Querschnitt MN nach der Formel $(u) = h' - \frac{v^2}{2g} = h' \quad h = -(h - h')$ negativ, so, dafs wenn man an dieser Stelle die Röhrenwand durchbohren würde, sofort durch diese Öffnung die äufsere Luft eindringen und bei CD mit austreten müfste; der Luftdruck wurde hierbei unberücksichtigt gelassen, d. i. auf AB und CD als gleich grofs angenommen.

Ausflufs aus communicirenden Gefäfsen.

156. Sind mit einem oben offenen Gefäfse AN (Fig. 98) mehrere verschlossene Gefäfse von beliebiger Weite mit einander verbunden und communiciren diese durch die Öffnungen a_n, a_{n-1} . . a_2 mit einander; so läfst sich die aus der untersten Öffnung a_1 ausfliefsende Flüssigkeit, z. B. Wasser, sobald alle Gefäfse gefüllt sind und der Beharrungsstand eingetreten ist, ferner unter der Voraussetzung eines unveränderlichen Wasserspiegels AB auf folgende Weise bestimmen.

Es seyen von unten hinauf gezählt a_1, a_2, a_3 . . a_n die Ausflufsöffnungen, und zwar wenn Contractionen Statt finden, im kleinsten Querschnitt genommen; v_1, v_2 . . v_n die in diesen Querschnitten Statt findenden Aus- oder Durchflufsgeschwindigkeiten, h_1, h_2 . . h_n die zugehörigen Höhen; A_1, A_2 . . A_n die Querschnitte der Gefäfse in CD, EF . . MN, in welchen sich die Mündungen a_1, a_2 . . a_n befinden; V_1, V_2 . . V_n die Geschwindigkeiten der Wasserschichten in diesen Querschnitten, so wie H_1, H_2 . . H_n die zugehörigen Höhen; so hat man nach der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$v_2 = \frac{a_1}{a_2} v_1, \quad v_3 = \frac{a_1}{a_3} v_1 \,..\, v_n = \frac{a_1}{a_n} v_1, \quad V_1 = \frac{a_1}{A_1} v_1, \quad V_2 = \frac{a_1}{A_2} v_1 \,..$$

$$V_n = \frac{a_1}{A_n} v_1, \; h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g} \,..\, h_n = \frac{v_n^2}{2g}, \quad H_1 = \frac{V_1^2}{2g} \,..\, H_n = \frac{V_n^2}{2g}$$

Um aber die Wasserschichte in CD oder A_1 von der Geschwindigkeit V_1 auf jene v_1 zu bringen, ist die Druckhöhe $\frac{v_1^2 - V_1^2}{2g} = h_1 - H_1$ nothwendig; eben so sind $h_2 - H_2$, . . $h_n - H_n$ die erforderlichen Druckhöhen, um die Wasserschichten A_2 . . A_n von den Geschwindigkeiten V_2 . . V_n auf jene v_2 . . v_n zu bringen; da endlich, um der über der obersten Öffnung a_n stehenden Schichte A_n die Geschwindigkeit V_n zu ertheilen, noch aufserdem die Geschwindigkeitshöhe H_n nothwendig ist; so hat man, wenn die ganze Druckhöhe $BS = h$ gesetzt wird, sofort:

$$h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n - (H_1 + H_2 + \cdot \cdot + H_n) + H_n$$

oder wenn man auf die Geschwindigkeiten übergeht und wieder annimmt, dafs der Druck auf die Oberfläche AB und gegen die Öffnung a_1 (auf die Flächeneinheit) beziehungsweise durch die Wassersäulenhöhen h' und h'' ausgedrückt wird, auch (nach der gewöhnlichen Ansicht):

$$h + h' - h'' = \frac{1}{2g}\left[v_1^2 + v_2^2 + \cdot v_n^2 - (V_1^2 + V_2^2 + \ldots V_n^2) + V_n^2\right]$$

oder wenn man auch noch für $v_2 \ldots v_n$, V_1, $V_2 \ldots V_n$ die vorigen Werthe setzt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2 - \left\{\left(\frac{a_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{A_2}\right)^2 + \cdot \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right\} + \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right]$$

oder nach der kürzern üblichen Bezeichnung, wenn man noch a_1^2 als Factor nimmt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}\right] \ldots (\delta)$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$v_1 = \frac{1}{a_1}\sqrt{\left[\frac{2g(h + h' - h'')}{\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}}\right]}$$

wobei für gewöhnlich $h' = h''$ gesetzt werden kann.

