liche Quantität Wasser in die Röhre drücken, was nur geschieht, wenn $h_1 > \frac{v^2}{2g}$ also $h_2 < \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ ist, eine Bedingung, welche ohne Reibungswiderstand gar nicht möglich wäre, indem das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen würde.

Diese Bedingungen kann man, wenn sie nicht ohnehin schon vorhanden sind, dadurch herbeiführen, dafs man entweder das Reservoir tiefer, also h_1 gröfser macht, oder die Leitung unter Wasser ausmünden läfst und dadurch h_2 vermindert.

So beträgt in dem Beispiele 1, in §. 345 (S. 310) die Widerstandshöhe der $764\frac{1}{2}$ Klafter langen Leitung nahe 16·73 und die ganze Gefällshöhe 16·83 Fufs, also die wirksame Druckhöhe $\frac{1}{10}$ Fufs, in Folge welcher das Wasser nahe mit $2\frac{1}{2}$ Fufs Geschwindigkeit aus der Leitung ausfliefst. Würde man nun die Druckhöhe des Reservoirs $h_1 < \frac{1}{10}$ also jene der Leitung $h_2 > 16{\cdot}73$ Fufs nehmen, so würde das Wasser, da es in der Leitung eine beschleunigte Bewegung erhielte, nicht mehr mit vollem Querschnitte in die freie Luft ausfliefsen.

Von dem Stofse eines isolirten Wasserstrahles.

(§. 353.)

200. Um die Pressungen oder den hydraulischen Druck eines Wasserstrahles zu finden, welcher in einer bestimmten Richtung und mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit gegen die Oberfläche eines festen Körpers trifft, sey allgemein CM (Fig. 133) die Richtung und V die Geschwindigkeit des an die Fläche AMB stofsenden isolirten Strahles; MD die Richtung und v die Geschwindigkeit nach und mit welcher diese Fläche gleichförmig ausweicht oder sich fortbewegt; endlich BG die Richtung und u die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verläfst.

Um die Untersuchung zu vereinfachen und das Ganze auf ein System zurückzuführen, in welchem die Fläche AMB ruht, kann man sich, ohne dafs dadurch an dem mechanischen Zustande des vorliegenden Systemes etwas geändert wird, vorstellen, dafs allen Puncten desselben nach der gemeinschaftlichen Richtung MD' die gleichförmige Geschwindigkeit v, welche nämlich jener der Fläche AMB gleich und gerade entgegengesetzt ist, mitgetheilt werde; dadurch erhält man ohne Änderung der Sache ein System, in welchem die Fläche AMB ruht, dagegen das ein- und austretende Wasser die sogenannte relative Geschwindigkeit gegen diese Fläche annimmt.

Schneidet man daher $MC' = MC = V$, ferner $MD' = MD = v$ ab und construirt das Parallelogramm $C'D'$; so stellt die Diagonale ME

die Richtung und Gröſse der **relativen** Geschwindigkeit des eintretenden Strahles vor, welche V' heiſsen soll.

Eben so ist, wenn man $BG = u$, gleich der relativen Geschwindigkeit des austretenden Wassers, und auf der durch B mit MD parallelen Geraden $BH = v$, gleich der Geschwindigkeit der Stoſsfläche abschneidet und das Parallelogramm GH construirt, die Diagonale BJ sofort die **absolute** Geschwindigkeit des austretenden Wassers, die wir mit U bezeichnen wollen.

Es gibt in der That, wenn man nach der vorigen Bemerkung an dem Puncte B die der MD gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit $BK = v$ anbringt, diese letztere mit der absoluten Geschwindigkeit $BJ = U$ die gegen die Fläche AMB relative Geschwindigkeit $BG = u$.

