Dritter Abschnitt.

Aërodynamik.

Von dem Ausflusse der Luft aus Behältern.

(§. 447.)

247. Wir wollen zuerst die Wirkungs- oder Arbeitsgröfse suchen, welche 1 Kubikfufs irgend einer Luft- oder Gasart entwickelt, während sich dieselbe so weit ausdehnt, dafs sie von der höhern Spannkraft P auf die niedere p übergeht.

Man denke sich zu diesem Ende einen hohlen Cylinder ad (Fig. ~~161~~) 162 vom Querschnitt $=1$ Quadratfufs, in welchem sich ein Kolben ef luftdicht, jedoch ohne alle Reibung bewegen läfst und in dem Raume af des Cylinders, wofür die Länge $ae = l$ ist, Luft von einer solchen Spannkraft eingeschlossen, dafs sie auf jeden Quadratfufs einen Druck von P Pfund ausübt. Dehnt sich nun diese Luft in dem Raume ad aus, indem angenommen wird, dafs auf den Kolben ef kein oder ein geringerer Gegendruck Statt findet, so soll die Luft dadurch auf die Spannkraft p herabgebracht, und durch das Fortschieben des Kolbens von ef bis cd, wofür $ac = L$ seyn mag, die Wirkung oder Arbeit W ausgeübt oder entwickelt worden seyn. Betrachtet man den Kolben in einer Stellung mn, wofür $am = x$ ist, und setzt die Spannkraft der in dem Raume an befindlichen Luft (d. i. den Druck auf 1 Quadratfufs in Pfunden) $= z$; so ist nach dem *Mariotte*'schen Gesetze (§. 437) $z : P = l : x$ oder $z = P\frac{l}{x}$, und da man diese Spann- oder Expansivkraft während eines unendlich kleinen Fortschreitens des Kolbens, nämlich um dx als constant ansehen kann, so entwickelt der Kolben oder die sich ausdehnende Luft bei diesem Fortschreiten die unendlich kleine Wirkungs- oder Arbeitsgröfse

$$dW = z\,dx = Pl\frac{dx}{x}.$$

Aus diesem Differenzialausdrucke erhält man durch die Integration innerhalb der Grenzen von $x = l$ bis $x = L$:

$$W = P\,l \int_l^L \frac{dx}{x} = P\,l\; logn. \frac{L}{l} = P\,l\; logn. \frac{P}{p},$$

weil nämlich $l : L = p : P$ Statt findet.

Setzt man endlich $l = 1$ Fuſs, so ist der genannte Raum $af =$ 1 Kubikfuſs und die Arbeitsgröſse, welche 1 Kubikfuſs Luft von der Spannkraft P dadurch entwickelt, daſs sie sich so lange ausdehnt, bis sie auf die Spannkraft p herabgegangen:

$$W = P\; logn. \frac{P}{p} = 2{\cdot}3026\, P\; log\, v. \frac{P}{p} \quad . \; . \quad (a)$$

Eben so läſst sich umgekehrt die Wirkungsgröſse bestimmen, welche nöthig ist, um die in dem cylinderischen Raume cb (Fig. 162) 163 enthaltene Luft von der Spannung p zu comprimiren und auf die höhere Spannung P zu bringen, was dadurch geschehen soll, daſs der Kolben durch eine äuſsere Kraft aus der Lage cd, wofür $ac = L$ ist, in jene ef geschoben wird, wofür $ae = l$ seyn mag. Ist der Kolben von cd nach mn, wofür $cm = x$ seyn soll, gekommen, also die Luft von dem Raume cf in jenen mf gepreſst, so sey die Spannkraft oder der Gegendruck auf den Kolben $= z$, folglich $z : p = L : L - x$ oder $z = \frac{Lp}{L - x}$. Rückt der Kolben um dx weiter, so ist die hierzu nöthige Arbeit $dW = z\,dx = Lp \frac{dx}{L - x}$, folglich, wenn man integrirt:

$$W = Lp \int_0^{L-l} \frac{dx}{L - x} = Lp\; logn. \frac{L}{l} = Lp\; logn. \frac{P}{p}.$$

Setzt man wieder $L = 1$, so ist die nöthige Arbeitsgröſse, um 1 Kubikfuſs Luft von der geringern Spannkraft p auf die höhere P zu comprimiren, sofort:

$$W = p\; logn \frac{P}{p} = 2{\cdot}3026\, p\; log\, v. \frac{P}{p} \quad . \; . \quad (b)$$

248. Um nun auf den Ausfluſs der Luft aus einem Behälter überzugehen, wollen wir sogleich den allgemeinen Fall betrachten und voraussetzen, daſs die Ausfluſsöffnung gegen den Querschnitt des Gefäſses, diesen winkelrecht gegen die Achse der Öffnung genommen, so bedeutend sey, daſs die Luft im Gefäſse vor der Mündung nicht als ruhend angesehen werden kann, sondern schon mit einer meſsbaren Geschwindigkeit vor derselben ankömmt.

Es sey daher A dieser Querschnitt des Behälters, a jener der Ausflufsöffnung, P der Druck der im Behälter enthaltenen Luft auf den Quadratfufs bei einer bestimmten Temperatur, γ die Dichte oder das Gewicht von 1 Kubikfufs dieser innern Luft, p der Druck und γ' die Dichte der äufsern Luft, c die Geschwindigkeit mit welcher sich die Luft im Behälter gegen die Mündung bewegt, v die Ausflufsgeschwindigkeit und m die per Secunde ausfliefsende Luftmenge auf die innere Spannung oder Dichte reducirt; so entwickelt die von der Spannung P auf jene p durch Ausdehnung herabgehende Luftmenge m per Secunde die Wirkungsgröfse (vorige Nr. Relat. a) $m P\, logn. \frac{P}{p}$. Da aber diese Wirkung dazu verwendet wird, um die Luftmasse $m\gamma$ von der Geschwindigkeit c auf jene v zu bringen, so hat man nach §. 186, $m P\, logn. \frac{P}{p} = m\gamma \frac{v^2}{2g} - m\gamma \frac{c^2}{2g}$, oder wegen $A c \gamma = a v \gamma'$, woraus $c = \frac{a}{A}\frac{\gamma'}{\gamma} v = \frac{a}{A}\frac{p}{P} v$ wird, auch:

$$m P\, logn. \frac{P}{p} = m\gamma \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{a^2}{A^2} \cdot \frac{p^2}{P^2}\right) \quad . \; . \; (f)$$

aus welcher Gleichung sofort die Ausflufsgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left\{\frac{2g \frac{P}{\gamma}\, logn. \frac{P}{p}}{1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2}\right\}} \quad . \; . \; (1)$$

folgt. (§. 452, Relat. 7.)

249. Ist, wie gewöhnlich, die Ausflufsöffnung a gegen den Querschnitt des Behälters A so klein, dafs man den Bruch $\left(\frac{ap}{AP}\right)^2$ gegen die Einheit auslassen kann (oder nimmt man in der obigen Entwicklung die Luft im Behälter als r u h e n d an); so hat man einfacher:

$$v = \sqrt{\left[2g \frac{P}{\gamma}\, logn. \frac{P}{p}\right]}$$

und wenn man den Factor $\frac{P}{\gamma} = \frac{p}{\gamma'} = k$ . . (a) setzt, auch:

$$v = \sqrt{\left[2 g k\, logn. \frac{P}{p}\right]} \quad . \; . \; (2)$$

Setzt man die Differenz $P - p = x$, also $p = P - x$, so ist $logn. \frac{P}{p} = logn. \frac{P}{P-x}$ $= - logn. \frac{P-x}{P} = - logn. \left(1 - \frac{x}{P}\right) = -\left[-\frac{x}{P} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{P}\right)^2 - \ldots\right] =$

$\frac{x}{p} = \frac{P-p}{P}$, wenn nämlich $P-p$ so klein, etwa $< \frac{1}{10} P$ ist, dafs man in dieser Reihe die zweite und höhern Potenzen von $\frac{P-p}{P}$ auslassen darf. Man hat daher unter dieser Voraussetzung den genäherten aber einfachern Ausdruck $\left(\text{wegen } k\, logn. \frac{P}{p} = \frac{P}{\gamma} \frac{(P-p)}{P} = \frac{P-p}{\gamma}\right)$:

$$v = \sqrt{\left[2g\frac{(P-p)}{\gamma}\right]} \;.\;.\; (3)$$

Ist nun h die Höhe einer Luftsäule von der innern Dichte γ, welche dem Drucke $P-p$ das Gleichgewicht hält, so ist $P-p = h\gamma$, folglich auch:

$$v = \sqrt{2gh} \;.\;.\; (4)$$

welcher Ausdruck sofort mit jenem übereinstimmt, der (Nr. **153**) für den Ausfluſs von tropf- oder unpreſsbaren Flüssigkeiten gilt.

Für höhere Pressungen muſs man sich jedoch der genauern Formel (2) bedienen

Entspricht dem Drucke $P-p = h\gamma$ eine äufsere Luftsäule von der Höhe h', so ist auch $P-p = h'\gamma'$ und wenn der äufsere, jeweilig Statt findende Luftdruck p durch $b\gamma'$ ausgedrückt wird, wobei also b die Höhe der äufsern Luftbarometersäule bezeichnet; so ist $P = (b+h')\gamma'$ und $\frac{P}{p} = \frac{b+h'}{b}$, folglich nimmt die obige Formel (2) auch die Form an:

$$v = \sqrt{\left[2g\,b\, logn.\left(\frac{b+h'}{b}\right)\right]} \;.\;.\; (6)$$

Anmerkung. Obschon man in der Anwendung weder den innern noch den äufsern Druck durch die Luftsäulen $b+h'$ und b, sondern entweder durch Wasser- oder Quecksilbersäulen zu messen pflegt; so ändert sich der Quotient $\frac{b+h'}{b}$ dennoch nicht, man mag b und h' durch Luft-, Wasser- oder Quecksilbersäulen ausdrücken. Was dagegen den Factor b in der vorigen Formel (6) oder k in jener (2) anbelangt, so wird, wenn die ausströmende elastische Flüssigkeit trockene atmosphärische Luft von der Temperatur t (nach der 100theiligen Scala) ist, und die Pressungen durch Quecksilbersäulen gemessen werden, sofort:

$$b = k = 25165\,(1 + {}^{\cdot}00366\,t) \;.\;.\; (a)$$

wenn man nämlich für das Verhältniſs des Gewichtes von 1 Kubikfuſs Quecksilber zu 1 Kubikfuſs Luft unter dem mittlern Druck von 2·4043 Fuſs (= ·76 Meter) und der Temperatur Null die Zahl 10466·8 zum Grunde legt und für das Product 10466·8 × 2·4043 die Zahl 25165 nimmt *).

*) Es ist nämlich nach *Biot* das specifische Gewicht des Quecksilbers im luftleeren Raume und bei 0° gleich 13·598207 und jenes der Luft unter dem

Bezeichnet man den Factor k, in so ferne er sich auf eine andere Luft- oder Gasart bezieht, durch k', und ist s das specifische Gewicht derselben in Beziehung auf die atmosphärische Luft; so mufs man $k' = \frac{k}{s}$ setzen und für k den vorigen Werth (α) nehmen.

250. Um die in der Formel (4) vorkommende Luftsäulenhöhe h in eine gleichgeltende Quecksilbersäule h'' umzuwandeln, hat man, wenn γ'' das Gewicht von 1 Kubikfufs Quecksilber (bei Null Grad) bezeichnet, und da die Pressung der Luft im Behälter durch die Quecksilbersäule $h'' + b$ gemessen wird, wenn b der äufsere Barometerstand durch eine Quecksilbersäule gemessen ist, sofort $h = \frac{\gamma''}{\gamma} h''$ oder wegen

$\gamma : \gamma' = b + h'' : 2{\cdot}4043$, woraus $\gamma = \frac{\gamma'}{2{\cdot}4043}(b + h'')$ folgt, auch $h = 2{\cdot}4043 \frac{\gamma''}{\gamma'} \frac{h''}{b + h''} = 2{\cdot}4043 \times 10466{\cdot}8 \frac{h''}{b + h''} = 25165 \frac{h''}{b + h''}$, oder, wenn die Temperatur der innern Luft nicht Null, sondern $= t$ ist und Kürze halber der Ausdehnungscoeffizient $\cdot 00375$ oder nach Andern $\cdot 00366 = n$ gesetzt wird, auch $h = 25165(1 + nt)\frac{h''}{b + h''} = k \frac{h''}{b + h''}$, wobei man einfacher wieder h statt h'' schreiben, d. i. h für die Quecksilbersäule selbst gelten lassen kann. Dadurch geht die Formel (4) in $v = \sqrt{\left[2gk\frac{h}{b+h}\right]} = \sqrt{\left[2g \times 25165(1 + nt)\frac{h}{b+h}\right]}$ oder für den Gebrauch bequemer in die folgende:

Barometerstand von $\cdot 76$ Meter und bei 0^0 gleich $\cdot 0012991719$ folglich das Verhältnifs $\frac{13{\cdot}598207}{\cdot 0012991719} = 10466{\cdot}8$.

Bei diesen Verhältnifszahlen findet man für das Gewicht von 1 Kubikfufs ganz trockener Luft bei 0^0 Temperatur und dem mittlern Barometerstand von $\cdot 76$ Meter oder $2{\cdot}4043$ W. Fufs sofort $\cdot 073267$ Pfund, wofür wir hier durchaus ohne Fehler die Zahl $\cdot 0733$ setzen können.

Da jedoch die atmosphärische Luft bei ihrer gewöhnlichen Beschaffenheit immer etwas Wasserdampf enthält (welcher specifisch leichter als die Luft ist), so kann man, wenn es sich um die Anwendung der Formeln auf die gewöhnliche äufsere Luft handelt, annehmen, dafs Luft von 18^0 Wärme 850 Mal leichter sey als Wasser im Zustande der gröfsten Dichtigkeit. Darnach würde ein Kubikfufs solcher Luft nur $\cdot 066353$ Pfund wiegen und man müfste die obige Relation (α) für solche Luft umwandeln in $k = 25932(1 + \cdot 004t)$, weil solche Luft bei 0^0 und dem mittlern Drucke $\cdot 071131$ Pfund wiegen würde.

$$v = 1249 \sqrt{\left[(1+nt)\frac{h}{b+h}\right]} \;.\;.\; (7)$$

über, während die genaue oder allgemeine Formel (6) die Form

$$v = 1249 \sqrt{\left[(1+nt)\, logn. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]}$$ oder auch wegen

$logn.\, x = 2\ 3026\, log\, v.\, x$ jene

$$v = 1895 \sqrt{\left[(1+nt)\, log\, v. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \;.\;.\; (8)$$

erhält.

251. Befindet sich endlich in dem Behälter oder Gasometer irgend eine andere Luft- oder Gasart, von welcher 1 Kubikfuſs bei 0° und dem mittlern Luftdruck von 2·4043 Fuſs (·76 M.) Barometerstand, das Gewicht von γ_0 Pfund, also wenn 1 Kubikfuſs Luft unter diesen Bedingungen q Pfunde wiegt, gegen die atmosphärische Luft das specifische Gewicht $s = \frac{\gamma_0}{q}$ besitzt; so muſs man, da der Factor k (**249**, Anmerk.) in $\frac{k}{s} = \frac{kq}{\gamma_0}$ übergeht, die vorigen Zahlen 1249 und 1895 in (7) und (8) mit $\sqrt{q} = \sqrt{\cdot 0733}$ multipliciren, wenn man nämlich das oben (Note auf Seite 265) angegebene specifische Gewicht der Luft und Gewicht des Wassers zum Grnnde legt, was für q den Werth ·073267 Pf. gibt*). Dadurch erhält man für die theoretische Ausfluſsgeschwindigkeit:

$$v = 338{\cdot}18 \sqrt{\left[\left(\frac{1+nt}{\gamma_0}\right)\frac{h}{b+h}\right]} \;.\;.\; (9)$$

oder genauer und auch für höhere Spannungen giltig:

$$v = 513{\cdot}16 \sqrt{\left[\left(\frac{1+nt}{\gamma_0}\right) log\, v. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \;.\;.\; (10)$$

Anmerkung. Diese Formel kann auch unter der Form aufgestellt werden:

$$v = \sqrt{\left[2g\frac{m}{\gamma_0}(1+nt)\, logn. \left(\frac{b+h}{b}\right)\right]}$$

wobei $m = 1844{\cdot}6$ oder auch $= 1845$, den Druck der Luft bei 0° und 2·4043 Fuſs Barometerstand (= ·76 Meter) auf den Quadratfuſs ausdrückt.

252. Ist M' die unter dem äuſsern Drucke gemessene theoretische Ausfluſsmenge, so ist $M' = av$, oder wenn man für v substituirt:

*) Nimmt man dagegen den Kubikmeter Luft bei 0° und ·76 M. Barometerstand zu 1·2995 Kilogramme an, so erhält man durch Reduction auf das W. Maſs und Gewicht q = ·073293 Pfunde.

$$M' = a\sqrt{\left[2gk\,logn.\frac{P}{p}\right]} \;.\;.\;(11)$$

während dieses Volumen unter dem innern Drucke gemessen (wegen $M''P = M'p$) den Werth

$$M'' = \frac{p}{P}\,a\sqrt{\left[2gk\,logn.\frac{P}{p}\right]} \;.\;.\;(12)$$

erhält.

