$$x = \frac{Q - \cdot 57\, b\, h \sqrt{2\, g\, h}}{\cdot 62\, b \sqrt{2\, g\, h}} = \frac{Q}{\cdot 62\, b \sqrt{2\, g\, h}} - \cdot 92\, h \quad (i)$$

folgt.

Liegt endlich die Wehrkrone im ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel, so ist $Q = \cdot 57\, b\, h \sqrt{2\, g\, h}$ und diese Wassermenge muſs nach der obigen Bemerkung genau jener gleich seyn, welche wirklich über das Wehr abflieſsen soll.

Die Stauweite selbst, d. i. die Entfernung, auf welche sich die Stauung stromaufwärts erstreckt, kann näherungsweise durch die ganz einfache Formel $h\, Cot.\, \alpha$ ausgedrückt werden, wenn α den Neigungswinkel der Oberfläche des Wassers unmittelbar bevor es zur Wehre gelangt mit dem Horizonte bezeichnet.

Ausfluſs bei *veränderlicher* Druckhöhe.

(§. 334.)

162. Es sey AOB (Fig. 104) der verticale Durchschnitt eines z. B. mit Wasser bis AB gefüllten Gefäſses von veränderlichem Querschnitt und mit einer horizontalen Bodenöffnung ab versehen. Nimmt man an, der Wasserspiegel AB sey während der Zeit t, diese vom Augenblicke an gerechnet, als der Ausfluſs beginnt, bis MM' und dann in dem darauf folgenden Zeitelemente $\mathrm{d}t$ bis mm' gesunken; nimmt man ferner die durch den tiefsten Punct O gezogene Verticallinie OC zur Abscissenachse und setzt $OC = h$, $OP = x$ also $Pp = \mathrm{d}x$; so kann man die Druckhöhe x während der Zeit $\mathrm{d}t$, d. i während der Spiegel um $Pp = \mathrm{d}x$ herabsinkt, und folglich die momentane Ausfluſsgeschwindigkeit als constant ansehen, und man erhält daher, wenn a die Fläche der Ausfluſsöffnung ist, für die theoretische in der Zeit $\mathrm{d}t$ ausflieſsende Wassermenge (§ 322):

$$\mathrm{d}P = a\, \mathrm{d}t \sqrt{2\, g\, x}.$$

Ist aber die Querschnittsfläche des Gefäſses an dieser Stelle $MM' = U$, so ist auch $\mathrm{d}P = U\, \mathrm{d}x$, folglich mit Rücksicht, daſs x abnimmt, wenn t zunimmt ($\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}t$ daher verschiedene Zeichen erhalten müssen):

(a) . . $a\, \mathrm{d}t \sqrt{2\, g\, x} = -\, U\, \mathrm{d}x$, woraus $\mathrm{d}t = -\dfrac{U x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x}{a \sqrt{2\, g}}$ folgt.

Die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, ist daher:

$$t = -\frac{1}{a\sqrt{2\, g}} \int_{h}^{h'} U\, x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a\sqrt{2\, g}} \int_{h'}^{h} U\, x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x \quad (1)$$

Da für die Entleerungszeit T, $h' = 0$ gesetzt werden muſs; so ist

$$T = \frac{1}{a\sqrt{2\, g}} \int_{0}^{h} U\, x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x \quad (2)$$

163. Ist der Querschnitt des Gefäſses constant und $= A$, so hat man nach der Formel (1):

$$t = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

(§. 335. Gleich. 2)

und nach der Formel (2):

$$T = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_{0}^{h} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{A}{a\sqrt{2g}} \sqrt{h}$$

(§. 334. Gleich. 1.)

164. Ist das Gefäſs durch Umdrehung der Curve AMO um die Achse CO entstanden, so ist, wenn man die zu x gehörige Ordinate $PM = y$ setzt, $U = y^2 \pi$, wodurch die vorigen Gleichungen (1) und (2) in die nachstehenden:

$$(3) \quad t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} y^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \quad \text{und} \quad (4) \quad T = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{0}^{h} y^2 x^{-\frac{1}{2}} dx$$

übergehen.

165. So hat man z. B. wenn AMO eine gerade Linie ist, für den Ausfluſs aus einem kegelförmigen Gefäſse, vom Halbmesser $CA = CB = r$ und der Höhe $CO = h$, nach diesen Formeln (3) und (4), wegen $y = \frac{r}{h} x$ sofort:

$$t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_{h'}^{h} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \frac{r^2}{h^2} (h^2\sqrt{h} - h'^2\sqrt{h'})$$

und
$$T = \frac{2}{5} \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} r^2 \sqrt{h} = \frac{6}{5} \frac{V}{a\sqrt{2gh}},$$

wenn man nämlich den Inhalt des Gefäſses $\frac{1}{3} r^2 \pi h = V$ setzt.

Würde die Druckhöhe h nicht abnehmen, so würde ein gleiches Volumen V schon in der Zeit $T' = \frac{V}{a\sqrt{2gh}}$ ausflieſsen, also ist $T = \frac{6}{5} T'$.

166. Ist die Curve AMO ein Kreisbogen vom Halbmesser r, also daſs Gefäſs kugelförmig, so ist wegen $y^2 = 2rx - x^2$, nach der Formel (3):

$$t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{1}{2}} dx (2rx - x^2) \quad \text{d. i.}$$

$$t = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3} r (h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{5} (h^{\frac{5}{2}} - h'^{\frac{5}{2}}) \right]$$

und nach der Formel (4), die ganze Ausfluſszeit:

$$T = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}}\left(\tfrac{2}{3} r h^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5} h^{\frac{5}{2}}\right)$$

Für die volle Halbkugel wird wegen $h = r$:

$$T = \tfrac{14}{15}\,\frac{\pi r^{\frac{5}{2}}}{a\sqrt{2g}} = \tfrac{7}{5}\,\frac{V}{a\sqrt{2rg}}$$

wenn man den Inhalt $\frac{2}{3} r^3 \pi = V$ setzt.

Für die ganze gefüllte Kugel wird, wegen $h = 2r$:

$$T = \tfrac{16}{15}\,\frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{2g}}\,r^{\frac{5}{2}} = \tfrac{4}{5}\,\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{2rg}}\,V$$

wenn man den Inhalt der Kugel $\frac{4}{3} r^3 \pi = V$ setzt.

Anmerkung. Es unterliegt keinem Anstande auf dem angedeuteten Wege noch die Ausflufszeit aus vielen andern regelmäfsigen Gefäfsen zu finden. Bei irregulären Gefäfsen, mufs man zur Näherungsmethode Zuflucht nehmen.

Auch versteht es sich von selbst, dafs man, um auf die wirkliche Ausflufsmenge überzugehen, in allen diesen Formeln wieder na für a setzen mufs, wenn n den entsprechenden Contractions- oder Reductionscoefficienten bezeichnet.

167. Erhält das Gefäfs einen beständigen Zuflufs von m Kubikfufs per Secunde oder in der Zeiteinheit, so verwandelt sich die Relation (α) in Nr. **162**, da jetzt während dem Zeitelement dt nicht blofs die Schichte $U\,dx$, sondern auch noch die Wassermenge $m\,dt$ ausfliefst, in die folgende:

$$a\,dt\sqrt{2gx} = -U\,dx + m\,dt,$$

woraus:

$$dt = \frac{-U\,dx}{-m + a\sqrt{2gx}} \text{ folgt.}$$

Für ein prismatisches Gefäfs von dem constanten Querschnitt $U = A$ erhält man also für die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht:

$$t = A\int_{h'}^{h} \frac{dx}{-m + a\sqrt{2gx}}$$

oder wenn man $x^{\frac{1}{2}} = y$, also $dx = 2y\,dy$ setzt und in der bekannten Integralformel $\int \frac{y\,dy}{a + by} = \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2}\,logn\,(a + by)$ gehörig substituirt, sofort:

$$t = 2A\left[\frac{\sqrt{h} - \sqrt{h'}}{a\sqrt{2g}} + \frac{m}{2ga^2}\,logn.\left(\frac{-m + a\sqrt{2gh}}{-m + a\sqrt{2gh'}}\right)\right] \ldots (1) \quad (\S.\,336)$$

Da man für die Entleerungszeit T wieder $h' = 0$ setzen mufs, so erhält man:

$$T = 2A\left[\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + \frac{m}{2ga^2}\,logn.\left(1 - \frac{a}{m}\sqrt{2gh}\right)\right] \ldots (2)$$

Ist nun die beständig zufliefsende Wassermenge $m = a\sqrt{2gh}$, so verwandelt sich die logarithmische Gröfse in $log\, o$, und da dieser Logarithmus, folglich auch T imaginär wird; so ist diefs ein Zeichen, dafs unter diesen Umständen das Gefäfs niemals leer werden kann.

Anmerkung. Um überhaupt die Höhe h' zu finden, bis zu welcher der Wasserspiegel sinken mufs, damit das ausfliefsende Wasserquantum dem zufliefsenden gleich wird, von welchem Momente an, dann der Wasserspiegel constant bleibt, hat man aus $m = a\sqrt{2gh'}$ diese gesuchte Höhe

$$h' = \frac{m^2}{2ga^2} \qquad (\beta)$$

Um also die Zeit zu finden, während welcher der Wasserspiegel so weit herabsinkt, um dann constant zu bleiben, mufs man diesen Werth von h' in der vorigen Formel (1) substituiren. Da jedoch dafur die Formel $t = \infty$ gibt, so ist diefs ein Beweis dafs sich der Wasserspiegel in aller Strenge niemals auf dieser Höhe h' unveränderlich erhält, sondern sich dieser Grenze in unendlich kleinen Oscillationen nähert, die jedoch für die Wirklichkeit als verschwindend erscheinen. Da übrigens die obige Gleichung (β) den Werth von h' auch $> h$ geben kann; so mufs der Wasserspiegel, anstatt um die genannte Grenze zu erreichen, zu fallen, vielmehr steigen, in welchem Falle in der Formel (1) nur h' mit h vertauscht werden darf, weil das Integrale in diesem Falle von h bis h' genommen werden mufs.

Endlich versteht es sich wieder von selbst, dafs, um auf die wirkliche Ausflufsmenge überzugehen, hier wie überall statt der Ausflufsöffnung a das Product na gesetzt werden mufs, wenn n den betreffenden Contractions- oder Reductionscoeffizienten bezeichnet.

168. Befindet sich bei Voraussetzung eines Gefäfses von durchaus gleicher Weite die Ausflufsöffnung in einer verticalen Seitenwand BC (Fig. 105); so sey, um hier nur den einfachsten Fall zu behandeln, diese bis zum Wasserspiegel reichende Öffnung ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h.

Ist nun der Wasserspiegel während der Zeit t von der Höhe $AB = h$ bis auf jene $AM = x$ herabgesunken, so sinkt er in dem darauf folgenden Zeitelement dt noch um $Mm = dx$ und man hat nach Nr. **158** für die während dieser Zeit ausfliefsende theoretische Wassermenge:

$$dM = \tfrac{2}{3}\, b\, x\, dt \sqrt{2gx}.$$

Da aber, wenn der horizontale Querschnitt des Gefäfses $= A$ ist, dieselbe Wassermenge auch durch $A\,dx$ ausgedrückt wird, so hat man, mit Rücksicht auf die Zeichen von dx und dt:

$$\tfrac{2}{3}\, b\, x\, dt \sqrt{2gx} = -A\, dx$$

woraus sofort $$dt = -\tfrac{3}{2}\, \frac{A}{b\sqrt{2g}}\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx$$ folgt.

Um daher die Zeit zu finden, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, hat man durch Integration, wenn man gleich das Zeichen ändert, folglich die Grenzen umkehrt:

$$t = \tfrac{3}{2} \frac{A}{b\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{3}{2}} dx = -3 \frac{A}{b\sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h'}}\right)$$

oder
$$t = \frac{3A}{b\sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h'}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right)$$

(Man vergleiche §. 337.)

169. Stehen in zwei communicirenden Gefäſsen AD und df, (Fig. 106), bevor die Communication, z. B. durch das Öffnen eines Hahnes hergestellt ist, auf ungleicher Höhe AB, ab; so findet man die Zeit, binnen welcher nach Herstellung der Communication beide Wasserspiegel gleich hoch stehen, auf folgende Weise:

Es seyen nämlich sowohl die beiden Gefäſse AD, df als auch das Verbindungsrohr prismatisch oder cylinderisch und ihre constanten Querschnitte beziehungsweise A, A', a; ferner sey während der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt als die Communication hergestellt worden, der Wasserspiegel AB bis MN gesunken und jener ab bis mn gestiegen und dafür $DN = x$, $dm = y$, $DB = h$ und $da = h'$; so wird im nächst darauf folgenden Zeitelement dt der erstere noch um dx fallen und der letztere um dy steigen, so daſs also, mit Rücksicht darauf, daſs x abnimmt während y zunimmt oder umgekehrt (wodurch dx und dy entgegengesetzte Zeichen erhalten):

$$A' dy = -A dx \quad \text{und (§. 338)} \quad A dx = -a dt \sqrt{2g(x-y)}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen integrirt gibt $A'y = C - Ax$, oder da für $x = h$, $y = h'$ seyn soll, daher die Constante $C = Ah + A'h'$ wird, auch:
$$Ax + A'y = Ah + A'h' \ldots (m)$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung y, setzt diesen Werth in die zweite der vorigen Differenzialgleichungen und integrirt diese; so erhält man:
$$dt = -\frac{A\sqrt{A'}}{a\sqrt{2g}} dx \,[(A + A')x - (Ah + A'h')]^{-\frac{1}{2}}$$

und
$$t = C - \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A + A')\sqrt{2g}} \sqrt{[(A + A')x - (Ah + A'h')]}$$

oder da für $t = 0$, $x = h$ seyn muſs, also die Constante
$$C = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A + A')\sqrt{2g}} \sqrt{[A'(h - h')]} \text{ wird, auch:}$$

$$t = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A + A')\sqrt{2g}} \left[\sqrt{[A'(h-h')]} - \sqrt{[(A + A')x - Ah - A'h']}\right]$$

als diejenige Zeit während welcher der Wasserspiegel AB bis MN sinkt, oder jener ab bis mn steigt.

Ist nun die gesuchte Zeit, in welcher beide Spiegel gleich hoch stehen $= T$, so mufs man um T zu erhalten in der vorigen Gleichung $x = y = \frac{Ah + A'h'}{A + A'}$ (aus Gleich. m) setzen; dadurch erhält man, nach gehöriger, einfacher Reduction:

$$T = \frac{2AA'\sqrt{(h - h')}}{a(A + A')\sqrt{2g}},$$

wobei wieder, wenn eine Contraction Statt findet, na statt a zu setzen ist. (§. 341.)

Ausflufs aus einem Gefäfs, welches irgend eine geradlinige, veränderliche Bewegung besitzt.

170. Wird das Gefäfs AD (Fig. 107), welches eine schwere, incompressible Flüssigkeit enthält, in der Richtung RS mit einer veränderlichen Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t den Werth v haben soll, fortbewegt; so nimmt die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Lage ab an, welche sich auf folgende Weise bestimmen läfst.

Betrachtet man in der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche irgend einen Punct M, dessen Masse $= m$ seyn soll, so wirken auf diesen nach der Richtung Mf die Schwerkraft mit dem Drucke mg und nach der Richtung MS die bewegende Kraft $m\frac{dv}{dt}$ (Nr. **56**). Um aber den während der Bewegung eintretenden Zustand auf das statische Gleichgewicht zurückzuführen, denke man sich an den Punct M eine der nach MS wirksamen Kraft $m\frac{dv}{dt}$, welcher die wirkliche Bewegung des Flüssigkeitstheilchens entspricht, gleiche Kraft nach gerad entgegesetzter Richtung von M gegen R $\left(\text{d. i. die Kraft } -m\frac{dv}{dt}\right)$ angebracht, so wird diese, wenn das Gefäfs keine Bewegung hat, mit dem ganzen Systeme im Gleichgewichte stehen. (M. s. die nachstehende Anmerkung.)

Ist also $Mf = mg$ und $Mn = Mn' = m\frac{dv}{dt}$, so wird die Gestalt der freien Oberfläche der Flüssigkeit, so wie die ihrer Niveauschichten (Nr. **138**) der Bedingung entsprechen müssen, dafs die Flüssigkeit unter der Einwirkung der beiden Kräfte Mn und Mf oder ihrer Resultirenden Md auf jedes ihrer Theilchen von der Masse m im Gleichgewichte bleibe; dieses findet aber (**138**) Statt, wenn der Spiegel ab, so wie alle Niveauschichten auf dieser Resultirenden Md perpendikulär stehen.