

$$h_1 = \frac{M^2}{2g a_1^2}, \quad h_2 = \frac{M^2}{2g a_2^2} \dots$$

Da nun $h_1 + h_2 + h_3 + \dots = h$ ist, so folgt:

$$h = \frac{M^2}{2g} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \right),$$

folglich:
$$M = \sqrt{\left(\frac{2gh}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \right)}$$

Sind alle Öffnungen gleich groß, nämlich $= a$, und ihre Anzahl $= n$; so erhält man:
$$M = a \sqrt{\left(\frac{2gh}{n} \right)},$$

so, daß also bei derselben Druckhöhe h die ausfließende Wassermenge M um so kleiner wird, je größer n , d. i. die Anzahl der Öffnungen ist.

Anmerk. 1. Um (im Falle die Öffnungen nicht so erweitert und abgerundet sind, daß keine Contraction Statt findet) die Contraction dabei zu berücksichtigen, muß man wieder $m_1 a_1, m_2 a_2 \dots m a$ statt $a_1, a_2 \dots a$ setzen, wenn $m_1, m_2 \dots m$ die entsprechenden Coefficienten sind.

Anmerkung 2. Münden die oben geschlossenen Gefäße, wie in Fig. 99. a, ohne Zwischenwände ineinander ein und nehmen diese in der Weite vom ersten bis zum letzten immer mehr ab, so, daß das letzte Gefäß das engste ist; so darf man in der obigen Formel (δ) (Nr. 156) nur $a_1 = a_2 = A_1, a_3 = A_2, a_4 = a_n = A_3 = A_{n-1}$ setzen. Man erhält dadurch, $h' = h''$ genommen:

$$h = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g} \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_4^2} \right] = \frac{v_1^2}{2g}$$

so, daß also die Zwischengefäße auf die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe der letzten Ausflußöffnung a_1 keinen Einfluss haben, oder die einmal gewonnene Geschwindigkeit nicht mehr verloren geht.

Befindet sich dagegen, wie in Fig. 99. b, zwischen dem letzten Gefäß ein engeres, so, daß man für die dargestellte Anordnung $a_1 = A_1,$

$a_2 = a_3 = A_2$ und $a_4 = A_3$, folglich aus der genannten Formel $h = \frac{v_1^2}{2g} \frac{a_1^2}{a_2^2}$

erhält, so folgt, weil $\frac{a_1}{a_2} v_1$ die der Ausflußöffnung a_2 entsprechende Geschwindigkeit ist, daß die erforderliche Druckhöhe h nicht nach der, der letzten Ausflußöffnung a_1 , sondern nach jener, der engsten Öffnung $a_2 = a_3$, zukommenden Geschwindigkeit, wovon wieder ein Theil verloren geht, bemessen oder bestimmt werden muß.

Seitenausfluß bei geringen Druckhöhen.

(§. 331.)

158. Bildet die Öffnung AD (Fig. 101) ein Rechteck von der Breite $AB = b$ und Höhe $AC = h$, dessen Seite AB im Wasserspiegel

liegt; so hat man für die aus dem unendlich schmalen Streifen $Pp = b dx$ per Secunde ausfließende Wassermenge dM , wenn $AP = x$ ist,

$dM = b dx \cdot \sqrt{2gx} = b \sqrt{2g} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx$; folglich ist:

$$M = b \sqrt{2g} \int_0^h x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} b h \sqrt{2gh} \quad (\S. 331).$$

159. Hat man statt dem Rechteck ein rechtwinkeliges Dreieck ACD (Fig. 102), dessen Spitze A im Wasserspiegel und Cathete CD horizontal liegt, und ist wieder $AC = h$, $CD = b$, $AP = x$, $PM = y$ und $Pp = dx$; so ist $dM = y dx \sqrt{2gx}$, oder wegen $y = \frac{b}{h} x$ auch $dM = \frac{b}{h} \sqrt{2g} \cdot x^{\frac{3}{2}} dx$, folglich:

$$M = \frac{b}{h} \sqrt{2g} \int_0^h x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} b h \sqrt{2gh}.$$