Das Gewicht G dieser in der Zeiteinheit unter dem innern Drucke P ausfliefsende Gasmenge ist gleich $M''\gamma$, oder wegen $\frac{P}{\gamma} = k$ (**249**, Anmerk.) also $M''\gamma = \frac{M''P}{k}$ auch, wenn man für M'' den vorigen Werth setzt:

$$G = pa\sqrt{\left[\frac{2g}{k}\,logn\,\frac{P}{p}\right]} \;.\;.\;(13)$$

Bezeichnet man den betreffenden Contractionscoeffizienten mit m und die per Secunde wirklich ausfliefsende Luft- oder Gasmenge in Kubikfufs durch M; so ist $M = mM' = mav$, oder wenn man für v die Werthe setzt, für den Ausflufs von atmosphärischer Luft:

$$M = 1895\,ma\sqrt{\left[(1+nt)\,log\,v.\left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \;.\;.\;(14)$$

oder für geringe Spannungen ($P - p < \frac{1}{10}P$):

$$M = 1249\,ma\sqrt{\left[(1+nt)\left(\frac{h}{b+h}\right)\right]} \;.\;.\;(15)$$

Für irgend eine andere Luft- oder Gasart, wovon 1 Kubikfufs bei 0° und dem mittlern Luftdrucke γ_0 Pfunde wiegt, ist:

$$M = 513{\cdot}16\,ma\sqrt{\left[\frac{(1+nt)}{\gamma_0}\,log\,v.\left(\frac{b+h}{b}\right)\right]} \;.\;.\;(16)$$

und bei geringer Spannung:

$$M = 338{\cdot}18\,ma\sqrt{\left[\frac{(1+nt)}{\gamma_0}\,\frac{h}{b+h}\right]} \;.\;.\;(17)$$

253. Was endlich den Contractions- oder Ausflufscoeffizienten m betrifft, so ist nach den *Koch*'schen Versuchen und *Weisbach*'s Berechnung, bei Manometerständen von $\frac{1}{200}$ bis $\frac{1}{5}$ Atmosphäre

für Mündungen in einer dünnen Wand, im Mittel $m = {\cdot}58$

für cylinderische Ansatzröhren, welche höchstens 6 Mal so lang als weit sind . . . . . . $m = {\cdot}74$

und für convergente Ansatzröhren, nach Art der Düsen bei Gebläsen (von 6° Seitenconvergenz) . . $m = {\cdot}85$

Anmerkung. Wie sehr übrigens diese Ausflufscoeffizienten mit der Pressung oder Höhe der Manometersäule variiren, zeigt folgende Tabelle.

Höhe der drücken-den Wassersäule in Fufsen.	Ausflufscoeffizient m:		
	Für Öffnungen in dünnen Wänden.	Für conische Ansatzröhren, Neigung ca. 3°.	Für cylinderische Ansatzröhren.
·051	·615	·905	·776
·104	·610	·897	
·206	·604	·888	
·306	·599	·880	
·411	·595	·874	
·512	·591	·869	·746
·616	·588	·865	
·718	·585	·859	
·823	·582	·855	
·923	·579	·851	
1·028	·577	·847	·728
1·540	·565	·831	
2·056	·556	·817	·702
2·574	·548	·805	
3·068	·540	·794	·682
3·606	·534	·784	
4·113	·527	·775	·665
5·141	·515	·757	·650
6·169	·505	·742	·637
7·197	·495	·728	·625

Beispiel 1. In einem grofsen Behälter befindet sich Luft von 120° C. Wärme, deren Pressung durch ein oben offenes Quecksilber-Manometer angezeigt wird; wenn nun bei einem äufsern Barometerstand von $27\frac{1}{2}$ Zoll, die Manometersäule 6 Zoll beträgt, so ist die Frage, welche Windmenge durch eine 2 Zoll weite runde Düsenöffnung ausströmt?

Setzt man in der Formel (14) $b = 27·5$, $h = 6$, $t = 120$, $n = ·00366$,

$a = \frac{3·1416}{144}$ und $m = ·90$; so wird $1 + nt = 1·4392$,

$log\,v.\frac{b+h}{b} = ·0857121$, und die Ausflufsmenge per Secunde, unter dem äufsern Drucke gemessen $M = 13$ Kubikfufs.

Nach der genäherten Formel (15) würde man $M = 12·44$, also den Werth um nahe $\frac{1}{2}$ Kubikfufs zu klein finden, weil hier die Pressung $P - p$ schon zu grofs, nämlich beinahe $\frac{1}{5}P$ ist.

Beispiel 2. Das, auf eine $3\frac{1}{2}$ Zoll weite Windleitung B (Fig. ~~163~~ 164) aufgesetzte Quecksilber-Manometer M, zeigt bei einem äufsern Barometerstand von 28 Zoll eine Höhe $ab = 2\frac{1}{2}$ Zoll, während der vor der Manometer-öffnung i vorbeigehende Wind bei 10^0 C. Temperatur durch eine 2 Zoll weite Düsenöffnung C ausströmt; wie grofs ist dabei die theoretische Ausflufsgeschwindigkeit?

Da hier der Manometerstand h an einer Stelle gemessen wird, an welcher die Luft nicht, wie es die Formeln 7) und (8) voraussetzen, ruhig oder nur sehr wenig in Bewegung ist; so mufs man sich der allgemeinern Formel (1) bedienen und für den vorliegenden Fall $P = 28 + 2{\cdot}5 = 30{\cdot}5$, $p = 28$, $t = 10$, $\frac{P}{\gamma} = k = 25120 \times 1{\cdot}0366$ und $\frac{a}{A} = \frac{16}{49}$ setzen, wodurch $logn. \frac{P}{p} = 2{\cdot}3026\, log\, v.\ \frac{30{\cdot}5}{28} = {\cdot}0855222$, $\left(\frac{ap}{AP}\right)^2 = {\cdot}08986$ und endlich $v = \sqrt{\frac{138070{\cdot}65}{{\cdot}91014}} = 389{\cdot}5$ Fufs wird.

Wäre das Manometer M' an einer Stelle des Behälters A angebracht, an welcher die Luft nur wenig oder gar nicht in Bewegung ist, so würde die Manometerhöhe $a'\, b'$ gröfser als die vorige $a\, b$ seyn. Um diese Höhe zu finden, sey P' der entsprechende Druck, so ist (die Relationen (1) und (2) einander gleich gesetzt):

$$log. \frac{P'}{p} = log. \frac{P}{p} : \left[1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2\right]$$

woraus sofort

$$log. P' = log\ p + \left[log. \frac{P}{p} : 1 - \left(\frac{ap}{AP}\right)^2\right]$$

folgt und wobei die Logarithmen aus jedem beliebigen Systeme genommen werden können.

Für das vorliegende Beispiel ist also

$$log\ P' = 1{\cdot}4471580 + \frac{{\cdot}0371418}{{\cdot}91014} = 1{\cdot}487967$$

folglich $P' = 30{\cdot}758$ oder $a'\, b' = 30{\cdot}758 - 28 = 2{\cdot}758$ Zoll, während $a\, b$ nur $= 2{\cdot}5$ Zoll war.

254. Behält der innere Druck P im Behälter einen constanten endlichen Werth, während der äufsere Druck p immer schwächer oder gänzlich Null wird; so treten ganz eigenthümliche Erscheinungen ein, welche wir hier noch untersuchen wollen.

Betrachtet man die beiden Formeln (2) und (12) nämlich jene $v = \sqrt{\left(2\, g\, k\, logn. \frac{P}{p}\right)}$ für die Ausflufsgeschwindigkeit und jene $M' = \frac{p}{P}\, a \sqrt{\left(2\, g\, k\, logn. \frac{P}{p}\right)}$ für das Volumen der unter dem innern Drucke gemessenen theoretischen Ausflufsmenge; so sieht man sogleich, dafs v zunimmt, wenn p abnimmt und für $p = 0$ sofort $v = \infty$ wird, während für $p = P$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist. Was jedoch die Ausflufsmenge betrifft, so wird wohl für $p = P$ auch $M' = 0$, aber für

$p=0$ keineswegs, wie man vermuthen könnte, $M'=\infty$, sondern im Gegentheile abermals gleich Null (was man aus der letztern Formel für M' findet, wenn man das Product $p^2\, logn. \frac{P}{p}$ oder selbst nur jenes $p\, logn. \frac{P}{p}$, für $p=0$ untersucht. Es ist nämlich

$p\, logn. \frac{P}{p} = p\, log. P - p\, log. p = p\, log. P - log. p^p$ und da für $p=0$ bekanntlich $p^p = 0^0 = 1$ also $log\, p^p = 0$ wird; so ist um so mehr auch $M'=0$). Da es nun zwischen diesen beiden Werthen von $p=P$ und $p=0$ einen Werth geben mufs, wofür die Ausflufsmenge M' ein Maximum wird, so hat man nach dem bekannten Verfahren zur Bestimmung dieses Werthes von p die Bedingungsgleichung:

$$\frac{dM'}{dp}=0, \text{ d. i. } \sqrt{logn. \frac{P}{p}} - \frac{1}{2\sqrt{logn. \frac{P}{p}}} = 0,$$

woraus $logn. \frac{P}{p} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{P}{p} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} = \sqrt{2 \cdot 71828 \ldots} = 1 \cdot 6487$ und endlich $p = \frac{P}{\sqrt{e}} = \cdot 60653\, P$ folgt, wofür wir jedoch ganz einfach $p = \cdot 6\, P$ setzen wollen.

Dieser Werth entspricht in der That einem Maximum der Ausflufsmenge, deren Volumen für diesen Werth von p und unter dem innern Druck P gemessen (Relat. 12 in **252**)

$$M' = \frac{a}{\sqrt{e}} \sqrt{[2\, g\, k\, logn. \sqrt{e}]} \text{ oder wegen } logn. \sqrt{e} = \tfrac{1}{2}:$$

$$M' = a \sqrt{\frac{g\,k}{e}} = \cdot 6\, a \sqrt{g\,k} \quad . \quad . \quad (p)$$

dagegen unter dem äufsern Druck gemessen:

$$M' = a\sqrt{g\,k} \quad . \quad . \quad (q)$$

so wie ihr Gewicht (Relat. 13):

$$G = p\, a \sqrt{\frac{g}{k}} = \cdot 6\, P\, a \sqrt{\frac{g}{k}} \quad . \quad . \quad (r)$$

ist. Die Geschwindigkeit endlich, welche diesem Maximum der Ausflufsmenge entspricht, ist (Relat 2)

$$v = \sqrt{g\,k} \quad . \quad . \quad (s)$$

ein Ausdruck, welcher von den beiden Pressungen P und p ganz unabhängig ist.

Da für eine mittlere Temperatur der Luft von $t = 15^0\, C.$ nach Relat. (a) in Nr. **249**, $k = 25165 \times 1 \cdot 05625 = 26580$ ist, so wird diese Geschwindigkeit $v = 907$ Fufs.

Anmerkung 1. Aus dieser Untersuchung geht also hervor, dafs, wenn der im Behälter oder Gasometer Statt findende Druck P als constant, dagegen der äufsere Druck p als veränderlich angenommen wird, für $p = P$ gar kein Ausflufs erfolgt, indem dafür $v = 0$ ist; dafs dagegen sowohl v als auch die Ausflufsmenge M' zunimmt, wenn p abnimmt, und zwar wächst M' bis $p = \cdot 6\, P$ geworden ist, von wo an, bei der weitern Abnahme von p auch M' wieder abnimmt und für $p = 0$, obschon dafür $v = \infty$ werden sollte, abermals $M' = 0$ wird. Dieser scheinbare Widerspruch von $v = \infty$ und $M' = 0$ zeigt eigentlich an, dafs dieser letztere Fall gar nicht existirt, weil für $p = 0$ die Luft von der Spannung P beim Ausflufs plötzlich auf jene Null gebracht werden müfste, wozu nach Relat. (a), Nr. 247, eine unendlich grofse Arbeitsgröfse erforderlich wäre.

Anmerkung 2. Diese hier entwickelten, theoretisch richtigen Formeln für den Ausflufs der Gase unter bedeutenden Pressungsdifferenzen erleiden in der Wirklichkeit erhebliche Modificationen. Denn erstens beruht die Ableitung dieser Formeln auf der Voraussetzung einer vollkommen elastischen Flüssigkeit, ferner wird dabei angenommen, dafs die Schichten der Flüssigkeit in dem Augenblicke, als sie durch den Querschnitt der gröfsten Contraction gehen, auch schon die Spannung p des äufsern Mediums angenommen haben, was jedoch erst in einer gröfseren Entfernung von der Ausflufsöffnung Statt hat. Endlich hat auch die bekannte Eigenschaft der Gase, ihre Wärmecapacität durch Ausdehnung und Comprimirung zu verändern, einen nicht unbedeutenden Einflufs auf diese Modificationen, indem dadurch die Beziehung, welche zwischen der Dichte und Spannung besteht, von Schichte zu Schichte variirt. Alle diese störenden Ursachen, welche jedoch nur bei einer bedeutenden Differenz zwischen P und p, Einflufs haben, benimmt den eben angeführten einfachen Formeln ihre practische Brauchbarkeit.

Die Versuche, welche *Barré de Saint-Venant* und *Wantzel* über den Ausflufs atmosphärischer Luft unter bedeutenden Pressungsdifferenzen angestellt haben, zeigen, dafs unter übrigens gleichen Umständen die Ausflufsmenge um so gröfser wird, je kleiner der äufsere Druck p gegen den innern P ist; dafs, so lange p den Werth von $\cdot 3$ bis $\cdot 4\,P$ nicht überschreitet, die Ausflufsmenge ziemlich gleich bleibt, und dafs sich endlich, wie p gegen P zunimmt, diese Ausflufsmenge vermindert und zuletzt für $p = P$ gleich Null wird.

Die genannten Experimentatoren stellen zur Bestimmung der Ausflufsmenge M, diese unter dem innern Drucke P des Gasometers gemessen, die empirische Formel:

$$M = a.\,\frac{m\sqrt{\left[2gk\left(1-\frac{p}{P}\right)\right]}}{1+\mu\left(1-\frac{p}{P}\right)^{n}} \quad . \; . \; (\delta)$$

auf, wobei aufser den bekannten Bedeutungen von P, p, a, k, g noch m, n, μ drei Zahlengröfsen sind, welche von der Beschaffenheit der

Ausflufsöffnung a abhängen, und zwar kann man setzen, für Öffnungen, welche nach innen gehörig erweitert und abgerundet sind, $m=1$, $\mu=1\cdot3$, $n=1$ und für Öffnungen in dünnen Wänden bei vollkommener Contraction $m=\cdot61$, $\mu=\cdot58$, $n=\frac{3}{2}$.

Setzt man in der vorstehenden Formel (δ) $p=0$ und für eine nach innen gehörig erweiterte und abgerundete Ausflufsöffnung $m=1$, $\mu=1\cdot3$ und $n=1$; so erhält man für atmosphärische Luft von der Temperatur 0°, welche in den leeren Raum ausfliefst, indem dafür (Nr. 249, Relat. α) $k=25165$ ist:

$$M=\frac{a}{2\cdot3}\sqrt{2gk}=543\cdot8\,a \text{ Kubikfufs};$$

eine Röhre vom Querschnitt a würde also dieselbe Luftmenge liefern, wenn sich die Luft von der Spannung P darin mit der Geschwindigkeit von 543·8 Fufs fortbewegte. Die Gröfse der Spannung P hat sonach auf die Ausflufsgeschwindigkeit selbst keinen Einflufs.

Anmerkung 3. Unter der Voraussetzung, dafs die ausfliefsende Luft- oder Gasart unvollkommen elastisch sey, also angenommen wird, dafs es für eine bestimmte Menge dieser Flüssigkeit einen gewissen endlichen Grad der Ausdehnung gibt, bei welchem die Spannung Null ist (was wahrscheinlich bei allen unsern bekannten Gasen mehr oder weniger der Fall), findet *Scheffler* für die Ausflufsgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$v=\sqrt{\left[2gb\,logn.\left(\frac{P+c}{p+c}\right)\right]} \quad . \quad (\varepsilon)$$

wobei, wenn E den Elasticitätsmodul (d. i. die Kraft, welche fähig ist das Luft- oder Gasprisma von der im natürlichen Zustande, nämlich bei einer Spannung gleich Null bestehenden Länge L auf die Hälfte oder $\frac{1}{2}L$ zusammen zu drücken) und w das Gewicht der Volumeneinheit des Luftprisma unter dem Drucke Null bezeichnen, sofort

$$b=(1+\cdot00366\,t)\,\frac{E}{w} \text{ und } c=bw \text{ ist.}$$

In diesem Falle wäre nun für den äufsern Druck $p=0$ keineswegs mehr wie oben, $v=\infty$ und $M'=0$, sondern es wird dafür

$$v=\sqrt{\left[2gb\,logn.\left(\frac{P+c}{c}\right)\right]}=\sqrt{\left(2gb\,logn.\frac{P}{c}\right)}$$

wenn man nämlich die sehr kleine Gröfse c gegen P ausläfst, und unter dem äufsern Druck p gemessen:

$$M'=a\sqrt{\left(2gb\,logn.\frac{P}{c}\right)}.$$

Wird das Luftprisma, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Höhe im natürlichen Zustande, d. i. unter dem Drucke Null, gleich L ist, durch die Einwirkung der Schwere und aufserdem noch durch eine gegen das obere Ende wirkende Kraft p bis auf die Höhe h zusammengedrückt (wobei das Prisma am untern Ende durch die der Schwere entgegengesetzt wirkende Kraft P gestützt wird); so findet man

$$h = b\, logn. \left(\frac{P+c}{p+c}\right), \text{ so, dafs also auch } v = \sqrt{2gh},$$

nämlich die Ausflufsgeschwindigkeit, gerade so wie es bei unpresbaren Flüssigkeiten der Fall, die der Höhe h entsprechende Fallgeschwindigkeit ist.

