Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

(§. 342.)

178. Bezeichnet man den innern oder lichten Durchmesser der Röhre mit D, den Umfang mit U, den Querschnitt mit A, die Länge derselben mit L, die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre mit v und den durch die Reibung des Wassers an den Röhrenwänden entstehenden Gefällsverlust, d. h. die Höhe der Wassersäule, deren Gewicht im Stande ist diesen Reibungswiderstand zu überwinden, mit z; so hat man nach §. 344, wenn α und β zwei Erfahrungscoeffizienten sind, für Röhren von was immer für einer Querschnittsform:

$$z = \frac{UL}{A}(\alpha v + \beta v^2) \quad . \; . \quad (1)$$

und für cylinderische Röhren:

$$z = \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2) \quad . \; . \quad (2)$$

Legt man dabei den Meter als Einheit zum Grunde, so kann man für die Coeffizienten α, β nach *Prony* die Werthe nehmen $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0003483$. . (a) Nimmt man dagegen den Wiener Fufs zur Einheit, so verwandeln sich diese Werthe in $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101$ . . (m).

Nach den genauesten Versuchen von *Du Buat*, *Bossut* und *Couplet*, hat *d'Aubuisson* folgende Werthe erhalten, und zwar wenn man den Meter zur Einheit nimmt:

$$\alpha = \cdot 0000188\,, \quad \beta = \cdot 0003425 \quad . \; . \quad (b)$$

und wenn man den Wiener Fufs zum Grunde legt:

$$\alpha = \cdot 0000188\,, \quad \beta = \cdot 0001083 \quad . \; . \; . \quad (n)$$

Unter Berücksichtigung des Einflusses der Contraction des Wassers beim Eintritte in die Röhrenleitung, nach welcher die ganze Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2gn^2} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ und $n = \cdot 8125$ gesetzt wurde, fand *Eytelwein* aus 51 Beobachtungen von *Couplet*, *Bossut* und *Du Buat* für das Metermafs:

$$\alpha = \cdot 0000223579\,, \quad \beta = 000283174.$$

Weisbach dagegen fand unter derselben Voraussetzung mit Zugrundelegung von 49 Beobachtungen:

$$\alpha = \cdot 000057287\,, \quad \beta = \cdot 00023097.$$

So wäre z. B. für die Geschwindigkeiten von $v = \cdot 1$, 1, 2 und 4 Meter beziehungsweise nach den erstern Werthen (a) von α und β:

$\alpha v + \beta v^2 =$ ·0000052, ·0003656, ·0014277 und ·0056421, also z. B. für cylinderische Röhren in diesen 4 Fällen die Wassersäule zur Überwindung des Reibungswiderstandes $z =$ ·0000208 $\frac{L}{D}$, ·0014624 $\frac{L}{D}$, ·0057108 $\frac{L}{D}$ und ·0225684 $\frac{L}{D}$ Meter.

Für die in (*b*) angegebenen Werthe von α und β, wäre dagegen $\alpha v + \beta v^2 =$ ·0000053, ·0003613, ·0014076, ·0055552.

179. Anstatt dafs in den vorigen Formeln nach der gewöhnlichen Methode nebst der 2ten auch noch die 1ste Potenz der Geschwindigkeit eingeführt ist, findet ***Weisbach***, welcher die frühern Versuche von ***Prony***, ***Eytelwein***, ***Couplet***, ***Bossut*** und ***Du Buat*** so wie seine eigenen 11 Versuche (nebst einem von ***Gueymond*** in Grenoble) nämlich 63 an der Zahl zum Grunde legt, dafs man der Wahrheit näher komme, wenn man statt der 1sten die $\frac{3}{2}$te Potenz von der Geschwindigkeit in die Formel aufnimmt. Er findet nämlich nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn man diese Widerstandshöhe durch

$$z = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (3)$$

ausdrückt und den Meter zur Einheit nimmt, sofort:

$\alpha =$ ·01439 und $\beta =$ ·0094711, wobei $g = 9$·808 ist.

Legt man den Wiener Fufs zum Grunde, so hat man:

$\alpha =$ ·01439 und $\beta =$ ·01685 zu setzen, wobei $g = 31$ ist.

Nach dieser Formel würde man für die vorigen Beispiele von $v =$ ·1, 1, 2 und 4 Meter beziehungsweise erhalten $z =$ ·0000226 $\frac{L}{D}$, ·0012164 $\frac{L}{D}$, ·0043026 $\frac{L}{D}$ und ·0155999 $\frac{L}{D}$.

Die Vergleichung mit den vorigen Werthen zeigt, dafs bei gröfseren Geschwindigkeiten die Widerstandshöhen nach der *Weisbach*'schen Formel bedeutend geringer als nach allen frühern, besonders den französischen Formeln ausfallen. So wäre z. B. für $D = \frac{1}{4}$ und $L = 200$ Meter nach *Redtenbacher* $z = 18$ und nach *Weisbach* $= 12\frac{1}{2}$ Meter. *Weisbach* führt übrigens an, dafs er seine Versuche mit weitern Röhren als es früher geschehen, nämlich mit Röhren von 33, 71 und 275 Millimeter angestellt und dabei die Geschwindigkeit v bis auf 4·648 Meter ausgedehnt habe. Auch mufs noch bemerkt werden, dafs sich diese Werthe auf metallene Röhren von gewöhnlicher Beschaffenheit beziehen und dafs man diese, auf hölzerne Röhren angewendet, nach *Weisbach* mit 1·75 multipliciren müsse.

180. Um den durch plötzliche Verengungen oder Erweiterungen des Röhrenquerschnittes herbeigeführten Verlust an

Gefällshöhe zu bestimmen, wollen wir zuerst annehmen, dafs sich die normale Querschnittsfläche A der Röhre (Fig. 114) plötzlich erweitere und in A' übergehe. Ist daher v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt A und v' jene in der Erweiterung A', so mufs die gröfsere Geschwindigkeit v plötzlich auf die kleinere v' gebracht werden. Jedes Wassertheilchen m stöfst also gegen die unendlich gröfsere Wassermasse m' und verliert wie bei dem Stofse unelastischer Körper (§. 201) an lebendiger Kraft $\frac{m m' (v - v')^2}{m + m'}$, oder da m gegen m' verschwindet, $\frac{mm'}{m'}(v - v')^2 = m(v - v')^2$, folglich ist der Verlust an Wirkungsgröfse $= \frac{m(v - v')^2}{2g}$ oder an Gefällshöhe $z' = \frac{(v - v')^2}{2g}$.

Da sich nun die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Querschnitte verhalten müssen, um in derselben Zeit gleiche Wassermengen durchzuführen, so ist $v' = \frac{A}{A'} v$ und daher der Gefällsverlust:

$$z' = \left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 . \frac{v^2}{2g} .$$

Anmerkung. Der hier betrachtete Verlust kann durch Abrunden der Kanten und allmähliges Übergehen von einer Röhre in die andere, wie in Fig. 114', bedeutend vermindert und selbst ganz aufgehoben werden.