Endlich ist die per Secunde ausfließsende Wassermenge $M = a_1 v_1$.

Anmerkung 1. Sollen $a_1, a_2 \ldots a_n$ die vorhandenen Ausflufsöffnungen ohne Rücksicht auf die Zusammenziehung der Wasserstrahlen bezeichnen, so mufs man, wenn $m_1, m_2 \ldots m_n$ die betreffenden Contractionscoeffizienten sind, überall $m_1 a_1, m_2 a_2 \ldots m_n a_n$ statt $a_1, a_2 \ldots a_n$ setzen

Anmerkung 2. Nach einer andern von *Navier* ausgehenden Ansicht kann man auch folgenden Weg einschlagen.

Verfolgt man die am Wasserspiegel AB befindliche Schichte vom Querschnitt A und unendlich kleiner Höhe, deren unendlich kleine Masse mit m bezeichnet werden soll, bei ihrer Bewegung bis zur Ausflufsöffnung a_1, wo diese Masse die Geschwindigkeit v_1 erhält, während sie in AB nur jene $\frac{a_1}{A} v_1$ besitzt; so ist zur Hervorbringung dieser Geschwindigkeitsänderung die Wirkungsgröfse (§. 186):

$$W = \frac{m}{2g}\left(v_1^2 - \frac{a_1^2}{A^2} v_1^2\right) = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{a_1^2}{A^2}\right) \text{ erforderlich.}$$

Da ferner diese Masse m, nachdem sie die Öffnung a_n passirt hat, plötzlich durch die vorhandene Erweiterung von der Geschwindigkeit v_n auf die kleinere V_n und zwar indem das Theilchen m auf die endliche, unter MN befindliche Wassermasse M stöfst, gebracht wird; so entsteht wie bei dem Stofse unelastischer Körper, wobei m gegen M verschwindet (§. 201) ein Verlust an lebendiger Kraft $= m(v_n - V_n)^2$ oder an Wirkungs-

$$\text{grösse} = \frac{m}{2g}(v_n - V_n)^2 = \frac{m}{2g}\left(\frac{a_1}{a_n}v_1 - \frac{a_1}{A_n}v_1\right)^2 = \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A_n}\right)^2.$$

Auf gleiche Weise ist der Verlust an Wirkungsgröfse, beim Durchgange der genannten Schichte oder Masse m durch die Öffnungen $a_{n-1} \ldots a_2$ wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen von v_{n-1} in $V_{n-1}, \ldots$ v_2 in V_2, sofort $\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{A_{n-1}}\right)^2 \ldots \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2$ so, dafs man die Summe aller dieser Verluste an Arbeit oder Wirkung durch $\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2$ ausdrücken kann, welche von der Arbeit oder Wirkung mh der von der Höhe $BS = h$ herabsinkenden Wasserschichte m abgezogen die obige Wirkungsgröfse W als Rest gibt; man hat nämlich:

$$mh - \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2 = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{a_1^2}{A^2}\right)$$

und daraus folgt, wenn man auch wieder wie oben $h + h' - h''$ statt h setzt:

$$v_1 = \sqrt{\left[\frac{2g(h + h' - h'')}{1 - \frac{a_1^2}{A^2} + a_1^2\,\Sigma\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2}\right]}.$$

Diese hier entwickelten Gleichungen gelten übrigens auch für eine in Fig. 99 dargestellte Anordnung der Gefäfse.

157. Communiciren mehrere oben offene Gefäfse AK, BL, DM.. (Fig. 100) mit einander durch die Seitenöffnungen a_1, a_2, a_3.., welche im Vergleiche zur Gröfse der Gefäfse so klein seyn sollen, dafs die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser zu den Öffnungen gelangt, vernachlässigt werden können; so findet man die im Beharrungsstande aus der letzten Öffnung $a_n = a$ ausfliefsende Wassermenge, die also auch in gleicher Zeit in das erste Gefäfs wieder zufliefsen mufs, auf folgende Art.

