Dritter Abschnitt.

Aërodynamik.

Von dem Ausflusse der Luft aus Behältern.

(§. 447.)

247. Wir wollen zuerst die Wirkungs- oder Arbeitsgröfse suchen, welche 1 Kubikfufs irgend einer Luft- oder Gasart entwickelt, während sich dieselbe so weit ausdehnt, dafs sie von der höhern Spannkraft P auf die niedere p übergeht. 762

Man denke sich zu diesem Ende einen hohlen Cylinder ad (Fig. 161) vom Querschnitt $= 1$ Quadratfufs, in welchem sich ein Kolben ef luftdicht, jedoch ohne alle Reibung bewegen läfst und in dem Raume af des Cylinders, wofür die Länge $ae = l$ ist, Luft von einer solchen Spannkraft eingeschlossen, dafs sie auf jeden Quadratfufs einen Druck von P Pfund ausübt. Dehnt sich nun diese Luft in dem Raume ad aus, indem angenommen wird, dafs auf den Kolben ef kein oder ein geringerer Gegendruck Statt findet, so soll die Luft dadurch auf die Spannkraft p herabgebracht, und durch das Fortschieben des Kolbens von ef bis cd, wofür $ac = L$ seyn mag, die Wirkung oder Arbeit W ausgeübt oder entwickelt worden seyn. Betrachtet man den Kolben in einer Stellung mn, wofür $am = x$ ist, und setzt die Spannkraft der in dem Raume an befindlichen Luft (d. i. den Druck auf 1 Quadratfufs in Pfunden) $= z$; so ist nach dem *Mariotte*'schen Gesetze (§. 437) $z : P = l : x$ oder $z = P\frac{l}{x}$, und da man diese Spann- oder Expansivkraft während eines unendlich kleinen Fortschreitens des Kolbens, nämlich um dx als constant ansehen kann, so entwickelt der Kolben oder die sich ausdehnende Luft bei diesem Fortschreiten die unendlich kleine Wirkungs- oder Arbeitsgröfse $$dW = z\,dx = Pl\frac{dx}{x}.$$

Aus diesem Differenzialausdrucke erhält man durch die Integration innerhalb der Grenzen von $x=l$ bis $x=L$:

$$W=Pl\int_{1}^{L}\frac{dx}{x}=Pl\,logn.\frac{L}{l}=Pl\,logn.\frac{P}{p},$$

weil nämlich $l:L=p:P$ Statt findet.

Setzt man endlich $l=1$ Fuſs, so ist der genannte Raum $af=$ 1 Kubikfuſs und die Arbeitsgröſse, welche 1 Kubikfuſs Luft von der Spannkraft P dadurch entwickelt, daſs sie sich so lange ausdehnt, bis sie auf die Spannkraft p herabgegangen:

$$W=P\,logn.\frac{P}{p}=2\cdot3026\,P\,log\,v.\frac{P}{p}\;.\;.\;(a)$$

Eben so läſst sich umgekehrt die Wirkungsgröſse bestimmen, welche nöthig ist, um die in dem cylinderischen Raume cb (Fig. 162) 163 enthaltene Luft von der Spannung p zu comprimiren und auf die höhere Spannung P zu bringen, was dadurch geschehen soll, daſs der Kolben durch eine äuſsere Kraft aus der Lage cd, wofür $ac=L$ ist, in jene ef geschoben wird, wofür $ae=l$ seyn mag. Ist der Kolben von cd nach mn, wofür $cm=x$ seyn soll, gekommen, also die Luft von dem Raume cf in jenen mf gepreſst, so sey die Spannkraft oder der Gegendruck auf den Kolben $=z$, folglich $z:p=L:L-x$ oder $z=\frac{Lp}{L-x}$. Rückt der Kolben um dx weiter, so ist die hierzu nöthige Arbeit $dW=z\,dx=Lp\frac{dx}{L-x}$, folglich, wenn man integrirt:

$$W=Lp\int_{0}^{L-l}\frac{dx}{L-x}=Lp\,logn.\frac{L}{l}=Lp\,logn.\frac{P}{p}.$$

Setzt man wieder $L=1$, so ist die nöthige Arbeitsgröſse, um 1 Kubikfuſs Luft von der geringern Spannkraft p auf die höhere P zu comprimiren, sofort:

$$W=p\,logn\frac{P}{p}=2\cdot3026\,p\,log\,v.\frac{P}{p}\;.\;.\;(b)$$

248. Um nun auf den Ausfluſs der Luft aus einem Behälter überzugehen, wollen wir sogleich den allgemeinen Fall betrachten und voraussetzen, daſs die Ausfluſsöffnung gegen den Querschnitt des Gefäſses, diesen winkelrecht gegen die Achse der Öffnung genommen, so bedeutend sey, daſs die Luft im Gefäſse vor der Mündung nicht als ruhend angesehen werden kann, sondern schon mit einer meſsbaren Geschwindigkeit vor derselben ankömmt.

Es sey daher A dieser Querschnitt des Behälters, a jener der Ausflufsöffnung, P der Druck der im Behälter enthaltenen Luft auf den Quadratfufs bei einer bestimmten Temperatur, γ die Dichte oder das Gewicht von 1 Kubikfufs dieser innern Luft, p der Druck und γ' die Dichte der äufsern Luft, c die Geschwindigkeit mit welcher sich die Luft im Behälter gegen die Mündung bewegt, v die Ausflufsgeschwindigkeit und m die per Secunde ausfliefsende Luftmenge auf die innere Spannung oder Dichte reducirt; so entwickelt die von der Spannung P auf jene p durch Ausdehnung herabgehende Luftmenge m per Secunde die Wirkungsgröfse (vorige Nr. Relat. a) $m P \, logn. \frac{P}{p}$. Da aber diese Wirkung dazu verwendet wird, um die Luftmasse $m\gamma$ von der Geschwindigkeit c auf jene v zu bringen, so hat man nach §. 186, $m P \, logn. \frac{P}{p} = m\gamma \frac{v^2}{2g} - m\gamma \frac{c^2}{2g}$, oder wegen $A c \gamma = a v \gamma'$, woraus $c = \frac{a}{A} \frac{\gamma'}{\gamma} v = \frac{a}{A} \frac{p}{P} v$ wird, auch:

$$m P \, logn. \frac{P}{p} = m\gamma \frac{v^2}{2g} \left(1 - \frac{a^2}{A^2} \cdot \frac{p^2}{P^2}\right) \quad . \; . \; (f)$$

aus welcher Gleichung sofort die Ausflufsgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left\{ \frac{2g \frac{P}{\gamma} \, logn. \frac{P}{p}}{1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2} \right\}} \quad . \; . \; (1)$$

folgt. (§. 452, Relat. 7.)