Für die umgekehrte Lage, d. i. wenn CD im Wasserspiegel liegt, folgt wegen $y = \frac{b}{h}(h - x)$ sofort $dM = \frac{b}{h} \sqrt{2g} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx (h - x)$ und daraus:

$$M = \frac{4}{15} b h \sqrt{2gh}.$$

Beide Querschnitte zusammen geben die Wassermenge von $\frac{2}{3} + \frac{4}{15}$, d. i. wieder von $\frac{2}{3} b h \sqrt{2gh}$, wie es seyn soll.

160. Für die trapezförmige Öffnung (Fig. 103), wovon die parallele Seite AB im Wasserspiegel liegen soll, sey $AB = B$, $CD = b$, $EC = FD = h$, $AE = b'$ und $BF = b''$; so ist nach den unmittelbar vorhergehenden Nrn., die per Secunde ausfließende Wassermenge $M = (\frac{2}{3} b + \frac{4}{15} b' + \frac{4}{15} b'') h \sqrt{2gh}$, oder wegen:

$$\frac{4}{15} (b' + b'') = \frac{4}{15} (B - b), \text{ wenn man reducirt:}$$

$$M = \frac{2}{15} (3b + 2B) h \sqrt{2gh}.$$

Eben so einfach läst sich M auch für die umgekehrte Lage des Trapezes bestimmen.

161. Ist die Öffnung ein Kreis vom Halbmesser r , dessen Mittelpunkt um die Tiefe h unterm Wasserspiegel liegt, so nehme man in der betreffenden verticalen Seitenwand die durch den Mittelpunkt des Kreises gezogene Verticallinie zur Abscissenachse und den Mittelpunkt zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten; so schliessen zwei unmittelbar aufeinander folgende Ordinaten die Fläche $2y dx$ ein, und wenn diese vom Mittelpunkt abwärts den Abstand x haben, so liegt dieses Flächenelement um die Tiefe $h + x$ unterm Wasserspiegel und es ist die per Secunde aus dieser unendlich niederen Öffnung ausfließende Wasser-

menge $dM = 2 y dx \cdot \sqrt{2 g (h + x)}$ oder wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ auch

$dM = 2 \sqrt{2 g h} \cdot dx \sqrt{(r^2 - x^2)} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{x}{h}\right)}$, oder wenn man

$\sqrt{\left(1 + \frac{x}{h}\right)} = \left(1 + \frac{x}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ in die bekannte Reihe auflöst, auch:

$$dM = 2 \sqrt{2 g h} \cdot dx \sqrt{(r^2 - x^2)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{h}\right) - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{x}{h}\right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{x}{h}\right)^4 + \dots \right].$$

Integrirt man diese Gleichung und nimmt die sämmtlichen Integrale

$\int dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$, $\frac{1}{2h} \int x dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$ u. s. w. innerhalb der Grenzen von $x = -r$ bis $x = +r$, so erhält man nach den bekannten Formeln, wenn man Kürze halber $r^2 - x^2 = X^2$ setzt:

$$\int_{-r}^{+r} dx \sqrt{X} = \frac{r^2}{2} \pi, \quad \int_{-r}^{+r} x dx \sqrt{X} = 0, \quad \int_{-r}^{+r} x^2 dx \sqrt{X} = \frac{r^4}{8} \pi,$$

$$\int_{-r}^{+r} x^3 dx \sqrt{X} = 0, \quad \int_{-r}^{+r} x^4 dx \sqrt{X} = \frac{r^6}{16} \pi, \quad \text{u. s. w. folglich,}$$

wenn man substituirt:

$$M = 2 \sqrt{2 g h} \cdot \frac{r^2 \pi}{2} \left[1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024} \left(\frac{r}{h}\right)^4 - \dots \right]$$

oder wenn man diese von der Einheit nur wenig abweichende convergente Reihe mit R und die Kreis- oder Ausflußöffnung $r^2 \pi$ mit F bezeichnet:

$$M = F R \sqrt{2 g h}.$$

Liegt der Scheitel des Kreises im Wasserspiegel, so wird wegen

$$h = r \text{ sofort: } M = F \sqrt{2 g h} \left(1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{1024} - \dots \right)$$

$$\text{oder nahe } M = .964 F \sqrt{2 g h} = .964 F \sqrt{2 r g}.$$

Übrigens kann man in jenen Fällen, in welchen $h > r$ ist, ohne Fehler $R = 1$, also $M = F \sqrt{2 g h}$ setzen, d. h. den Abstand h des Mittelpunctes vom Wasserspiegel als die mittlere Druckhöhe gelten lassen.

Anmerkung. Es ist hier der Ort einige Bemerkungen über die Anlagen von Wehren zu machen, weil es dabei vorzüglich auf die Bestimmung der über ein Wehr abfließende Wassermenge ankommt.

Wir haben bei der Voraussetzung, daß die Überfallsschwelle mit scharfen Kanten versehen sey, in §. 333 die nöthigen Formeln zur Bestimmung der abfließenden Wassermenge angegeben und namentlich bemerkt, daß nach den Versuchen von *Castel* über einen solchen Überfall, wenn die Seitencontractionen wegfallen, per Secunde die Wassermenge von (f)..

$Q = .443 b h \sqrt{2 g h}$ Kubikfuß abfließt, wenn b die Breite des Überfalles

und h die Höhe des Wasserstandes im Zufluscanal über den horizontalen Rand der Schwelle bezeichnet

Da jedoch die Wehren, welche zur Stauung des Wassers erbaut werden, keine scharfen Kanten, sondern eine ebene oder abgerundete Krone erhalten, so fällt dabei auch die untere Contraction weg und man hat nach *Eytelwein* statt des vorigen Ausdruckes jenen :

$$(g) \quad Q = .57 b h \sqrt{2 g h} \sqrt{\left(1 + .0364 \frac{u^2}{h}\right)}$$

wobei noch u die Geschwindigkeit des Wassers im Flusse etwas oberhalb des Wehres bezeichnet.

Bekanntlich erbaut man Wehren nur dort, wo der Wasserspiegel eines Flusses auf eine längere Strecke über seinen natürlichen Stand gehoben werden darf und entweder 1) kein natürliches Gefälle vorhanden, folglich um sich für technische Zwecke eine Betriebskraft zu schaffen, ein künstliches Gefäll gebildet werden soll, 2) wenn das vorhandene natürliche Gefäll nicht hinreichend ist, dieses also vergrößert werden soll, 3) wenn in einem Bach oder Fluß auf eine kurze Strecke seines Laufes ein starkes Gefäll (eine Stromschnelle) vorhanden ist, welches auf einen gewissen Punct concentrirt werden soll, 4) wenn die natürlichen Veränderungen oder Schwankungen im Wasserstande aufgehoben werden sollen und wenn endlich das durch die Stauung hervorzubringende Gefäll in der Regel nicht mehr als 8 Fufs beträgt.

Bezeichnet man die Stauung, welche durch das zu erbauende Wehr hervorgebracht werden soll mit h , die Breite des Wehres (gleich oder größer als jene des Flusses) mit b und die Wassermenge in Kubikfufs, welche per Secunde über das Wehr fließen soll, durch Q ; so erbaut man, wenn $Q > .57 b h \sqrt{2 g h}$ ein Überfall-Wehr (wobei die Krone desselben über dem ungestauten Spiegel des Flusses steht), ist $Q < .57 b h \sqrt{2 g h}$, so errichtet man ein Grundwehr (wobei die Wehrkrone unter dem ungestauten Spiegel bleibt), ist endlich $Q = .57 b h \sqrt{2 g h}$ so muß man die Krone des Wehres in den ungestauten Wasserspiegel des Flusses legen.

In der Regel wird man, wenn die Stauung nur bis 3 Fufs betragen soll, ein Grundwehr, bei 6 Fufs Stauung aber schon ein Überfallwehr errichten.

Setzt man, um die nöthige Höhe eines Überfallwehres zu bestimmen, die Tiefe der Wehrkrone unter dem gestauten Spiegel = x (Fig. 103 a); so ist nach Formel (g), wenn man den zweiten Wurzelfactor als zu unbedeutend von der Einheit abweichend ausläßt:

$$Q = .57 b x \sqrt{2 g x} \text{ und daraus } x = \left(\frac{Q}{.57 b \sqrt{2 g}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \cdot (h)$$

Ist dagegen (Fig. 103, b bei einem Grundwehr x die Tiefe der Wehrkrone unter dem ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel, so kann man zur Berechnung von Q annehmen, daß das Wasser von der Höhe h über den Überfall, jenes von der Höhe x dagegen durch eine untergetauchte Öffnung ausfließt; für den ersten Theil ist $q = .57 b h \sqrt{2 g h}$ und für den letztern §. 330) $q' = .62 b x \sqrt{2 g h}$, so, daß also $Q = q + q'$ und daraus, wenn man für q und q' diese Werthe substituirt:

$$x = \frac{Q - 57 b h \sqrt{2 g h}}{62 b \sqrt{2 g h}} = \frac{Q}{62 b \sqrt{2 g h}} - 92 h \quad (i)$$

folgt.

Liegt endlich die Wehrkrone im ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel, so ist $Q = 57 b h \sqrt{2 g h}$ und diese Wassermenge muß nach der obigen Bemerkung genau jener gleich seyn, welche wirklich über das Wehr abfließen soll.

Die Stauweite selbst, d. i. die Entfernung, auf welche sich die Stauung stromaufwärts erstreckt, kann näherungsweise durch die ganz einfache Formel $h \cot. \alpha$ ausgedrückt werden, wenn α den Neigungswinkel der Oberfläche des Wassers unmittelbar bevor es zur Wehre gelangt mit dem Horizonte bezeichnet.

Ausfluß bei veränderlicher Druckhöhe.

(§. 334.)

162. Es sey $A O B$ (Fig. 104) der verticale Durchschnitt eines z. B. mit Wasser bis AB gefüllten Gefäßes von veränderlichem Querschnitt und mit einer horizontalen Bodenöffnung ab versehen. Nimmt man an, der Wasserspiegel AB sey während der Zeit t , diese vom Augenblicke an gerechnet, als der Ausfluß beginnt, bis MM' und dann in dem darauf folgenden Zeitelemente dt bis mm' gesunken; nimmt man ferner die durch den tiefsten Punct O gezogene Verticallinie OC zur Abscissenachse und setzt $OC = h$, $OP = x$ also $Pp = dx$; so kann man die Druckhöhe x während der Zeit dt , d. i. während der Spiegel um $Pp = dx$ herabsinkt, und folglich die momentane Ausflugschwindigkeit als constant ansehen, und man erhält daher, wenn a die Fläche der Ausflußöffnung ist, für die theoretische in der Zeit dt ausfließende Wassermenge (§ 322):

$$dP = a dt \sqrt{2 g x}.$$

Ist aber die Querschnittsfläche des Gefäßes an dieser Stelle $MM' = U$, so ist auch $dP = U dx$, folglich mit Rücksicht, daß x abnimmt, wenn t zunimmt (dx und dt daher verschiedene Zeichen erhalten müssen):

$$(a) \dots a dt \sqrt{2 g x} = - U dx, \text{ woraus } dt = - \frac{U x^{-\frac{1}{2}} dx}{a \sqrt{2 g}} \text{ folgt.}$$

Die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, ist daher:

$$t = - \frac{1}{a \sqrt{2 g}} \int_h^{h'} U x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{a \sqrt{2 g}} \int_{h'}^h U x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (1)$$

Da für die Entleerungszeit T , $h' = 0$ gesetzt werden muß; so ist

$$T = \frac{1}{a \sqrt{2 g}} \int_0^h U x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (2)$$