Die Dichtigkeit des unter diesen Umständen ausfliefsenden Gases ist jener gleich, welche dem äufsern Drucke p entspricht. Die unter diesem Drucke gemessene Ausflufsmenge ist daher

$$M' = a\sqrt{2gh}.$$

Diese hier vorkommende Höhe h ist also jene, welche ein verticales Prisma des betreffenden Gases, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und Gewicht gleich $P-p$ ist, annehmen würde, wenn dasselbe nicht blofs von dem Gewichte seiner eigenen Theile, sondern aufserdem noch durch die Kraft p comprimirt würde.

Wäre die mittlere Höhe unserer Atmosphäre genau bekannt, so liefse sich auch die Ausflufsgeschwindigkeit der Luft, von dem mittlern Druck P in den leeren Raum bestimmen. Diese Höhe wäre nach der vorigen Formel, wenn man $p=0$ setzt und annimmt, dafs die Temperatur durchaus gleich Null ist, $h = b\, logn \dfrac{P+c}{c}$ oder nahe $= b\, logn. \dfrac{P}{c}$ wobei P den atmosphärischen Druck auf die Flächeneinheit an der Erdoberfläche bezeichnen würde. Die mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ in den leeren Raum strömende Luft würde dann jene Dichte annehmen, welche die an der Grenze der Atmosphäre befindliche Luftschichte, nämlich die vom Drucke Null besitzt.

Wäre die mittlere Höhe (wie *Biot* aus den Erscheinungen der Dämmerung schliefsen zu können glaubt) wenigstens 47000 Meter, oder in runder Zahl 149000 W. Fufs hoch, so müfste diese Ausflufsgeschwindigkeit v wenigstens $\sqrt{(62 \times 149000)} = 3037$ Fufs betragen. Da bei dieser angenommenen Höhe der Atmosphäre die Dichte der Luft in den obersten Schichten wenigstens 372 Mal geringer als auf der Oberfläche der Erde wäre, so würde sich auch die Atmosphäre, wenn sie nicht durch ihr eigenes Gewicht comprimirt würde, oder ihre Dichte durchaus dem Drucke Null entspräche, wenigstens auf das 372fache ihrer jetzigen Höhe erheben. Wäre dagegen ihre Dichte durchaus gleich jener der untersten Schichten vom Drucke P, so würde ihre Höhe nur $\dfrac{P}{\gamma'} = \dfrac{1844{\cdot}6}{{\cdot}0733} = 25165$ Fufs und bei dieser Höhe die Ausflufsgeschwindigkeit in den leeren Raum nur 1249 Fufs betragen. (Vergleiche Comp. S. 423.)

255. Wir wollen schlüfslich noch den Ausflufs einer vollkommen elastischen, schweren Flüssigkeit aus einem sich allmählig leerenden Gefäfse durch eine kleine Öffnung in einen Raum untersuchen, in welchem das Medium einen constanten Druck beibehält.

Es sey zu diesem Ende V das unveränderliche Volumen des Behälters oder Gasometers, aus welchem die Luft- oder Gasart ausfliefst, ohne wieder ersetzt zu werden; P der innere Druck im Anfange der Zeit t, p' der Druck am Ende der Zeit t, p der constante äufsere Druck und a die sehr kleine, wirkliche Ausflufsöffnung, so, dafs wenn diese nach innen nicht gehörig erweitert und abgerundet ist, a den Querschnitt der stärksten Contraction bezeichnet.

Diefs vorausgesetzt, hat man nach Relat. (2), Nr. **249**, für die am Ende der Zeit t Statt findende Ausflufsgeschwindigkeit:

$$v=\sqrt{\left(2gk\,logn.\frac{p'}{p}\right)}$$

und da man diese Geschwindigkeit während der unendlich kleinen Zeit dt als constant ansehen kann, so ist (Relat. (12) in Nr. **252**) die während diesem Zeitelemente ausfliefsende, und unter dem innern Drucke p' gemessene Ausflufsmenge:

$$dM=\frac{p}{p'}a\,dt\sqrt{\left(2gk\,logn.\frac{p'}{p}\right)}$$

wodurch sich also das Volumen V der Flüssigkeit vom Drucke p' auf jenes $V-dM$ von demselben Drucke p' reducirt. Indem sich aber dieses letztere Volumen wieder auf das ursprüngliche V ausdehnt, geht der Druck oder die Spannung p' in jene $p'-dp'$, oder wenn man p' als von der Zeit t abhängig darstellt, in die Spannung $p'-\frac{dp'}{dt}dt$ über, so, dafs man nach dem *Mariotte*'schen Gesetze hat:

$$\frac{p'-\frac{dp'}{dt}dt}{p'}=\frac{V-dM}{V}$$

oder wenn man für dM den Werth setzt und gehörig reducirt:

$$\frac{dp'}{dt}=p\frac{a}{V}\sqrt{\left(2gk\,logn.\frac{p'}{p}\right)}.$$

Aus dieser Relation folgt, wenn man gleich, da p' abnimmt wenn t zunimmt, das Zeichen von dp' ändert:

$$dt=-\frac{V}{ap}\cdot\frac{dp'}{\sqrt{\left(2gk\,logn.\frac{p'}{p}\right)}}$$

und aus dieser Differenzialgleichung, wenn man den ersten Theil von 0 bis t und den zweiten von P bis p', oder bei verändertem Zeichen von p' bis P integrirt:

$$t=\frac{V}{ap\sqrt{2gk}}\int_{p'}^{P}\frac{dp'}{\sqrt{\left(logn.\frac{p'}{p}\right)}}$$

Anmerkung. Da sich dieses Integral nur näherungsweise bestimmen läfst und hierzu die bekannte *Simpson*'sche Formel oder Regel für die Quadratur am einfachsten und genauesten ist, so wollen wir diese Formel hier aufstellen und für den vorliegenden Fall einrichten.

Soll nämlich das bestimmte Integral $\int_{x'}^{x''} y\,dx$ genommen oder gefunden werden, und man theilt die Differenz $x''-x'$ in n gleiche Theile, wobei jedoch n eine gerade Zahl seyn soll und bezeichnet die den Abscissen dieser Theilungspuncte $x=x'$, $x=x'+\frac{1}{n}(x''-x')$, $x=x'+\frac{2}{n}(x''-x')$ .. $x=x'+\frac{n}{n}(x''-x')=x''$ entsprechenden Werthe von y (bei einer Curve die Ordinaten) der Reihe nach durch $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$; so ist der genäherte Werth dieses Integrales nach der *Simpson*'schen Regel bekanntlich

$$\int_{x'}^{x''} y\,dx = \frac{x''-x'}{3n}\,(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n) \quad (A)$$

welcher Ausdruck um so genauer ist, je kleiner die Intervalle $\frac{x''-x'}{n}$ sind.

Wäre z. B. $y=\frac{1}{x}$, so würde $\int_{x'}^{x''} y\,dx = \int_{x'}^{x''}\frac{dx}{x} = logn.\,\frac{x''}{x'}$ und wenn man in dieser Formel die Differenz $x''-x'$ nur in zwei gleiche Theile theilt, oder ganz einfach $n=2$ setzt, wegen $y_0=\frac{1}{x'}$,

$$y_1 = \frac{1}{x'+\frac{1}{2}(x''-x')} = \frac{2}{x'+x''} \text{ und } y_2 = y_n = \frac{1}{x''} \text{ sofort:}$$

$$logn.\,\frac{x''}{x'} = \frac{x''-x'}{6}\left(\frac{1}{x'}+\frac{8}{x'+x''}+\frac{1}{x''}\right)$$

Dieser Ausdruck ist um so genauer, je kleiner die Differenz $x''-x'$ ist, wäre er nicht genau genug, so müfste man für n eine gröfsere Zahl wählen.

256. Wendet man zur näherungsweisen Bestimmung des letzten Integralausdruckes die eben aufgestellte Formel (A) an, und theilt die Differenz $P-p$, blofs in zwei gleiche Theile; so wird wegen $x=p'$,

$$x'=p',\; x''=P,\; y=\frac{1}{\sqrt{logn.\,\frac{p'}{p}}},\; y_0=\frac{1}{\sqrt{log\,n\,\frac{p'}{p}}},\; y_1=\frac{1}{\sqrt{logn.\frac{P+p'}{2p}}}$$

und $y_2=\frac{1}{\sqrt{logn.\,\frac{P}{p}}}$ sofort

$$(g)\quad \int_{p'}^{P}\frac{dp'}{\sqrt{logn.\,\frac{p'}{p}}} = \frac{P-p'}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{logn\,\frac{p'}{p}}}+\frac{4}{\sqrt{logn.\left(\frac{P+p'}{2p}\right)}}+\frac{1}{\sqrt{logn.\,\frac{P}{p}}}\right)$$

und wenn man diesen Ausdruck der Kürze wegen mit R bezeichnet, auch

$$t = \frac{VR}{a p \sqrt{2 g k}} \ \ldots \ (18)$$

Theilt man dagegen die Differenz $P - p'$ in vier gleiche Theile, setzt also $n = 4$, so wird

$$R = \frac{P-p'}{12}\left[\frac{1}{\sqrt{\log.\frac{p'}{p}}} + \frac{4}{\sqrt{\log.\left(\frac{P+3p'}{4p}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{\log.\left(\frac{P+p'}{2p}\right)}} + \frac{4}{\sqrt{\log.\left(\frac{3P+p'}{4p}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\log.\frac{P}{p}}}\right] \ldots (h)$$

257. In dieser, durch die Formel (18) ausgedrückten Zeit, in welcher der Druck im Gasometer von P auf p' herabsinkt, ist die ursprüngliche Gasmenge V um eine Quantität vermindert worden, welche unter dem Drucke P gemessen, das Volumen

$$V' = V - \frac{p'}{P} V = \frac{P - p'}{P} V \ \ldots \ (19)$$

beträgt (weil $\frac{V - V'}{V} = \frac{P}{p'}$ seyn mufs).

Das Gewicht endlich dieser während der Zeit t ausgeflossenen Gasmenge ist, da die Volumeneinheit desselben unter dem Drucke P, γ oder (Relat. (a), Nr. **249**) $\frac{P}{k}$ Pfunde oder Gewichtseinheiten wiegt,

$$= \frac{P - p'}{P} V . \frac{P}{k} = \frac{P - p'}{k} V \ \ldots \ (20)$$

wobei k aus Relat. (a) in Nr. **249** zu nehmen ist.

Beispiel. Der 982 Kubikfufs haltende Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen oben offenes Quecksilber-Manometer 10 Zoll und Thermometer 6° C. zeigt. Wenn nun dieser Wind durch eine 1 Zoll weite kreisrunde Öffnung ohne Contraction in einen grofsen oder freien Raum, dessen Barometerstand 27 Zoll beträgt, ausströmt; so entsteht die Frage, in welcher Zeit der Manometerstand bis auf 7 Zoll herabsinkt, und welches Luftquantum bis dahin ausfliefst?

Bezeichnet man die in Fufsen ausgedrückten Manometer und Barometersäulen durch h, h', b und das Gewicht von 1 Kubikfufs Quecksilber mit γ''; so ist $P = (h + b)\gamma''$, $p' = (h' + b)\gamma''$ und $p = b\gamma''$ oder für $h = \frac{10}{12}$, $h' = \frac{7}{12}$, $b = \frac{27}{12}$ und $\gamma'' = 766{\cdot}87$ Pf. auch $P = 2364{\cdot}5$, $p' = 2172{\cdot}3$ und $p = 1725{\cdot}4$ Pfund.

Die in der Reihe R in Relat. (g) vorkommenden Quotienten werden $\frac{p'}{p} = 1 + \frac{h'}{b} = 1 + \frac{7}{27} = 1{\cdot}25926$, $\frac{P+p'}{2p} = 1 + \frac{h + h'}{2b} = 1{\cdot}31482$ und $\frac{P}{p} = 1 + \frac{h}{b} = 1{\cdot}37037$. Die genannte Reihe ist also:

$$R = 31{\cdot}955\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}64580 + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}805$$

Nimmt man dagegen die noch mehr genäherte Reihe (h), so wird

$$R = 367{\cdot}7933\,(2{\cdot}08277 + 7{\cdot}96280 + 3{\cdot}82290 + 7{\cdot}36948 + \\ + 1{\cdot}78151) = 367{\cdot}9775$$

wodurch die bereits erreichte hinlängliche Genauigkeit ersichtlich wird.

Setzt man also $R = 367{\cdot}8$, so folgt aus der Relation (18), wegen $a = \frac{1}{4} \cdot \frac{3{\cdot}1416}{144} = \frac{{\cdot}1309}{24}$ und $k = 25120 \times 1{\cdot}02196 = 25671{\cdot}6$, sofort $t = 30{\cdot}421$, ferner aus (19) $V' = 79{\cdot}62$ und aus (20) Gewicht $= 7{\cdot}333$.

Das Manometer wird also in nahe 30·4 Secunden von 10 auf 7 Zoll herabsinken und während dieser Zeit wird ein Volumen Luft oder Wind ausströmen, welches unter dem anfänglichen innern Druck gemessen 79·62 Kubikfuſs (unter dem äuſsern Druck gemessen 109·11 Kubikf.) und dem Gewichte nach nahe $7\frac{1}{3}$ Pfund beträgt.

Bewegung der Luft in Röhrenleitungen.

(§. 454.)

258. Bewegt sich die Luft aus dem Behälter A (Fig. 165) durch eine lange Röhre BC vom Durchmesser D und der Länge L mit der mittlern Geschwindigkeit c, so kann man den an der Röhrenwand entstehenden Reibungswiderstand durch die Höhe z einer Luftsäule messen, wofür (auf ähnliche Weise wie bei Wasserleitungen) $z = \mu \frac{L}{D} \frac{c^2}{2g}$ und der Widerstandscoeffizient im Mittel $\mu = {\cdot}024$ ist. (Wollte man die Widerstandshöhe z durch eine Quecksilbersäule ausdrücken, so müſste man $\mu = \frac{{\cdot}024}{10466{\cdot}8} = {\cdot}00000229$ setzen und es würde ein in C angebrachtes Quecksilbermanometer M'' um diese Höhe z niedriger stehen, als ein in B befindliches derartiges Manometer M'.)

Strömt nun die Luft aus der verengten Öffnung E vom Durchmesser d mit der Geschwindigkeit v aus und nimmt man an, daſs die Pressung oder Spannung der Luft im Innern des Behälters A gleich P oder der entsprechende Manometerstand in M gleich h, die Pressung im Anfange der Röhrenleitung bei B gleich P' oder der Manometerstand in M' gleich h_1, die Pressung der Luft am Ende der Leitung (unmittelbar vor der Verengung) bei C gleich P oder der entsprechende Manometerstand in M'' gleich P'', so wie endlich der äuſsere Druck $= p$ und entsprechende Barometerstand $= b$ ist; so hat man, auf die Grundgleichung (f) in Nr. **248** zurückgehend, welche, wenn man mit γ dividirt und für $\frac{P}{\gamma}$ seinen Werth k und $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ setzt, die Form:

$$m\,k\,logn.\,\frac{P}{p}=m\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\frac{p^2}{P^2}\right)$$

annimmt, folgende Resultate.