201. Bezeichnet man den Winkel DMC', welchen die positiven absoluten Geschwindigkeiten V und v miteinander bilden, durch α, jenen $C'ME$, welchen die positiven Geschwindigkeiten V und V' einschlieſsen, durch β, so wie jenen GBH, welchen die relative Geschwindigkeit u mit der absoluten v einschlieſst, mit γ; so hat man zuerst aus dem Dreieck $MD'E$, ME oder

$$V' = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2\,V\,v\,Cos\,\alpha)} \quad . \; . \quad (1)$$

und

$$Sin\,\beta = \frac{v}{V'}\,Sin\,\alpha \quad . \; . \quad (2)$$

ferner aus dem Dreiecke BHJ, BJ oder

$$U = \sqrt{(v^2 + u^2 + 2\,v\,u\,Cos\,\gamma)} \quad . \; . \quad (3)$$

Anmerkung. Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich leicht die, den in der Praxis am häufigsten vorkommenden speciellen Fällen entsprechenden Formeln.

Weicht nämlich die Fläche AMB in der Richtung CM des anstoſsenden Strahles aus, so ist $\alpha = 0$ und daher aus (1) und (2):

$$V' = V - v \text{ und } \beta = 0 . \quad (e)$$

Bewegt sich dagegen die Fläche dem anstoſsenden Strahle gerade **entgegen**, so ist $\alpha = 180^0$ und daher:

$$V' = V + v \text{ und } \beta = 0 . \quad (f)$$

Ist endlich diese Fläche AMB **unbeweglich**, so ist $v = 0$ und daher:

$$V' = V \text{ und } \beta = 0 . \quad (g)$$

In Beziehung auf die Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit noch nach dem Stoſse besitzt, sind für die Praxis besonders zwei Fälle herauszuheben, und zwar 1stens der Fall, in welchem der anstoſsende Wasserstrahl seine ganze relative Geschwindigkeit gegen die Stoſsfläche verliert, und 2tens jener Fall, in welchem das Wasser nach dem Stoſse ohne Hinderniſs längs dieser Fläche hingleitet und dieselbe mit einer relativen Geschwindigkeit verläfst, welche der relativen Eintrittsgeschwindigkeit gleich ist. Für den erstern dieser beiden Fälle hat man $u = 0$ und daher aus Gleichung (3)

$$U = v,$$

und für den zweiten Fall:

$$u = V' = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2Vv \, Cos \, \alpha)} \text{ und } U = \sqrt{(V'^2 + v^2 + 2V'v \, Cos \, \gamma)}.$$

Durch das oben angewendete Verfahren wird man sich in allen Fällen die Fläche AMB als ruhend vorstellen, während der Wasserstrahl mit der absoluten Geschwindigkeit $V' = EM$ eintritt und im erstern dieser beiden genannten Fälle die ganze Geschwindigkeit verliert, so, dafs $u = 0$ wird, und im zweiten Falle mit derselben Geschwindigkeit $u = V'$ wieder austritt. Ruht diese Fläche AMB nicht, so bezeichnen V' und u die relativen Ein- und Austrittsgeschwindigkeiten, und man darf für V' nur den Werth aus Gleichung (1) setzen, um die Resultate als Functionen der absoluten Geschwindigkeiten V und v zu erhalten.

202. Um nun die Stofskraft oder Pressung P zu bestimmen, die ein continuirlicher Wasserstrahl, welcher im Augenblicke als er die Fläche trifft, seine Richtung und Geschwindigkeit plötzlich ändert, ausübt, wollen wir ein Wassertheilchen M (Fig. 134) von der Masse m betrachten, welches sich nach der Richtung AM mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt und während der sehr kleinen Zeit t von seiner Richtung MN in jene MN' abgelenkt und gezwungen wird in dieser neuen Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 weiter zu gehen. Soll aber diese plötzliche Änderung in der Masse m durch die constante Kraft P bewirkt werden, deren Richtung mit AN den Winkel φ bildet, so bemerke man, dafs wenn W. $NMN' = \delta$ ist und die nach MN' wirksame Geschwindigkeit v_2 in zwei aufeinander senkrechte Geschwindigkeiten nach MN und MO zerlegt wird, sofort die erstere $= v_2 \, Cos \, \delta$ und die letztere $= v_2 \, Sin \, \delta$ ist, folglich die Masse m während dieser Zeit t nach MN die Geschwindigkeit $v_1 - v_2 \, Cos \, \delta$ verliert und in der darauf perpendikulären Richtung MO jene $v_2 \, Sin \, \delta$ gewinnt; da man aber annehmen kann, dafs dieser Verlust und Gewinnst mit der sehr kleinen Zeit t gleichförmig zugenommen hat, so beträgt dieser bei der constanten Einwirkung der Kraft P während der Zeiteinheit beziehungsweise $\frac{v_1 - v_2 \, Cos \, \delta}{t}$ und $\frac{v_2 \, Sin \, \delta}{t}$.
Zerlegt man nun auch die Kraft P in zwei Seitenkräfte nach NM und MO, so sind diese respective $P \, Cos \, \varphi$ und $P \, Sin \, \varphi$, wovon die erstere offenbar den eben genannten Verlust und die letztere den Gewinn an Geschwindigkeit während der Zeiteinheit hervorbringen mufs. Da nun diese beiden Seitenkräfte ebenfalls constante Kräfte sind, so hat man nach §. 146 die Relationen:

$$P\,Cos\,\varphi = \frac{m}{gt}(v_1 - v_2\,Cos\,\delta) \text{ und } P\,Sin\,\varphi = \frac{m}{gt}v_2\,Sin\,\delta \quad (a)$$

dabei mufs man für m diejenige Wassermenge substituiren, welche während der angenommenen Zeit t diese plötzliche Geschwindigkeitsänderung erleidet.

Anmerkung Bezeichnet m' die Masse und m das Gewicht dieser Masse, so ist nach der französischen Bezeichnung (§. 35 und Nr. **54**, Anmerk. 3, ferner auch Nr. **60**) $m' = \frac{m}{g}$ und da man nach Nr. **54** die constanten Kräfte durch die Gröfse ihrer Bewegung nach der Zeiteinheit, also hier beziehungsweise durch $m'\left(\frac{v_1 - v_2\,Cos\,\delta}{t}\right)$ und $m'\frac{v_2\,Sin\,\delta}{t}$ ausdrückt, so kommt man, wenn man auf das Gewicht m der Masse m' übergeht, wieder auf die vorigen Ausdrücke (a).

203. Wendet man diese beiden Formeln (a) auf den vorliegenden Fall in Fig. 133 an und setzt den Winkel, welchen die positiven Richtungen der relativen Eintrittsgeschwindigkeit V' und des Druckes oder Stofses P (welcher auf der absolut glatten Fläche nur normal seyn kann) gleich φ; so ist

$$P\,Cos\,\varphi = \frac{m}{gt}(V' - u\,Cos\,\delta) \text{ und } P\,Sin\,\varphi = \frac{m}{gt}u\,Sin\,\delta \quad (b)$$

204. Um endlich noch die Wassermasse m zu finden, welche in der sehr kleinen Zeit t zum Stofs gelangt, so lassen sich dabei zwei Fälle unterscheiden, nämlich erstens jener, in welchem die Stofsfläche mit der Geschwindigkeit v ins Unbestimmte fortschreitet und sich von der Ausflufsöffnung des Strahles immer mehr entfernt (oder umgekehrt auch nähert) und dann jener, in welchem die Fläche an derselben Stelle bleibt, oder wenn sie sich bewegt, augenblicklich, d. i. in den kleinen Zeitintervallen t, nachdem sie den Stofs empfangen hat, durch eine neue Fläche an derselben Stelle ersetzt wird (beiläufig so, wie diefs mit den Schaufeln eines unterschlächtigen Rades der Fall ist) Da aber der erstere Fall fast gar keine practische Anwendung zuläfst, so soll derselbe hier übergangen und sofort nur dieser letztere berücksichtigt werden.

Bezeichnet man nun den normalen Querschnitt des Wasserstrahles mit a und das Gewicht eines Kubikfufs Wassers mit γ, so ist offenbar in diesem letztern Falle die dem Gewichte nach ausgedrückte Wassermasse $m = \gamma\,a\,V\,t$; mit diesem Werthe von m erhalten die beiden letzten Formeln (b) die Form:

$$P\,Cos\,\varphi = \frac{\gamma}{g}a\,V\,(V' - u\,Cos\,\delta)\,, \quad P\,Sin\,\varphi = \frac{\gamma}{g}a\,V\,u\,Sin\,\delta \quad . \; . \; (4)$$

Anmerkung. Nimmt man, um in Kürze auf den erwähnten ersten Fall, in welchem die Stofsfläche in's Unbestimmte ausweicht, zurückzukommen, diese Fläche als eine Ebene DE (Fig. 135) an, welche sich in der Richtung MN mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, während der Wasserstrahl in der Richtung AM mit der Geschwindigkeit V ankömmt, setzt, wie oben, den W. $NMM' = \alpha$ und jenen $AMD = \varepsilon$, nimmt ferner $MN = v$ und zieht durch N mit DE die Parallele $D'E'$, so stellt $D'E'$ die Lage der Stofsfläche am Ende der Zeiteinheit, d. i. einer Secunde vor, wenn DE diese Lage im Anfange dieser Secunde bezeichnet. Da nun $MM' = \frac{Sin(\alpha + \varepsilon)}{Sin\,\varepsilon} v$ ist, so ist in dem obigen Ausdrucke von $m = \gamma a V t$ statt der absoluten Geschwindigkeit V die relative $V - MM'$ zu setzen, wodurch man für die in diesem Falle während der Zeit t zum Stofse gelangende Wassermasse den Ausdruck

$$m = \gamma a \left[V - \frac{Sin(\alpha + \varepsilon)}{Sin\,\varepsilon} v \right] t \quad \text{erhält.}$$

Bewegt sich die Fläche mit dem Strahle in derselben Richtung, so ist $\alpha = 0$ und daher $m = \gamma a (V - v) t$.

Bewegt sich diese Fläche dem Strahle direct entgegen, so ist $\alpha = 180^0$ und $m = \gamma a (V + v) t$.

Wäre die Fläche unbeweglich, also $v = 0$, so wäre $m = \gamma a V t$.

Stofs eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe durch den Stofs seine ganze relative Geschwindigkeit verliert.

205. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen (in Nr. **200** und Nr. **201**) und mit Beziehung auf Fig. 133 folgt aus den Gleichungen (4) der vorigen Nr., da die relative Austrittsgeschwindigkeit $u = 0$ ist, sofort $P\,Cos\,\varphi = \frac{\gamma a}{g} V V'$ und $P\,Sin\,\varphi = 0$, folglich ist $\varphi = 0$ und

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \quad . \quad (5)$$

Die Fläche AMB erleidet also in der Richtung FM einen Stofs oder vielmehr continuirlichen Druck P, welcher durch diese letzte Gleichung bestimmt wird; setzt man in diese für V' den Werth aus (1) in Nr. **201**, so wird dieser Druck als Function der absoluten Geschwindigkeiten V und v des Strahles und der Fläche ausgedrückt. Die Richtung FM dieses Druckes ist durch die Gleichung (2) gegeben.

206. Dieser eben betrachtete Fall findet Anwendung bei dem Stofse eines Strahles auf die Schaufeln eines unterschlächtigen

Wasserrades. Bewegen sich dabei die Schaufeln in der Richtung des einfallenden Strahles, so ist (Nr. **201**, Relat. *e)* $V' = V - v$ und daher der Stofs nach der vorigen Formel (5):

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V - v) \quad . \, . \quad (6)$$

Ruht die Fläche, so ist $v = 0$ und $V' = V$, folglich

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2 \gamma a h$$

wobei $h = \frac{V^2}{2g}$ die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe zu V bezeichnet. (Vergl. §. 356.)

Stofs eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit auch wieder austritt.

207. Tritt der Strahl CM (Fig. 136) mit der Geschwindigkeit V gegen die Fläche AMB, welche in dieser Richtung mit Randleisten versehen ist, also gleichsam wie in eine Rinne ein, so wird sich der Strahl nur nach dieser einen Richtung MB herumbiegen, längs der als absolut glatt gedachten Fläche MB hingleiten und mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit V' bei B nach der Richtung BG austreten, so dafs also $u = V'$ wird.

Setzt man, wie in Nr. **202**, den Winkel der positiven Geschwindigkeiten u und V' gleich δ, so wie jenen der positiven Geschwindigkeit V' mit der Richtung des Druckes P gleich φ; so hat man nach den Relationen (4) in Nr. **204** (wegen $u = V'$):

$$P \, Cos \, \varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' (1 - Cos \, \delta) \text{ und } P \, Sin \, \varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' \, Sin \, \delta \quad . \, . \quad (f)$$

woraus sofort, wenn man beide Gleichungen quadrirt und summirt:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \sqrt{[2(1 - Cos \, \delta)]} \quad . \, . \quad (7)$$

und (durch Division dieser beiden Gleichungen)

$$tang \, \varphi = \frac{Sin \, \delta}{1 - Cos \, \delta} = Cot \, \tfrac{1}{2} \delta = tang \, \tfrac{1}{2} (180 - \delta)$$

also

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2} \delta \quad (8)$$

folgt.

Diese letzte Gleichung zeigt, dafs der Winkel GMF, welchen die positive Geschwindigkeit V' mit der Richtung der negativen Geschwindigkeit u einschliefst durch die Richtung MP des Druckes P halbirt wird.

208. Dieser letztere Fall findet u. A. Anwendung auf den Stofs des Wassers gegen die Schaufeln eines horizontalen Wasserrades oder einer Turbine. Bewegen sich diese dabei in der Richtung *CM* des eintretenden Strahles, so hat man (Nr. **201**) $V' = V - v$, oder, wenn sich die Schaufeln dem Strahle direct entgegen bewegen, $V' = V + v$. Es ergibt sich also für beide Fälle der Druck oder Stofs gegen die Schaufel nach der vorigen Formel (7):

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]} \quad . \; . \; (9)$$

Für eine ruhende Fläche wäre $v = 0$, also

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]}.$$

209. Zerlegt man in jenen Fällen, in welchen die Stofsfläche in der Richtung des eintretenden Strahles ausweicht oder sich dem Strahle direct entgegen bewegt, wobei also $V' = V \mp v$ ist und wegen $\beta = 0$ (Nr. **201**, Relat. *e*) die Richtungen *FE* und *CC'* zusammenfallen, den in der Richtung *MP* entstehenden Druck oder Stofs in zwei Seitenstöfse, P_1 und P_2, wovon der erstere parallel mit dem eintretenden Strahl *CM* und der letztere darauf perpendikulär ist; so hat man wegen W. *EMP* = W. *CMP* = φ (Fig. 136) sofort:

$$P_1 = P\,Cos\,\varphi \text{ und } P_2 = P\,Sin\,\varphi,$$

oder wenn man für $P\,Cos\,\varphi$ und $P\,Sin\,\varphi$ die Werthe aus (*f*) (Nr. **207**) und zugleich $V' = V \mp v$ setzt, auch:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \\ P_2 &= \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\,Sin\,\delta \end{aligned}\right\} \; (10)$$

Man nennt hier P_1 den Parallelstofs und P_2 den Seitenstofs des Wasserstrahles.

Gerader Stofs eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche.

210. Es sey *BMB'* (Fig. 137) eine durch Umdrehung der Curve *MB* um die Achse *MC* erzeugte Fläche und *V* die absolute Geschwindigkeit des in der Richtung *AMC* eintretenden Wasserstrahles, zugleich bewege sich die Rotationsfläche in derselben Richtung der Achse oder auch in direct entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit *v*, so, dafs in diesen beiden Fällen die relative Geschwindigkeit des

Strahles respective $V - v$ und $V + v$ ist. Setzt man ferner den Winkel der am Endpuncte B an die Erzeugungscurve gezogenen Tangente BT mit der Achse MC gleich δ und nimmt an, dafs die Fläche vollkommen glatt sey, folglich keine Reibung beim Hingleiten des Wassers Statt finde; so trifft der Strahl die Oberfläche mit der relativen Geschwindigkeit $V \mp v$, breitet sich hierauf über dieselbe nach allen Seiten um die Achse gleichförmig aus und verläfst diese bei BB' in Richtungen, welche sämmtlich gegen die Achse MC die Neigung δ haben, mit derselben relativen Geschwindigkeit $u = V \mp v$.

Denkt man sich den Wasserstrahl in einzelne Wasserfäden aufgelöst, wovon jeder den Querschnitt a' haben soll, und nimmt an, dafs sich diese gleichförmig um die Fläche nach den Richtungen MB und MB' d. i. nach den Durchschnittslinien legen, welche aus einer durch die Achse MC gelegten Ebene mit der Fläche entstehen, wenn sich diese Ebene um die Achse allmählig umdreht oder Positionen annimmt, für welche die aufeinander folgenden Neigungswinkel unendlich klein sind.

Bezeichnet man nun den Parallelstofs eines jeden solchen elementaren Strahles oder Wasserfadens durch p_1 und dessen Seitenstofs durch p_2; so folgt nach den vorigen Relationen (10):

$$p_1 = \frac{\gamma a'}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \text{ und } p_2 = \frac{\gamma a'}{g} V (V \mp v)\, Sin\,\delta$$

Da sich aber von den Seitenstöfsen p_2 je zwei, welche in ein und derselben von den um die Achse gedachten Ebenen liegen, da sie gleich und entgegengesetzt sind, aufheben, so bildet die Summe aus allen Parallelstöfsen p_1 die Resultirende, d. i. den Parallelstofs P_1 des ganzen Wasserstrahles, und es ist daher, wenn n solcher Wasserfäden vorhanden sind, wegen $n p_1 = P_1$ und $n a' = a$ sofort:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \quad (11)$$

während der Seitenstofs $P_2 = 0$ ist.

211. Ist die Stofsfläche eine Ebene BB' (Fig. 138), gegen welche der Strahl AM perpendikulär anstöfst und nach allen Seiten um einen rechten Winkel abgelenkt wird; so ist wegen $\delta = 90^0$ aus der vorigen Relation:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v) \quad (12)$$

und wenn die Tafel oder Fläche unbeweglich ist, $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2 \gamma a h$ (Vergleiche Nr. **206**.)

212. Ist endlich die obige Rotationsfläche gegen den Strahl zu concav und wird dieser bei seinem Austritte bei BB' parallel zur Achse, aber nach entgegengesetzter Richtung des einfallenden Strahles abgelenkt; so folgt wegen $\delta = 180^0$ aus der vorigen Relation (11):

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \quad (13)$$

und wenn die Fläche BMB' unbeweglich ist,

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V^2 = 4\gamma a \frac{V^2}{2g} = 4\gamma a h$$

also doppelt so grofs als bei der Ebene.

Anmerkung 1. Aus diesem Grunde wird auch der Stofs gegen eine Ebene, deren Umfang, wie in Fig. 140, mit Leisten besetzt ist, gröfser als wenn diese Ränder fehlen. *Weisbach* erwähnt eines Versuches, bei welchem der Strahl 1 Zoll Dicke und die cylinderische Einfassung der Stofsebene 3 Zoll Durchmesser und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte; der Strahl trat beinahe gänzlich in der umgekehrten Richtung aus und gab eine Stofskraft von $3{\cdot}93\,\gamma a \frac{V^2}{2g}$. Übrigens versteht es sich von selbst, dafs wegen der Reibung des Wassers an der Fläche der obige theoretische Maximalwerth von $4\gamma a \frac{V^2}{2g}$ niemals vollständig erreicht werden kann.

Anmerkung 2. Weicht die Fläche BMB' (Fig. 137) in der Richtung der Achse MC dem gerade anstofsenden Strahle mit der Geschwindigkeit v aus, so ist die Arbeits- oder Wirkungsgröfse dieses Stofses (Relat. 11)

$$W = P_1 v = \frac{\gamma a}{g} Vv(V - v)(1 - Cos\,\delta),$$

folglich für ein Maximum

$$\frac{dW}{dv} = \frac{\gamma a}{g} V(1 - Cos\,\delta)(V - 2v) = 0$$

und daraus $v = \frac{1}{2} V$. (Vergleiche §. 362.)