181. Ein ähnlicher Verlust an Gefällshöhe entsteht auch dann, wenn das Wasser aus einem Gefäfse oder Behälter, wie in Fig 115, in eine Röhre tritt. Ist dieser Eintritt noch durch eine dünne Wand, d. i. ein Diaphragma, oder auch, wie es oft der Fall, durch ein Sieb oder Gitter verengt; so sey wieder A der Querschnitt der Röhre und f jener der Öffnung des Diaphragma oder die Summe der Öffnungen des Siebes, so wie α der entsprechende Contractionscoeffizient beim Durchgange des Wassers durch diese Öffnungen. Da nun αf der Querschnitt der gröfsten Zusammenziehung, also, wenn wieder v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, $\frac{A}{\alpha f} v$ die in diesem Statt findende Geschwindigkeit ist, welche plötzlich in jene v übergeht; so hat man wie vorhin dadurch den Gefällsverlust $z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ . . (a)

Fällt das Diaphragma weg, so ist wegen $f = A$ in diesem Falle

$$z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad (b)$$

(Vergleiche Zusatz 5. auf S. 613.)

Nach den Versuchen von *Weisbach* kann man für die Werthe von $\frac{f}{A} = \cdot1, \cdot2, \cdot3, \cdot4, \cdot5, \cdot6, \cdot7, \cdot8, \cdot9, 1$ den Contractionscoeffizient $\alpha = \cdot616$, $\cdot614$, $\cdot612$, $\cdot610$, $\cdot607$, $\cdot605$, $\cdot603$, $\cdot601$, $\cdot598$, 596 setzen. So wäre z. B. für $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$ oder $f = \frac{1}{2} A$, nach der vorigen Formel der durch diese Verengung entstehende Verlust an Gefällshöhe:

$$z' = \left(\frac{2}{\cdot607} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = 5\cdot266 \frac{v^2}{2g},$$ also $5\frac{1}{4}$ Mal gröfser als die der Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe. Für $\frac{f}{A} = \frac{1}{10}$ wäre sogar $z' = 232 \frac{v^2}{2g}$.

182. Tritt das Wasser anstatt aus einem weiten Behälter, nur aus einer etwas weitern Röhre in die engere ein (Fig. 116), so bleibt die Erscheinung, also wenn man die vorige Bezeichnung beibehält, auch die Formel (α) oder jene (β), d. i. jene für den Fall eines Diaphragma, $$z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$ und ohne dasselbe $$z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$ dieselbe, nur dafs dabei, wegen der jetzt eintretenden u n v o l l s t ä n d i g e n Contraction, der Coeffizient α, welcher von dem Verhältnifs $\frac{f}{F}$ der verengten Öffnung f und des Querschnittes des weitern Zuleitungsrohres F abhängt, gröfser ausfällt.

Nach *Weisbach's* Versuchen ist für $\frac{f}{F} = \cdot1, \cdot2, \cdot3, \cdot4, \cdot5, \cdot6, \cdot7, \cdot8, \cdot9, 1$ beziehungsweise $\alpha = \cdot624, \cdot632, \cdot643, \cdot659, \cdot681, \cdot712, \cdot755, \cdot813, \cdot892, 1\cdot000$.

Wäre z. B. das Zuleitungsrohr 4, die Öffnung des Diaphragma 2 und das Ausflufsrohr 3 Zoll weit und sollte, wenn diese Röhren nur ganz kurz sind, die Druckhöhe h' gefunden werden, für welche per Minute 20 Kubikfufs Wasser durch diesen Apparat fliefsen; so wäre $\frac{f}{F} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, folglich, wenn man die vorige Reihe interpolirt, der betreffende Contractionscoeffizient $\alpha = \cdot637$. Ferner ist $\frac{A}{f} = \frac{9}{4}$, daher

$$\frac{A}{\alpha f} - 1 = \frac{9}{4 \times \cdot637} - 1 = 2\cdot532.$$

Die Ausflufsgeschwindigkeit v findet sich aus der Gleichung $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \pi v = \frac{20}{60}$ und zwar ist $v = \frac{2 \times 64}{6\pi} = 6\cdot792$ Fufs, folglich die Widerstandshöhe z', d. i. diejenige Wassersäulenhöhe, welche durch die verengte Öffnung absorbirt wird: $$z' = 2{\cdot}532 \frac{(6{\cdot}792)^2}{62} = 1{\cdot}884$$

und daher die gesuchte Druckhöhe $h = z' + \frac{v^2}{2g}$ d. i.

$$h = (2{\cdot}532 + 1) \frac{(6{\cdot}792)^2}{62} = 2{\cdot}628 \text{ Fuſs.}$$

Ohne diese Verengung wäre $h = {\cdot}744$ Fuſs.

183. Befindet sich das Diaphragma, wie in Fig. 117, in der gleichweiten Röhre und ist wieder A der Querschnitt der Röhre, f jener der Durchgangsöffnung und α der entsprechende Contractions-coeffizient, so ist wie vorhin die Widerstandshöhe $z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$.

Was dabei den Coeffizienten α betrifft, so hat er dieselben in der vorigen Nr. angegebenen Werthe, nur muſs man statt dem Quotienten $\frac{f}{F}$ jenen $\frac{f}{A}$ setzen. Wäre z. B. dieser Quotient $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$, so würde man $\alpha = {\cdot}681$ setzen und damit die Widerstandshöhe oder den Gefällsverlust $z' = 3{\cdot}751 \frac{v^2}{2g}$ also $3\frac{3}{4}$ Mal so groſs als die Geschwindigkeitshöhe von v erhalten.

Dieser Verlust läſst sich bedeutend vermindern, wenn nicht ganz beseitigen, wenn man durch Abrunden der Kanten die Contraction vermindert, oder durch Einsetzung eines sich allmählig nach beiden Seiten erweiternden Rohres (Fig. 118) gänzlich aufhebt.

184. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie in Fig. 119 dargestellt ist, wobei das Wasser aus dem gröſseren Querschnitt A in den engern A' plötzlich, und von da wieder eben so in den weitern Querschnitt A'' übertritt, hat man, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre A, und α den Contractionscoeffizient für den Übergang aus A in A' bezeichnet, also die Geschwindigkeiten in A' und $A'' = v'$ und v'', die Werthe haben $v' = \frac{A}{A'} v$ und $v'' = \frac{A'}{A''} v'$, genau wieder wie in Nr. **182** für den Verlust an Gefällshöhe beim Übergang von A in A':
$z_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{A^2}{A'^2} \frac{v^2}{2g}$ und für jenen beim Übergang von A' in A'' wie in Nr. **180**:
$z_2 = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{A^2}{A'^2} \frac{v^2}{2g}$ folglich ist der Gesammtverlust für diese Verbindung $z' = z_1 + z_2$, d. i.

$$z' = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung. Diese Formel zeigt, dafs z' jeden auch noch so grofsen Werth durch Verkleinerung des verengten Querschnittes A' annehmen kann, indem sich dadurch der Quotient $\frac{A}{A'}$ immer mehr der Grenze Unendlich nähert.

185. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie Fig. 120 zeigt, wobei das Wasser aus dem normalen Querschnitt A in den erweiterten A' und von da wieder in den normalen A oder überhaupt nur in einen engern A'' übertritt, hat man eben so, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte A, und α den Contractionscoeffizienten für den Übertritt des Wassers von A' in A'' bezeichnet, für den Verlust an Gefällshöhe:

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{A^2}{A''^2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

Im Falle $A'' = A$ ist, wird

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung 1. Wie man aus der letzten Formel sieht, so kann durch die Erweiterung A' die Widerstandshöhe z' keineswegs, wie bei der vorigen Verengung, ohne Ende zunehmen, sondern diese ist (weil für $A' = \infty$ der Quotient $\frac{A}{A'} = 0$ wird) an die Grenze $\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$ gebunden.