Für das Ende der Windleitung, d. i. für die Stelle C, hat man in dieser Gleichung bloſs P'' statt p und $\frac{P''}{p}=\frac{b+h_2}{b}$ zu setzen; dadurch erhält man, wenn aus der entstehenden Gleichung v bestimmt wird:

$$v=\sqrt{\left\{\frac{2\,g\,k\,logn.\left(\frac{b+h_2}{b}\right)}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\left(\frac{b}{b+h_2}\right)^2}\right\}}\ \ldots\ (1)$$

Für den Anfang der Leitung, d. i. für die Stelle B, muſs man setzen $m\,k\,logn.\,\frac{P'}{p}=m\,\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\frac{p^2}{P'^2}\right)+w$ wo $w=m\,z=m\,\mu\,\frac{L}{D}\,\frac{c^2}{2g}=m\,\mu\,\frac{L}{D}\,\frac{d^4}{D^4}\,\frac{v^2}{2g}\left(\text{wegen } c=\frac{d^2}{D^2}\,v^2\right)$ die nöthige Arbeitsgröſse ist, um den Reibungswiderstand in der Leitung zu überwinden. Wird dieser Werth für w substituirt, so wie auch $\frac{P'}{p}=\frac{b+h_1}{b}$, dann $\mu=\cdot024$ gesetzt und wieder v bestimmt, so wird

$$v=\sqrt{\left\{\frac{2\,g\,k\,logn\left(\frac{b+h_1}{b}\right)}{1+\left[\cdot024\,\frac{L}{D}-\left(\frac{b}{b+h_1}\right)^2\right]\frac{d^4}{D^4}}\right\}}\ \ldots\ (2)$$

Für den Luftbehälter A hat man, da darin die Luft als ruhend angenommen wird, also in der genannten Grundformel (f) $c=0$ ist:

$$m\,k\,logn.\,\frac{P}{p}=m\,\frac{v^2}{2g}+m\,\mu\,\frac{L}{D}\,\frac{d^4}{D^4}\,\frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man zugleich auch auf die Widerstände beim Ein- und Austritt der Luft Rücksicht nimmt, und die betreffenden Widerstandscoeffizienten (Comp. §. 456 und Nr. **181**) mit z' und z'' bezeichnet, wodurch die dabei absorbirte Arbeitsgröſse $=m\,z'\,\frac{c^2}{2g}+m\,z''\frac{v^2}{2g}=m\,z'\,\frac{d^4}{D^4}\frac{v^2}{2g}+m\,z''\,\frac{v^2}{2g}$ wird und noch im zweiten Theil der vorigen Gleichung hinzugefügt werden muſs, wenn ferner $\frac{P}{p}=\frac{b+h}{b}$, $\mu=\cdot024$ gesetzt und wieder v bestimmt wird; so erhält man:

$$v=\sqrt{\left\{\frac{2\,g\,k\,logn\left(\frac{b+h}{b}\right)}{1+z''+\left(z'+\cdot024\,\frac{L}{D}\right)\frac{d^4}{D^4}}\right\}}\ \ldots\ (3)$$

In allen diesen Formeln ist der Factor (Nr. **249**, Relat. a)

$$k = 25165\,(1 + {\cdot}00366\,t)$$

wobei t die nach der 100theiligen Scala gemessene Temperatur des Windes im Behälter oder in der Leitung bezeichnet. Setzt man diesen Werth für k in der letzten Formel (3) und zieht, indem man für den Gebrauch den natürlichen Logarithmus in den Tafellogarithmus verwandelt, aus dem Factor $62\,k \times 2{\cdot}3026$ die Wurzel gleich aus, so erhält diese Formel die Gestalt:

$$v = 1895 \sqrt{\left\{\frac{(1 + {\cdot}00366\,t)\,log\,v.\left(\frac{b+h}{h}\right)}{1 + z'' + \left(z' + {\cdot}024\,\frac{L}{D}\right)\frac{d^4}{D^4}}\right\}} \ldots (4)$$

Anmerkung. Diese Relationen beziehen sich auf den Fall, in welchem in der Leitung keine plötzlichen Erweiterungen oder Verengungen, Krümmungen u. s. w. vorkommen, indem durch solche Hindernisse die Formeln, auf ähnliche Weise, wie bei den Wasserleitungen, zusammengesetzter werden. Auch müfste man, wenn die Ausmündung um die Gröfse h' höher oder tiefer als die Einmündung liegt, streng genommen, im Nenner der vorigen Formel noch beziehungsweise $\pm\, h'$ addiren; allein diese Gröfse wird immer gegen die übrigen Gröfsen ohne Fehler zu vernachlässigen seyn.

Beispiel 1. In dem Regulator einer 320 Fufs langen und 4 Zoll weiten cylinderischen Windleitung steht das Quecksilbermanometer 3·1 und das äufsere Barometer 27·2 Zoll hoch. Wenn nun der Wind bei einer Temperatur von $20^0\,C.$ am Ende der Leitung durch eine conisch zulaufende Düsenöffnung von 2 Zoll Durchmesser ausströmt, so ist die Frage, welche Windmenge diese Leitung liefert?

Setzt man in der letzten Formel (4) $t = 20$, $b = 27{\cdot}2$, $h = 3{\cdot}1$, $L = 320$, $D = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{6}$, $z'' = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = {\cdot}384$ (wenn man nämlich $\varphi = {\cdot}85$ setzt) und im Falle die Einmündung nicht gehörig abgerundet oder gegen den Behälter zu erweitert seyn sollte, $z' = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 = {\cdot}444$ (wenn man $\mu = {\cdot}60$ setzt); so wird $1 + {\cdot}00366\,t = 1{\cdot}0732$, $\frac{b+h}{b} = \frac{30{\cdot}3}{27{\cdot}2}$ der Zähler des Bruches unter dem Wurzelzeichen $Z = {\cdot}0503048$ und der Nenner $N = 2{\cdot}85175$, folglich die Ausflufsgeschwindigkeit $v = 251{\cdot}97$ Fufs, so wie damit die per Secunde unter dem äufsern Drucke gemessene Ausflufsmenge: $M = \frac{1}{4}d^2\,\pi\,v = 5{\cdot}497$ oder nahe $5\frac{1}{2}$ Kubikfufs.

Beispiel 2. Steht nach den Angaben des 2ten Beispiels in §. 458, mit einem Gebläse, in welchem das Quecksilbermanometer 2·1 Zoll Höhe zeigt, eine 172 Klafter lange, $4\frac{1}{2}$ Zoll weite cylinderische Windleitung in Verbindung, deren Düsenöffnung einen Durchmesser von ·1394 Fufs besitzt, und soll, wenn die Luft $8^0\,R.$ hat und der äufsere Barometerstand 27·6 Zoll ist, die per Secunde ausströmende Windmenge bestimmt werden; so hat man nach derselben Formel (4), wegen $h = 2{\cdot}1$, $b = 27{\cdot}6$, $L = 1032$, $D = \frac{3}{8}$, $d = {\cdot}1394$, $t = 10$ und wenn man wieder wie vorhin $z'' = {\cdot}384$, dagegen $z' = 0$ setzt, nämlich keine Contraction bei der Einmündung annimmt: $v = 211{\cdot}70$ Fuſs und damit $M = 3{\cdot}23$ Kubikfuſs.

In so ferne nun in dem genannten Beispiele (Comp. §. 458) die Weite der Düsenöffnung so zu bestimmen war, daſs unter den genannten Umständen per Secunde $3\frac{1}{2}$ Kubikfuſs Luft ausflieſsen sollte; so zeigt sich der gefundene, und hier in Rechnung gebrachte Durchmesser derselben um etwas zu klein, was wohl seinen Grund mit darin findet, daſs hier der Widerstandscoeffizient mit ${\cdot}024$ etwas gröſser als dort, wo er $= {\cdot}0238$ gesetzt ist, angenommen wurde.

Hochofengebläse.

(§. 460.)

259. Bezeichnet V in Kubikfuſs ausgedrückt das Volumen, welches die Luft, die per Secunde in den Hochofen getrieben werden soll, bei 0^o und unter dem mittlern Druck der Atmosphäre einnimmt; P die Pressung der Luft in der Windleitung, so wie p jene der äuſsern Luft, auf 1 Quadratfuſs; endlich N den Nutzeffect in Pferdekräften zu 430 Fuſspfund ausgedrückt, welchen die Betriebsmaschine dafür entwickeln muſs; so hat man, wenn der Nutzeffect gut ausgeführter eiserner Cylinder- und hölzerner Kastengebläse der Erfahrung zu Folge 60 Procent beträgt, und da die nöthige Wirkung um 1 Kubikfuſs Luft von der Pressung oder Spannung p auf jene P zu bringen, nach Nr. **247**, Relat. (b) gleich $p\, logn. \frac{P}{p}$ ist, sofort:

$$430\, N = \frac{V \times p}{{\cdot}60}\, logn. \frac{P}{p} = 1{\cdot}7\, V p\, logn. \frac{P}{p}$$

und daraus $$N = \frac{1{\cdot}7}{430}\, V\, p\, logn. \frac{P}{p}$$

oder, da man die Luft auf die Temperatur 0 und den Barometerstand $2{\cdot}4043$ Fuſs ($= {\cdot}76$ M.) zu reduciren hat, so ist Nr. **251**, Anmerk.) $p = 1845$ Pfund und wenn man die Pressung P in der Windleitung durch ein oben offenes Quecksilbermanometer, welches die Höhe h zeigt und den äuſsern Druck p durch den mittlern Barometerstand b ausdrückt, wodurch $\frac{P}{p} = \frac{b+h}{b}$ wird, auch

$$N = \frac{1{\cdot}7}{430} \times 1845\, V \times 2{\cdot}3026\, logv. \left(\frac{b+h}{b}\right),$$

oder wenn man reducirt, endlich nahe genug:

$$N = 16 \cdot 8\ V\ log\ v. \left(\frac{b+h}{b}\right) \ldots \quad (1)$$

wobei $b = 2 \cdot 4043$ Fuſs oder nahe $= 28 \cdot 85$ Zoll ist.

Beispiel 1. Beträgt das Luftvolumen, welches unter einem Barometerstand von $28\frac{1}{2}$ Zoll und einer Temperatur von 15° *C.* per Secunde ausgeblasen werden soll, 17 Kubikfuſs und die Pressung im Gebläse 2 Zoll Quecksilbersäule; so hat man, um zuerst dieses Luftvolumen für 0° und $28 \cdot 85$ Zoll Barometerstand zu reduciren nach der Formel (1) in §. 439, in welcher man $v' = 17$, $t' = 15$, $p' = 28 \cdot 5$, $t = 0$ und $p = 28 \cdot 85$ zu setzen hat:

$$v = \frac{28 \cdot 5}{28 \cdot 85} \times 17 \left(\frac{1}{1 \cdot 0549}\right) = 15 \cdot 92,$$

wofür wir die ganze Zahl 16 nehmen wollen.

Setzt man daher in der vorigen Formel (1), $V = 16$, $b = 28 \cdot 85$ und $h = 2$; so erhält man ganz einfach

$$N = 7 \cdot 8 \text{ Pferdekraft.}$$

Beispiel 2. Um das in §. 464 angeführte 1ste Beispiel, nach welchem die Betriebskraft für ein Cylindergebläse bestimmt werden soll, welches einem Hochofen per Secunde 30 Kubikfuſs Luft mit 475 Fuſs Geschwindigkeit und zwar durch eine 300 Fuſs lange und $11\frac{1}{2}$ Zoll weite Windleitung zuzuführen im Stande seyn soll, nach der gegenwärtigen Formel (1) behandeln zu können, muſs man zuerst die für diese Bedingung und bei einer Düsenweite von $\cdot 294$ Fuſs nöthige Luftpressung am Anfange der Windleitung bestimmen.

Setzt man zu diesem Ende in der Formel (2) in Nr. **258**, $v = 475$, $D = \frac{11 \cdot 5}{12}$, $L = 300$, $d = \cdot 294$ und $b = 28 \cdot 85$; so findet man am einfachsten durch einige Versuche nahe genug $h = 4 \cdot 77$, so, daſs also die gesuchte Pressung durch eine Quecksilbersäule von $b + h = 33 \cdot 62$ Zoll gemessen wird.

Mit diesem Werthe erhält man nun aus der obigen Formel (1), wegen $V = 30$, $b = 28 \cdot 85$ und $b + h = 33 \cdot 62$ sofort:

$$N = 33 \cdot 49 \text{ d. i. nahe } 33\tfrac{1}{2} \text{ Pferdekraft.}$$

Würde man, wie es in dem erwähnten §. geschehen, den Nutzeffect des Gebläses anstatt mit 60 bloſs mit 50 Procent in Rechnung nehmen, so würde $N = 33 \cdot 49 \times \frac{6}{5} = 40$ Pferdekräfte seyn, während im angezogenen §. $39\frac{1}{8}$ Pferdekräfte gefunden wurden.

260. Zur Bestimmung des Querschnittes eines Gebläscylinders oder eines Gebläsekastens, muſs man berücksichtigen, daſs die ausgeblasene Luftmenge immer kleiner als die eingesogene ist. Man nimmt für gewöhnlich an, daſs diese bei eisernen Cylindergebläsen $\frac{3}{4}$ und bei hölzernen Kastengebläsen $\frac{3}{5}$ von der eingesaugten Luftmenge beträgt.

Setzt man daher den gesuchten Querschnitt eines Cylinders oder eines Kastens $= A$, das Luftvolumen, welches ein Cylinder oder ein Kasten per 1 Secunde ausblasen soll, auf 0^0 reducirt $= \mathfrak{V}$. Die Temperatur der eingesaugten Luft $= t$, so wie die Geschwindigkeit des Kolbens $= v$; so ist für ein einfach wirkendes Kastengebläse: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} v A (1 + \cdot 004\, t) \mathfrak{V}$, und für ein doppelt wirkendes Cylindergebläse: $\frac{3}{4} v A = (1 + \cdot 004\, t) \mathfrak{V}$, folglich ist der *Querschnitt für einfach wirkende Kastengebläse*:

$$A = 2 \cdot \tfrac{5}{3} (1 + \cdot 004\, t) \frac{\mathfrak{V}}{v}$$

und für *doppelt wirkende eiserne Cylindergebläse*:

$$A = \tfrac{4}{3} (1 + \cdot 004\, t) \frac{\mathfrak{V}}{v}.$$

Anmerkung. Was die übrigen wesentlichen Dimensionen betrifft, so nimmt man für den Querschnitt der *Saugventile* bei *Kastengebläse* $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{12} A$ und bei *Cylindergebläsen* $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{9} A$. Für den Querschnitt der *Druckventile* kann man $\frac{1}{22}$ bis $\frac{1}{20} A$ nehmen.

Für den Querschnitt der *Windleitung* nimmt man für *kalte* Luft $\frac{1}{20}$ von der Summe der Querschnitte sämmtlicher *doppelt* wirkender Cylinder oder $\frac{1}{10}$ von der Summe der Querschnitte sämmtlicher *einfach* wirkender Kasten. Für erhitzte Luft mufs dieser Querschnitt, wenn T die Temperatur der erhitzten Luft ist, noch im Verhältnifs von 1 zu $(1 + \cdot 004\, T)$ vergröfsert werden.

Benützt man einen *Regulator* von *unveräderlichem* Volumen (§. 461), so soll dieser 40 bis 60 Mal so grofs seyn als das Luftvolumen, welches derselbe in jeder Secunde aufzunehmen und abzugeben hat. (Über die Summe der Querschnitte sämmtlicher Düsenöffnungen findet man u. A. eine Tabelle in *Redtenbacher*'s Resultate für den Maschinenbau, S. 309.)

Die *Geschwindigkeit* des *Kolbens* beträgt im Durchschnitt bei kleinen *hölzernen Kastengebläsen* 2·4 bis 3·2 und bei gröfseren *eisernen Cylindergebläsen* 2·8 bis 3·8 Fufs (per Secunde).

Den *Kolbenschub* nimmt man bei *Cylindergebläsen* gleich dem Durchmessers des Cylinders und bei *Kastengebläsen* gleich $\frac{3}{4}$ von der Weite des Kastens.

Was den *Luftbedarf* eines Hochofens betrifft, so kann man diesen nach dem gröfsten horizontalen Durchmesser oder Querschnitt des Ofens bestimmen, und zwar beträgt diese Luftmenge im Durchschnitt für jeden Quadratfufs dieses gröfsten Querschnittes per Minute

für *Holzkohlöfen* 32 bis 40 und
,, *Koksöfen* . . 20 Kubikfufs.

Endlich beträgt die *Pressung* der Luft in der Windleitung in Quecksilberhöhen ausgedrückt sofort:

für leichte Kohlen aus Tannenholz	$\frac{3}{4}$	bis	1	Zoll,
„ Kohlen aus harzigem Holz . .	1	„	2	„
„ Kohlen aus hartem Holz . .	$1\frac{1}{2}$	„	$2\frac{1}{2}$	„
„ leichte Koks	3	„	5	„
„ dichte Koks	5	„	7	„

Von der geradlinigen Bewegung geworfener oder fallender Körper in widerstehenden Mitteln.

(§. 467.)

261. Hat ein, durch eine stetige Kraft in geradliniger Richtung getriebener Körper fortwährend den Widerstand des umgebenden elastischen Mittels, wie z. B. der Luft, zu überwinden und besitzt der Körper eine solche Form, daſs die Resultante dieses Widerstandes in der Richtung der Bewegung liegt und zugleich durch den Angriffspunct der erwähnten bewegenden Kraft geht; so bezeichne M die Masse des Körpers, P die in der Richtung der Bewegung stetig auf ihn einwirkende Kraft, Q den Widerstand des Mittels in einer der Bewegung direct entgegengesetzten Richtung, s den Abstand des Körpers von irgend einem festen Anfangspunct der Bahn, am Ende der Zeit t und v die Geschwindigkeit des Körpers in demselben Augenblicke. Dieſs vorausgesetzt, ist die wirksame Kraft des Körpers (Nr. **56.**) gleich $M\frac{dv}{dt}$ und da nach dem *d'Alembert*'schen Principe, zwischen den auf den Körper angebrachten Kräften und den in entgegengesetzten Richtungen genommenen wirksamen Kräften in jedem beliebigen Zeitmomente Gleichgewicht bestehen muſs (Nr. **61**, Anmerk. 2 u. 7 und Nr. **170**, Anmerk.), so hat man, da Q und $M\frac{dv}{dt}$ die wirksamen Kräfte sind, welche in der, der Bewegung entgegengesetzten Richtung zu nehmen sind und P die Kraft in der Richtung der Bewegung ist, sofort:

$$M\frac{dv}{dt} + Q - P = 0 \quad . \quad . \quad (a)$$

Anmerkung. Im Falle die Kraft P nach einer, der Bewegung des Körpers direct entgegengesetzten Richtung wirksam wäre, dürfte man in dieser Differenzialgleichung nur P mit entgegengesetztem Zeichen nehmen.