Der mit diesem Werthe von v entstehende Maximalwerth der Wirkungsgröfse des Stofses ist daher, wenn man das Gewicht der per Secunde zum Stofs gelangenden Wassermenge $\gamma a V = M$ setzt:

$$W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g}(1 - Cos\,\delta).$$

Dieser Werth geht für eine ebene Stofsfläche (209) wegen $\delta = 90°$ über in $W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} Mh$,

dagegen für die concave Fläche in Nr. 211 (Fig. 139), wegen $\delta = 180°$ in

$$W = M\frac{V^2}{2g} = Mh$$

über, so, dafs dieser Werth genau mit der theoretischen Wirkungsgröfse, oder, wie man sich ausdrückt, dynamischen Kraft übereinstimmt, welche in der von der Höhe h herabsinkenden Wassermasse M enthalten ist.

213. Zur Bestimmung des schiefen Stofses gegen eine ebene Fläche, mufs man unterscheiden, ob das Wasser nach dem Stofs nur nach einer, oder nach zwei direct entgegengesetzten, oder endlich nach allen Richtungen abfliefsen kann.

Im erstern Falle gilt, wenn der isolirte Strahl, oder (§. 361) das begrenzte Wasser gegen die Ebene BB' (Fig. 141) unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit V anstöfst und diese in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v ausweicht, die obige Formel (11) in Nr. **210**, oder es ist wegen $\delta = \alpha$:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V - v)(1 - Cos\,\alpha) \quad (14)$$

214. Trifft im zweiten Falle der Strahl AM (Fig. 142) die ebene Fläche BB' unter dem Winkel $AMB' = \alpha$ und ist diese Fläche nach der Richtung BB' mit Randleisten versehen, so theilt sich der Strahl in zwei Theile MB und MB', welche nach gerad entgegengesetzten Richtungen abfliefsen.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dafs die Querschnitte a' und a'' dieser beiden Theile ungleich seyn werden; auch wird der Stofs oder hydraulische Druck P', welchen der Theil AMB gegen die Fläche BB' ausübt, in einer auf derselben normalen Ebene liegen; dasselbe gilt von dem Drucke P'' des Theiles AMB', folglich wird auch die Resultirende aus P' und P'', d. i. der Gesammtdruck P in dieser normalen Ebene ABB' liegen und zugleich, da die Fläche BB' als absolut glatt gedacht wird, auf dieser Fläche normal seyn müssen. Sind daher N', R' die Seitenkräfte von P', und N'', R'' jene von P'', und zwar respective normal und parallel zur Ebene BB'; so müssen, wenn die Resultante P aus P' und P'' auf der Ebene BB' normal seyn soll, sofort die beiden Seitenkräfte R' und R'' einander gleich und direct entgegengesetzt und dann $P = N' + N''$ seyn.

Nun war aber (Nr. **209**) als man den Druck $Mc = P$ (Fig. 143 und Fig. 136) in zwei Seitenkräfte $Ma = P_1$ und $Mb = P_2$ darauf perpendikulär zerlegte (Relat. 10) $Ma = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta)$ und $Mb = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\,Sin\,\delta$, folglich ist auch, wenn man denselben Druck $P = Mc$ in zwei Seitenkräfte Ma' und Mb' parallel und normal zur Ebene BB' zerlegt, wegen W. $BMc =$ W. aMc (Relat. 8) sofort $Ma' = Ma$ und $Mb' = Mb$.

Geht man also auf die beiden Theildrücke P' und P'' über, so hat man nach demselben Verfahren für den Theil AMB (Fig. 142) des Strahles, wofür $\delta = \alpha$ ist, $R' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\alpha)$ und

$N' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha$; ferner für den Theil AMB', wofür $\delta =$

$180^0 - \alpha$ ist, $R'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v)(1 + Cos\,\alpha)$ und

$N'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha$.

Setzt man daher der vorigen Bemerkung gemäfs $R' = R''$ und $P = N' + N''$, so erhält man aus der erstern dieser beiden Gleichungen, wenn man für R' und R'' die eben gefundenen Werthe substituirt und noch berücksichtiget, dafs $a' + a'' = a$ ist, sofort $a' = \frac{1}{2} a (1 + Cos\,\alpha)$ und $a'' = \frac{1}{2} a (1 - Cos\,\alpha)$.

Die zweite der genannten Gleichungen gibt jetzt mit diesen Werthen, welche man in N' und N'' zu substituiren hat

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha \quad (15)$$

Um endlich noch aus diesem Normalstofs P gegen die Ebene BB' den Parallelstofs P_1 in der Richtung AM und den darauf perpendikulären Seitenstofs P_2 (Nr. **209**) zu bestimmen, hat man durch Zerlegung der Kraft P in diese zwei Seitenkräfte P_1 und P_2, wegen W. $PMP_2 = \alpha$ sofort:

$$P_1 = P\,Sin\,\alpha \text{ und } P_2 = P\,Cos\,\alpha,$$

oder wenn man für P seinen Werth setzt,

$$\left.\begin{array}{l} \text{für den Parallelstofs: } P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) Sin^2\alpha \\ \text{und für den Seitenstofs: } P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha \end{array}\right\} (16)$$

215. Was endlich den dritten Fall anbelangt, in welchem der Strahl nach dem Stofs nach allen Seiten hin über die ebene Fläche abfliefsen kann, so begnügt man sich hier, da eine mathematisch scharfe Theorie ohnehin nicht möglich ist, indem man dabei von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen kann, mit blofsen Näherungswerthen.

Scheffler findet, indem er annimmt, dafs sich der Strahl auf der ebenen Fläche in vier Theile theilt, welche sich rechtwinkelig schneiden und indem er auf ähnliche Weise, wie diefs in der vorigen Nr. geschehen, die Querschnitte der vier abgelenkten Theile bestimmt, für den Normalstofs:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin\, \alpha \quad (17)$$

und daraus wieder durch Zerlegung in zwei Seitenstöfse, für

$$\left.\begin{array}{l} \text{den Parallelstofs: } P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin^2 \alpha \\ \text{und den Seitenstofs: } P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\, Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha \end{array}\right\} (18)$$

also dieselben Werthe, wie im vorigen Falle.

Anmerkung. *Weisbach* findet unter der Annahme einer allerdings willkürlichen Voraussetzung $P = 2 \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v \frac{Sin\, \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$.

Duchemin dagegen setzt $P = 2 \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \frac{Sin^2 \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$ (gl ich dem Parallelstofs nach *Weisbach*).

Navier erhält obschon die Voraussetzung, dafs alle abgelenkten Wasserfäden eine gleiche Stärke besitzen, nicht richtig ist, für den Normalstofs P den obigen Werth (17), dagegen für den Parallelstofs den unrichtigen Werth $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)$.

Schlüfslich ist zu bemerken, dafs die obigen theoretischen Resultate und Formeln über den Stofs isolirter Strahlen mit der Erfahrung nur dann übereinstimmen, wenn die Ausdehnung der Stofsfläche wenigstens so grofs ist, dafs die Wasserfäden in parallelen Richtungen zu den letzten Elementen der gestofsenen Fläche austreten können, ohne jedoch im Gegentheile wieder so grofs zu seyn, dafs das Gewicht und die Adhäsion der auf der Fläche befindlichen Flüssigkeit einen hemmenden Einflufs äufsern kann.

Nach den gemachten Erfahrungen mufs, namentlich bei dem geraden Stofs, der Durchmesser der Stofsfläche wenigstens 4 Mal so grofs als jener des anstofsenden Strahles seyn. Nach den Versuchen von *Langsdorf* vermindert sich, wenn die Fläche nur eben so grofs als der Querschnitt des Strahles ist, der Stofs gegen diese Fläche beiläufig um die Hälfte des durch die obige Formel (12) angegebenen Werthes.

Von den Wasserrädern.

(§. 363.)

216. Obschon wir dem Verdienste jener Autoren, welche, wie namentlich Herr Professor ***F. Redtenbacher***, bemüht waren eine vollständige Theorie der Wasserräder zu entwickeln, volle Gerechtigkeit widerfahren lassen; so ziehen wir es hier dennoch vor, nach dem Vorgange der französischen Schule, bei dieser Entwicklung nur jene Widerstände in Rechnung zu bringen, welche sich mit einiger Verläfslichkeit