Anmerkung 2. Was endlich die durch Verengungen mittelst Hähnen, Klappen und Ventilen herbeigeführten Verluste an der Gefällshöhe betrifft, die oft sehr bedeutend werden können; so hat *Weisbach* auch hierüber zahlreiche Versuche durchgeführt und die Resultate zur Bestimmung der betreffenden Widerstandscoeffizienten tabellarisch zusammengestellt.

a) Ist z. B. *abcd* (Fig. 121) ein, gegen die Achse der Röhre perpendikulärer Schieber oder Schubventil, mittelst welchem der Querschnitt der Röhre $AD = A$ bis auf die Durchflufsöffnung $Ab = A'$ verengt wird, so hat man, den Verlust an Gefällshöhe $z_1 = n_1 \frac{v^2}{2g}$ gesetzt, für den Widerstandscoeffizienten n_1 nach *Weisbach*,

für parallelopipedische Röhren (Fig. 121):

wenn $\frac{A'}{A} =$	1,	·9,	·8,	·7,	·6,	·5,	·4,	·3,	·2,	·1 ist,
sofort $n_1 =$	0·00,	0·09,	0·39,	0·95,	2·08,	4·02,	8·12,	17·8,	44·5,	193

für cylinderische Röhren (Fig. 122):

wenn $\frac{A'}{A} =$	1,	$\frac{7}{8}$,	$\frac{6}{8}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{4}{8}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{2}{8}$,	$\frac{1}{8}$ ist,
sofort $n_1 =$	0·00,	0·07,	0·26,	0·81,	2·06,	5·52,	17·0,	97·8

b) Bei Drehklappen oder Drosselventilen theilt sich das Wasser beim Durchgang durch die Röhre AE (Fig. 123) in zwei Theile und geht durch die verengten Öffnungen Aa und Bb, deren Querschnitt in

Summa $= A'$, so wie der Querschnitt der Röhre $= A$ seyn soll. Ist der Dreh- oder Stellwinkel $DCF = \alpha$, und der Durchmesser ab der Klappe gleich dem Durchmesser der Röhre, so ist nach *Weisbach* der Widerstandscoeffizient n_1,

für parallelopipedische Röhren:

für $\alpha =$ 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°,

und $\frac{A'}{A} =$ ·913, ·826, ·741, ·658, ·577, ·500, ·426, ·357, ·293, ·234,

sofort $n_1 =$ ·28, ·45, ·77, 1·34, 2·16, 3·54, 5·72, 9·27, 15·07, 24·9,

55°, 60°, 65°, 70°, 90°

·181, ·134, ·094, ·060, 0

42·7, 77·4, 158, 368 ∞

für cylinderische Röhren,

für dieselben Werthe von α und $\frac{A'}{A}$:

$n_1 =$ 24 52, ·90, 1·54, 2·51, 3·91, 6·22, 10·8, 18·7, 32·6, 58·8, 118, 256, 751 ∞.

c) Tritt das Wasser durch ein Kegelventil cd (Fig. 124) und ist wieder A die Querschnittsfläche der Röhre AB v die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, der Querschnitt der Öffnung ab des Ventilsitzes $= f$, so wie jener der ringförmigen Öffnung $AcBd = f'$; so kann man für die eigentliche verengte Öffnung das arithmetische Mittel nehmen und $A' = \frac{1}{2}(f + f')$ setzen. Ist endlich wieder α der entsprechende Contractionscoeffizient, so hat man nach Nr. **182** den Widerstandscoeffizienten

$$n_1 = \left(\frac{A}{\alpha A'} - 1\right)^2.$$

Dabei fand *Weisbach* nach einem Versuche, wobei $\frac{A,}{A} =$ ·381 war, $\alpha =$ ·608.

d) Bei einem Klappenventil CD (Fig. 125) fand *Weisbach* bei einem Verhältnifs der Öffnung $ab = A'$ im Ventilsitz zum Querschnitt der Röhre A, d. i. bei $\frac{A'}{A} =$ ·535 bei verschiedenen Stellwinkeln α folgende Werthe für den Widerstandscoefficienten n_1 und zwar

für $\alpha =$ 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, 60°, 65°, 70°

sofort $n_1 =$ 90, 62, 42, 30, 20, 14, 9·5, 6 6, 4·6, 3·2, 2·3, 1·7

e) Bei Hähnen tritt das Wasser (Fig. 126) aus dem Querschnitt A der Röhre durch die verengte Öffnung $ab = A'$, in die eben so weite Bohrung A und von da wieder durch die verengte Öffnung $cd = A'$ in den ursprünglichen Querschnitt A über. Bei den von *Weisbach* angestellten Versuchen, war das Verhältnifs von $\frac{A'}{A}$ derart, dafs bei den parallelopipedischen Röhren dieselben bei einem Stellwinkel $\alpha = 66\frac{3}{4}°$ und bei den cylinderischen Röhren bei $\alpha = 82\frac{1}{8}°$ vollkommen geschlossen waren. Diefs vorausgesetzt, fand er den Widerstandscoeffizienten n_1, bei parallelopipedischen Röhren:

für $\alpha =$ 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, $66\frac{3}{4}$°

und $\frac{A'}{A} =$ ·926, ·849, ·769, ·687, ·604, ·520, ·436, ·352, ·269, ·188, ·110, 0

sofort $n_1 =$ ·05, ·31, ·88, 1·84, 3·45, 6·15, 11·2, 20·7, 41·0, 95·3, 275, ∞

bei cylinderischen Röhren:

für $\alpha =$ 5°, 10°, 15° 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, 60°, 65°, $82\frac{1}{8}$°

und $\frac{A'}{A} =$ ·926, ·850, ·772, ·692, ·613, ·535, ·458, ·385, ·315, ·250, ·190, ·137, ·091, 0

sofort $n_1 =$ ·05, ·29, ·75, 1·56, 3·10, 5·47, 9·68, 17·3, 31·2, 52·6, 106, 206, 486, ∞ *)

186. Kommt bei einer Röhrenleitung eine Krümmung vor, so läſst sich der dabei eintretende Gefällsverlust, welcher wieder dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers proportional ist, nach *Redtenbacher*'s Angabe durch

$$z'' = (\cdot 0039 + \cdot 0186\, R)\, \frac{S}{R^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

ausdrücken, wenn R den Krümmungshalbmesser CA der Achse (Fig. 127), S die Länge des betreffenden Bogens ANB bezeichnet und der Meter zur Einheit des Längenmaſses genommen wird.

Auf den Wiener Fuſs bezogen würde

$$z'' = (\cdot 01233 + \cdot 0186\, R)\, \frac{S}{R^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad . \; . \; (m)$$

Weisbach findet aus seinen Versuchen, daſs man den Widerstandscoeffizienten $n'' = \left[\cdot 131 + \cdot 163 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\alpha^0}{180}$ ausdrücken kann, wenn D den Durchmesser der cylinderischen Röhre, R den Krümmungshalbmesser und α den Krümmungswinkel ACB in Graden ausgedrückt bezeichnet.