262. Was ferner den Widerstand Q betrifft, so ist dieser eine Function von der Geschwindigkeit v und zwar kann man allgemein

$$Q = \alpha(1 + \beta v) v^2 \ . \ . \ (b)$$

setzen, wobei α und β constante, von der Natur des umgebenden oder widerstehenden Mittels und der Form des Körpers abhängige Coeffizienten sind. Ist z. B. der bewegte Körper eine Kugel und das umgebende Mittel atmosphärische Luft; so ist nach §. 469, Relat. (2): $Q = \cdot 513\, A q' \frac{v^2}{2g}$ oder wegen (§. 466, Relat. w) $q' = q\left(1 + \frac{v}{1317}\right)$ auch:

$$Q = \cdot 513\, A q \left(1 + \frac{v}{1317}\right) \frac{v^2}{2g}$$

wobei A die gröfste Kreisfläche der Kugel, q das Gewicht einer Volumeneinheit der Luft und 1317 die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher unter den im §. 466 gemachten Voraussetzungen die Luft in den leeren Raum fliefsen würde. Es wären also in diesem Beispiele die beiden genannten Coeffizienten $\alpha = \cdot 513 \frac{Aq}{2g}$ und $\beta = \frac{1}{1317}$.

Setzt man nun in der obigen Differenzialgleichung (a) für Q den Werth aus der Relation (b) und betrachtet jenen Fall, in welchem die Kraft P eine stetig oder constant wirkende ist, wodurch P eine von t und v unabhängige Gröfse wird; so hat man:

$$M \frac{dv}{dt} + \alpha(1 + \beta v) v^2 - P = 0$$

und daraus:

$$dt = - \frac{M dv}{\alpha(1 + \beta v) v^2 - P} \ . \ . \ (1)$$

Aufserdem folgt noch, wegen $ds = v\,dt$:

$$ds = - \frac{M v\, dv}{\alpha(1 + \beta v) v^2 - P} \ . \ . \ (2)$$

Anmerkung. Statt der obigen Zahl 1317 sollte man eigentlich (Formel (4) in Nr. 250, wegen $b = 0$) $\sqrt{2gk}$ und für k den Werth $25932 \times 1\cdot072 = 27799$ setzen, wenn man nämlich (Note zu Nr. 249) die gewöhnliche äufsere mit Wasserdampf gemischte Luft von 18° C. als 850 Mal leichter als Wasser, bei dessen gröfster Dichtheit, annimmt; mit diesem Werthe erhält man $\sqrt{2gk} = 1313$ Fufs, statt der obigen Zahl von 1317.
Übrigens erscheint diese Zahl ohne strengen Zusammenhang mit der Ausflufsgeschwindigkeit der Luft in den leeren Raum, wofür die oben (in Nr. 254, Anmerk. 2) angeführten Experimentatoren nur 544 Fufs gefunden haben, blofs nur als ein Erfahrungscoeffizient in der obigen Formel (b). Für das oben angeführte Gewicht q würde man sonach (Note zu Nr. 249) ·06635 Pfund per Kubikfufs zu setzen haben.

263. Wird nun z. B. ein Körper auf einer absolut glatten horizontalen Ebene mit der anfänglichen Geschwindigkeit V fortgeschleudert und wirkt auf denselben während seiner Bewegung keine andere Kraft als der Widerstand der ihn umgebenden atmosphärischen Luft ein; so hat man in den beiden vorigen Differenzialgleichungen (1) und (2) $P=0$ zu setzen. Dadurch gehen sie über in folgende:

$$dt = -\frac{M\,dv}{\alpha(1+\beta v)v^2} \quad \text{und} \quad ds = -\frac{Mv\,dv}{\alpha(1+\beta v)v^2}.$$

Da sich jedoch der Factor $1+\beta v$, in welchem β immer eine sehr kleine Gröfse (z. B. für atmosphärische Luft $=\frac{1}{1317}$) ist, mit der Geschwindigkeit v nur sehr wenig ändert; so kann man dafür einen Mittelwerth setzen und diesen während der ganzen Bewegung durch die Zeit t als constant ansehen. Hat nun v für $t=0$ den Werth V und für das Ende der Zeit t den Werth v, so kann man als einen solchen Mittelwerth

$$B = \frac{(1+\beta V)+(1+\beta v)}{2} = 1+\tfrac{1}{2}\beta(V+v) \;.\;. \quad (c)$$

nehmen und daher setzen:

$$dt = -\frac{M}{\alpha B}\frac{dv}{v^2} \quad \text{und} \quad ds = -\frac{M}{\alpha B}\cdot\frac{dv}{v}$$

so, dafs wenn man innerhalb der Grenzen von V bis v (d. von $t=0$ bis t) integrirt, sofort durch Umkehrung der Grenzen):

$$t = \frac{M}{\alpha B}\int_v^V \frac{dv}{v^2} = \frac{M}{\alpha B}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{V}\right) \quad (3)$$

und

$$s = \frac{M}{\alpha B}\int_v^V \frac{dv}{v} = \frac{M}{\alpha B}\,logn.\left(\frac{V}{v}\right) \quad (4)$$

erhält.

Anmerkung. Aus der erstern dieser Gleichungen erhält man also die Zeit, und aus der letztern den Raum, nach deren Verlauf der Körper noch irgend eine bestimmte Geschwindigkeit v besitzt. Diese Gleichungen zeigen, dafs die Geschwindigkeit v mit der Zunahme von t immer mehr abnimmt und sich ohne Ende der Nulle nähert; soll aber zuletzt $v=0$ werden, so mufs sowohl die Zeit t als auch der Raum s Unendlich seyn.

264. Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen (3) und (4) die Geschwindigkeit v (wobei B immer als eine constante Gröfse behandelt wird), so erhält man:

$$s = \frac{M}{\alpha B}\,logn.\left(1+\frac{\alpha B}{M}Vt\right) \;.\;. \quad (5)$$

So lange nun t noch besonders klein, also $\frac{\alpha B Vt}{M}$ ein sehr kleiner Bruch ist, hat man nahe genug $logn\left(1+\frac{\alpha B}{M}Vt\right)=\frac{\alpha B}{M}Vt$, folglich

$$s = Vt \;.\;.\quad (6)$$

dagegen wenn t schon so groſs geworden, daſs man die Einheit gegen $\frac{\alpha B V t}{M}$ auslassen kann

$$s = \frac{M}{\alpha B}\, logn.\, \frac{\alpha B}{M}\, Vt \;.\;.\quad (7)$$

so wie für noch gröſsere Werthe von t, für welche man in dem Ausdrucke $log\,\frac{\alpha B V t}{M} = log\,\frac{\alpha B V}{M} + log\, t$ das erste Glied ohne Fehler auslassen kann, sofort:

$$s = \frac{M}{\alpha B}\, logn.\, t \;.\;.\quad (8)$$

Anmerkung. Drückt man die Masse M des betreffenden Körpers durch das Gewicht W desselben aus, so, daſs also (§. 35, Anmerk. oder Nr. **55**, Anmerk. 3) $M = \frac{W}{g}$ gesetzt wird; so folgt aus der letztern Gleichung (8), daſs wenn von zwei Körpern von ganz gleicher Gröſse und Form (wodurch also der Luftwiderstand für beide derselbe ist), der eine ein gröſseres specifisches (also auch gröſseres absolutes) Gewicht als der andere hat, der erstere nach einer gewissen Zeit t dem letztern vorausgeeilt seyn wird, wenn dieser letztere auch dieselbe oder selbst eine gröſsere Anfangsgeschwindigkeit V als der erstere besaſs.

265. In jenen Fällen, in welchen P als eine stetige oder constante Kraft erscheint, welche in directer Richtung der Bewegung wirksam ist, folgt aus den Differenzialgleichungen (1) und (2) (Nr. **262**), wenn man den Werth von $B = 1 + \frac{1}{2}\beta(V + v)$ in (c) (Nr. **263**), bei der Integration von $t = 0$ bis $t = t$, d. i. von $v = V$ bis $v = v$ wieder als einen constanten behandelt und noch Kürze halber den Bruch

$$\frac{\alpha B}{P} = m \;.\;.\quad (d)$$

setzt:

$$dt = \frac{M}{P} \cdot \frac{dv}{1 - m v^2} \text{ und } ds = \frac{M}{P} \cdot \frac{v\, dv}{1 - m v^2}$$

und daraus:

$$t = \frac{M}{P} \int_V^v \frac{dv}{1 - m v^2} \quad \text{und} \quad s = \frac{M}{P} \int_V^v \frac{v\, dv}{1 - m v^2}$$

Nun ist (Comp. §. 767):

$$\int \frac{dx}{a - b x^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, logn.\left(\frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}\right) + C$$

folglich, wenn man $a = 1$, $b = m$, $x = v$ setzt und die Zeichen ändert, so wie auch statt der Masse M das Gewicht W einführt:

$$t = \frac{W}{2gP\sqrt{m}} \; logn. \left(\frac{V\sqrt{m} - 1}{V\sqrt{m} + 1}\right)\left(\frac{v\sqrt{m} + 1}{v\sqrt{m} - 1}\right) \; . \; . \quad (9)$$

Ferner folgt ganz einfach (Comp. §. 762) aus dem vorigen Differenzialausdruck von ds:

$$s = \frac{W}{2gPm} \; logn. \left(\frac{mV^2 - 1}{mv^2 - 1}\right) \; . \; . \quad (10)$$

Anmerkung. Diese beiden Formeln (9) und (10) finden z. B. ihre Anwendung bei dem Herabgleiten eines Körpers über eine schiefe Ebene, wobei die Differenz zwischen der Seitenkraft $W Sin\, \alpha$, womit der Körper vom Gewichte W über die schiefe Ebene vom Neigungswinkel α herabgeht und den Betrag der Reibung R, d. i. $W Sin\, \alpha - R = P$ ist und als positiv angenommen wird.

266. Für den freien Fall eines Körpers in der Luft und zwar für die uns zu Gebote stehenden Höhen, darf man, wenn W das Gewicht des Körpers ist, in den beiden Formeln (9) und (10) nur $P = W$ setzen, um die hierher gehörigen Formeln zu erhalten. Es ist nämlich dafür:

$$t = \frac{1}{2g\sqrt{m}} \; logn. \left(\frac{V\sqrt{m} - 1}{V\sqrt{m} + 1}\right)\left(\frac{v\sqrt{m} + 1}{v\sqrt{m} - 1}\right) \; . \; . \quad (11)$$

und

$$s = \frac{1}{2gm} \; logn. \left(\frac{mV^2 - 1}{mv^2 - 1}\right) \; . \; . \quad (12)$$

wobei (vorige Nr. Relat. d) $m = \frac{\alpha B}{W}$ und (Relat. c in Nr. **263**) $B = 1 + \frac{1}{2}\,(V + v)$ ist.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit $V = 0$, so verwandeln sich diese beiden Formeln in die folgenden:

$$t = \frac{1}{2g\sqrt{m}} \; logn \; \left(\frac{1 + v\sqrt{m}}{1 - v\sqrt{m}}\right) \; . \; . \quad (13)$$

$$s = \frac{1}{2gm} \; logn. \left(\frac{1}{1 - mv^2}\right) \quad . \; (14)$$

Anmerkung. Ist in den Formeln (11) und (12) $V\sqrt{m} < 1$, d. i $V < \frac{1}{\sqrt{m}}$, so mufs auch, damit der Logarithmus, also auch t und s nicht imaginär ausfalle, $v\sqrt{m} < 1$, d. i. $v < \frac{1}{\sqrt{m}}$ seyn. Unter dieser Bedingung wächst die Geschwindigkeit v mit der Zeit t jedoch nicht ins Unendliche, sondern nähert sich dabei ohne Ende dem Grenzwerth von $v = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Ist dagegen $V\sqrt{m} > 1$, d. i. $V > \frac{1}{\sqrt{m}}$, so mufs aus demselben Grunde auch $v\sqrt{m} > 1$, d. i. $v > \frac{1}{\sqrt{m}}$ seyn. In diesem Falle nimmt v fortwährend ab, während t zunimmt kann jedoch ebenfalls nicht unter den erwähnten Grenzwerth von $v = \frac{1}{\sqrt{m}}$ herabsinken.

Auch die Formeln (13) und (14) zeigen, dafs beim freien Falle eines Körpers in der Luft, die Geschwindigkeit v nicht jeden beliebig grofsen Werth erreichen kann, sondern an den Grenzwerth $v = \frac{1}{\sqrt{m}}$, welchem sie ohne Ende zustrebt, gebunden ist und diesen nicht überschreiten kann.

Beispiel 1. Für das in §. 467 (S. 444) angeführte Beispiel, in welchem die gröfste Geschwindigkeit gesucht wird, die eine 3·7 Zoll im Durchmesser haltende eiserne Kugel beim freien Falle in der Luft annehmen kann, hat man $A = \cdot0746$, $W = \cdot01534 \times 406 = 6\cdot228$, $\alpha = \frac{\cdot513 \times \cdot0746 \times \cdot06635}{62} = \cdot000041943$, $\beta = \frac{1}{1317} = \cdot0007593$, und da durch eine vorläufige Rechnung $v = 370$ gefunden wurde, $B = 1 + \frac{1}{2}\beta v$ (wegen $V = 0$) $= 1\cdot14047$, so wie endlich $m = \frac{\alpha B}{W} = \cdot0000076806$ und $\frac{1}{\sqrt{m}} = 360\cdot83$. Es wäre daher dieser Grenzwerth oder die gröfste Geschwindigkeit von v nahe gleich 361 Fufs, während am angeführten Orte dafür 365 Fufs gefunden wurde.

Würde dieselbe eiserne Kugel von der Spitze des St. Stephansthurmes herabfallen, so würde sie im leeren Raume hierzu (§. 142, Beispiel 4) die Zeit von 5·28 Secunden brauchen und dabei eine Geschwindigkeit von 163·68 Fufs erlangen, indem der Fallraum 432 Fufs beträgt. Bei dem hier angenommenen Luftwiderstande jedoch würde die Kugel, um dieselbe Endgeschwindigkeit von 163·68 Fufs zu erlangen, von einer Höhe von 479·72 Fufs fallen müssen, wozu die Zeit von 5·662 Secunden erforderlich wäre.

Beispiel 2. In welcher Zeit erlangt eine hölzerne Kugel von der vorigen Gröfse (3·7 Zoll Durchmesser) und dem specifischen Gewicht = ·9 unter den vorigen Bedingungen (d. i. bei demselben Barometer- und Thermometerstand und demselben Grad der Feuchtigkeit) beim freien Falle eine Geschwindigkeit von 130 Fufs und durch welche Höhe mufs die Kugel dabei fallen?

Da diese Kugel 8 Mal leichter als die vorige eiserne ist (wegen $\frac{7\cdot2}{\cdot9} = 8$), so ist dafür $W = \frac{6\cdot228}{8} = \cdot7785$, und wegen $B = 1\cdot0493546$ sofort $m = \cdot000056536$. Mit diesem Werthe und $v = 130$ folgt aus den obigen Formeln (13) und (14): $t = 9\cdot5988$ Secunden und $s = 887\cdot64$ Fufs.

Im luftleeren Raume würde die Kugel in dieser Zeit von nahe 9·6 Secunden eine Geschwindigkeit von 297·55 Fuſs erlangt und dabei einen Weg von 1428 Fuſs zurückgelegt haben, oder die Kugel würde diese gegebene Geschwindigkeit schon in Zeit von nahe 4·2 Secunden erlangt und dabei nur einen Weg von 272·58 Fuſs zurückgelegt haben.

Anmerkung. Für Körper von einem geringen specifischen Gewichte und groſsem Volumen muſs auch noch der Umstand berücksichtigt werden, daſs hinter den in einer Flüssigkeit sich bewegenden Körpern eine gewisse Menge dieser Flüssigkeit mit fortgerissen wird, welche z. B. bei kugelförmigen Körpern ·6 von dem Volumen des Körpers selbst ausmacht.

267. Wir wollen schlüſslich noch den Fall betrachten, in welchem die obige constante Kraft P der Bewegung direct entgegengesetzt wirkt, diese daher (Nr. **261**, Anmerk.) in den Formeln (1) und (2) (Nr. **262**) mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen ist.

Setzt man daher wieder $1+\frac{1}{2}\beta(V+v)=B$, $\frac{\alpha B}{P}=m$ und $M=\frac{W}{g}$, so erhalten diese beiden genannten Differenzialgleichungen die Form:

$$dt=-\frac{W}{gP}\cdot\frac{dv}{1+mv^2} \text{ und } ds=-\frac{W}{gP}\cdot\frac{v\,dv}{1+mv^2}.$$

Nun ist (Comp. S. 302, §. 764)

$$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\,tang.\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C$$

folglich
$$t=\frac{W}{gP}\int_v^V\frac{dv}{1+mv^2} \text{ d. i.}$$

$$t=\frac{W}{gP\sqrt{m}}\left[arc.\,tang.\,V\sqrt{m}-arc.\,tang.\,v\sqrt{m}\right]\quad.\quad(15)$$

Ferner ist ganz einfach $s=\frac{W}{gP}\int_v^V\frac{v\,dv}{1+mv^2}$ d. i.

$$s=\frac{W}{2gPm}\,logn.\left(\frac{1+mV^2}{1+mv^2}\right)\quad.\;.\quad(16)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, daſs v abnimmt wenn t und s zunehmen und daſs für einen gewissen Werth von $t=T$ und $s=S$ die Geschwindigkeit $v=0$ wird. Bezeichnet man den entsprechenden Werth von B, nämlich $1+\frac{1}{2}\beta V$ mit B' und jenen $\frac{\alpha B'}{P}$ mit m'; so hat man:

$$T=\frac{W}{gP\sqrt{m'}}\,arc.\,tang.\,V\sqrt{m'}\quad.\;.\quad(17)$$

und

$$S=\frac{W}{2gPm'}\,logn.\,(1+m'V^2)\quad.\;.\quad(18)$$

Anmerkung. Die beiden Formeln (15) und (16 finden z. B. ihre Anwendung in jenem Falle, in welchem ein Körper auf einer horizontalen Ebene fortgeschleudert wird, wo dann P die von der Geschwindigkeit unabhängige Reibung zwischen dem Körper und der Ebene bezeichnet.