249. Ist, wie gewöhnlich, die Ausflufsöffnung a gegen den Querschnitt des Behälters A so klein, dafs man den Bruch $\left(\frac{ap}{AP}\right)^2$ gegen die Einheit auslassen kann (oder nimmt man in der obigen Entwicklung die Luft im Behälter als r u h e n d an); so hat man einfacher:

$$v = \sqrt{\left[2g \frac{P}{\gamma} \, logn. \frac{P}{p} \right]}$$

und wenn man den Factor $\frac{P}{\gamma} = \frac{p}{\gamma'} = k$ . . (a) setzt, auch:

$$v = \sqrt{\left[2gk \, logn. \frac{P}{p} \right]} \quad . \; . \; (2)$$

Setzt man die Differenz $P - p = x$, also $p = P - x$, so ist $logn. \frac{P}{p} = logn. \frac{P}{P-x}$ $= - \, logn. \frac{P-x}{P} = - \, logn. \left(1 - \frac{x}{P}\right) = - \left[- \frac{x}{P} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{P}\right)^2 - \, . \, . \right] =$

$\frac{x}{P} = \frac{P-p}{P}$, wenn nämlich $P-p$ so klein, etwa $< \frac{1}{10} P$ ist, dafs man in dieser Reihe die zweite und höhern Potenzen von $\frac{P-p}{P}$ auslassen darf. Man hat daher unter dieser Voraussetzung den genäherten aber einfachern Ausdruck $\left(\text{wegen } k \,logn. \frac{P}{p} = \frac{P}{\gamma} \frac{(P-p)}{P} = \frac{P-p}{\gamma}\right)$:

$$v = \sqrt{\left[2g \frac{(P-p)}{\gamma}\right]} \ .\ .\ (3)$$

Ist nun h die Höhe einer Luftsäule von der innern Dichte γ, welche dem Drucke $P-p$ das Gleichgewicht hält, so ist $P-p = h\gamma$, folglich auch:

$$v = \sqrt{2gh} \ .\ .\ (4)$$

welcher Ausdruck sofort mit jenem übereinstimmt, der (Nr. **153**) für den Ausflufs von tropf- oder unprefsbaren Flüssigkeiten gilt.

Für höhere Pressungen mufs man sich jedoch der genauern Formel (2) bedienen

Entspricht dem Drucke $P-p = h\gamma$ eine äufsere Luftsäule von der Höhe h', so ist auch $P-p = h'\gamma'$ und wenn der äufsere, jeweilig Statt findende Luftdruck p durch $b\gamma'$ ausgedrückt wird, wobei also b die Höhe der äufsern Luftbarometersäule bezeichnet; so ist $P = (b+h')\gamma'$ und $\frac{P}{p} = \frac{b+h'}{b}$, folglich nimmt die obige Formel (2) auch die Form an:

$$v = \sqrt{\left[2gb \,logn. \left(\frac{b+h'}{b}\right)\right]} \ .\ .\ (6)$$

Anmerkung. Obschon man in der Anwendung weder den innern noch den äufsern Druck durch die Luftsäulen $b+h'$ und b, sondern entweder durch Wasser- oder Quecksilbersäulen zu messen pflegt; so ändert sich der Quotient $\frac{b+h'}{b}$ dennoch nicht, man mag b und h' durch Luft-, Wasser- oder Quecksilbersäulen ausdrücken. Was dagegen den Factor b in der vorigen Formel (6) oder k in jener (2) anbelangt, so wird, wenn die ausströmende elastische Flüssigkeit trockene atmosphärische Luft von der Temperatur t (nach der 100theiligen Scala) ist, und die Pressungen durch Quecksilbersäulen gemessen werden, sofort:

$$b = k = 25165\,(1 + {\cdot}00366\,t) \ .\ .\ (a)$$

wenn man nämlich für das Verhältnifs des Gewichtes von 1 Kubikfufs Quecksilber zu 1 Kubikfufs Luft unter dem mittlern Druck von 2·4043 Fufs (= ·76 Meter) und der Temperatur Null die Zahl 10466·8 zum Grunde legt und für das Product $10466{\cdot}8 \times 2{\cdot}4043$ die Zahl 25165 nimmt *).

*) Es ist nämlich nach *Biot* das specifische Gewicht des Quecksilbers im luftleeren Raume und bei 0° gleich 13·598207 und jenes der Luft unter dem

Bezeichnet man den Factor k, in so ferne er sich auf eine andere Luft- oder Gasart bezieht, durch k', und ist s das specifische Gewicht derselben in Beziehung auf die atmosphärische Luft; so mufs man $k' = \frac{k}{s}$ setzen und für k den vorigen Werth (α) nehmen.

250. Um die in der Formel (4) vorkommende Luftsäulenhöhe h in eine gleichgeltende Quecksilbersäule h'' umzuwandeln, hat man, wenn γ'' das Gewicht von 1 Kubikfufs Quecksilber (bei Null Grad) bezeichnet, und da die Pressung der Luft im Behälter durch die Quecksilbersäule $h'' + b$ gemessen wird, wenn b der äufsere Barometerstand durch eine Quecksilbersäule gemessen ist, sofort $h = \frac{\gamma''}{\gamma} h''$ oder wegen

$\gamma : \gamma' = b + h'' : 2{\cdot}4043$, woraus $\gamma = \frac{\gamma'}{2{\cdot}4043}(b + h'')$ folgt, auch $h = 2{\cdot}4043 \frac{\gamma''}{\gamma'} \frac{h''}{b + h''} = 2{\cdot}4043 \times 10466{\cdot}8 \frac{h''}{b + h''} = 25165 \frac{h''}{b + h''}$, oder, wenn die Temperatur der innern Luft nicht Null, sondern $= t$ ist und Kürze halber der Ausdehnungscoeffizient ·00375 oder nach Andern ·00366 $= n$ gesetzt wird, auch $h = 25165 (1 + nt) \frac{h''}{b + h''} = k \frac{h''}{b + h''}$, wobei man einfacher wieder h statt h'' schreiben, d. i. h für die Quecksilbersäule selbst gelten lassen kann. Dadurch geht die Formel (4) in $v = \sqrt{\left[2gk \frac{h}{b + h}\right]} = \sqrt{\left[2g \times 25165 (1 + nt) \frac{h}{b + h}\right]}$ oder für den Gebrauch bequemer in die folgende:

Barometerstand von ·76 Meter und bei 0° gleich ·0012991719 folglich das Verhältnifs $\frac{13{\cdot}598207}{{\cdot}0012991719} = 10466{\cdot}8$.

Bei diesen Verhältnifszahlen findet man für das Gewicht von 1 Kubikfufs ganz trockener Luft bei 0° Temperatur und dem mittlern Barometerstand von ·76 Meter oder 2·4043 W. Fufs sofort ·073267 Pfund, wofür wir hier durchaus ohne Fehler die Zahl ·0733 setzen können.

Da jedoch die atmosphärische Luft bei ihrer gewöhnlichen Beschaffenheit immer etwas Wasserdampf enthält (welcher specifisch leichter als die Luft ist), so kann man, wenn es sich um die Anwendung der Formeln auf die gewöhnliche äufsere Luft handelt, annehmen, dafs Luft von 18° Wärme 850 Mal leichter sey als Wasser im Zustande der gröfsten Dichtigkeit. Darnach würde ein Kubikfufs solcher Luft nur ·066353 Pfund wiegen und man müfste die obige Relation (α) für solche Luft umwandeln in $k = 25932 (1 + {\cdot}004 t)$, weil solche Luft bei 0° und dem mittlern Drucke ·071131 Pfund wiegen würde.

$$v = 1249 \sqrt{\left[(1 + nt)\frac{h}{b+h}\right]} \;.\;.\; (7)$$

über, während die genaue oder allgemeine Formel (6) die Form

$$v = 1249 \sqrt{\left[(1 + nt)\, logn. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]}$$ oder auch wegen

$logn.\, x = 2\ 3026\, log\, v.\, x$ jene

$$v = 1895 \sqrt{\left[(1 + nt)\, log\, v. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \;.\;.\; (8)$$

erhält.

251. Befindet sich endlich in dem Behälter oder Gasometer irgend eine andere Luft- oder Gasart, von welcher 1 Kubikfufs bei 0° und dem mittlern Luftdruck von 2·4043 Fufs (·76 M.) Barometerstand, das Gewicht von γ_0 Pfund, also wenn 1 Kubikfufs Luft unter diesen Bedingungen q Pfunde wiegt, gegen die atmosphärische Luft das specifische Gewicht $s = \frac{\gamma_0}{q}$ besitzt; so mufs man, da der Factor k (**249**, Anmerk.) in $\frac{k}{s} = \frac{kq}{\gamma_0}$ übergeht, die vorigen Zahlen 1249 und 1895 in (7) und (8) mit $\sqrt{q} = \sqrt{\cdot 0733}$ multipliciren, wenn man nämlich das oben (Note auf Seite 265) angegebene specifische Gewicht der Luft und Gewicht des Wassers zum Grnnde legt, was für q den Werth ·073267 Pf. gibt*). Dadurch erhält man für die theoretische Ausflufsgeschwindigkeit:

$$v = 338{\cdot}18 \sqrt{\left[\left(\frac{1+nt}{\gamma_0}\right)\frac{h}{b+h}\right]} \;.\;.\; (9)$$

oder genauer und auch für höhere Spannungen giltig:

$$v = 513{\cdot}16 \sqrt{\left[\left(\frac{1+nt}{\gamma_0}\right) log\, v. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \;.\;.\; (10)$$

Anmerkung. Diese Formel kann auch unter der Form aufgestellt werden:

$$v = \sqrt{\left[2g\frac{m}{\gamma_0}(1 + nt)\, logn. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]}$$

wobei $m = 1844{\cdot}6$ oder auch $= 1845$, den Druck der Luft bei 0° und 2·4043 Fufs Barometerstand (= ·76 Meter) auf den Quadratfufs ausdrückt.

252. Ist M' die unter dem äufsern Drucke gemessene theoretische Ausflufsmenge, so ist $M' = av$, oder wenn man für v substituirt:

---

*) Nimmt man dagegen den Kubikmeter Luft bei 0° und ·76 M. Barometerstand zu 1·2995 Kilogramme an, so erhält man durch Reduction auf das W. Mafs und Gewicht $q =$ ·073293 Pfunde.

$$M' = a\sqrt{\left[2gk\,logn.\frac{P}{p}\right]} \quad . \; . \; (11)$$

während dieses Volumen unter dem innern Drucke gemessen (wegen $M''P = M'p$) den Werth

$$M'' = \frac{p}{P}\,a\sqrt{\left[2gk\,logn.\frac{P}{p}\right]} \quad . \; . \; (12)$$

erhält.

Das Gewicht G dieser in der Zeiteinheit unter dem innern Drucke P ausfliefsende Gasmenge ist gleich $M''\gamma$, oder wegen $\frac{P}{\gamma} = k$ (**249**, Anmerk.) also $M''\gamma = \frac{M''P}{k}$ auch, wenn man für M'' den vorigen Werth setzt:

$$G = pa\sqrt{\left[\frac{2g}{k}\,logn\,\frac{P}{p}\right]} \quad . \; . \; (13)$$

Bezeichnet man den betreffenden Contractionscoeffizienten mit m und die per Secunde wirklich ausfliefsende Luft- oder Gasmenge in Kubikfufs durch M; so ist $M = mM' = mav$, oder wenn man für v die Werthe setzt, für den Ausflufs von atmosphärischer Luft:

$$M = 1895\,ma\sqrt{\left[(1+nt)\,log\,v.\left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \quad . \; . \; (14)$$

oder für geringe Spannungen ($P - p < \frac{1}{10}P$):

$$M = 1249\,ma\sqrt{\left[(1+nt)\left(\frac{h}{b+h}\right)\right]} \quad . \; . \; (15)$$

Für irgend eine andere Luft- oder Gasart, wovon 1 Kubikfufs bei 0° und dem mittlern Luftdrucke γ_0 Pfunde wiegt, ist:

$$M = 513{\cdot}16\,ma\sqrt{\left[\frac{(1+nt)}{\gamma_0}\,log\,v.\left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \quad . \; . \; (16)$$

und bei geringer Spannung:

$$M = 338{\cdot}18\,ma\sqrt{\left[\frac{(1+nt)}{\gamma_0}\,\frac{h}{b+h}\right]} \quad . \; . \; (17)$$

253. Was endlich den Contractions- oder Ausflufscoeffizienten m betrifft, so ist nach den *Koch*'schen Versuchen und *Weisbach*'s Berechnung, bei Manometerständen von $\frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{5}$ Atmosphäre

für Mündungen in einer dünnen Wand, im Mittel $m = {\cdot}58$

für cylinderische Ansatzröhren, welche höchstens 6 Mal so lang als weit sind . . . . . . $m = {\cdot}74$

und für convergente Ansatzröhren, nach Art der Düsen bei Gebläsen (von 6° Seitenconvergenz) . . $m = {\cdot}85$

Anmerkung. Wie sehr übrigens diese Ausflufscoeffizienten mit der Pressung oder Höhe der Manometersäule variiren, zeigt folgende Tabelle.

Höhe der drückenden Wassersäule in Fufsen.	Ausflufscoeffizient m:		
	Für Öffnungen in dünnen Wänden.	Für conische Ansatzröhren, Neigung c^a. 3°.	Für cylinderische Ansatzröhren.
·051	·615	·905	·776
·104	·610	·897	
·206	·604	·888	
·306	·599	·880	
·411	·595	·874	
·512	·591	·869	·746
·616	·588	·865	
·718	·585	·859	
·823	·582	·855	
·923	·579	·851	
1·028	·577	·847	·728
1·540	·565	·831	
2·056	·556	·817	·702
2·574	·548	·805	
3·068	·540	·794	·682
3·606	·534	·784	
4·113	·527	·775	·665
5·141	·515	·757	·650
6·169	·505	·742	·637
7·197	·495	·728	·625

Beispiel 1. In einem grofsen Behälter befindet sich Luft von 120° C. Wärme, deren Pressung durch ein oben offenes Quecksilber-Manometer angezeigt wird; wenn nun bei einem äufsern Barometerstand von $27\frac{1}{2}$ Zoll, die Manometersäule 6 Zoll beträgt, so ist die Frage, welche Windmenge durch eine 2 Zoll weite runde Düsenöffnung ausströmt?

Setzt man in der Formel (14) $b = 27·5$, $h = 6$, $t = 120$, $n = ·00366$,

$a = \frac{3·1416}{144}$ und $m = ·90$; so wird $1 + nt = 1·4392$,

$log\,v.\frac{b+h}{b} = ·0857121$, und die Ausflufsmenge per Secunde, unter dem äufsern Drucke gemessen $M = 13$ Kubikfufs.

Nach der genäherten Formel (15) würde man $M = 12·44$, also den Werth um nahe $\frac{1}{2}$ Kubikfufs zu klein finden, weil hier die Pressung $P - p$ schon zu grofs, nämlich beinahe $\frac{1}{5}P$ ist.

Beispiel 2. Das, auf eine $3\frac{1}{2}$ Zoll weite Windleitung B (Fig. ~~163~~ 164) aufgesetzte Quecksilber-Manometer M, zeigt bei einem äufsern Barometerstand von 28 Zoll eine Höhe $ab = 2\frac{1}{2}$ Zoll, während der vor der Manometer-öffnung i vorbeigehende Wind bei 10^0 C. Temperatur durch eine 2 Zoll weite Düsenöffnung C ausströmt; wie grofs ist dabei die theoretische Ausflufsgeschwindigkeit?

Da hier der Manometerstand h an einer Stelle gemessen wird, an welcher die Luft nicht, wie es die Formeln 7) und (8) voraussetzen, ruhig oder nur sehr wenig in Bewegung ist; so mufs man sich der allgemeinern Formel (1) bedienen und für den vorliegenden Fall $P = 28 + 2{\cdot}5 = 30{\cdot}5$, $p = 28$, $t = 10$, $\frac{P}{\gamma} = k = 25120 \times 1{\cdot}0366$ und $\frac{a}{A} = \frac{16}{49}$ setzen, wodurch $logn. \frac{P}{p} = 2{\cdot}3026\, log\, v.\ \frac{30{\cdot}5}{28} = {\cdot}0855222$, $\left(\frac{ap}{AP}\right)^2 = {\cdot}08986$ und endlich $v = \sqrt{\frac{138070{\cdot}65}{{\cdot}91014}} = 389{\cdot}5$ Fufs wird.

Wäre das Manometer M' an einer Stelle des Behälters A angebracht, an welcher die Luft nur wenig oder gar nicht in Bewegung ist, so würde die Manometerhöhe $a'\,b'$ gröfser als die vorige $a\,b$ seyn. Um diese Höhe zu finden, sey P' der entsprechende Druck, so ist (die Relationen (1) und (2) einander gleich gesetzt):

$$log. \frac{P'}{p} = log. \frac{P}{p} : \left[1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2\right]$$

woraus sofort

$$log. P' = log\ p + \left[log. \frac{P}{p} : 1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2\right]$$

folgt und wobei die Logarithmen aus jedem beliebigen Systeme genommen werden können.

Für das vorliegende Beispiel ist also

$$log\ P' = 1{\cdot}4471580 + \frac{{\cdot}0371418}{{\cdot}91014} = 1{\cdot}487967$$

folglich $P' = 30{\cdot}758$ oder $a'\,b' = 30{\cdot}758 - 28 = 2{\cdot}758$ Zoll, während $a\,b$ nur $= 2{\cdot}5$ Zoll war.

254. Behält der innere Druck P im Behälter einen constanten endlichen Werth, während der äufsere Druck p immer schwächer oder gänzlich Null wird; so treten ganz eigenthümliche Erscheinungen ein, welche wir hier noch untersuchen wollen.

Betrachtet man die beiden Formeln (2) und (12) nämlich jene $v = \sqrt{\left(2\,g\,k\, logn. \frac{P}{p}\right)}$ für die Ausflufsgeschwindigkeit und jene $M' = \frac{p}{P}\, a \sqrt{\left(2\,g\,k\, logn. \frac{P}{p}\right)}$ für das Volumen der unter dem innern Drucke gemessenen theoretischen Ausflufsmenge; so sieht man sogleich, dafs v zunimmt, wenn p abnimmt und für $p = 0$ sofort $v = \infty$ wird, während für $p = P$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist. Was jedoch die Ausflufsmenge betrifft, so wird wohl für $p = P$ auch $M' = 0$, aber für

$p = 0$ keineswegs, wie man vermuthen könnte, $M' = \infty$, sondern im Gegentheile abermals gleich Null (was man aus der letztern Formel für M' findet, wenn man das Product $p^2 \, logn. \frac{P}{p}$ oder selbst nur jenes $p \, logn. \frac{P}{p}$, für $p = 0$ untersucht. Es ist nämlich

$p \, logn. \frac{P}{p} = p \, log. P - p \, log. p = p \, log. P - log. p^p$ und da für $p = 0$ bekanntlich $p^p = 0^0 = 1$ also $log \, p^p = 0$ wird; so ist um so mehr auch $M' = 0$). Da es nun zwischen diesen beiden Werthen von $p = P$ und $p = 0$ einen Werth geben muſs, wofür die Ausfluſsmenge M' ein Maximum wird, so hat man nach dem bekannten Verfahren zur Bestimmung dieses Werthes von p die Bedingungsgleichung:

$$\frac{dM'}{dp} = 0, \text{ d. i. } \sqrt{logn. \frac{P}{p}} - \frac{1}{2\sqrt{logn. \frac{P}{p}}} = 0,$$

woraus $logn. \frac{P}{p} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{P}{p} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = \sqrt{2 \cdot 71828 \, ..} = 1 \cdot 6487$ und endlich $p = \frac{P}{\sqrt{e}} = \cdot 60653 \, P$ folgt, wofür wir jedoch ganz einfach $p = \cdot 6 \, P$ setzen wollen.

Dieser Werth entspricht in der That einem Maximum der Ausfluſsmenge, deren Volumen für diesen Werth von p und unter dem innern Druck P gemessen (Relat. 12 in **252**)

$$M' = \frac{a}{\sqrt{e}} \sqrt{[2 g k \, logn. \sqrt{e}]} \text{ oder wegen } logn. \sqrt{e} = \tfrac{1}{2}:$$

$$M' = a \sqrt{\frac{g k}{e}} = \cdot 6 \, a \sqrt{g k} \;\; . \;\; . \quad (p)$$

dagegen unter dem äuſern Druck gemessen:

$$M' = a \sqrt{g k} \;\; . \;\; . \quad (q)$$

so wie ihr Gewicht (Relat. 13):

$$G = p \, a \sqrt{\frac{g}{k}} = \cdot 6 \, P a \sqrt{\frac{g}{k}} \;\; . \;\; . \quad (r)$$

ist. Die Geschwindigkeit endlich, welche diesem Maximum der Ausfluſsmenge entspricht, ist (Relat 2)

$$v = \sqrt{g k} \;\; . \;\; . \quad (s)$$

ein Ausdruck, welcher von den beiden Pressungen P und p ganz unabhängig ist.

Da für eine mittlere Temperatur der Luft von $t = 15^0 \, C.$ nach Relat. (α) in Nr. **249**, $k = 25165 \times 1 \cdot 05625 = 26580$ ist, so wird diese Geschwindigkeit $v = 907$ Fuſs.

Anmerkung 1. Aus dieser Untersuchung geht also hervor, dafs, wenn der im Behälter oder Gasometer Statt findende Druck P als constant, dagegen der äufsere Druck p als veränderlich angenommen wird, für $p = P$ gar kein Ausflufs erfolgt, indem dafür $v = 0$ ist; dafs dagegen sowohl v als auch die Ausflufsmenge M' zunimmt, wenn p abnimmt, und zwar wächst M' bis $p = \cdot 6\,P$ geworden ist, von wo an, bei der weitern Abnahme von p auch M' wieder abnimmt und für $p = 0$, obschon dafür $v = \infty$ werden sollte, abermals $M' = 0$ wird. Dieser scheinbare Widerspruch von $v = \infty$ und $M' = 0$ zeigt eigentlich an, dafs dieser letztere Fall gar nicht existirt, weil für $p = 0$ die Luft von der Spannung P beim Ausflufs plötzlich auf jene Null gebracht werden müfste, wozu nach Relat. (a), Nr. 247, eine unendlich grofse Arbeitsgröfse erforderlich wäre.

Anmerkung 2. Diese hier entwickelten, theoretisch richtigen Formeln für den Ausflufs der Gase unter bedeutenden Pressungsdifferenzen erleiden in der Wirklichkeit erhebliche Modificationen. Denn erstens beruht die Ableitung dieser Formeln auf der Voraussetzung einer vollkommen elastischen Flüssigkeit, ferner wird dabei angenommen, dafs die Schichten der Flüssigkeit in dem Augenblicke, als sie durch den Querschnitt der gröfsten Contraction gehen, auch schon die Spannung p des äufsern Mediums angenommen haben, was jedoch erst in einer gröfseren Entfernung von der Ausflufsöffnung Statt hat. Endlich hat auch die bekannte Eigenschaft der Gase, ihre Wärmecapacität durch Ausdehnung und Comprimirung zu verändern, einen nicht unbedeutenden Einflufs auf diese Modificationen, indem dadurch die Beziehung, welche zwischen der Dichte und Spannung besteht, von Schichte zu Schichte variirt. Alle diese störenden Ursachen, welche jedoch nur bei einer bedeutenden Differenz zwischen P und p, Einflufs haben, benimmt den eben angeführten einfachen Formeln ihre practische Brauchbarkeit.

Die Versuche, welche *Barré de Saint-Venant* und *Wantzel* über den Ausflufs atmosphärischer Luft unter bedeutenden Pressungsdifferenzen angestellt haben, zeigen, dafs unter übrigens gleichen Umständen die Ausflufsmenge um so gröfser wird, je kleiner der äufsere Druck p gegen den innern P ist; dafs, so lange p den Werth von $\cdot 3$ bis $\cdot 4\,P$ nicht überschreitet, die Ausflufsmenge ziemlich gleich bleibt, und dafs sich endlich, wie p gegen P zunimmt, diese Ausflufsmenge vermindert und zuletzt für $p = P$ gleich Null wird.

Die genannten Experimentatoren stellen zur Bestimmung der Ausflufsmenge M, diese unter dem innern Drucke P des Gasometers gemessen, die empirische Formel:

$$M = a.\frac{m\sqrt{\left[2gk\left(1-\frac{p}{P}\right)\right]}}{1+\mu\left(1-\frac{p}{P}\right)^{n}} \quad . \; . \; (\delta)$$

auf, wobei aufser den bekannten Bedeutungen von P, p, a, k, g noch m, n, μ drei Zahlengröfsen sind, welche von der Beschaffenheit der

Ausflußöffnung a abhängen, und zwar kann man setzen, für Öffnungen, welche nach innen gehörig erweitert und abgerundet sind, $m = 1$, $\mu = 1{\cdot}3$, $n = 1$ und für Öffnungen in dünnen Wänden bei vollkommener Contraction $m = {\cdot}61$, $\mu = {\cdot}58$, $n = \frac{3}{2}$.

Setzt man in der vorstehenden Formel (δ) $p = 0$ und für eine nach innen gehörig erweiterte und abgerundete Ausflußöffnung $m = 1$, $\mu = 1{\cdot}3$ und $n = 1$; so erhält man für atmosphärische Luft von der Temperatur 0°, welche in den leeren Raum ausfließt, indem dafür (Nr. 249, Relat. α) $k = 25165$ ist:

$$M = \frac{a}{2{\cdot}3} \sqrt{2gk} = 543{\cdot}8\, a \text{ Kubikfuß};$$

eine Röhre vom Querschnitt a würde also dieselbe Luftmenge liefern, wenn sich die Luft von der Spannung P darin mit der Geschwindigkeit von 543·8 Fuß fortbewegte. Die Größe der Spannung P hat sonach auf die Ausflußgeschwindigkeit selbst keinen Einfluß.

Anmerkung 3. Unter der Voraussetzung, daß die ausfließende Luft- oder Gasart unvollkommen elastisch sey, also angenommen wird, daß es für eine bestimmte Menge dieser Flüssigkeit einen gewissen endlichen Grad der Ausdehnung gibt, bei welchem die Spannung Null ist (was wahrscheinlich bei allen unsern bekannten Gasen mehr oder weniger der Fall), findet *Scheffler* für die Ausflußgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$v = \sqrt{\left[2gb \,\text{logn.} \left(\frac{P+c}{p+c}\right)\right]} \quad .\ .\ (\varepsilon)$$

wobei, wenn E den Elasticitätsmodul (d. i. die Kraft, welche fähig ist das Luft- oder Gasprisma von der im natürlichen Zustande, nämlich bei einer Spannung gleich Null bestehenden Länge L auf die Hälfte oder $\frac{1}{2}L$ zusammen zu drücken) und w das Gewicht der Volumeneinheit des Luftprisma unter dem Drucke Null bezeichnen, sofort

$$b = (1 + {\cdot}00366\, t)\,\frac{E}{w} \text{ und } c = bw \text{ ist.}$$

In diesem Falle wäre nun für den äußern Druck $p = 0$ keineswegs mehr wie oben, $v = \infty$ und $M' = 0$, sondern es wird dafür

$$v = \sqrt{\left[2gb \,\text{logn.} \left(\frac{P+c}{c}\right)\right]} = \sqrt{\left(2gb \,\text{logn.} \frac{P}{c}\right)}$$

wenn man nämlich die sehr kleine Größe c gegen P ausläßt, und unter dem äußern Druck p gemessen:

$$M' = a\sqrt{\left(2gb \,\text{logn.} \frac{P}{c}\right)}.$$

Wird das Luftprisma, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Höhe im natürlichen Zustande, d. i. unter dem Drucke Null, gleich L ist, durch die Einwirkung der Schwere und außerdem noch durch eine gegen das obere Ende wirkende Kraft p bis auf die Höhe h zusammengedrückt (wobei das Prisma am untern Ende durch die der Schwere entgegengesetzt wirkende Kraft P gestützt wird); so findet man

$$h = b\, logn. \left(\frac{P+c}{p+c}\right),$$ so, daſs also auch $v = \sqrt{2gh}$,

nämlich die Ausfluſsgeschwindigkeit, gerade so wie es bei unpreſsbaren Flüssigkeiten der Fall, die der Höhe h entsprechende Fallgeschwindigkeit ist.

Die Dichtigkeit des unter diesen Umständen ausflieſsenden Gases ist jener gleich, welche dem äuſsern Drucke p entspricht. Die unter diesem Drucke gemessene Ausfluſsmenge ist daher

$$M' = a\sqrt{2gh}.$$

Diese hier vorkommende Höhe h ist also jene, welche ein verticales Prisma des betreffenden Gases, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Gewicht gleich $P - p$ ist, annehmen würde, wenn dasselbe nicht bloſs von dem Gewichte seiner eigenen Theile, sondern auſserdem noch durch die Kraft p comprimirt würde.

Wäre die mittlere Höhe unserer Atmosphäre genau bekannt, so lieſse sich auch die Ausfluſsgeschwindigkeit der Luft, von dem mittlern Druck P in den leeren Raum bestimmen. Diese Höhe wäre nach der vorigen Formel, wenn man $p = 0$ setzt und annimmt, daſs die Temperatur durchaus gleich Null ist, $h = b\, logn\, \frac{P+c}{c}$ oder nahe $= b\, logn.\, \frac{P}{c}$ wobei P den atmosphärischen Druck auf die Flächeneinheit an der Erdoberfläche bezeichnen würde. Die mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ in den leeren Raum strömende Luft würde dann jene Dichte annehmen, welche die an der Grenze der Atmosphäre befindliche Luftschichte, nämlich die vom Drucke Null besitzt.

Wäre die mittlere Höhe (wie *Biot* aus den Erscheinungen der Dämmerung schlieſsen zu können glaubt) wenigstens 47000 Meter, oder in runder Zahl 149000 W. Fuſs hoch, so müſste diese Ausfluſsgeschwindigkeit v wenigstens $\sqrt{(62 \times 149000)} = 3037$ Fuſs betragen. Da bei dieser angenommenen Höhe der Atmosphäre die Dichte der Luft in den obersten Schichten wenigstens 372 Mal geringer als auf der Oberfläche der Erde wäre, so würde sich auch die Atmosphäre, wenn sie nicht durch ihr eigenes Gewicht comprimirt würde, oder ihre Dichte durchaus dem Drucke Null entspräche, wenigstens auf das 372fache ihrer jetzigen Höhe erheben. Wäre dagegen ihre Dichte durchaus gleich jener der untersten Schichten vom Drucke P, so würde ihre Höhe nur $\frac{P}{\gamma'} = \frac{1844{\cdot}6}{{\cdot}0733} = 25165$ Fuſs und bei dieser Höhe die Ausfluſsgeschwindigkeit in den leeren Raum nur 1249 Fuſs betragen. (Vergleiche Comp. S. 423.)

255. Wir wollen schlüſslich noch den Ausfluſs einer vollkommen elastischen, schweren Flüssigkeit aus einem sich allmählig leerenden Gefäſse durch eine kleine Öffnung in einen Raum untersuchen, in welchem das Medium einen constanten Druck beibehält.

Es sey zu diesem Ende V das unveränderliche Volumen des Behälters oder Gasometers, aus welchem die Luft- oder Gasart ausfliefst, ohne wieder ersetzt zu werden; P der innere Druck im Anfange der Zeit t, p' der Druck am Ende der Zeit t, p der constante äufsere Druck und a die sehr kleine, wirkliche Ausflufsöffnung, so, dafs wenn diese nach innen nicht gehörig erweitert und abgerundet ist, a den Querschnitt der stärksten Contraction bezeichnet.

Diefs vorausgesetzt, hat man nach Relat. (2), Nr. **249**, für die am Ende der Zeit t Statt findende Ausflufsgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left(2 g k \log n. \frac{p'}{p}\right)}$$

und da man diese Geschwindigkeit während der unendlich kleinen Zeit dt als constant ansehen kann, so ist (Relat. (12) in Nr. **252**) die während diesem Zeitelemente ausfliefsende, und unter dem innern Drucke p' gemessene Ausflufsmenge:

$$dM = \frac{p}{p'} a \, dt \sqrt{\left(2 g k \log n. \frac{p'}{p}\right)}$$

wodurch sich also das Volumen V der Flüssigkeit vom Drucke p' auf jenes $V - dM$ von demselben Drucke p' reducirt. Indem sich aber dieses letztere Volumen wieder auf das ursprüngliche V ausdehnt, geht der Druck oder die Spannung p' in jene $p' - dp'$, oder wenn man p' als von der Zeit t abhängig darstellt, in die Spannung $p' - \frac{dp'}{dt} dt$ über, so, dafs man nach dem *Mariotte*'schen Gesetze hat:

$$\frac{p' - \frac{dp'}{dt} dt}{p'} = \frac{V - dM}{V}$$

oder wenn man für dM den Werth setzt und gehörig reducirt:

$$\frac{dp'}{dt} = p \frac{a}{V} \sqrt{\left(2 g k \log n. \frac{p'}{p}\right)}.$$

Aus dieser Relation folgt, wenn man gleich, da p' abnimmt wenn t zunimmt, das Zeichen von dp' ändert:

$$dt = -\frac{V}{a p} \cdot \frac{dp'}{\sqrt{\left(2 g k \log n. \frac{p'}{p}\right)}}$$

und aus dieser Differenzialgleichung, wenn man den ersten Theil von 0 bis t und den zweiten von P bis p', oder bei verändertem Zeichen von p' bis P integrirt:

$$t = \frac{V}{a p \sqrt{2 g k}} \int_{p'}^{P} \frac{dp'}{\sqrt{\left(\log n. \frac{p'}{p}\right)}}$$

Anmerkung. Da sich dieses Integral nur näherungsweise bestimmen läfst und hierzu die bekannte *Simpson*'sche Formel oder Regel für die Quadratur am einfachsten und genauesten ist, so wollen wir diese Formel hier aufstellen und für den vorliegenden Fall einrichten.

Soll nämlich das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ genommen oder gefunden werden, und man theilt die Differenz $x''-x'$ in n gleiche Theile, wobei jedoch n eine gerade Zahl seyn soll und bezeichnet die den Abscissen dieser Theilungspuncte $x=x'$, $x=x'+\frac{1}{n}(x''-x')$, $x=x'+\frac{2}{n}(x''-x')$ ..

$x=x'+\frac{n}{n}(x''-x')=x''$ entsprechenden Werthe von y (bei einer Curve die Ordinaten) der Reihe nach durch $y_0, y_1, y_2 \,..\, y_n$; so ist der genäherte Werth dieses Integrales nach der *Simpson*'schen Regel bekanntlich

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x''-x'}{3n}\,(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\,..\,+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n) \quad (A)$$

welcher Ausdruck um so genauer ist, je kleiner die Intervalle $\frac{x''-x'}{n}$ sind.

Wäre z. B. $y=\frac{1}{x}$, so würde $\int_{x'}^{x''} y\,dx = \int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x} = logn.\,\frac{x''}{x'}$ und wenn man in dieser Formel die Differenz $x''-x'$ nur in zwei gleiche Theile theilt, oder ganz einfach $n=2$ setzt, wegen $y_0=\frac{1}{x'}$,

$y_1=\dfrac{1}{x'+\frac{1}{2}(x''-x')}=\dfrac{2}{x'+x''}$ und $y_2=y_n=\dfrac{1}{x''}$ sofort:

$$logn.\,\frac{x''}{x'}=\frac{x''-x'}{6}\left(\frac{1}{x'}+\frac{8}{x'+x''}+\frac{1}{x''}\right)$$

Dieser Ausdruck ist um so genauer, je kleiner die Differenz $x''-x'$ ist, wäre er nicht genau genug, so müfste man für n eine gröfsere Zahl wählen.

256. Wendet man zur näherungsweisen Bestimmung des letzten Integralausdruckes die eben aufgestellte Formel (A) an, und theilt die Differenz $P-p$, blofs in zwei gleiche Theile; so wird wegen $x=p'$,

$x'=p'$, $x''=P$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{logn.\,\frac{p'}{p}}}$, $y_0=\dfrac{1}{\sqrt{log\,n\,\frac{p'}{p}}}$, $y_1=\dfrac{1}{\sqrt{logn.\frac{P+p'}{2p}}}$

und $y_2=\dfrac{1}{\sqrt{logn.\,\frac{P}{p}}}$ sofort

$$(g)\quad \int_{p'}^{P}\frac{dp'}{\sqrt{logn.\,\frac{p'}{p}}}=\frac{P-p'}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{logn\,\frac{p'}{p}}}+\frac{4}{\sqrt{logn.\left(\frac{P+p'}{2p}\right)}}+\frac{1}{\sqrt{logn.\,\frac{P}{p}}}\right)$$

und wenn man diesen Ausdruck der Kürze wegen mit R bezeichnet, auch

$$t = \frac{VR}{ap\sqrt{2gk}} \quad . \; . \quad (18)$$

Theilt man dagegen die Differenz $P - p'$ in v i e r gleiche Theile, setzt also $n = 4$, so wird

$$R = \frac{P-p'}{12}\left[\frac{1}{\sqrt{log.\frac{p'}{p}}} + \frac{4}{\sqrt{log.\left(\frac{P+3p'}{4p}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{log.\left(\frac{P+p'}{2p}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{log.\left(\frac{3P+p'}{4p}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{log.\frac{P}{p}}}\right] \quad . \; . \quad (h)$$

257. In dieser, durch die Formel (18) ausgedrückten Zeit, in welcher der Druck im Gasometer von P auf p' herabsinkt, ist die ursprüngliche Gasmenge V um eine Quantität vermindert worden, welche unter dem Drucke P gemessen, das V o l u m e n

$$V' = V - \frac{p'}{P}V = \frac{P-p'}{P}V \quad . \; . \quad (19)$$

beträgt (weil $\frac{V-V'}{V} = \frac{P}{p'}$ seyn mufs).

Das G e w i c h t endlich dieser während der Zeit t ausgeflossenen Gasmenge ist, da die Volumeneinheit desselben unter dem Drucke P, γ oder (Relat. (a), Nr. **249**) $\frac{P}{k}$ Pfunde oder Gewichtseinheiten wiegt,

$$= \frac{P-p'}{P}V.\frac{P}{k} = \frac{P-p'}{k}V \quad . \; . \quad (20)$$

wobei k aus Relat. (α) in Nr. **249** zu nehmen ist.

B e i s p i e l. Der 982 Kubikfufs haltende Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen oben offenes Quecksilber-Manometer 10 Zoll und Thermometer 6° C. zeigt. Wenn nun dieser Wind durch eine 1 Zoll weite kreisrunde Öffnung ohne Contraction in einen grofsen oder freien Raum, dessen Barometerstand 27 Zoll beträgt, ausströmt; so entsteht die Frage, in welcher Zeit der Manometerstand bis auf 7 Zoll herabsinkt, und welches Luftquantum bis dahin ausfliefst?

Bezeichnet man die in Fufsen ausgedrückten Manometer und Barometersäulen durch h, h', b und das Gewicht von 1 Kubikfufs Quecksilber mit γ''; so ist $P = (h+b)\gamma''$, $p' = (h'+b)\gamma''$ und $p = b\gamma''$ oder für $h = \frac{10}{12}$, $h' = \frac{7}{12}$, $b = \frac{27}{12}$ und $\gamma'' = 766{\cdot}87$ Pf. auch $P = 2364{\cdot}5$, $p' = 2172{\cdot}8$ und $p = 1725{\cdot}4$ Pfund.

Die in der Reihe R in Relat. (g) vorkommenden Quotienten werden $\frac{p'}{p} = 1 + \frac{h'}{b} = 1 + \frac{7}{27} = 1{\cdot}25926$, $\frac{P+p'}{2p} = 1 + \frac{h+h'}{2b} = 1{\cdot}31482$ und $\frac{P}{p} = 1 + \frac{h}{b} = 1{\cdot}37037$. Die genannte Reihe ist also:

$$R = 31{\cdot}955\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}64580 + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}805$$

Nimmt man dagegen die noch mehr genäherte Reihe (h), so wird

$$R = 367{\cdot}7933\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}96280 + 3{\cdot}82290 + 7{\cdot}36948 + \\ + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}9775$$

wodurch die bereits erreichte hinlängliche Genauigkeit ersichtlich wird.

Setzt man also $R = 367{\cdot}8$, so folgt aus der Relation (18), wegen $a = \frac{1}{4} . \frac{3{\cdot}1416}{144} = \frac{{\cdot}1309}{24}$ und $k = 25120 \times 1{\cdot}02196 = 25671{\cdot}6$, sofort $t = 30{\cdot}421$, ferner aus (19) $V' = 79{\cdot}62$ und aus (20) Gewicht $= 7{\cdot}333$.

Das Manometer wird also in nahe 30·4 Secunden von 10 auf 7 Zoll herabsinken und während dieser Zeit wird ein Volumen Luft oder Wind ausströmen, welches unter dem anfänglichen innern Druck gemessen 79·62 Kubikfufs (unter dem äufsern Druck gemessen 109·11 Kubikf.) und dem Gewichte nach nahe $7\frac{1}{3}$ Pfund beträgt.

Bewegung der Luft in Röhrenleitungen.

(§. 454.)

258. Bewegt sich die Luft aus dem Behälter A (Fig. 165) durch eine lange Röhre BC vom Durchmesser D und der Länge L mit der mittlern Geschwindigkeit c, so kann man den an der Röhrenwand entstehenden Reibungswiderstand durch die Höhe z einer Luftsäule messen, wofür (auf ähnliche Weise wie bei Wasserleitungen) $z = \mu \frac{L}{D} \frac{c^2}{2g}$ und der Widerstandscoeffizient im Mittel $\mu = {\cdot}024$ ist. (Wollte man die Widerstandshöhe z durch eine Quecksilbersäule ausdrücken, so müfste man $\mu = \frac{{\cdot}024}{10466{\cdot}8} = {\cdot}00000229$ setzen und es würde ein in C angebrachtes Quecksilbermanometer M'' um diese Höhe z niedriger stehen, als ein in B befindliches derartiges Manometer M'.)

Strömt nun die Luft aus der verengten Öffnung E vom Durchmesser d mit der Geschwindigkeit v aus und nimmt man an, dafs die Pressung oder Spannung der Luft im Innern des Behälters A gleich P oder der entsprechende Manometerstand in M gleich h, die Pressung im Anfange der Röhrenleitung bei B gleich P' oder der Manometerstand in M' gleich h_1, die Pressung der Luft am Ende der Leitung (unmittelbar vor der Verengung) bei C gleich P oder der entsprechende Manometerstand in M'' gleich P'', so wie endlich der äufsere Druck $= p$ und entsprechende Barometerstand $= b$ ist; so hat man, auf die Grundgleichung (f) in Nr. **248** zurückgehend, welche, wenn man mit γ dividirt und für $\frac{P}{\gamma}$ seinen Werth k und $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ setzt, die Form:

$$m\,k\,logn.\frac{P}{p}=m\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\frac{p^2}{P^2}\right)$$

annimmt, folgende Resultate.

Für das Ende der Windleitung, d. i. für die Stelle C, hat man in dieser Gleichung bloſs P'' statt p und $\frac{P''}{p}=\frac{b+h_2}{b}$ zu setzen; dadurch erhält man, wenn aus der entstehenden Gleichung v bestimmt wird:

$$v=\sqrt{\left\{\frac{2g\,k\,logn.\left(\frac{b+h_2}{b}\right)}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\left(\frac{b}{b+h_2}\right)^2}\right\}}\ \ldots\ (1)$$

Für den Anfang der Leitung, d. i. für die Stelle B, muſs man setzen $m\,k\,logn.\frac{P'}{p}=m\,\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\frac{p^2}{P'^2}\right)+w$

wo $w=m\,z=m\,\mu\,\frac{L}{D}\,\frac{c^2}{2g}=m\,\mu\,\frac{L}{D}\,\frac{d^4}{D^4}\,\frac{v^2}{2g}\left(\text{wegen } c=\frac{d^2}{D^2}\,v^2\right)$ die nöthige Arbeitsgröſse ist, um den Reibungswiderstand in der Leitung zu überwinden. Wird dieser Werth für w substituirt, so wie auch $\frac{P'}{p}=\frac{b+h_1}{b}$, dann $\mu=\cdot024$ gesetzt und wieder v bestimmt, so wird

$$v=\sqrt{\left\{\frac{2g\,k\,logn\left(\frac{b+h_1}{b}\right)}{1+\left[\cdot024\,\frac{L}{D}-\left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2\right]\frac{d^4}{D^4}}\right\}}\ \ldots\ (2)$$

Für den Luftbehälter A hat man, da darin die Luft als ruhend angenommen wird, also in der genannten Grundformel (f) $c=0$ ist:

$$m\,k\,logn.\frac{P}{p}=m\,\frac{v^2}{2g}+m\,\mu\,\frac{L}{D}\,\frac{d^4}{D^4}\,\frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man zugleich auch auf die Widerstände beim Ein- und Austritt der Luft Rücksicht nimmt, und die betreffenden Widerstandscoeffizienten (Comp. §. 456 und Nr. **181**) mit z' und z'' bezeichnet, wodurch die dabei absorbirte Arbeitsgröſse $=m\,z'\,\frac{c^2}{2g}+m\,z''\frac{v^2}{2g}=m\,z'\,\frac{d^4}{D^4}\frac{v^2}{2g}+m\,z''\,\frac{v^2}{2g}$ wird und noch im zweiten Theil der vorigen Gleichung hinzugefügt werden muſs, wenn ferner $\frac{P}{p}=\frac{b+h}{b}$, $\mu=\cdot024$ gesetzt und wieder v bestimmt wird; so erhält man:

$$v=\sqrt{\left\{\frac{2g\,k\,logn\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+z''+\left(z'+\cdot024\,\frac{L}{D}\right)\frac{d^4}{D^4}}\right\}}\ \ldots\ (3)$$

In allen diesen Formeln ist der Factor (Nr. **249**, Relat. a)

$$k = 25165\,(1 + {}^{\cdot}00366\,t)$$

wobei t die nach der 100theiligen Scala gemessene Temperatur des Windes im Behälter oder in der Leitung bezeichnet. Setzt man diesen Werth für k in der letzten Formel (3) und zieht, indem man für den Gebrauch den natürlichen Logarithmus in den Tafellogarithmus verwandelt, aus dem Factor $62\,k \times 2{\cdot}3026$ die Wurzel gleich aus, so erhält diese Formel die Gestalt:

$$v = 1895 \sqrt{\left\{\frac{(1 + {}^{\cdot}00366\,t)\,\log v.\left(\frac{b+h}{h}\right)}{1 + z'' + \left(z' + {}^{\cdot}024\,\frac{L}{D}\right)\frac{d^4}{D^4}}\right\}} \quad \ldots (4)$$

Anmerkung. Diese Relationen beziehen sich auf den Fall, in welchem in der Leitung keine plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen, Krümmungen u. s. w. vorkommen, indem durch solche Hindernisse die Formeln, auf ähnliche Weise, wie bei den Wasserleitungen, zusammengesetzter werden. Auch müſste man, wenn die Ausmündung um die Gröſse h' höher oder tiefer als die Einmündung liegt, streng genommen, im Nenner der vorigen Formel noch beziehungsweise $\pm\, h'$ addiren; allein diese Gröſse wird immer gegen die übrigen Gröſsen ohne Fehler zu vernachlässigen seyn.

Beispiel 1. In dem Regulator einer 320 Fuſs langen und 4 Zoll weiten cylinderischen Windleitung steht das Quecksilbermanometer 3·1 und das äuſsere Barometer 27·2 Zoll hoch. Wenn nun der Wind bei einer Temperatur von $20^0\,C.$ am Ende der Leitung durch eine conisch zulaufende Düsenöffnung von 2 Zoll Durchmesser ausströmt, so ist die Frage, welche Windmenge diese Leitung liefert?

Setzt man in der letzten Formel (4) $t = 20$, $b = 27{\cdot}2$, $h = 3{\cdot}1$, $L = 320$, $D = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$, $z'' = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = {}^{\cdot}384$ (wenn man nämlich $\varphi = {}^{\cdot}85$ setzt) und im Falle die Einmündung nicht gehörig abgerundet oder gegen den Behälter zu erweitert seyn sollte, $z' = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 = {}^{\cdot}444$ (wenn man $\mu = {}^{\cdot}60$ setzt); so wird $1 + {}^{\cdot}00366\,t = 1{\cdot}0732$, $\frac{b+h}{b} = \frac{30{\cdot}3}{27{\cdot}2}$ der Zähler des Bruches unter dem Wurzelzeichen $Z = {}^{\cdot}0503048$ und der Nenner $N = 2{\cdot}85175$, folglich die Ausfluſsgeschwindigkeit $v = 251{\cdot}97$ Fuſs, so wie damit die per Secunde unter dem äuſsern Drucke gemessene Ausfluſsmenge: $M = \frac{1}{4}\,d^2\,\pi\,v = 5{\cdot}497$ oder nahe $5\frac{1}{2}$ Kubikfuſs.

Beispiel 2. Steht nach den Angaben des 2ten Beispiels in §. 458, mit einem Gebläse, in welchem das Quecksilbermanometer 2·1 Zoll Höhe zeigt, eine 172 Klafter lange, $4\frac{1}{2}$ Zoll weite cylinderische Windleitung in Verbindung, deren Düsenöffnung einen Durchmesser von ·1394 Fuſs besitzt, und soll, wenn die Luft $8^0\,R.$ hat und der äuſsere Barometerstand 27·6 Zoll ist, die per Secunde ausströmende Windmenge bestimmt werden; so hat man nach derselben Formel (4), wegen $h = 2{\cdot}1$, $b = 27{\cdot}6$, $L = 1032$, $D = \frac{3}{8}$, $d = {\cdot}1394$, $t = 10$ und wenn man wieder wie vorhin $z'' = {\cdot}384$, dagegen $z' = 0$ setzt, nämlich keine Contraction bei der Einmündung annimmt: $v = 211{\cdot}70$ Fufs und damit $M = 3{\cdot}23$ Kubikfufs.

In so ferne nun in dem genannten Beispiele (Comp. §. 458) die Weite der Düsenöffnung so zu bestimmen war, dafs unter den genannten Umständen per Secunde $3\frac{1}{2}$ Kubikfufs Luft ausfliefsen sollte; so zeigt sich der gefundene, und hier in Rechnung gebrachte Durchmesser derselben um etwas zu klein, was wohl seinen Grund mit darin findet, dafs hier der Widerstandscoeffizient mit ·024 etwas gröfser als dort, wo er = ·0238 gesetzt ist, angenommen wurde.

Hochofengebläse.

(§. 460.)

259. Bezeichnet V in Kubikfufs ausgedrückt das Volumen, welches die Luft, die per Secunde in den Hochofen getrieben werden soll, bei 0^0 und unter dem mittlern Druck der Atmosphäre einnimmt; P die Pressung der Luft in der Windleitung, so wie p jene der äufsern Luft, auf 1 Quadratfufs; endlich N den Nutzeffect in Pferdekräften zu 430 Fufspfund ausgedrückt, welchen die Betriebsmaschine dafür entwickeln mufs; so hat man, wenn der Nutzeffect gut ausgeführter eiserner Cylinder- und hölzerner Kastengebläse der Erfahrung zu Folge 60 Procent beträgt, und da die nöthige Wirkung um 1 Kubikfufs Luft von der Pressung oder Spannung p auf jene P zu bringen, nach Nr. **247**, Relat. (b) gleich $p \, logn. \frac{P}{p}$ ist, sofort:

$$430 \, N = \frac{V \times p}{{\cdot}60} \, logn. \frac{P}{p} = 1{\cdot}7 \, V p \, logn. \frac{P}{p}$$

und daraus $$N = \frac{1{\cdot}7}{430} \, V \, p \, logn. \frac{P}{p}$$

oder, da man die Luft auf die Temperatur 0 und den Barometerstand 2·4043 Fufs (= ·76 M.) zu reduciren hat, so ist Nr. **251**, Anmerk.) $p = 1845$ Pfund und wenn man die Pressung P in der Windleitung durch ein oben offenes Quecksilbermanometer, welches die Höhe h zeigt und den äufsern Druck p durch den mittlern Barometerstand b ausdrückt, wodurch $\frac{P}{p} = \frac{b + h}{b}$ wird, auch

$$N = \frac{1{\cdot}7}{430} \times 1845 \, V \times 2{\cdot}3026 \, logv. \left(\frac{b+h}{b}\right),$$