Für parallelopipedische Röhren wäre eben so:

$$n'' = \left[\cdot 124 + \cdot 274 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right] \frac{\alpha^0}{180}.$$

Ist z. B. bei einer solchen Krümmung von cylinderischen Röhren $D = \frac{1}{2}$, $R = 10$ Fuſs und $\alpha = 90°$, so wäre nach der *Weisbach*'schen Formel, da der Theil $\cdot 163 \left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 163 \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 000004556$ hier keinen Ein-

---

*) M. s. das Weitere in den „Versuchen über den Ausfluſs des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von *Jul. Weisbach.* Leipzig, 1842."

flufs hat, $n'' = {}^{\cdot}131 \times \frac{1}{2} = {}^{\cdot}0655$, folglich der Gefällsverlust

$$z'' = {}^{\cdot}0655 \, \frac{v^2}{2g} \, .$$

Dagegen würde nach der erstern Formel (m) wegen $S = R\alpha = 10 \times \frac{3{}^{\cdot}1416}{2}$ $= 15{}^{\cdot}7080$, diese Widerstandshöhe $z'' = {}^{\cdot}19833 \times \frac{15{}^{\cdot}708}{100} \frac{v^2}{2g}$ d. i.

$$z'' = {}^{\cdot}03115 \, \frac{v^2}{2g}$$

ungefähr nur halb so grofs. Jedenfalls ist dieser Widerstand so gering, dafs er in der Regel gegen die übrigen vernachlässiget werden kann, besonders wenn der Krümmungshalbmesser nicht gar zu klein ist.

187. Bildet endlich die Achse der Leitung an irgend einem Puncte B (Fig. 128) einen scharfen Winkel ABC, also die Röhre an dieser Stelle ein K n i e, so läfst sich der dadurch herbeigeführte Verlust der Gefällshöhe z''' auf folgende Weise bestimmen.

Ist wieder A der Querschnitt der Röhre, v die Geschwindigkeit des Wassers, der Ablenkungswinkel $CBD = \alpha$, und nimmt man an, dafs sich jedes Wassertheilchen in einer, zur gebrochenen Linie ABC parallelen Richtung fortbewegt; so geht in jedem Zeitelement dt eine Wasserschichte von dem Volumen $Av\,dt$, oder, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, von dem Gewichte $\gamma A v\,dt$ mit der Geschwindigkeit v von der Richtung AB plötzlich in jene BC über, vereinigt sich mit dem in diesem Schenkel befindlichen Wasser und fliefst mit derselben Geschwindigkeit v weiter.

Zerlegt man nun die Geschwindigkeit dieser Wassermasse $m = \gamma A v\,dt$ vor und nach dem Stofs in zwei Seitenkräfte, eine nach der Richtung AB, die andere darauf senkrecht; so hat man für diese beiden Seitenkräfte v o r dem Stofs beziehungsweise v und 0, und n a c h dem Stofs $v\,Cos\,\alpha$ und $v\,Sin\,\alpha$, also ist der durch den Stofs herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft nach der Relation (2) in Nr. **89**, Anmerk.

$$m\left[(v - v\,Cos\,\alpha)^2 + (0 - v\,Sin\,\alpha)^2\right] = 2mv^2(1 - Cos\,\alpha)$$
$$= 4\,mv^2\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\,.$$

Es ist also der Verlust an Wirkungsgröfse oder Arbeit während der Zeit dt, wenn man für m den Werth herstellt:

$$4\,\frac{\gamma A v\,dt}{2g}\,v^2\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

oder für die Zeiteinheit, wenn man die entsprechende Masse $\gamma A v = M$ setzt:

$$4\,M\,\frac{v^2}{2g}\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha;$$

es ist also $$M z''' = 4 M \frac{v^2}{2g} \, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha$$
und daher die gesuchte Widerstandshöhe:
$$z''' = 4 \frac{v^2}{2g} \, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = n''' \frac{v^2}{2g},$$
wenn man den Widerstandscoeffizienten $4\, Sin^2 \frac{1}{2} \alpha = n'''$ setzt.

Anmerkung. Der hier theoretisch gefundene Widerstandscoeffizient ist gegen die Erfahrung aus dem Grunde zu grofs, weil sich die Wassertheilchen nicht sämmtlich mit der gebrochenen Linie ABC parallel, sondern die mittlern Fäden in Curven bewegen, welche einen geringeren Verlust an lebendiger Kraft bedingen. *Weisbach* glaubt aus seinen Versuchen diesen Widerstandscoeffizienten durch die Formel
$$n''' = {\cdot}9457\, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha + 2{\cdot}047\, Sin^4 \tfrac{1}{2} \alpha$$
ausdrücken zu können und berechnet darnach eine Tabelle, nach welcher für $\alpha =$ 20°, 40°, 60°, 80°, 90°, 100°, 110°, 120°, 130°, 140°, sofort $n''' =$ ·046, ·139, ·364, 740, ·984, 1·260, 1·556, 1·861, 2·158, 2·431 wird.

Aber selbst wenn diese Coeffizienten nicht zu klein seyn sollten, ist der Widerstand immer noch grofs genug, um sich bestimmen zu lassen, alle scharfen Winkel bei den Leitungen möglichst zu vermeiden und dafür sanfte Krümmungen zu wählen.

188. Verbindet nun eine Röhrenleitung von den in den vorigen Nrn. angenommenen Dimensionen, d. i. vom Durchmesser D und der Länge L, den obern Sammelbehälter ABC (Fig. 129) mit einem tiefer liegenden Behälter $A'B'D$, wobei der Oberwasserspiegel AB die Fläche F und der untere $A'B'$ jene f haben soll, und ist, sobald der Beharrungsstand eingetreten und das Wasser durch die Röhre mit der Geschwindigkeit v fliefst, die constante Druck- oder Gefällshöhe $EF = H$, ferner die Geschwindigkeitshöhen, welche den Geschwindigkeiten $v' = \frac{A}{F} v$ und $v'' = \frac{A}{f} v$ entsprechen, mit welchen die Wasserschichten in den obern Behälter bei AB ein- und im untern Behälter $A'B'$ austreten, $\frac{v'^2}{2g} = h'$ und $\frac{v''^2}{2g} = h''$; so hat man, wenn der atmosphärische Druck auf beide Wasserspiegel als gleich grofs angenommen wird, die allgemeine Gleichung:
$$H + h' = h'' + z + \Sigma(z') + \Sigma(z'') + \Sigma(z''') \ldots \quad (1)$$
wenn man die Wassersäulenhöhe z zur Überwindung der Reibung an den Röhrenwänden aus Nr. **178** oder **179**, die Summe der Wassersäulenhöhen $\Sigma(z')$ zur Überwindung der in der Leitung vorkommenden

plötzlichen Verengungen oder Erweiterungen nach den Nrn. **180** bis **185**, jene $\Sigma(z'')$ zur Überwindung des Widerstandes in Krümmungen nach Nr. **186** und endlich jene $\Sigma(z''')$ welche dem Widerstande in scharfen Biegungen entsprechen nach Nr. **187** bestimmt. Führt man statt diesen Widerstandshöhen z, z' . . die entsprechenden Widerstandscoeffizienten n, n' . . . und anstatt der Geschwindigkeitshöhen h, h', h'' die Geschwindigkeiten selbst ein; so verwandelt sich die vorige Gleichung (1) wegen $z = n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ (welche Form man auch dem Ausdruck (2) in **178** geben kann) und $z' = n' \frac{v^2}{2g}$, $z'' = n'' \frac{v^2}{2g}$ . . in die folgende:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2} - \frac{A^2}{F^2} + n\frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''')\right] \quad (2)$$

Ist der untere Behälter nicht vorhanden, sondern mündet die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft aus, so ist $f = A$ und wenn man unter der Voraussetzung, daſs der Querschnitt A der Röhre gegen jenen des Behälters F sehr klein sey, das Glied $\frac{A^2}{F^2}$ vernachlässigt (die Wasserschichten bei AB nämlich als still stehend ansieht), sofort:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + n\frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''')\right] \quad (3)$$

Mündet dagegen die Leitungsröhre durch ein verengtes Mundstück in die freie Luft aus, so muſs man, wenn f der Querschnitt der Ausmündung ist, anstatt 1 wieder das obige Glied $\frac{A^2}{f^2}$ der Gleich. 2 setzen, wenn keine Contraction Statt hat, sonst aber $\frac{A^2}{\alpha f^2}$ nehmen, wenn α der entsprechende Contractionscoeffizient ist. Sind nicht alle Kanten gehörig abgerundet, so muſs man in die Summe $\Sigma(n')$ auch noch den Widerstandscoeffizienten aufnehmen, welcher dem Widerstande entspricht den das Wasser beim Durchgang durch dieses Mundstück erfährt.

Anmerkung. Wäre der Druck auf die Flächeneinheit auf den obern Wasserspiegel durch die Wassersäule h' und auf den untern Wasserspiegel durch jene h'' ausgedrückt und h' von h'' verschieden; so müſste man in dieser Gleichung $H + h' - h''$ anstatt H setzen.

Bestimmung der Ausfluſsgeschwindigkeit aus einer Röhrenleitung.

189. Für den ganz allgemeinen Fall darf man nur die vorige Gleichung (2) oder (3) nach v auflösen, um diese Geschwindigkeit zu erhalten. Nehmen wir hier nur den einfachsten Fall und setzen eine Leitung voraus, in welcher weder Verengungen noch Krümmungen vorkommen und bei welcher auch durch gehörige Erweiterung der Einflufsöffnung die Contraction des Wassers beim Eintritt aus dem Behälter in die Röhrenleitung vermieden ist; so hat man, mit Beibehaltung aller frühern Bezeichnungen in der vorigen Formel (3) alle mit dem Summenzeichen Σ behafteten Glieder auszulassen und

$$(a) \quad H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

zu setzen, woraus sofort

$$v = \sqrt{\left[\frac{2gH}{1 + n\frac{L}{D}}\right]} \quad (3) \text{ folgt.}$$

Tritt dagegen das Wasser aus dem Behälter mit Contraction in die Leitung, so hat man mit Hinzufügung des betreffenden Widerstandscoeffizienten $(\frac{1}{\alpha} - 1)^2$ (Nr. **181**, Gleich. β)

$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2 + n\frac{L}{D}\right]$ oder wenn man Kürze halber

$\frac{\alpha}{\sqrt{[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]}} = m$ setzt, auch

$$(a') \quad H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right) \text{ woraus sofort}$$

$$v = m\sqrt{\left(\frac{2gH}{1 + nm^2\frac{L}{D}}\right)} \quad (4) \quad \text{folgt.}$$

Anmerkung. Da man den diesem Fall entsprechenden Contractionscoeffizienten (Nr. **181**, Anmerk.) $\alpha = \cdot 596$ setzen kann, so folgt für den Coeffizienten m der mittlere Werth $m = \cdot 83$ welcher nahe mit dem Geschwindigkeitscoeffizienten ·815 beim Ausflusse des Wassers aus kurzen cylinderischen Ansatzröhren übereinstimmt (Zusatz 4. auf S. 613) und da er diesen in etwas übertrifft, nur den Beweis liefert, dafs selbst bei einem kurzen Ansatzrohr schon einiger Reibungswiderstand an den Röhrenwänden Statt findet. (Vergleiche auch Zusatz 5 auf derselben Seite.)

190. Nimmt man für die Widerstandshöhe z anstatt des Ausdruckes (3) in Nr. **179**, jenen (2) in Nr. **178**, so wird

$$(b) \quad H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

und daraus, wenn man $g = 31$ und für α, β die in Nr. **178** angegebenen, auf den Wiener Fufs sich beziehenden Werthe (m) setzt (und durch Division mit $8g\beta$ den Coefficienten $8g\beta L + D$ auf die Form $L + 36{\cdot}6\,D$ bringt)

$$v = -\frac{\cdot 002536\, g\, L}{L + 36\cdot 6\, D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002536\, g\, L}{L + 36\cdot 6\, D}\right)^2 + \frac{73\cdot 2\, g\, D\, H}{L + 36\cdot 6\, D}\right]} \quad (5)$$

Ist die Leitung so lang, dafs man $36\cdot 6\, D$ gegen L auslassen darf, so ist einfacher

$$v = -\cdot 002536\, g + \sqrt{\left[(\cdot 002536\, g)^2 + \frac{73\cdot 2\, g\, D\, H}{L}\right]} \quad (6)$$

Ist die Geschwindigkeit v gröfser als 2 Fufs, so kann man, da dann das Glied mit der 1sten Potenz von v vernachlässigt werden darf (§. 345)

$$v = 8\cdot 427 \sqrt{\left(\frac{g\, H\, D}{L + 35\cdot 5\, D}\right)} = 46\cdot 95 \sqrt{\left(\frac{H\, D}{L + 35\cdot 5\, D}\right)} \quad (7)$$

setzen.

Nimmt man dagegen die wenigstens eben so viel Vertrauen verdienenden Werthe (n) (aus Nr. **178**), so erhält man:

$$(5') \quad v = -\frac{\cdot 002800\, g\, L}{L + 37\cdot 2\, D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002800\, g\, L}{L + 37\cdot 2\, D}\right)^2 + \frac{74\cdot 405\, g\, D\, H}{L + 37\cdot 2\, D}\right]}$$

Kann man $37\cdot 2\, D$ gegen L auslassen, so ist:

$$(6') \quad v = -\cdot 002800\, g + \sqrt{\left[(\cdot 002800\, g)^2 + \frac{74\cdot 405\, g\, D\, H}{L}\right]}$$

Ist die Geschwindigkeit v nach der einen oder andern dieser Formeln bestimmt, so findet man die per Secunde durch die Röhrenleitung fliefsende Wassermenge aus der Formel

$$M = \tfrac{1}{4}\pi D^2 v = \cdot 7854\, D^2 v \quad (8)$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dafs sich diese Formeln nicht nur auf den Wiener Fufs als Einheit, sondern auch auf den Meter und überhaupt auf jedes beliebige Mafs beziehen, wenn man nur g im erstern Falle $= 31$, im zweiten $= 9\cdot 808$ und so überhaupt in dem landesüblichen Mafs ausgedrückt substituirt.

191. Um die Gefällshöhe H zu bestimmen, welche vorhanden seyn mufs, damit eine Röhrenleitung von der Länge L und dem Durchmesser D per Secunde M Kubikfufs Wasser liefere, suche man zuerst aus der vorigen Gleichung (8) die Geschwindigkeit $v = \frac{4M}{\pi D^2}$ und damit die Gefällshöhe H aus (a) oder (a') in Nr. **189**, oder aus (b) in Nr. **190**, d. i. entweder, wenn das Wasser aus dem Behälter ohne Contraction in die Röhren tritt, aus der Formel

$$H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

wobei $n = \cdot 01439 + \frac{\cdot 01685}{\sqrt{v}}$ ist, oder, wenn das Wasser mit Contraction eintritt, aus der Formel:

$$H = \left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wobei n den vorigen Werth hat und $m = \cdot 83$ ist, oder endlich aus der

Formel: $$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

wobei $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101$ oder auch $\alpha = \cdot 0000188$ und $\beta = \cdot 0001083$ ist.