268. Wird ein schwerer Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit V vertical aufwärts geworfen, so darf man in den letztern 4 Formeln nur $P = W$ setzen, um die entsprechenden Werthe für t, s, T und S zu erhalten. Die gröfste Höhe S, welche der Körper dabei erreichen kann, folgt also aus der Formel:

$$S = \frac{1}{2\,g\,m'}\,logn.(1 + m'\,V^2)$$

und die hierzu nöthige Zeit aus jener

$$T = \frac{1}{g\,\sqrt{m'}}\,arc.tang.\,V\sqrt{m'}$$

Anmerkung 1. Ist V sehr klein oder das Gewicht W bedeutend grofs, wodurch m' sehr klein wird, so kann man $log\,(1 + m'\,V^2) = m'\,V^2$ setzen und dann wird $S = \frac{V^2}{2\,g}$, d. h. der Körper erreicht dann sehr nahe jene Höhe, auf welche er auch im luftleeren Raume steigen würde.

Anmerkung 2. Setzt man diesen Werth von S statt s in der Formel (14) und bestimmt aus der entstehenden Gleichung den Werth von v; so erhält man die Geschwindigkeit, welche ein mit der Geschwindigkeit V vertical aufwärts geworfener Körper in dem Augenblicke besitzt, in welchem er heim Zurück - oder Herabfallen an dem Ausgangspunct anlangt. Setzt man, was hierbei ohne Fehler geschehen kann, $B' = B$, also auch $m' = m$; so erhält man auf diese Weise für die genannte Geschwindigkeit:

$$v = \frac{V}{\sqrt{[1 + m'\,V^2]}},$$

so, dafs also immer $v < V$ ist.

Für sehr kleine Werthe von V oder grofse Werthe von W (wodurch m' klein wird), kann man $m'\,V^2$ gegen die Einheit auslassen und dann wird sehr nahe $v = V$.

Für sehr grofse Werthe von V oder kleine Werthe von W kann man dagegen umgekehrt die Einheit gegen $m'\,V^2$ weglassen und dann wird nahe $v = \frac{1}{\sqrt{m'}}$, welches sofort der oben erwähnte Grenzwerth ist, welchem sich ein in der Luft frei fallender Körper fortwährend nähert.

Beispiel. Wird eine 4zöllige eiserne 10 Pfund schwere Kugel mit 100 Fufs Geschwindigkeit vertical aufwärts geworfen, so erreicht sie, wegen $A = \cdot08727$, $W = 10$, $V = 100$, $B' = 1\cdot037965$, und (wenn man wieder denselben Zustand der Luft, wie in den vorigen Beispielen, voraussetzt) $m' = \cdot0000049615$, die Höhe von:

$S = 157{\cdot}42$ Fufs

und zwar während der Zeit von $T = 3{\cdot}174$ Secunden.

Im luftleeren Raume würde diese Kugel eine Höhe von 161·3 Fufs erreicht, und dazu die Zeit von 3·226 Secunden gebraucht haben.

Hätte die Kugel bei demselben Volumen nur das Gewicht von 1 Pfund, so würde sie unter gleichen Umständen blofs die Höhe von nahe 131 Fufs erreichen können und dazu nahe 2·73 Secunden benöthigen. Im luftleeren Raume würden um diese Höhe zu erreichen nur 2·46 Secunden und eine Anfangsgeschwindigkeit von 76·26 Fufs nöthig seyn.

Geschwindigkeit des ausströmenden Dampfes.

(§. 482.)

269. Nach *Gay-Lussac*'s Versuchen wiegt ein Liter Wasserdampf bei 100° *C.* Temperatur und ·76 Meter Barometerstand ·5895 Gramme, dagegen 1 Liter atmosphärische trockene Luft unter denselben Verhältnissen ·9454 Gramme, folglich ist das specifische Gewicht des Dampfes gegen Luft $s = \frac{5895}{9454} = {\cdot}6235456$.

Setzt man nun in der Formel (2) der Nr. **249** nach der Bemerkung dieser Nr. (Anmerk.), statt k den Quotienten $\frac{k}{s}$ und für k den Werth aus (α) derselben Nr., nämlich $k = \frac{25165}{{\cdot}6235456}(1 + nt) = 40358(1 + {\cdot}00366\,t)$; so erhält man, wenn man auch zugleich den natürlichen Logarithmus in den gemeinen umwandelt, d. i. $logn.\, x = 2{\cdot}3026\; log\, vulg.\, x$ setzt und reducirt, für die Ausflufsgeschwindigkeit des Dampfes:

$$v = 2400 \sqrt{\left[(1 + nt)\, log\, v.\, \frac{P}{p}\right]} \quad (1)$$

dabei bezeichnet P die Spannung oder den Druck des Dampfes im Gefäfs auf den Quadratfufs oder Quadratzoll und p die Spannung, welche in dem Raume herrscht, nach welchem der Dampf entweicht, gemessen durch den Druck wie vorhin, beziehungsweise auf den Quadratfufs oder Quadratzoll; auch können P und p wieder durch die Barometerstände ausgedrückt werden, da es sich dabei überhaupt nur um das Verhältnifs $\frac{P}{p}$ dieser beiden Spannungen oder Drücke handelt.

Was die Spannkraft p oder den Druck in Pfunden auf den Qudratfufs bei der Temperatur t^0 *C* anbelangt, so ist diese in §. 473 in den beiden Formeln (1) und (2) annähernd angegeben; es ist nämlich, wegen

$p = 766{\cdot}925\,h$ Pfund, wenn man nämlich das specifische Gewicht des Quecksilbers bei 0^0 gleich $13{\cdot}5982$, folglich das Gewicht von 1 Kubikfuſs Quecksilber bei dieser Temperatur gleich $13{\cdot}5982 \times 56{\cdot}4 = 766{\cdot}925$ Pfund setzt, und den mittlern Barometerstand mit $\cdot 76$ Meter $= 2{\cdot}4043$ Fuſs in Rechnung bringt, für Dampfspannungen bis 4 Atmosphären:

$$p = 24{\cdot}258\left(\frac{t+75}{85}\right)^6 \quad . \; . \quad (a)$$

und für höhere Dampfspannungen:

$$p = 1845\,(\cdot 2847 + \cdot 007153\,t)^5 \quad . \; . \quad (b)$$

270. Um das Gewicht eines bestimmten Dampfvolumens bei einer gegebenen Temperatur zu bestimmen, sey v das Volumen und $\varDelta$ das Gewicht der cubischen Einheit des Dampfes bei der Temperatur $= t$ und dem Drucke $= p$ auf die Flächeneinheit; ferner bezeichne v', $\varDelta'$ und p' dasselbe für die Temperatur $= t'$; so ist (§. 475, Relat. 4):

$$\frac{v}{v'} = \left(\frac{1+nt}{1+nt'}\right)\frac{p'}{p}$$

und da sich die Gewichte verkehrt wie die Volumina verhalten, nämlich $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{v'}{v}$ ist, so hat man:

$$\varDelta = \frac{1+nt'}{1+nt} \cdot \frac{p}{p'}\,\varDelta'.$$

Ist nun unter dem mittlern Luftdruck von $1{\cdot}033$ Kilogramm auf den Qudratcentimeter, d. i. von $1844{\cdot}6$ (oder nahe 1845) Pfund auf den Quadratfuſs und der Temperatur von 100^0 $C.$ das Gewicht von 1 Kubikmeter Dampf $= \cdot 5895$ (nach andern Angaben $\cdot 5913$) Kilogramme, d. i. von 1 Kubikfuſs $= \cdot 033248$ (nach der andern Angabe $\cdot 033357$) Pfund; so folgt aus dieser Formel, wenn man $t' = 100$, $p' = 1844{\cdot}6$, $\varDelta' = \cdot 0331634$ und $n = \cdot 00366$ setzt und gehörig reducirt:

$$\varDelta = \cdot 000024625\,\frac{p}{1+nt} \quad . \; . \quad (c)$$

wobei p aus der betreffenden Formel (a) oder (b) der vorigen Nr. zu nehmen ist.

Anmerkung 1. Bezeichnet man das relative Volumen des Dampfes, durch μ, das Gewicht von 1 Kubikfuſs Wasser durch γ, das Gewicht eines Kubikfuſs Dampfes, dessen Spannung auf den Quadratfuſs p Pfunde beträgt, wie zuvor durch Δ; so ist (§. 476) $\mu = \frac{\gamma}{\Delta}$.

Nun kann man aber auch näherungsweise $\mu = \dfrac{1}{\alpha + \beta p}$ setzen, wobei nach *Pambour*, auf das französische Maſs bezogen (wo also p den Druck des Dampfes auf den Quadratmeter in Kilogramm bezeichnet) für Dämpfe von niederer Spannung (für Dampfmaschinen mit Condensation) $\alpha = {}^{\cdot}0^{4}4227$, $\beta = {}^{\cdot}0^{7}529$ und für Dämpfe von hoher Spannung (für Dampfmaschinen ohne Condensation) $\alpha = {}^{\cdot}0^{3}1421$, $\beta = {}^{\cdot}0^{7}471$ oder auf das Wiener Maſs und Gewicht bezogen, beziehungsweise (§. 477) $\alpha = {}^{\cdot}0^{4}4227$, $\beta = {}^{\cdot}0^{6}296$ und $\alpha = {}^{\cdot}0^{3}1421$, $\beta = {}^{\cdot}0^{6}264$ gesetzt werden kann. Es ist also auch $\frac{\gamma}{\Delta} = \frac{1}{\alpha + \beta p}$ oder $\Delta = \gamma\alpha + \gamma\beta p$ und wenn man $\gamma\alpha = \alpha'$ $\gamma\beta = \beta'$ setzt auch

$$\Delta = \alpha' + \beta' p \quad . \; . \quad (d)$$

dabei ist für französisches Maſs, wegen $\gamma = 1000$ (indem ein Kubikmeter reines Wasser im Zustande seiner gröſsten Dichtigkeit, d. i. bei 4^{0} *C.* 1000 Kilogramme wiegt) für Dämpfe von niederer Spannung (etwa bis 2 Atmosphären) $\alpha' = {}^{\cdot}04227$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}529$ und für Dämpfe von hoher Spannung $\alpha' = {}^{\cdot}1421$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}471$, oder auf das Wiener Maſs bezogen, wegen $\gamma = 56{\cdot}4$, in diesen beiden Fällen $\alpha' = 0023840$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}16708$ und $\alpha' = {}^{\cdot}0080142$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}14877$.

Da jedoch *Pambour* in der zweiten Ausgabe seiner Theorie der Dampfmaschinen vom J. 1844 die Formel für das relative Volumen des Dampfes, der gröſsern Einfachheit wegen, in der Form $\mu = \frac{m}{n+p}$ schreibt und für französisches Maſs, für Dämpfe von niederer Spannung $m = 20000000$, $n = 1200$, und für Dämpfe von hoher Spannung $m = 21232000$, $n = 3020$ setzt; so würde dieſs beziehungsweise auf das französische Maſs bezogen $\alpha = {}^{\cdot}0^{4}6$, $\beta = {}^{\cdot}0^{7}5$, $\alpha' = {}^{\cdot}06$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}5$ und $\alpha = {}^{\cdot}0^{3}14224$, $\beta = {}^{\cdot}0^{7}471$, $\alpha' = {}^{\cdot}14224$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}471$, dagegen auf das Wiener Maſs reducirt $\alpha = {}^{\cdot}0^{4}6$, $\beta = {}^{\cdot}0^{6}2802$, $\alpha' = {}^{\cdot}003384$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}15804$ und (für hochgespannte D.) $\alpha = {}^{\cdot}0^{3}14224$, $\beta = {}^{\cdot}0^{6}26396$, $\alpha' = {}^{\cdot}008022$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}148877$ geben.

Wir halten jedoch die älteren *Pambour*'schen Coeffizienten für genauer als diese letzteren, welche allerdings den Vorzug besitzen, daſs sie in runden Zahlen ausgedrückt sind.

Navier nahm für hohen Druck $\alpha' = {}^{\cdot}09$ und $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}484$, welche Werthe jedoch weniger genau sind.

Redtenbacher nimmt (in der Formel $\Delta = \alpha' + \beta' p$) auf das französische Maſs bezogen, für Dämpfe von 1 bis 2 Atmosphären Spannung $\alpha' = {}^{\cdot}06295$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}51$ und für Dämpfe von 2 bis 5 Atmosphären Spannkraft $\alpha' = {}^{\cdot}1427$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}473$; dieſs gibt auf das Wiener Maſs bezogen beziehungsweise $\alpha' = {}^{\cdot}0035504$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}16121$ und $\alpha' = 0080488$, $\beta' = {}^{\cdot}0^{4}1495$

So erhält man z. B. für das Gewicht von 1 Kubikfuſs Dampf von 2 Atmosphären Spannkraft, welcher sofort die Temperatur von $121{\cdot}4^{0}$ *C.* entspricht, wegen $p = 2 \times 1844{\cdot}6 = 3689{\cdot}2$ Pfund und für den Ausdehnungscoeffizienten $n = {}^{\cdot}00366$ nach der obigen Formel (c): $\Delta = {}^{\cdot}063137$, dagegen nach der Formel (d) mit den *Pambour*'schen Coeffizienten von

$\alpha' = \cdot 002384$ und $\beta' = \cdot 0^4 16708$ sofort $\Delta = \cdot 064022$, und mit den von *Redtenbacher* aufgenommenen Coeffizienten, $\Delta = \cdot 063024$ Pfund.

Für das Gewicht eines Kubikfuſs Dampfes von 4 Atmosphären Spannkraft, welchem die Temperatur von $145{\cdot}4^0\, C.$ entspricht, hat man nach der Formel (c): $\Delta = \cdot 11858$ und nach jener (d) mit den Coeffizienten $\alpha' = \cdot 0080142$, $\beta' = \cdot 0^4 14877$ sofort $\Delta = \cdot 117781$, so wie mit den obigen Coeffizienten $\alpha' = \cdot 0080488$ und $\beta' = \cdot 0^4 1495$, auch $\Delta = \cdot 118356$.

Anmerkung 2. Schreibt man die Formel für das relative Volumen des Dampfes in der einfachern Form von

$$\mu = \frac{m}{n+p} \quad . \quad . \quad (e)$$

so hat man, wenn p den Druck des Dampfes in Pfunden auf den Wiener Quadratfuſs bezeichnet, näherungsweise nach den ältern *Pambour*'schen Coeffizienten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Dämpfe von niederer Spannkraft} & \begin{cases} m = 3378378 \\ n = 143 \end{cases} \\ \text{„ \quad „ \quad „ \quad hoher \quad „} & \begin{cases} m = 3787879 \\ n = 538 \end{cases} \end{array}\right\} (a)$$

nach den für das englische Maſs angegebenen Zahlen (von $m = 4100000$, $n = 250$ und $m = 4348000$, $n = 620$) reducirt:

$$\begin{cases} m = 3571490 \\ n = 218 \end{cases} \text{und} \begin{cases} m = 3787520 \\ n = 540 \end{cases} \quad (b)$$

dagegen nach den für das französische Maſs angegebenen Zahlen (von $m = 20000000$, $n = 1200$ und $m = 21232000$, $n = 3020$) reducirt:

$$\begin{cases} m = 3568560 \\ n = 224 \end{cases} \text{und} \begin{cases} m = 3788383 \\ n = 539 \end{cases} \quad (c)$$

271. Hat man nach der Formel (1) in Nr. **269** die Geschwindigkeit v des unter der Spannung P in einen Raum, in welchem der Druck p und die Temperatur t herrscht, ausströmenden Dampfes bestimmt; so findet man, wenn die Ausfluſsöffnung $= a$ und der betreffende Contractionscoeffizient $= m$ ist, das Gewicht Q des per Secunde ausströmenden Dampfes aus der Formel

$$Q = m a \varDelta v \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei $\varDelta = \cdot 00002456 \dfrac{p}{1 + nt}$ (Relat. c) oder

$$\varDelta = \alpha + \beta p \text{ (Relat. } d\text{, in der vorigen Nr.)}$$

zu setzen ist.

