{ und } s = \frac{M}{P} \int_V^v \frac{v dv}{1 - mv^2}$$

Nun ist (Comp. §. 767):

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log n. \left(\frac{\sqrt{a + x\sqrt{b}}}{\sqrt{a - x\sqrt{b}}} \right) + C$$

folglich, wenn man $a=1$, $b=m$, $x=v$ setzt und die Zeichen ändert, so wie auch statt der Masse M das Gewicht W einführt:

$$t = \frac{W}{2gP\sqrt{m}} \logn. \left(\frac{V\sqrt{m}-1}{V\sqrt{m}+1} \right) \left(\frac{v\sqrt{m}+1}{v\sqrt{m}-1} \right) \dots \quad (9)$$

Ferner folgt ganz einfach (Comp. §. 762) aus dem vorigen Differenzialausdruck von ds :

$$s = \frac{W}{2gPm} \logn. \left(\frac{mV^2-1}{mv^2-1} \right) \dots \quad (10)$$

Anmerkung. Diese beiden Formeln (9) und (10) finden z. B. ihre Anwendung bei dem Herabgleiten eines Körpers über eine schiefe Ebene, wobei die Differenz zwischen der Seitenkraft $W \sin \alpha$, womit der Körper vom Gewichte W über die schiefe Ebene vom Neigungswinkel α herabgeht und den Betrag der Reibung R , d. i. $W \sin \alpha - R = P$ ist und als positiv angenommen wird.

266. Für den freien Fall eines Körpers in der Luft und zwar für die uns zu Gebote stehenden Höhen, darf man, wenn W das Gewicht des Körpers ist, in den beiden Formeln (9) und (10) nur $P=W$ setzen, um die hierher gehörigen Formeln zu erhalten. Es ist nämlich dafür:

$$t = \frac{1}{2g\sqrt{m}} \logn. \left(\frac{V\sqrt{m}-1}{V\sqrt{m}+1} \right) \left(\frac{v\sqrt{m}+1}{v\sqrt{m}-1} \right) \dots \quad (11)$$

und

$$s = \frac{1}{2gm} \logn. \left(\frac{mV^2-1}{mv^2-1} \right) \dots \quad (12)$$

wobei (vorige Nr. Relat. d) $m = \frac{\alpha B}{W}$ und (Relat. c in Nr. **263**) $B = 1 + \frac{1}{2} (V+v)$ ist.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $V=0$, so verwandeln sich diese beiden Formeln in die folgenden:

$$t = \frac{1}{2g\sqrt{m}} \logn. \frac{1+v\sqrt{m}}{1-v\sqrt{m}} \dots \quad (13)$$

$$s = \frac{1}{2gm} \logn. \left(\frac{1}{1-mv^2} \right) \dots \quad (14)$$

Anmerkung. Ist in den Formeln (11) und (12) $V\sqrt{m} < 1$, d. i. $V < \frac{1}{\sqrt{m}}$, so muß auch, damit der Logarithmus, also auch t und s nicht imaginär ausfalle, $v\sqrt{m} < 1$, d. i. $v < \frac{1}{\sqrt{m}}$ seyn. Unter dieser Bedingung wächst die Geschwindigkeit v mit der Zeit t jedoch nicht ins Unendliche, sondern nähert sich dabei ohne Ende dem Grenzwert von $v = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Ist dagegen $V\sqrt{m} > 1$, d. i. $V > \frac{1}{\sqrt{m}}$, so muß aus demselben Grunde auch $v\sqrt{m} > 1$, d. i. $v > \frac{1}{\sqrt{m}}$ seyn. In diesem Falle nimmt v fortwährend ab, während t zunimmt kann jedoch ebenfalls nicht unter den erwähnten Grenzwert von $v = \frac{1}{\sqrt{m}}$ herabsinken.

Auch die Formeln (13) und (14) zeigen, daß beim freien Falle eines Körpers in der Luft, die Geschwindigkeit v nicht jeden beliebigen großen Werth erreichen kann, sondern an den Grenzwert $v = \frac{1}{\sqrt{m}}$, welchem sie ohne Ende zustrebt, gebunden ist und diesen nicht überschreiten kann.

Beispiel 1. Für das in §. 467 (S. 444) angeführte Beispiel, in welchem die größte Geschwindigkeit gesucht wird, die eine 3·7 Zoll im Durchmesser haltende eiserne Kugel beim freien Falle in der Luft annehmen kann, hat man $A = \cdot 0746$, $W = \cdot 01534 \times 406 = 6\cdot 228$,

$$\alpha = \frac{\cdot 513 \times \cdot 0746 \times \cdot 06635}{62} = \cdot 000041943, \quad \beta = \frac{1}{1317} = \cdot 0007593, \text{ und}$$

da durch eine vorläufige Rechnung $v = 370$ gefunden wurde, $B = 1 + \frac{1}{2}\beta v$ (wegen $V = 0$) $= 1\cdot 14047$, so wie endlich $m = \frac{\alpha B}{W} = \cdot 0000076806$ und

$\frac{1}{\sqrt{m}} = 360\cdot 83$. Es wäre daher dieser Grenzwert oder die größte Geschwindigkeit von v nahe gleich 361 Fufs, während am angeführten Orte dafür 365 Fufs gefunden wurde.

Würde dieselbe eiserne Kugel von der Spitze des St. Stephansturmes herabfallen, so würde sie im leeren Raume hierzu (§. 142, Beispiel 4) die Zeit von 5·28 Secunden brauchen und dabei eine Geschwindigkeit von 163·68 Fufs erlangen, indem der Fallraum 432 Fufs beträgt. Bei dem hier angenommenen Luftwiderstande jedoch würde die Kugel, um dieselbe Endgeschwindigkeit von 163·68 Fufs zu erlangen, von einer Höhe von 479·72 Fufs fallen müssen, wozu die Zeit von 5·662 Secunden erforderlich wäre.

Beispiel 2. In welcher Zeit erlangt eine hölzerne Kugel von der vorigen GröÙe (3·7 Zoll Durchmesser) und dem specifischen Gewicht $= \cdot 9$ unter den vorigen Bedingungen (d. i. bei demselben Barometer- und Thermometerstand und demselben Grad der Feuchtigkeit) beim freien Falle eine Geschwindigkeit von 130 Fufs und durch welche Höhe muß die Kugel dabei fallen?

Da diese Kugel 8 Mal leichter als die vorige eiserne ist (wegen $\frac{7\cdot 2}{9} = 8$),

so ist dafür $W = \frac{6\cdot 228}{8} = \cdot 7785$, und wegen $B = 1\cdot 0493546$ sofort

$m = \cdot 000056536$. Mit diesem Werthe und $v = 130$ folgt aus den obigen Formeln (13) und (14): $t = 9\cdot 5988$ Secunden und $s = 887\cdot 64$ Fufs.

Im luftleeren Raume würde die Kugel in dieser Zeit von nahe 9·6 Secunden eine Geschwindigkeit von 297·55 Fufs erlangt und dabei einen Weg von 1428 Fufs zurückgelegt haben, oder die Kugel würde diese gegebene Geschwindigkeit schon in Zeit von nahe 4·2 Secunden erlangt und dabei nur einen Weg von 272·58 Fufs zurückgelegt haben.

Anmerkung. Für Körper von einem geringen specifischen Gewichte und grossem Volumen mufs auch noch der Umstand berücksichtigt werden, dafs hinter den in einer Flüssigkeit sich bewegendem Körpern eine gewisse Menge dieser Flüssigkeit mit fortgerissen wird, welche z. B. bei kugelförmigen Körpern $\frac{1}{6}$ von dem Volumen des Körpers selbst ausmacht.

267. Wir wollen schlüsslich noch den Fall betrachten, in welchem die obige constante Kraft P der Bewegung direct entgegengesetzt wirkt, diese daher (Nr. **261**, Anmerk.) in den Formeln (1) und (2) (Nr. **262**) mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen ist.

Setzt man daher wieder $1 + \frac{1}{2}\beta(V+v) = B$, $\frac{aB}{P} = m$ und $M = \frac{W}{g}$, so erhalten diese beiden genannten Differenzialgleichungen die Form:

$$dt = -\frac{W}{gP} \cdot \frac{dv}{1+mv^2} \quad \text{und} \quad ds = -\frac{W}{gP} \cdot \frac{v dv}{1+mv^2}.$$

Nun ist (Comp. S. 302, §. 764)

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C$$

folglich

$$t = \frac{W}{gP} \int_v^V \frac{dv}{1+mv^2} \quad \text{d. i.}$$

$$t = \frac{W}{gP\sqrt{m}} [\arctan V\sqrt{m} - \arctan v\sqrt{m}] \quad . \quad (15)$$

Ferner ist ganz einfach $s = \frac{W}{gP} \int_v^V \frac{v dv}{1+mv^2} \quad \text{d. i.}$

$$s = \frac{W}{2gPm} \logn\left(\frac{1+mV^2}{1+mv^2}\right) \quad . \quad (16)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dafs v abnimmt wenn t und s zunehmen und dafs für einen gewissen Werth von $t = T$ und $s = S$ die Geschwindigkeit $v = 0$ wird. Bezeichnet man den entsprechenden Werth von B , nämlich $1 + \frac{1}{2}\beta V$ mit B' und jenen $\frac{aB'}{P}$ mit m' ; so hat man:

$$T = \frac{W}{gP\sqrt{m'}} \arctan V\sqrt{m'} \quad . \quad (17)$$

und

$$S = \frac{W}{2gPm'} \logn(1+m'V^2) \quad . \quad (18)$$

Anmerkung. Die beiden Formeln (15) und (16) finden z. B. ihre Anwendung in jenem Falle, in welchem ein Körper auf einer horizontalen Ebene fortgeschleudert wird, wo dann P die von der Geschwindigkeit unabhängige Reibung zwischen dem Körper und der Ebene bezeichnet.

268. Wird ein schwerer Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit V vertical aufwärts geworfen, so darf man in den letztern 4 Formeln nur $P = W$ setzen, um die entsprechenden Werthe für t , s , T und S zu erhalten. Die größte Höhe S , welche der Körper dabei erreichen kann, folgt also aus der Formel:

$$S = \frac{1}{2g m'} \log n. (1 + m' V^2)$$

und die hierzu nöthige Zeit aus jener

$$T = \frac{1}{g \sqrt{m'}} \text{arc. tang. } V \sqrt{m'}$$

Anmerkung 1. Ist V sehr klein oder das Gewicht W bedeutend groß, wodurch m' sehr klein wird, so kann man $\log(1 + m' V^2) = m' V^2$ setzen

und dann wird $S = \frac{V^2}{2g}$, d. h. der Körper erreicht dann sehr nahe jene

Höhe, auf welche er auch im luftleeren Raume steigen würde.

Anmerkung 2. Setzt man diesen Werth von S statt s in der Formel (14) und bestimmt aus der entstehenden Gleichung den Werth von v ; so erhält man die Geschwindigkeit, welche ein mit der Geschwindigkeit V vertical aufwärts geworfener Körper in dem Augenblicke besitzt, in welchem er heim Zurück- oder Herabfallen an dem Ausgangspunct anlangt. Setzt man, was hierbei ohne Fehler geschehen kann, $B' = B$, also auch $m' = m$; so erhält man auf diese Weise für die genannte Geschwindigkeit:

$$v = \frac{V}{\sqrt{1 + m' V^2}},$$

so, daß also immer $v < V$ ist.

Für sehr kleine Werthe von V oder große Werthe von W (wodurch m' klein wird), kann man $m' V^2$ gegen die Einheit auslassen und dann wird sehr nahe $v = V$.

Für sehr große Werthe von V oder kleine Werthe von W kann man dagegen umgekehrt die Einheit gegen $m' V^2$ weglassen und dann wird nahe

$v = \frac{1}{\sqrt{m'}}$, welches sofort der oben erwähnte Grenzwert ist, welchem sich ein in der Luft frei fallender Körper fortwährend nähert.

Beispiel. Wird eine 4zöllige eiserne 10 Pfund schwere Kugel mit 100 Fuß Geschwindigkeit vertical aufwärts geworfen, so erreicht sie, wegen $A = .08727$, $W = 10$, $V = 100$, $B' = 1.037965$, und (wenn man wieder denselben Zustand der Luft, wie in den vorigen Beispielen, voraussetzt) $m' = .0000049615$, die Höhe von:

$$S = 157.42 \text{ Fufs}$$

und zwar während der Zeit von $T = 3.174$ Secunden.

Im luftleeren Raume würde diese Kugel eine Höhe von 161.3 Fufs erreicht, und dazu die Zeit von 3.226 Secunden gebraucht haben.

Hätte die Kugel bei demselben Volumen nur das Gewicht von 1 Pfund, so würde sie unter gleichen Umständen blofs die Höhe von nahe 131 Fufs erreichen können und dazu nahe 2.73 Secunden benöthigen. Im luftleeren Raume würden um diese Höhe zu erreichen nur 2.46 Secunden und eine Anfangsgeschwindigkeit von 76.26 Fufs nöthig seyn.

Geschwindigkeit des ausströmenden Dampfes.

(§. 482.)

269. Nach *Gay-Lussac's* Versuchen wiegt ein Liter Wasserdampf bei $100^{\circ}C$. Temperatur und .76 Meter Barometerstand .5895 Gramme, dagegen 1 Liter atmosphärische trockene Luft unter denselben Verhältnissen .9454 Gramme, folglich ist das specifische Gewicht des Dampfes gegen Luft $s = \frac{.5895}{.9454} = .6235456$.

Setzt man nun in der Formel (2) der Nr. **249** nach der Bemerkung dieser Nr. (Anmerk.), statt k den Quotienten $\frac{k}{s}$ und für k den

Werth aus (1) derselben Nr., nämlich $k = \frac{25165}{.6235456} (1 + nt) =$

$40358(1 + .00366t)$; so erhält man, wenn man auch zugleich den natürlichen Logarithmus in den gemeinen umwandelt, d. i. $\log n. x = 2.3026 \log \text{vulg. } x$ setzt und reducirt, für die Ausflusgeschwindigkeit des Dampfes:

$$v = 2400 \sqrt{\left[(1 + nt) \log v. \frac{P}{p} \right]} \quad (1)$$

dabei bezeichnet P die Spannung oder den Druck des Dampfes im Gefäfs auf den Quadratfufs oder Quadratzoll und p die Spannung, welche in dem Raume herrscht, nach welchem der Dampf entweicht, gemessen durch den Druck wie vorhin, beziehungsweise auf den Quadratfufs oder Quadratzoll; auch können P und p wieder durch die Barometerstände ausgedrückt werden, da es sich dabei überhaupt nur um das Verhältnifs $\frac{P}{p}$ dieser beiden Spannungen oder Drücke handelt.

Was die Spannkraft p oder den Druck in Pfunden auf den Quadratfufs bei der Temperatur $t^{\circ}C$ anbelangt, so ist diese in §. 473 in den beiden Formeln (1) und (2) annähernd angegeben; es ist nämlich, wegen