Es sey M die in jeder Secunde in das erste Gefäfs AK zufliefsende Wassermenge, ferner der Beharrungsstand bereits eingetreten, so, dafs also eine gleiche Wassermenge M per Secunde aus einem Gefäfse in das andere überfliefst und daher die Wasserspiegel AB, CD, EF... zu einem unveränderlichen Stande gelangt sind; in diesem Zustande seyen die Druckhöhen $BC = h_1$, $DE = h_2$, $FG = h_3$..., so wie die lothrechte Höhe des Wasserspiegels AB über der Mitte der letzten Ausflufsöffnung a (oder wenn auch diese unter Wasser ausmündet, bis zum Spiegel des Unterwassers) $= h$; so hat man nach §. 330 die theoretischen Ausflufsmengen per Secunde der Reihe nach $M_1 = a_1\sqrt{2gh_1}$, $M_2 = a_2\sqrt{2gh_2}$, $M_3 = a_3\sqrt{2gh_3}$... und daraus wegen $M_1 = M_2 = M_3 = \ldots = M$ die Druckhöhen:

$$h_1=\frac{M^2}{2\,g\,a_1^2},\quad h_2=\frac{M^2}{2\,g\,a_2^2}\,\ldots.$$

Da nun $h_1+h_2+h_3+\ldots=h$ ist, so folgt:

$$h=\frac{M^2}{2g}\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+-+\frac{1}{a^2}\right),$$

folglich:
$$M=\sqrt{\left(\frac{2gh}{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a^2}}\right)}$$

Sind alle Öffnungen gleich groſs, nämlich $=a$, und ihre Anzahl $=n$; so erhält man:
$$M=a\sqrt{\left(\frac{2gh}{n}\right)},$$
so, daſs also bei derselben Druckhöhe h die ausflieſsende Wassermenge M um so kleiner wird, je gröſser n, d. i. die Anzahl der Öffnungen ist.

Anmerk. 1. Um (im Falle die Öffnungen nicht so erweitert und abgerundet sind, daſs keine Contraction Statt findet) die Contraction dabei zu berücksichtigen, muſs man wieder $m_1\,a_1,\ m_2\,a_2\ \ldots\ m\,a$ statt $a_1\ \ a_2\ \ldots\ a$ setzen, wenn $m_1,\ m_2\ \ldots\ m$ die entsprechenden Coeffizienten sind.

Anmerkung 2.. Münden die oben geschlossenen Gefäſse, wie in Fig. 99. a, ohne Zwischenwände ineinander ein und nehmen diese in der Weite vom ersten bis zum letzten immer mehr ab, so, daſs das letzte Gefäſs das engste ist; so darf man in der obigen Formel (δ) (Nr. 156) nur $a_1=a_2=A_1$, $a_3=A_2$, $a_4=a_n=A_3=A_{n-1}$ setzen. Man erhält dadurch, $h'=h''$ genommen:
$$h=\frac{v_1^2\,a_1^2}{2\,g}\left[\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_4^2}-\frac{1}{a_1^2}-\frac{1}{a_3^2}-\frac{1}{a_4^2}\right]=\frac{v_1^2}{2\,g}$$
so, daſs also die Zwischengefäſse auf die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe der letzten Ausfluſsöffnung a_1 keinen Einfluſs haben, oder die einmal gewonnene Geschwindigkeit nicht mehr verloren geht.

Befindet sich dagegen, wie in Fig. 99. *b*, zwischen dem letzten Gefäſs ein engeres, so, daſs man für die dargestellte Anordnung $a_1=A_1$, $a_2=a_3=A_2$ und $a_4=A_3$, folglich aus der genannten Formel $h=\frac{v_1^2}{2\,g}\,\frac{a_1^2}{a_2^2}$ erhält, so folgt, weil $\frac{a_1}{a_2}\,v_1$ die der Ausfluſsöffnung a_2 entsprechende Geschwindigkeit ist, daſs die erforderliche Druckhöhe h nicht nach der, der letzten Ausfluſsöffnung a_1, sondern nach jener, der engsten Öffnung $a_2=a_3$ zukommenden Geschwindigkeit, wovon wieder ein Theil verloren geht, bemessen oder bestimmt werden muſs.

Seitenausfluſs bei geringen Druckhöhen.

(§. 331.)

158. Bildet die Öffnung *AD* (Fig. 101) ein Rechteck von der Breite $AB=b$ und Höhe $AC=h$, dessen Seite AB im Wasserspiegel