Beispiel. Strömt z. B. Dampf von $106\frac{1}{4}^0\, C.$ aus einer Ventilöffnung von 4 Zoll Durchmesser in einen Raum vom mittleren Barometerstand $= 2{\cdot}4043$ Fuſs ($= \cdot 76$ Meter) und setzt man voraus, daſs der Dampf die diesem Drucke entsprechende Temperatur von $100^0\, C.$ annimmt; so hat man zuerst für das Gewicht von 1 Kubikfuſs Dampf von der Temperatur von 100^0, also der Spannkraft oder dem Drucke von 1844·6 Pfund auf den Quadratfuſs, nach der Formel (*c*): $\Delta = \cdot 033165$ und nach jener (*d*): $\Delta = \cdot 033262$. Ferner ist nach der Formel (1) in Nr. **269** die Ausfluſsgeschwindigkeit, wegen $P = 2280{\cdot}4$, $p = 1844{\cdot}6$ und $nt = \cdot 00366 \times 106{\cdot}25 = 1{\cdot}3889$ sofort: $v = 858$ Fuſs.

Setzt man nun den Contractionscoeffizienten $m = \cdot 8$, so folgt aus der vorigen Formel (2), wegen $a = \cdot 08727$ mit dem erstern Werthe von Δ nahe $Q = 1{\cdot}987$ und mit dem zweiten Werthe von Δ: $Q = 1{\cdot}992$ Pfund.

Da nun das relative Volumen des Dampfes von dieser Dichte (§. 475) nahe $= 1700$ ist, so beträgt das per Secunde ausströmende Volumen Dampf im erstern Falle nahe 59·89 und im letztern 60 Kubikfuſs. Dieses Volumen ist nämlich $= \frac{Q}{56{\cdot}4} \times 1700$ oder auch (Relat. 2 dieser Nr.) $= \frac{Q}{\Delta} = m a v$.

Gröſse der Sicherheitsventile bei Dampfkesseln.

(§. 501.)

272. Nach der Relation (1) in Nr. **269** ist

$v = 2400 \sqrt{\left[(1 + \cdot 00366\, t) \log v. \frac{P}{p}\right]}$ die Geschwindigkeit des aus einer Öffnung ausströmenden Dampfes, wenn P den innern, der Temperatur t entsprechenden Dampfdruck und p den äuſsern Druck bezeichnet. Setzt man daher den Flächeninhalt der Ventilöffnung $= f$ und die per Secunde aus dieser Öffnung ausströmende Dampfmenge, dem Volumen nach $= M$; so ist, wenn man vorläufig von der Contraction des Dampfstrahles abstrahirt oder unter f den Querschnitt des zusammengezogenen Strahles versteht, diese Dampfmenge unter dem äuſsern Druck p gemessen $M = fv$, dagegen unter dem innern Druck P gemessen $M' = \frac{p}{P} f v$ oder für v den Werth gesetzt:

$$M' = 2400 \frac{p}{P} f \sqrt{\left[(1 + \cdot 00366\, t) \log v. \frac{P}{p}\right]}$$

Ist γ_1 das Gewicht von 1 Kubikfuſs Dampf im Kessel, nämlich von dem Drucke oder der Spannung P und der Temperatur t, so wie G das Gewicht des Dampfvolumens M'; so ist das Gewicht des Dampfes, welches per Secunde aus der Ventilöffnung ausströmt:

$$G = M' \gamma_1$$

oder wegen (Relat. *c*, in Nr. **270**)

$$\gamma_1 = \cdot 000024625 \frac{P}{1 + \cdot 00366\, t},$$

wenn man auch gleich für M' den vorigen Werth setzt und reducirt (wegen $p = 1844{\cdot}6$):

$$G = 108{\cdot}728 f \sqrt{\left(\frac{\log v. \dfrac{P}{p}}{1 + {\cdot}00366\, t}\right)}.$$

Ist ferner F die ganze Heiz- oder Feuerfläche des Dampfkessels und nimmt man an, daſs (Zusatz zu §. 464 auf S. 617) jeder Quadratfuſs dieser Fläche stündlich $4\frac{1}{2}$ Pfund Dampf von einer beliebigen Spannung erzeugen kann (wir nehmen nämlich um ganz sicher zu gehen und die Ventilfläche f auch für ein heftiges Feuer noch hinreichend groſs zu erhalten, die Zahl $4\frac{1}{2}$ statt jener $4{\cdot}28$); so ist auch $G = \frac{4{\cdot}5}{3600} F$.

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich und bestimmt aus der entstehenden Gleichung die Ventilfläche f, so entsteht, wenn man die Pressungen P und p in Atmosphären ausdrückt, wodurch also $p = 1$ wird und wenn man $P = m$ setzt:

$$f = {\cdot}0000115\, F \sqrt{\left(\frac{1 + {\cdot}00366\, t}{\log v.\, m}\right)}$$

Nimmt man endlich im vorliegenden Falle für den Contractionscoeffizienten die Mittelzahl ${\cdot}76$ oder ${\cdot}77$, setzt also ${\cdot}77 f$ statt f; so erhält man für das Verhältniſs der beiden Flächen

$$\frac{f}{F} = {\cdot}000015 \sqrt{\left(\frac{1 + {\cdot}00366\, t}{\log v.\, m}\right)} \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Beispiel. Hat der Dampf z. B. eine Spannung von $\frac{1}{4}$ Atmosphäre über den Luftdruck, so ist $m = \frac{5}{4}$ und $t = 106\frac{1}{2}{}^{0}$, folglich nach dieser Formel (δ): $f = {\cdot}00005681\, F$.

Rechnet man auf die Pferdekraft eine totale Heizfläche von 15 Quadratfuſs (§. 496)*), so wäre im gegenwärtigen Beispiele für einen Dampfkessel von N Pferdekräfte:

$$f = {\cdot}00085215\, N \text{ Quadratfuſs}$$

also z. B. für $N = 10$:

$$f = {\cdot}0085215 \square' = 1{\cdot}227096 \square''$$

also der Durchmesser des Ventils $d = 1\frac{1}{4}$ Zoll.

---

*) Es bedarf kaum der Bemerkung, daſs man sich dieser Zahl eigentlich nur als Durchschnittszahl für Niederdruck- oder auch für Hochdruckmaschinen ohne Expansion bedienen darf. Da nämlich die Groſse der Heizfläche nur auf die Dampfmenge, welche in einer bestimmten Zeit erzeugt werden kann, einen directen Einfluſs hat, diese jedoch für die Pferdekraft keinesweges constant, sondern je nach dem verschiedenen Systeme der Maschine, namentlich nach dem verschiedenen Absperrungsverhältniſs bei Expansionsmaschinen verschieden ist; so folgt von selbst, daſs auch die Heizfläche

Anmerkung. Nach der preufs. Verordnung soll das Verhältnifs $\frac{f}{F}$ wenigstens $\frac{1}{3000}$, also f wenigstens $= \frac{F}{3000} = \cdot 000333\, F$ seyn, wodurch daher im vorigen erstern Beispiele, wegen $\frac{.000333}{\cdot 00005681} = 5\cdot 8$ beinahe eine 6fache Sicherheit entsteht.

Nach der in Österreich geltenden Vorschrift, wird der Durchmesser des Ventils, in Zollen ausgedrückt, aus der Formel (§. 501)

$$d = \cdot 312 \sqrt{\left(\frac{F}{m - \cdot 412}\right)}$$

bestimmt, in welcher F die Heizfläche in Quadratfufs und m die absolute Dampfspannung im Kessel in Atmosphären ausgedrückt bezeichnen.

Es ist also für das letzte Beispiel, wegen $F = 150$ und $m = 1\cdot 25$ sofort $d = 4\cdot 175$ Zoll (wofür in der vorgeschriebenen Tabelle, welche nur die 10tel berücksichtiget, $4\cdot 2$ steht) also die Ventilfläche $f = 13\cdot 68\square'' = \cdot 095\square'$, so, dafs demnach wegen $\frac{\cdot 095}{00852} = 11\cdot 1$ hier eine 11fache Sicherheit Statt findet. (Dieselbe Vorschrift gilt übrigens auch in Frankreich.)

---

des Dampfkessels je nach diesen verschiedenen Systemen verschieden seyn müsse.

Beträgt z. B. die per Pferdekraft und per Minute nöthige Dampfmenge bei einer Niederdruckmaschine 0177, bei einer Hochdruckmaschine ohne Expansion ·0114 und bei einer solchen Maschine mit halber Absperrung ·009 Kubikfufs, d. h. verhalten sich diese Dampfmengen nahe wie die Zahlen 1 : ·65 : ·5; so kann auch, Alles übrige gleich gesetzt, die Gröfse des Dampfkessels in demselben Verhältnifs abnehmen, so, dafs man, für die Pferdekraft im erstern Falle 15 Quadratfufs gerechnet, dafür in den übrigen hier angeführten Fällen beziehungsweise nur 10 und $7\frac{1}{2}$ Quadratfufs zu nehmen hätte.

Treten nun auch in diesen letzteren Fällen, bei Erzeugung von hoch gespannten Dämpfen (§. 496), etwas ungünstigere Verhältnisse ein, wodurch auch die Heizfläche wieder in etwas vergröfsert werden mufs; so bleibt die Bemerkung doch richtig, dafs für dieselbe Kraftentwicklung einer Expansionsmaschine der Kessel im Allgemeinen um so kleiner seyn kann, je kleiner der Absperrungscoeffizient ist.

Das hier Bemerkte folgt noch bestimmter aus einer der obigen Formeln für das in der Zeiteinheit nöthige, zu verdampfende Wasservolumen S, z. B. aus der Formel (3) in Nr. 289, indem der im Nenner vorkommende Factor N nach der Tabelle in §. 523 für den Absperrungscoeffizienten $\frac{1}{10}$ gleich $2\cdot 6$, dagegen für den Coeffizienten 1 (d. i. ohne Expansion) nahe gleich 1 ist, so, dafs also im ersten Falle $2\cdot 6$ Mal weniger Wasser zu verdampfen nothwendig ist, als im letztern, folglich auch (ohne Rücksicht auf die vorige Bemerkung) der Kessel in demselben Verhältnifs im erstern Falle kleiner als im letztern seyn kann.

Für $F = 200$ und $m = 6$ z. B. erhält man nach dieser Vorschrift $d = 1{\cdot}867$ Zoll (nach der betreffenden Tabelle 1·9 Zoll), also $f = 2{\cdot}738\square'' = {\cdot}019\square'$, während man nach der theoretischen Formel (δ), wegen $F = 200$, $m = 6$ und $t = 160{\cdot}2$ sofort $f = {\cdot}004284\square'$ findet, so, dafs also hier noch nahe die $4\frac{1}{2}$fache Sicherheit Statt findet, indem diese Ventilfläche $4\frac{1}{2}$ Mal kleiner seyn könnte als vorgeschrieben ist. Allerdings wird dabei vorausgesetzt, dafs das Ventil dem ausströmenden Dampf kein Hindernifs entgegensetzt, was wohl niemals völlig der Fall ist, besonders wenn es sich nicht hoch genug hebt.

Zur noch grofseren Sicherheit, mufs jeder Dampfkessel mit zwei solchen Sicherheitsventilen versehen werden, welche am besten so weit wie möglich von einander entfernt angebracht werden.

Dafs sich endlich das Ventil wenigstens um den vierten Theil des Durchmessers der Ventilöffnung mufs heben können, um dem Dampf den gehörigen Ausgang zu gestatten, ist bereits in §. 427 (Anmerk.) nachgewiesen.

Wanddicke der cylinderischen Dampfkessel.

(§. 502.)

273. Bezeichnet D den Durchmesser des Kessels, d die Wand- oder Blechdicke, q den auf die Flächeneinheit im innern des Kessels Statt findenden Druck und m die absolute Festigkeit der Kesselbleche; so ist nach Relat. (1) in Nr. **132**, $d = \frac{1}{2} D . \frac{q}{m}$ oder mit Rücksicht auf die nöthige eigene Stabilität des Kessels (§. 276 u §. 277):

$$d = \frac{Dq}{2m} + {\cdot}114 \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

wenn man nämlich den W. Zoll zum Grunde legt.

Drückt man den Druck q in Atmosphären aus und nimmt an, dafs die absolute Dampfspannung im Kessel n, folglich der Überdruck $n - 1$ Atmosphären beträgt; so ist, den Druck einer Atmosphäre auf den Quadratzoll zu 12·75 Pfund angenommen, $q = 12{\cdot}75\,(n - 1)$, folglich, wenn man diesen Werth in (α) substituirt,

$$d = 6{\cdot}375\,(n - 1)\,\frac{D}{m} + {\cdot}114$$

Nimmt man nun, für Kessel aus Eisenblech nach der Bemerkung in § 253 (Anmerk.) für das noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Tragvermögen des Schmiedeisens in runder Zahl 16000 Pfund, setzt also in diesem letztern Ausdruck statt der absoluten Festigkeit $m = 16000$; so wird, wenn man gleich reducirt:

$$d = {\cdot}000398\,(n - 1)\,D + {\cdot}114 \quad . \quad . \quad (\beta)$$

274. Die durch diese Formel (β) ausgedrückte Blechdicke würde hinreichend seyn, wenn der Kessel 1stens vollkommen cylinderisch wäre, 2tens aus einem einzigen Stück (wie aus Gufseisen) bestände und 3tens keiner höhern Temperatur, so wie überhaupt keinem bedeutenden Temperaturwechsel ausgesetzt wäre. Allein, da bei den aus Blechen zusammengenieteten Dampfkesseln keine dieser Bedingungen Statt findet; so nimmt man auf gerathewohl diese Bleche 4 bis 5 Mal dicker oder stärker, als sie nach dieser Formel ausfallen.

Nach der für Österreich geltenden Vorschrift, sollen die (eisernen) Kesselbleche eine Dicke erhalten, welche sich aus der Formel (§. 502)

$$d = \cdot 0018\,(n - 1)\,D + \cdot 114 \quad . \quad (1)$$

bestimmen läfst, wobei d und D in Zollen zu nehmen sind und n die absolute Dampfspannung im Kessel in Atmosphären (zu $12\frac{3}{4}$ Pf. auf den Quadratzoll) bezeichnet.

Diese Formel mit der vorigen (β) verglichen zeigt, dafs (wegen $\frac{\cdot 0018}{\cdot 000398} = 4 \cdot 52$) rücksichtlich der verschiedenen eben erwähnten Umstände, welche auf den Kessel nachtheilig oder schwächend einwirken können, die Bleche (von der additionellen Stärke $\cdot 114$ Z. dabei abstrahirt) $4\frac{1}{2}$ Mal so stark genommen werden, als sonst nöthig wäre.

Anmerkung 1. Dieselbe Blechstärke ist auch in Frankreich gesetzlich vorgeschrieben, während in Preufsen die Kesselbleche etwas schwächer und zwar nach der genäherten Formel $d = \cdot 0015\,(n - 1)\,D + \cdot 1$ Zoll, dagegen müssen die dem Feuer ausgesetzten Bleche etwas stärker seyn und zwar sollen die Siedröhren, welche ganz im Feuer liegen 1·6 Mal so dicke Bleche erhalten, als sie diese Formel gibt.

Wir sind übrigens der Ansicht, dafs die in der betreffenden Formel (1) vorkommende additionelle Stärke von ·114 Zoll, welche wegen der eigenen Stabilität des Kessels hinzugefügt wird, sich nur für ganz geringe Spannungen des Dampfes rechtfertigen läfst, und dafs dieses Glied mit der Zunahme der Dampfspannung allmählig abnehmen und wenn diese Expansivkraft bereits eine gewisse Gröfse erreicht hat, ganz wegfallen sollte. Diese Bemerkung ist besonders für Bleche der Locomotivkessel wichtig, in welchen der Dampf eine absolute Spannung von mehr als 7 Atmosphären erreicht und die Bleche nach der obigen Formel (1) eine übermäfsige Dicke erhalten müssen. Aus diesem Grunde hat auch die österr. Regierung bereits gestattet, dafs für Locomotivkessel in der genannten Formel (1) unter n nicht die absolute Spannung sondern der Überdruck über 1 Atmosphäre verstanden (also $n - 1$ statt n gesetzt) werden darf, wodurch z. B. wenn die Dampfspannung 6 Atmosphären über den Luftdruck beträgt, nicht mehr $n = 7$ gesetzt werden mufs, wofür bei einem

Kessel von 40 Zoll Durchmesser $d = {}^{\cdot}546$ Zoll oder 6·55 Linien würde, sondern nur $n = 6$ und damit $d = {}^{\cdot}474$ Zoll oder 5·67 Linien genommen werden kann, wobei sich dieselbe nach der genannten Formel (1) berechnete und hinausgegebene Tabelle ebenfalls benützen läfst.

Liefse man die erwähnte additionelle Stärke bei 6 Atmosphären Überdruck verschwinden, so könnte man unserer Bemerkung zufolge die Formel (1) so modificiren, dafs man hätte

$$d = {}^{\cdot}0018\,(n-1)\,D + {}^{\cdot}114 - {}^{\cdot}019\,(n-1)$$

oder
$$d = (n-1)({}^{\cdot}0018\,D - {}^{\cdot}019) + {}^{\cdot}114$$

wobei jedoch n nicht gröfser als 7 werden dürfte, weil darüber hinaus die additionelle Stärke nicht blofs Null, sondern sogar negativ würde.

Nach dieser Formel würde z. B. für einen Kessel von 40 Zoll Durchmesser und für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ der Reihe nach $d = 2$, 2·64, 3·28, 3·91, 4·55, 5·18 Linien, während die Formel (1) $d =$ 2·26, 3·14, 4·03, 4·92, 5·81, 6·70 Linien gibt.