Beispiel. Um diese verschiedenen Werthe wenigstens an einem Beispiele mit einander zu vergleichen, in welchem $D = \cdot 79$ und $L = 4587$ Fuſs ist, ferner $M = 1 \cdot 235$ Kubikfuſs seyn soll, hat man zuerst aus der Formel (8) für die Geschwindigkeit $v = 2 \cdot 5196$ Fuſs und damit aus der letzten Formel für die Gefällshöhe $H = 17 \cdot 35$ oder $H = 17 \cdot 17$ Fuſs, je nachdem man für die Coeffizienten α und β die erstern oder letztern der eben angegebenen Werthe nimmt.

192. Um den Durchmesser D zu bestimmen, welchen eine Röhrenleitung erhalten muſs, damit diese bei einem Gefälle $= H$ in jeder Secunde M Kubikfuſs Wasser liefere, hat man zuerst, wenn man in die Formel (8) (Nr. **190**) den genäherten Werth für v aus der Formel (7) setzt, und darin noch $35 \cdot 5\, D$ gegen L ausläſst:

$$M = \cdot 7854 \times 46 \cdot 95\, D^2 \sqrt{\left(\frac{HD}{L}\right)} = 36 \cdot 874 \sqrt{\left(\frac{HD^5}{L}\right)}$$

und daraus $$D = \cdot 2362 \sqrt[5]{\left(\frac{LM^2}{H}\right)} \quad (c)$$

Anmerkung. Genauer kann man diesen Durchmesser dadurch finden, daſs man in der Gleichung $D = \sqrt{\frac{4M}{\pi v}}$ (welche aus 8 folgt) für v versuchsweise mehrere Werthe annimmt und damit die entsprechenden Werthe von D berechnet. Je zwei zusammengehörige Werthe von v und D setzt man dann in die Gleichung $H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ Gleich. b in Nr. 190) oder wenn man die *Weisbach*'schen vorzieht, in jene (a) oder (a') in Nr. 189; so sind jene Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, die wahren Werthe von v und D.

193. Um endlich noch die vortheilhafteste Geschwindigkeit zu finden, bei welcher die Wasserkraft, welche durch eine Röhrenleitung von gegebenen Dimensionen erhalten werden kann, ein Maximum wird, hat man die Wirkungsgröſse der per Secunde mit der Geschwindigkeit v ausflieſsenden Wassermenge M, wenn diese durch W bezeichnet wird, $W = \gamma M \frac{v^2}{2g} = \gamma M h$, oder wegen $M = \frac{1}{4}\pi D^2 v$ auch $W = AD^2 h v$, wenn man Kürze halber $\frac{1}{4}\gamma\pi = A$ setzt. Nun folgt aber aus

$$H = h + z = h + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2) \text{ sofort } h = H - \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

folglich ist $\quad W = A D^2 \left[H v - \frac{4L}{D}(\alpha v^2 + \beta v^3) \right]$

und es mufs in dieser Gleichung v so bestimmt werden, dafs dafür W am gröfsten wird. Nun ist aber, wenn man nach der bekannten Regel verfährt:

$$\frac{dW}{dv} = A D^2 \left[H - \frac{4L}{D}(2\alpha v + 3\beta v^2) \right] = 0 \text{ oder } 2\alpha v + 3\beta v^2 = \frac{DH}{4L}$$

und daraus $\quad v = -\frac{\alpha}{3\beta} + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{9\beta^2} + \frac{1}{12\beta} \cdot \frac{HD}{L}\right]}.$

Setzt man in diesem Ausdruck für α und β die obigen Werthe (m) aus Nr. **178**, d. i. $\alpha = {\cdot}00001733$ und $\beta = {\cdot}0001101$, so erhält man nahe genug, für die vortheilhafteste Geschwindigkeit, wofür die Wirkung W, weil dafür der 2te Differenzialquotient negativ ausfällt, in der That ein Maximum wird:

$$v = -{\cdot}0525 + \sqrt{\left({\cdot}002756 + 756{\cdot}9 \frac{HD}{L}\right)}.$$

Anmerkung. Diese Entwicklung kann, da man es nicht in seiner Gewalt hat diese vortheilhafteste Geschwindigkeit herbeizuführen, nur dazu dienen, um sich zu überzeugen (man vergleiche diese Formel mit jener (6) in Nr. 190), dafs diese vortheilhafteste Geschwindigkeit in der Regel immer kleiner als die wirkliche ist, folglich auch das Maximum der Wirkung des durch die Leitung fliefsenden Wassers nicht erreicht werden kann.

194. Bestände die Röhrenleitung aus mehreren Stücken, beziehungsweise von den Längen $L, L_1, L_2 \ldots$, den Querschnitten $A, A_1, A_2 \ldots$, den Durchmessern $D, D_1, D_2 \ldots$, in welchen das Wasser mit den Geschwindigkeiten $v, v_1, v_2 \ldots$ fliefst und wären $n, n_1, n_2 \ldots$ die entsprechenden Reibungscoeffizienten, so müfste man in den Formeln (2) und (3) Nr. **188** statt $n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ setzen:

$$n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + n_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + n_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + \ldots \text{ d. i.}$$

wegen $\quad v_1 = \frac{D^2}{D_1^2} v, \quad v_2 = \frac{D^2}{D_2^2} v \ldots$ sofort:

$$\left(n \frac{L}{D} + n_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{D^4}{D_1^4} + n_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{D^4}{D_2^4} + \ldots \right) \frac{v^2}{2g}$$

d. h. also man mufs $n \frac{L}{D} + n_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{D^4}{D_1^4} + \ldots$ anstatt $n \frac{L}{D}$ setzen.

195. Um die Höhe von springenden Strahlen zu bestimmen, welche durch Röhrenleitungen gespeist werden, mufs man, wenn das Mundstück *a b c d* (Fig. 130) lang oder sehr eng ist, nicht blofs auf den durch die plötzliche Querschnittsänderung hervorgehenden, sondern auch auf jenen Widerstand Rücksicht nehmen, welcher aus der Reibung beim Durchgange des Wassers durch dieses Mundstück entsteht. Bezeichnet man nämlich die Länge des Mundstückes mit l, ihren Durchmesser mit d und den nach Nr **182** (Anmerk.) zu bestimmenden Widerstandscoeffizienten für den Eintritt des Wassers mit μ, so mufs man nach der eben gemachten Bemerkung (vorige Nr.) in der allgemeinen Formel (2) statt $n\frac{L}{D}$ setzen: $n\frac{L}{D}+n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}$ und wenn man den Widerstand, welcher beim Eintritte des Wassers in das Mundstück von der allgemeinen Summe $\Sigma(n')$ ausscheidet und für sich hinstellt, $\mu+\frac{A^2}{f^2}$ statt $\frac{A^2}{f^2}\left(=\frac{D^4}{d^4}\right)$ setzen; dadurch erhält man für den vorliegenden Fall, wenn man wieder den kleinen Quotienten $\frac{A^2}{F^2}$ ausläfst:

$$H=\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2}+\mu+n\frac{L}{D}+n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}+\Sigma(n')+\Sigma(n'')+\Sigma(n''')\right] \quad (9)$$

dabei bezeichnen, wie bereits bemerkt, μ den Widerstandscoeffizienten für den Eintritt des Wassers in das Mundstück (Nr. **182**), $n\frac{L}{D}$ und $n_1\frac{l}{d}$ die Widerstandscoeffizienten für die Reibung des Wassers an den Wänden der Leitungsröhre und des Mundstückes (Nr. **178** u. **179**), n' den Widerstandscoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch irgend eine in der Leitungsröhre befindliche Scheidewand, plötzliche Erweiterung oder Verengung, wozu auch der Eintritt des Wassers aus dem Sammelbehälter in die Röhre gehört, wenn diese nicht nach aufwärts gehörig erweitert ist, ein Ventil u. s. w. (Nr. **180** bis **185**), n'' den Widerstandscoeffizienten durch eine Krümmung (Nr. **186**) und endlich n''' den Widerstandscoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch ein Knie (Nr. **187**).

Anmerkung. Was den Coeffizienten n_1 betrifft, so kann man diesen, da für gewöhnlich die Geschwindigkeit des Wassers im Mundstück sehr grofs ist $n_1 = \cdot 016$ setzen.

196. Da das Wasser aus der Mündung mit der Geschwindigkeit $\frac{A}{f}v$ ausspringt, so erreicht der Strahl (abgesehen vom Widerstande der

Luft) die Höhe $h = \frac{A^2}{f^2} \frac{v^2}{2g}$. Führt man diese Sprunghöhe h in die vorige Formel ein, und setzt Kürze halber die Summe der Glieder $\mu + n \frac{L}{D} + n_1 \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') = S$; so erhält man

$$(10) \quad H = h\left(1 + \frac{f^2}{A^2} S\right) \text{ und daraus } h = \frac{H}{1 + \frac{f^2}{A^2} S} \quad . \quad . \ (11)$$

Da aus der Gleichung (10) $h = H - h\frac{f^2}{A^2} S$ und (Fig. 131) $ED = EC - CD = H - h = H - (H - h\frac{f^2}{A^2} S) = h\frac{f^2}{A^2} S$ ist, so folgt, dafs die Sprunghöhe $CD = h$ um diese Höhe $ED = h\frac{f^2}{A^2} S$ kleiner als die disponible Druckhöhe $CE = H$ ist.

Anmerkung. Denkt man sich die Druckhöhe $CE = H$ im Puncte D so getheilt, dafs sich verhält $CD : DE = h : H - h = 1 : \frac{f^2}{A^2} S$, so bezeichnet ED den Verlust an Druckhöhe, d. i. die gesammte Widerstandshöhe und CD die wirksame Druckhöhe oder Sprunghöhe.

Mit Rücksicht darauf, dafs der vertical aufsteigende Wasserstrahl, theils wegen des Luftwiderstandes, theils weil die zurückfallenden Wassertheilchen die Bewegung der aufsteigenden hindern, nicht völlig diese Höhe h sondern die geringere Höhe h_1 erreicht, kann man nach *D'Aubuisson* für diese Steighöhe setzen

$$h_1 = h(1 - \cdot 0032\, h)$$

wenn man nämlich den Wiener Fufs zur Einheit nimmt.

197. Um schlüfslich noch den in irgend einem Querschnitt mn (Fig. 129) der Röhrenleitung Statt findenden hydraulischen Druck zu finden, sey die diesem Drucke entsprechende Druckhöhe $= \mathfrak{z}$, der lothrechte Abstand des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes mn unter dem obern Wasserspiegel AB d. i $ac = z$, die Länge des Röhrenstückes $Cc = l$ und jene von $cD = L - l = l'$; so ist, wenn man zuerst jenen Theil cD der Leitung betrachtet, welcher zwischen der gedrückten Stelle c und der Ausmündung liegt, in der Gleichung (2) Nr. **188**, in welcher man sich den ersten Theil (nach Anmerk. der erwähnten Nr.) mit $H + h' - h''$ geschrieben denken mufs, $\mathfrak{z}$ statt h' und $H - z$ statt H zu setzen. Bezeichnet man ferner noch die Summenzeichen Σ durch Σ_1 in so ferne sie sich auf jene Widerstände, als Verengungen u. s. w beziehen, welche im obern Theile Cc, dagegen mit Σ_2 in so ferne sie sich auf die im untern Theile cD der Leitung vorkommenden Widerstände beziehen und setzt statt F eine allgemeine Querschnittsfläche a; so hat man für das Stück cD:

$$H-z+\mathfrak{z}-h''=\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2}-\frac{A^2}{a^2}+n\frac{l'}{D}+\Sigma_2(n')+\Sigma_2(n'')+\Sigma_2(n''')\right] \quad (k)$$

Zieht man nun diese Gleichung von der genannten (2) in Nr. **188** ab, so erhält man für den obern Röhrentheil, wegen $L-l'=l$ und $\Sigma-\Sigma_2=\Sigma_1$ sofort:

$$\mathfrak{z}=z+h'-\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{a^2}-\frac{A^2}{F^2}+n\frac{l}{D}+\Sigma_1(n')+\Sigma_1(n'')+\Sigma_1(n''')\right] \quad (12)$$

d. h. die Druckhöhe, welche dem im Querschnitte a Statt findenden hydraulischen Drucke entspricht, ist gleich der verticalen Tiefe des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes unter dem Wasserspiegel des Behälters, vermehrt um die Wassersäulenhöhe, welche dem auf den Wasserspiegel Statt findenden Drucke entspricht und vermindert um die Summe der Geschwindigkeitshöhe des Wassers im betreffenden Querschnitt und der Widerstandshöhen aller im obern Theile der Röhre, vom betreffenden Querschnitte an bis zum Behälter vorkommenden Hindernisse.

Ist γ das Gewicht von 1 Kubikfuſs Wasser, so ist der hydraulische Druck q auf die Flächeneinheit, d. i. auf 1 Quadratfuſs:

$$q=\gamma\,\mathfrak{z}.$$

198. Für den Fall als der untere Behälter nicht vorhanden ist und die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet, ferner weder im obern Behälter noch in der Röhre plötzliche Querschnittsänderungen vorkommen, endlich auck keine Contraction bei der Einmündung der Röhre Statt findet, hat man für den hydraulischen Druck auf die Flächeneinheit in irgend einem Puncte des Behälters, wegen $a=F$ und $n=n'\,..=0$:

$$q=\gamma\,\mathfrak{z}=\gamma z+\gamma h';$$

dagegen für irgend einen Querschnitt der Röhre, z. B. bei c (Fig. 132) wegen $a=A$ und wenn man den in der Regel sehr kleinen Quotienten $\frac{A^2}{F^2}$ wieder ausläſst:

$$q=\gamma z+\gamma h'-\gamma\left(1+n\frac{l}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

oder da für diesen Fall die Gleichung (3) in Nr. **188** in $H=\frac{v^2}{2g}\left(1+n\frac{L}{D}\right)$ übergeht, woraus $\frac{v^2}{2g}=\frac{H}{1+n\frac{L}{D}}$ folgt, auch:

$$q = \gamma h' + \gamma z - \gamma H \frac{1 + n\frac{l}{D}}{1 + n\frac{L}{D}} \quad (13)$$

Da dieser Quotient $1 + n\frac{l}{D} : 1 + n\frac{L}{D}$, besonders wenn l nicht sehr verschieden von L ist, also namentlich für die untern Querschnitte der Leitung, nahe $= \frac{l}{L}$ ist; so hat man auch sehr nahe

$$q = \gamma h' + \gamma \left(z - \frac{l}{L} H\right) \quad (14)$$

Anmerkung. Findet in einer horizontalen Röhrenleitung keine plötzliche Verengung oder Erweiterung, so wie auch keine Contraction beim Eintritt des Wassers Statt, so ist, wenn die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet, nach der Formel (k) in Nr. 197, wegen $f = a = A$, $n' = n'' = .. = 0$ und $z = H$ sofort:

$$\mathfrak{z} - h'' = n \frac{l'}{D} \frac{v^2}{2g},$$

so, daſs also der Überschuſs des innern Wasserdruckes (oder wenn man den Druck der Atmosphäre, da er, wenn es sich z. B. um die Bestimmung der Wanddicke handelt, von innen und auſsen gleich stark ist und sich aufhebt, unberücksichtigt läſst, sofort der hydraulische Druck) an dem betreffenden Querschnitt, dem Drucke einer Wassersäule gleich kommt, welche nothwendig ist, um die Reibung des Wassers in jenem Theile der Röhre, welcher zwischen der gedrückten Stelle und der Ausmündung liegt, zu überwinden. Dieser Druck wächst also genau wie die Entfernung der gedrückten Stelle von der Ausmündung, in welchem Puncte er gleich Null ist.

Ist dagegen die Ausmündung verengt und vernachlässigt man den Röhrenwiderstand, so folgt wieder aus derselben Formel (k), wegen $a = A$:

$$\mathfrak{z} - h'' = \frac{A^2}{f^2}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = H - h \text{ oder } \gamma(\mathfrak{z} - h'') = \gamma(H - h)$$

d. h. der Überschuſs dieses Druckes, oder wenn man den atmosphärischen Druck $\gamma h''$ unberücksichtiget läſst, der hydraulische Druck, ist in diesem Falle in der ganzen Röhre derselbe, und zwar gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Höhe die um die Geschwindigkeitshöhe des flieſsenden Wassers verminderte Druckhöhe ist. (Vergleiche §. 348.)

199. Ist B (Fig. 132) jener Punct des Wasserspiegels, welcher lothrecht über der Einmündung C der Röhre liegt, und zieht man die Gerade BD; so werden in der Regel die Stücke Bb und BD sehr wenig von jenen Cc und CD, d. i. von l und L verschieden seyn, so, daſs man nahe $\frac{Bb}{BD} = \frac{l}{L}$, und wegen $ab : ED = Bb : BD$ auch $ab = \frac{Bb}{BD} ED = \frac{l}{L} H$ setzen kann.

Da nun $ac = z$ ist, so wird nahe $bc = z - \frac{l}{L} H$, folglich nach der letzten Gleichung (14) der hydraulische Druck q in c sehr nahe gleich $\gamma h' + \gamma . bc$, d. i. gleich dem hydrostatischen Drucke einer oben offenen Wassersäule von der Höhe bc seyn, auf deren obere Fläche also noch der atmosphärische Druck $\gamma h'$ wirkt.

Würde man daher die Röhre c an der obern Seite durchbohren und auf diese Öffnung ein oben offenes Rohr (einen sogenannten Piezometer oder Druckmesser) aufsetzen, so würde das Wasser darin bis auf die Höhe b steigen und sonach den in diesem Puncte der Leitung Statt findenden hydraulischen Druck messen oder angeben.

Macht man die über B gezogene Verticale $BF = h'$, d. i. gleich der Höhe einer mit dem Luftdrucke im Gleichgewichte stehenden Wassersäule (also nahe $= 32$ Fuſs) und zieht FG parallel mit BD; so wird der in c herrschende hydraulische Druck q mit Inbegriff des atmosphärischen durch das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe cN ausgedrückt, oder es ist $q = \gamma . Nc$. (Vergleiche auch die Anmerkungen zu §. 348.)

Anmerkung. Liegt der betreffende Punct c in b, so ist $bc = 0$ und $q = \gamma h' = \gamma . Nb$. Liegt c in N, so ist $bc = - bN = - h'$ und $q = 0$. Könnte c über N z. B. in c' liegen, was z. B. der Fall wäre, wenn die Leitung die Form $Cc'D$ hätte, so wäre cN, also auch der Druck q negativ. Es ist jedoch leicht zu sehen, daſs die Gerade FG die Grenze ist, über welche hinaus kein Punct der Leitung liegen, ja daſs man selbst nicht einmal so weit gehen darf, wenn der Ausfluſs durch die Leitung möglich seyn soll.

Theilt man die ganze Druckhöhe $ED = H$ in die beiden Höhen $EH = h_1$ und $HD = h_2$, wovon also die erstere dem Zufluſsbehälter oder Reservoir und die letztere der Röhre zukommt; so ist, wenn die Röhre ohne alle Verengungen und Biegungen in die freie Luft ausmündet, nach Gleichung (3) in Nr. 188:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man für den Reibungswiderstand den Ausdruck (2) in Nr. 178 wählt, auch:

$$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D} (\alpha v + \beta v^2).$$

Damit nun das Wasser den Querschnitt der Röhre völlig ausfülle oder mit vollem Querschnitt ausfliese, muſs das Reservoir eine hinlängliche Quantität Wasser in die Röhre drücken, was nur geschieht, wenn $h_1 > \frac{v^2}{2g}$ also $h_2 < \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ ist, eine Bedingung, welche ohne Reibungswiderstand gar nicht möglich wäre, indem das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen würde.

Diese Bedingungen kann man, wenn sie nicht ohnehin schon vorhanden sind, dadurch herbeiführen, dafs man entweder das Reservoir tiefer, also h_1 gröfser macht, oder die Leitung unter Wasser ausmünden läfst und dadurch h_2 vermindert.

So beträgt in dem Beispiele 1, in §. 345 (S. 310) die Widerstandshöhe der $764\frac{1}{2}$ Klafter langen Leitung nahe 16·73 und die ganze Gefällshöhe 16·83 Fufs, also die wirksame Druckhöhe $\frac{1}{10}$ Fufs, in Folge welcher das Wasser nahe mit $2\frac{1}{2}$ Fufs Geschwindigkeit aus der Leitung ausfliefst. Würde man nun die Druckhöhe des Reservoirs $h_1 < \frac{1}{10}$ also jene der Leitung $h_2 > 16·73$ Fufs nehmen, so würde das Wasser, da es in der Leitung eine beschleunigte Bewegung erhielte, nicht mehr mit vollem Querschnitte in die freie Luft ausfliefsen.

Von dem Stofse eines isolirten Wasserstrahles.

(§. 353.)

200. Um die Pressungen oder den hydraulischen Druck eines Wasserstrahles zu finden, welcher in einer bestimmten Richtung und mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit gegen die Oberfläche eines festen Körpers trifft, sey allgemein CM (Fig. 133) die Richtung und V die Geschwindigkeit des an die Fläche AMB stofsenden isolirten Strahles; MD die Richtung und v die Geschwindigkeit nach und mit welcher diese Fläche gleichförmig ausweicht oder sich fortbewegt; endlich BG die Richtung und u die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verläfst.

Um die Untersuchung zu vereinfachen und das Ganze auf ein System zurückzuführen, in welchem die Fläche AMB ruht, kann man sich, ohne dafs dadurch an dem mechanischen Zustande des vorliegenden Systemes etwas geändert wird, vorstellen, dafs allen Puncten desselben nach der gemeinschaftlichen Richtung MD' die gleichförmige Geschwindigkeit v, welche nämlich jener der Fläche AMB gleich und gerade entgegengesetzt ist, mitgetheilt werde; dadurch erhält man ohne Änderung der Sache ein System, in welchem die Fläche AMB ruht, dagegen das ein- und austretende Wasser die sogenannte relative Geschwindigkeit gegen diese Fläche annimmt.

Schneidet man daher $MC' = MC = V$, ferner $MD' = MD = v$ ab und construirt das Parallelogramm $C'D'$; so stellt die Diagonale ME