Ausflufs aus einem Gefäfs, welches um eine verticale Achse gedreht wird.

176. Wird das, bis auf eine gewisse Höhe mit einer schweren incompressibeln Flüssigkeit gefüllte Gefäfs BF (Fig. 111) mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse CG umgedreht, so findet man den Zustand des Gleichgewichtes der Flüssigkeit, welche an dieser Bewegung Theil nimmt, wenn man berücksichtiget, dafs auf jedes Theilchen M von der Masse m erstlich die Schwerkraft nach lothrechter Richtung $KM = g$ und dann noch die Centrifugalkraft LM nach horizontaler Richtung wirksam ist. Setzt man den, dem Puncte M entsprechenden Halbmesser $PM = y$, so ist die Gröfse dieser letztern Kraft, ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen (Nr. **60**, Anmerk.) $LM = yw^2$, so, dafs wenn man das Kräftenparallelogramm LK ergänzt, die Resultante aus diesen beiden Kräften KM und LM sofort $QM = \sqrt{[g^2 + (yw^2)^2]}$ ist, welche in der Richtung QM wirkt. Hieraus folgt (**138**) dafs das genannte Gleichgewicht der Flüssigkeit nur bestehen kann, wenn die freie Oberfläche, und folglich auch alle Niveauschichten in jedem Puncte auf der entsprechenden Richtung QM normal stehen.

Ist daher BF ein durch die Achse CG geführter verticaler Durchschnitt, NAN' die von der freien Oberfläche gebildete Curve, MT die an irgend einen Punct M derselben geführte Tangente, so wie für diesen Punct $AP = x$, $PM = y$ als rechtwinkelige Coordinaten und der Winkel $MTC = \alpha$; so folgt wegen W. QML = W. MTC sofort:

$$tang\,\alpha = \frac{QL}{ML} = \frac{KM}{ML} = \frac{g}{yw^2}.$$

und da auch, wie bekannt $tang\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man durch Gleichsetzung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{yw^2} \quad \text{oder} \quad y\,dy = \frac{g}{w^2}\,dx.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$y^2 = \frac{2g}{w^2}\,x \quad . \quad . \quad (1)$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Aus dieser Gleichung (1) folgt also, dafs die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine durch Umdrehung der Parabel NAN', deren Parameter $= \frac{2g}{w^2}$ ist und Scheitel A in der Umdrehungsachse liegt, erzeugte paraboloidische Fläche bildet. (Vergleiche §. 399.)

Anmerkung. Da die in horizontaler Richtung wirkende Centrifugalkraft keinen Einfluſs auf die lothrecht wirkende Schwerkraft hat, so muſs in irgend einem Puncte J der Druck p auf die Flächeneinheit eben so groſs, nämlich $p = \gamma h$ seyn, wenn $JM = h$ und γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit ist, als er in einer ruhigen Flüssigkeit auf einen Punct Statt findet, welcher um die Tiefe h unterm horizontalen Wasserspiegel liegt. (Der atmosphärische Druck ist dabei wieder ausgelassen.) Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes auch dadurch überzeugen, daſs man die auf das Theilchen M in der Richtung QM drückende Kraft, wieder in die zwei ursprünglichen Seitenkräfte KM und LM nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt, wodurch die erstere $= g$ also gerade so wie die Schwerkraft wirkt.

Bildet die Umdrehungsachse CG zugleich die geometrische Achse des Gefäſses, welches also gegen diese symmetrisch ist; so heben sich die, in je zwei diametral gegenüberliegenden, gleich weit von der Achse abstehenden Puncten, wirkenden Centrifugalkräfte auf, d. h. die Resultante der aus den sämmtlichen Centrifugalkräften hervorgehenden Pressungen, ist auf die ganze Flüssigkeit gleich Null, folglich äuſsert sich der Gesammtdruck der Flüssigkeit bloſs in verticaler Richtung und es ist dieser gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

177. Um nun den Ausfluſs der Flüssigkeit aus dem Gefäſs DN (Fig. 112), welches eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse BC besitzt, zu untersuchen, sey, sobald der Beharrungsstand eingetreten, DAE die in der vorigen Nr. bestimmte Parabel der freien Oberfläche der Flüssigkeit und $AB = h$ die Druckhöhe für den Scheitel. Denkt man sich nun in den Puncten B und N des Bodens zwei, im Verhältniſs zum Querschnitt des Gefäſses, sehr kleine Öffnungen, setzt $BN = y$ und die Ausfluſsgeschwindigkeiten in diesen Öffnungen beziehungsweise $= v$ und V; so ist nach der vorigen Anmerk. die Pressung der Flüssigkeit in diesen Puncten B und N genau so groſs wie in einem ruhenden Gefäſse, in welchem AB und MN die Druckhöhen sind, also $v^2 = 2g \cdot AB$ und $V^2 = 2g\ MN$, oder da $AB = h$ und $MN = NP + PM = h + x = h + \frac{y^2 w^2}{2g}$ (vorige Nr., Gleich. 1) ist, auch $v = \sqrt{2gh}$ und $V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]}$ oder wenn man die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes N, d. i. $yw = u$ setzt, auch $V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh + u^2)}$. (Vergleiche § 401.)

Die Ausfluſsgeschwindigkeit nimmt also immer mehr zu, je weiter die Öffnung von der Rotationsachse CB absteht.

Ist für die Seitenöffnung O der Abstand $AR = h'$, jener $OR = Y$ und die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes $O = U$; so ist für diese kleine Seitenöffnung bei unveränderlichem Spiegel der Flüssigkeit die constante, bei veränderlichem Spiegel die momentane Ausflufsgeschwindigkeit: $V = \sqrt{\left[2g\left(h' + \frac{Y^2 w^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh' + U^2)}$.

Anmerkung 1. Es versteht sich von selbst, dafs diese Resultate keine Änderung erleiden, wenn auch die Oberfläche der Flüssigkeit nicht frei, sondern das Gefäfs oben geschlossen ist, so, dafs sich dieser parabolische Trichter gar nicht bilden kann; immer kommt es dabei auf die Rotationsgeschwindigkeit der Ausflufsöffnung an.

Anmerkung 2. Um den Ausflufs aus einer engen Röhre Ef (Fig 113) zu bestimmen, welche ebenfalls mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse AB umgedreht wird, darf man nur wieder auf das vorige Gefäfs zurückgehen und sich vorstellen, dafs sich die Flüssigkeit in lauter sehr feinen Fäden oder Canälen von beliebiger Form, wovon MO (Fig. 112) einer seyn soll, durch die Ausflufsöffnung O ergiefse; dafür war aber, wenn man $Pr = h$ und $RO = y$ setzt, die Ausflufsgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]} \ldots \quad (\alpha)$$

Setzt man aber $AP = y'$, ferner $Mr = h'$, d. i. $h' = h + PM = h + \frac{y'^2 w^2}{2g}$ (176), so ist $h = h' - \frac{y'^2 w^2}{2g}$ und wenn man auf jeder Seite dieser Gleichung $\frac{y^2 w^2}{2g}$ addirt:

$$h + \frac{y^2 w^2}{2g} = h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}$$

so, dafs man die vorige Gleichung (α) auch unter der Form schreiben kann:

$$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right)\right]}.$$

Dieselbe Gleichung gilt nun aber auch für die erwähnte Röhre in Fig. 113, wenn man darin $AB = h'$, $AC = y'$ und $BD = y$ setzt und dabei den Spiegel EF als unveränderlich voraussetzt.

Hier ist durchaus angenommen worden, dafs der, gegen die Oberfläche der Flüssigkeit etwa Statt findende Druck (wie z, B. jener der Atmosphäre) jenem gegen die Ausflufsöffnung gleich sey; wäre diefs nicht der Fall, sondern der Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche EF (Fig 113) $= p$ und auf die Ausflufsöffnung $ef = p'$, so müfste z. B. die Geschwindigkeit V der letzten Formel aus der Gleichung

$\gamma \frac{V^2}{2g} = p - p' + \gamma \left[h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right]$ bestimmt werden, wobei wieder γ das Gewicht der cubischen oder Volumen Einheit der Flüssigkeit ist.