Anmerkung 2. Für die Construction der kupfernen Dampfkessel, die übrigens ihrer Kostspieligkeit wegen äufserst selten vorkommen, gelten für die Blechdicken dieselben gesetzlichen Bestimmungen wie für die Kessel aus Eisenblech. Gufseiserne Kessel sind mit Recht in Österreich gänzlich verboten.

275. Die zur Vergröfserung der Heizfläche bei cylinderischen Dampfkesseln häufig angewendeten Feuer- oder Rauchröhren („Kanonen"), so wie die bei den Locomotiv- und überhaupt den Tubularkesseln vorkommenden Heizröhren, bei welchen der Druck auf die convexe Mantelfläche Statt findet, werden auf ihre rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen.

Um die diefsfällige Stärke der Röhren zu bestimmen, sey (Fig. 166) $CA = CB = r$ der Halbmesser eines cylinderischen Rohres, l dessen Länge, q der Druck auf die Flächeneinheit von aufsen nach innen und zwar radial oder senkrecht gegen die Achse gerichtet und m' die rückwirkende Festigkeit des Materials woraus das Rohr besteht; so ist, wenn man in dem angenommenen kreisförmigen Querschnitt des Rohrs ein reguläres Polygon von einer beliebigen Seitenzahl einschreibt und den entsprechenden Mittelpunctswinkel $ACB = \alpha$, so wie die halben Umfangswinkel $CAB = CBA = CBE = \ldots = i$ setzt, ferner die in jedem Winkelpuncte $A, B, E \ldots$ gegen den Mittelpunct C wirkende Kraft mit P bezeichnet und jede in zwei nach den Richtungen der Polygonseiten wirkende gleiche Seitenkräfte p zerlegt, sofort:

$$P : p = Sin\,2\,i : Sin\,i = 2\,Cos\,i : 1 = 2\,Sin\,\frac{\alpha}{2} : 1 \quad (\text{wegen } 2\,i + \alpha = 180^{0})$$

und daraus:

$$p = \frac{P}{2\,Sin\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Nimmt nun der Winkel α unendlich ab, wodurch das Polygon allmählig in den Kreisumfang der Röhre übergeht, so wird $Sin\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ und daher $p = \frac{P}{\alpha}$ oder wegen $P = r\,\alpha\,l\,q$, auch

$$p = r\,l\,q.$$

Von der andern Seite ist, wenn δ wieder die Röhrendicke bezeichnet, die Kraft, welche die Röhrenwand zu zerdrücken im Stande ist, $p' = m'\,l\,\delta$, und da für das Gleichgewicht $p' = p$, also $m'\,l\,\delta = r\,l\,q$ ist, so folgt daraus:

$$\delta = \frac{rq}{m'} \; . \; . \quad (1)$$

Da nun die rückwirkende Festigkeit m' immer größer als die absolute Festigkeit m ist, so folgt aus einer Vergleichung dieses Ausdruckes (1) mit jenem (1) in Nr. **132**, daſs theoretisch genommen und unter übrigens gleichen Umständen, eine Röhre, wenn sie von auſsen nach innen gedrückt wird, dünner seyn kann, als wenn der Druck im Innern der Röhre nach auſsen Statt findet. Allein da die Erfahrung geradezu das Gegentheil zeigt, indem die Röhren im erstern Falle sehr oft schon platt gedrückt werden, während sie einem innern eben so starken Drucke noch ganz gut widerstehen, so kann die Ursache dieses scheinbaren Widerspruches nur darin liegen, daſs die Röhren in der Wirklichkeit nicht absolut rund sind, sondern von der genauen Cylinderform mehr oder weniger abweichen.

276. Um den Einfluſs dieser Abweichung näher kennen zu lernen, wollen wir annehmen, daſs der Querschnitt einer solchen Röhre eine Ellipse $ABA'B'A$ (Fig. 167) von den Halbachsen $AC = a$ und $BC = b$ bilde und der Normaldruck auf die Flächeneinheit wieder $= q$ sey.

Zerlegt man den, in jedem Puncte M der Curve Statt findenden Normaldruck P in zwei Seitenkräfte p und p' beziehungsweise senkrecht auf die groſse und kleine Achse AA' und BB'; so hat man für die Summe der aus dem Drucke auf den Quadranten AMB abgeleiteten Seitenkräfte p. d. i. $\Sigma(p)$ nach dem Satze in Nr. **141**:
$\Sigma(p) = q \;\; AC = a\,q$ und eben so für die Kräfte p', $\Sigma(p') = q \,.\, BC = b\,q$.

Betrachtet man für diesen Quadranten A als Stütz- oder Drehungspunct, so ist das statische Moment der im Puncte M wirkenden Kraft p

in Beziehung auf diesen Punct, wenn man die Abscisse $AB = x$ setzt und diese um dx zunehmen läfst, wodurch (Nr. **141**) $p = q\,dx$ wird, sofort $px = qx\,dx$, folglich die Summe der stat. Momente aller auf den Quadranten wirksamen Seitenkräfte p:

$$M = q\int_0^a x\,dx = \tfrac{1}{2}qa^2.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die Summe der stat. Momente der Kräfte p' (wenn man $BS = y$ setzt):

$$M' = q\int_0^b y\,dy = \tfrac{1}{2}qb^2.$$

Diesen beiden, in demselben Sinne wirkenden Momenten wirkt das stat. Moment $Q.BC$ aus der Kraft $Q = \Sigma(p') = bq$, welche aus dem Gesammtdruck auf den Quadranten $A'B$ entsteht, direct entgegen, so, dafs wenn man dieses Moment mit M'' bezeichnet, also $b^2q = M''$ setzt, sofort das statische Moment $M + M' - M'' = \frac{1}{2}q(a^2 - b^2)$ dahin strebt einen Bruch in A zu bewirken, was sofort um so gröfser, je mehr a von b verschieden ist und bei einer genauen cylinderischen Röhre, wegen $b = a$, gänzlich verschwindet.

So wie durch das genannte Moment, welches durch eine in B nach der Richtung des Pfeils angebrachte Kraft S erzeugt, und dadurch der Bruch des Quadranten AB im Puncte A bewirkt werden kann, eben so wird auch in B ein Bruch entstehen, so als ob der Quadrant in B befestigt oder eingemauert und in A parallel mit CB eine Kraft S' angebracht wäre, deren statisches Moment ebenfalls $= \frac{1}{2}q(a^2 - b^2)$ ist.

Anmerkung 1. Der hier erörtete Umstand, dafs bei einer ovalen Röhre das Materiale nicht blofs auf seine rückwirkende Festigkeit, sondern auch in Beziehung auf dessen Widerstand gegen Biegung oder auf seine relative Festigkeit in Anspruch genommen wird, folglich eine gröfsere Wanddicke bedingt, gilt wohl eben so, wenn der Druck im innern der Röhre Statt findet, nur, dafs dann statt der rückwirkenden, die absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird; allein es tritt dabei der wesentliche Unterschied ein, dafs im erstern Falle, nämlich bei einem Drucke von aufsen die elliptische Röhre noch mehr flach gedrückt wird (wie diefs in Fig. 167, *a* versinnlicht ist), während im zweiten Falle der innere Druck eher dahin wirkt, die Ellipse der Kreisform, als der Linie des Gleichgewichtes näher zu bringen.

Dafs aber in diesem Falle der Kreis wirklich die Linie des Gleichgewichtes ist, läfst sich leicht auf folgende Weise zeigen.

Betrachtet man die ebene Curve MmN (Fig. 168), auf welche die sämmtlichen Kräfte normal wirken, als ein Polygon von unendlich vielen Seiten mm', mm''. . in dessen Winkelpuncten diese Kräfte p angebracht sind, und bezeichnet man ein Element der Curve oder eine Polygonseite mm' durch ds, den Krümmungshalbmesser im Puncte m durch ρ, die auf die Längeneinheit der Curve wirksame Normalkraft durch q und endlich die Kraft mit welcher das Element mm' ausgedehnt (oder bei einem Drucke auf die convexe Seite zusammengedrückt) wird durch T; so hat man, wenn die im Puncte m wirkende, auf dem Curvenelement normal stehende Kraft $p = q\,ds$ in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen der Seiten mm' und mm'' zerlegt wird, welche offenbar, da der Winkel $m'mm''$ durch diese Kraft p halbirt wird, einander gleich seyn werden, sofort $p : T = Sin\, m''mn : Sin\, 0mm''$, oder wenn man W. $m''mn = i$ setzt, und da W. $0mm''$ nur unendlich wenig von einem Rechten abweicht, $p : T = Sin\, i : 1 = i : 1$ und daraus $p = q\,ds = iT$ oder $T = \frac{ds}{i}\, q$.

Berücksichtigt man, dafs auch W. $m0m' = i$ und $mm' = ds = \rho\, i$ folglich $\frac{ds}{i} = \rho$ ist, so hat man auch

$$T = \rho\, q \text{ oder } q = \frac{T}{\rho}.$$

Ist nun die betreffende Curve absolut biegsam, so fordert das Gleichgewicht, dafs erstens die Spannung T in jedem Puncte m, m', m'' .. dieselbe sey und dafs zweitens die normale Pressung q in jedem Punct $= \frac{T}{\rho}$ d. h. der Spannung dividirt durch den betreffenden Krümmungshalbmesser gleich sey. (Wäre die Curve nicht geschlossen, so müfsten die letzten Elemente $m''M$, $m'N$ ebenfalls nach diesen Richtungen jede von der Kraft T gezogen oder gespannt werden.)

Da nun aber der Druck einer Flüssigkeit in einer Röhre (oder wenn dieselbe von der Flüssigkeit umgeben ist, auf die Röhre) rund herum gleich, also q constant ist, so mufs auch (da T ebenfalls constant) der Krümmungshalbmesser einen constanten Werth annehmen, die biegsame Curve MmN also fürs Gleichgewicht in einen Kreisbogen übergehen.

Während bei einem constanten Werth von q auch die Spannung T (oder bei einem äufsern Drucke die Compression) in allen Puncten des Kreises dieselbe und gleich rq ist, variirt sie z. B. bei der Ellipse in Fig. 167 in jedem Qudranten von einem Puncte desselben zum andern und ist z. B. in A oder A' gleich aq, während sie in B und B' nur gleich bq ist. (Für irgend einen andern Punct M findet man diese Spannung, wenn man in M eine Tangente, damit parallel an den Quadranten $A'B'$ eine zweite Tangente und zwischen beiden ein Perpendikel zieht; ist $2c$ die Länge dieses Perpendikels, so ist die Spannung oder im entgegengesetzten Falle die Compression in diesem Puncte M gleich cq.

Anmerkung 2. Aus dem hier erörterten Grunde macht man in Frankreich in der Regel jene Röhren, welche einem äufsern Drucke ausgesetzt sind noch einmal so dick als im Falle, unter sonst gleichen Umständen, dieser Druck im innern der Röhren Statt findet.

Nach der in Preufsen hierüber bestehenden Vorschrift mufs die Wanddicke solcher Röhren, wenn sie aus Eisen oder Kupferblech hergestellt werden,

$$\delta = \cdot 0067\, d \sqrt[8]{(n-1)} + \cdot 05 \text{ Zoll}$$

und für Messingröhren (die aber nie über 4 Zoll weit seyn dürfen)

$$\delta = \cdot 01\, d \sqrt[8]{(n-1)} + \cdot 07 \text{ Zoll}$$

seyn, wobei d den lichten Durchmesser der Röhren und n wieder den absoluten Druck in Atmosphären bezeichnet, welcher auf dieselben Statt findet.

So müfsten z. B. die messingenen 2 Zoll weiten Feuerröhren einer Locomotive, in welchem der Dampf eine absolute Spannung von 7 Atmosphären erreicht, nach dieser letztern Formel, wegen $d = 2$ und $n = 7$ eine Wanddicke von $\delta = \cdot 1063$ Zoll oder 1·28 Linien erhalten. Für eiserne oder kupferne Röhren wäre nach der erstern Formel $\delta = \cdot 0743$ Zoll oder 89 Linien.

Nach der obigen Formel (1) in Nr. 274 würde indefs, wegen des gröfseren Zusatzgliedes von ·114, diese Wanddicke noch stärker, und zwar wäre $\delta = \cdot 1356$ Zoll oder 1·6 Linien.

Aus einem Berichte der französischen Centralcommission für Dampfmaschinen vom J. 1846 geht hervor, dafs bei einem Tubularkessel nach dem *Fol*'schen Systeme (wobei die Röhren vertical stehen) bei 3 verschiedenen Kesselproben (auf den 3fachen Druck) von den 11 Fufs langen, 2·28 Zoll weiten und ·057 Zoll dicken cylinderischen kupfernen Röhren, davon jedes Mal eine, und zwar schon bei einem Drucke von 9 bis 12 Atmosphären zusammengedrückt wurde, während sie bei einem Drucke auf den concaven Theil von innen nach aufsen wahrscheinlich erst einem Drucke von 96 Atmosphären nachgegeben hätte.

Eben so wurden bei einem Dampfschiffkessel mit kupfernen Röhren von $9\frac{1}{2}$ Fufs Länge, $5\frac{3}{4}$ bis $6\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser und ·114 Zoll Wanddicke, mehrere Röhren bei einem Drucke von 10 Atmosphären zerdrückt, während sie einem innern Drucke bis zu 77 Atmosphären Widerstand geleistet hätten.

Nach den Versuchen des Herrn *Mary* (bei Gelegenheit als der Artesische Brunnen zu Grenelle bei Paris gebohrt wurde) erwiesen sich die Röhren aus Eisenblech weit stärker und vortheilhafter als jene aus Kupferblech, indem sich die erstern erst bei einem Drucke abzuplatten anfingen, welcher ungefähr $\frac{1}{4}$ des Druckes beträgt, bei welchem die Röhren nachgegeben hätten, wenn der Druck von innen nach aufsen vorhanden gewesen wäre, während sich die kupfernen Röhren schon beim 10ten Theile jenes Druckes, welcher im Innern angebracht, ein Zerreifsen bewirkt haben würde, zu deformiren anfingen und bei einer Pressung, die noch nicht ganz $\frac{1}{5}$ dieses Druckes betrug, ganz zusammengedrückt wurden. (*Annal. des mines*, 4e *Ser. T.* 10. *Paris*, 1846.)

Aus allen diesen Erfahrungen und Versuchen scheint hervorzugehen, nicht blofs dafs unter übrigens gleichen Umständen eiserne Röhren stärker als kupferne sind (was nach der absoluten und rückwirkenden Festigkeit beider Materialien zu erwarten war), sondern dafs das Verhältnifs des

Widerstandes gegen einen äufsern Druck zu jenem gegen das Zerreifsen bei einem innern Drucke, bei eisernen Röhren ein günstigeres als bei kupfernen Röhren ist. Aus diesem Grunde wurden auch in neuerer Zeit in England, selbst bei den Locomotivkesseln die kupfernen Röhren durch eiserne, gezogene (und geschweifste) Röhren ersetzt, welche noch den Vorzug besitzen, dafs sie selbst glühend werden können, ohne deshalb unbrauchbar zu werden.

Die Messingröhren der Locomotivkessel von 2 Zoll Durchmesser und 12 Fufs Länge erweisen sich bei einer Wanddicke von $1\frac{1}{4}$ bis 1·4 Linie hinreichend stark, um einem Drucke von 13 bis 14 Atmosphären widerstehen zu können.

Theorie der Dampfmaschinen.

a) *Ältere Theorie.*

(§. 505)

277. Nach dieser Theorie wird angenommen, dafs der Dampf, von seinem Eintritte in die Maschine angefangen bis zu seinem Austritte oder bis zu seiner Condensirung, fortwährend jene Temperatur beibehält, welche er im Kessel bei seiner Erzeugung besitzt, so, dafs sich also während seiner ganzen Bewegung das *Mariotte*'sche Gesetz in aller Strenge auf ihn anwenden läfst.

Diefs vorausgesetzt, sey bei einer oscillirenden Maschine F die Gröfse der Kolbenfläche, L die Länge des Kolbenschubes; l die Länge jenes Theiles davon, welcher bei einer Expansionsmaschine (§ 490) bei offener Communication mit dem Kessel zurückgelegt wird, p der Druck des Dampfes auf die Flächeneinheit im Kessel, p' der Druck desselben nachdem der Kolben seinen Lauf vollendet hat und q der auf die Flächeneinheit bezogene Gegendruck auf den Kolben von Seite des Condensators oder der atmosphärischen Luft; so ist die theoretische Arbeitsgröfse oder Wirkung des Dampfkolbens während des Weges l bei offener Communication $w = p F l$. Hat der Kolben einen Weg $x > l$ zurückgelegt, so sey in diesem Augenblicke der Dampfdruck auf die Einheit der Kolbenfläche $= z$ (also $< p$), so ist nach dem *Mariotte*'schen Gesetze $p : z = x : l$ und daraus $z = p\frac{l}{x}$. Da man aber diesen Druck während des darauf folgenden unendlich wenigen Fortrückens um dx als constant anzusehen hat, so ist die entsprechende Wirkungsgröfse $dw' = z\,dx = p\,l\frac{dx}{x}$, folglich die Wirkung des Dampfkolbens von dem Augenblicke der Absperrung des Dampfes bis zum vollendeten Kolbenlauf: