Zweiter Abschnitt.

Hydrodynamik.

Ausflufs des Wassers bei *constanten* Druckhöhen.

(§. 321.)

151. Um die Analysis auf die Bewegung der Flüssigkeiten, deren Untersuchung einen der schwierigsten Theile der Mechanik bildet, mit einigem Erfolg anwenden zu können, geht man von der Voraussetzung aus, dafs sich die in einem Gefäfse bewegende Flüssigkeit durch lauter sehr enge Röhrchen ergiefse und alle Theilchen ein und derselben sehr dünnen Querschichte mit einerlei Geschwindigkeit in der Richtung der Achse der Röhre forteilen; in dieser Annahme, welche von der wahren Bewegung einer flüssigen Masse in einem röhrenförmigen Gefäfs um so weniger abweicht, je kleiner die normalen Querschnitte des Gefäfses sind, besteht die sogenannte Hypothese des Parallelismus der Querschichten oder schlechtweg der Schichten.

152. Um nun, auf diese Hypothese gestützt, den Ausflufs des Wassers aus einer horizontalen Öffnung ab eines Gefäfses aB (Fig. 93) bei unverändertem Wasserspiegel AB zu bestimmen, sey bereits der Beharrungsstand, d. h. derjenige Zustand eingetreten, in welchem die Geschwindigkeiten der in einem Augenblicke durch irgend einen Querschnitt gehenden Flüssigkeitstheilchen dieselben sind, wie jene der Theilchen, welche in einem andern Augenblicke durch denselben Querschnitt gehen; ferner denke man sich die ganze flüssige Masse in lauter horizontale, unendlich dünne Schichten getheilt und bezeichne die obere Fläche der 1sten Schichte durch A, ihre untere Fläche oder die obere Fläche der 2ten Schichte durch z_1, die der 3ten Schichte durch z_2 u. s. w.

die der $n$ten Schichte MN, welche um die Tiefe $CD = x$ unterm Wasserspiegel liegt, durch z_{n-1} und die der folgenden mn (wofür $Dd = dx$) durch z_n; ferner werde der auf die Flächeneinheit bezogene, auf die 1te Schichte oder Fläche A ausgeübte Druck durch eine Wassersäule von der Höhe h', auf die 2te Fläche z_1, welches zugleich auch der Gegendruck (von unten nach oben) auf die 1ste Schichte ist, durch δ_1, auf die 3te Fläche z_2 durch δ_2 u. s. w., auf die $n$te Fläche $MN = z_{n-1}$ durch δ_{n-1} und auf die $n+1$ te $mn = z_n$ durch δ_n, so wie endlich der auf die Tiefe $CE = h$ unterm Wasserspiegel liegende Öffnung von der Gröſse a Statt findende Gegendruck durch die Wassersäule h'' ausgedrückt.

Betrachtet man nun eine dieser Schichten Mn, deren Masse sofort $dM = \gamma z dx$ ist, wenn γ wieder das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers bezeichnet, bei ihrem Durchgange durch zwei unmittelbar aufeinander folgende Querschnitte MN und mn, und bezeichnet die betreffenden Geschwindigkeiten durch v' und v''; so ist die nöthige Arbeit oder Wirkungsgröſse um die Masse dM von der Geschwindigkeit v' auf jene v'' zu bringen (§. 186) $dw = \gamma z dx \left(\frac{v''^2 - v'^2}{2g}\right)$.

Da aber $z\gamma(\delta - \delta' + dx)$ die bewegende Kraft dieser Schichte und dx der dabei zurückgelegte Weg ist, so läſst sich diese Wirkungsgröſse auch (§. 172) durch $dw = z\gamma(\delta - \delta' + dx)$ ausdrücken und es ist daher:

$$z\gamma dx(\delta - \delta' + dx) = \gamma z dx \left(\frac{v''^2 - v'^2}{2g}\right) \ldots \quad (i)$$

oder wenn man abkürzt und berücksichtiget, daſs wegen der (§. 306) vorausgesetzten Incompressibilität der Flüssigkeit durch jeden Querschnitt in derselben Zeit auch die nämliche Wassermenge durchflieſsen, folglich, wenn v die constante Geschwindigkeit ist, mit der das Wasser bei ab ausflieſst, $v' : v = a : z$ oder $v' = \frac{a}{z} v$ und eben so $v'' = \frac{a}{z'} v$ seyn muſs, auch:

$$\delta - \delta' + dx = \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{z'^2} - \frac{1}{z^2}\right) \ldots \quad (a)$$

Setzt man nun in dieser Gleichung der Reihe nach:

$z = A,\ z_1,\ z_2 \ldots z_{n-2}$, also $z' = z_1,\ z_2 \ldots z_{n-1}$ und

$\delta = h',\ \delta_1,\ \delta_2 \ldots \delta_{n-2}$, also $\delta' = \delta_1,\ \delta_2 \ldots \delta_{n-1}$;

so erhält man, $\frac{a^2 v^2}{2g} = N$ gesetzt:

$$h' - \delta_1 + dx = N\left(\frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{A^2}\right)$$

$$\delta_1 - \delta_2 + dx = N\left(\frac{1}{z_2^2} - \frac{1}{z_1^2}\right)$$

$$\delta_2 - \delta_3 + dx = N\left(\frac{1}{z_3^2} - \frac{1}{z_2^2}\right)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\delta_{n-2} - \delta_{n-1} + dx = N\left(\frac{1}{z_{n-1}^2} - \frac{1}{z_{n-2}^2}\right)$$

$\# \sum dx =$

und durch Summirung dieser Gleichungen, wobei $dx = \int dx = x$ ist:

$$h' - \delta + x = \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{A^2}\right) \ldots (b)$$

oder wenn man, um auf die Ausflufsöffnung überzugehen, $z = a$, $\delta = h''$ und $x = h$ setzt, auch:

$$h' - h'' + h = \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right)$$

woraus sofort:

$$v = A\sqrt{\left[2g\frac{(h + h' - h'')}{A^2 - a^2}\right]} \ldots (1)$$

folgt.

153. Da für die gewöhnlichen Fälle der Anwendung der Druck auf die Oberfläche und gegen die Mündung oder Ausflufsöffnung von der Atmosphäre herrührt und daher bei dem gewöhnlichen Höhenunterschied $h' = h''$ gesetzt, ferner auch, da die Ausflufsöffnung gegen den Querschnitt des Gefäfses gewöhnlich sehr klein ist, a^2 gegen A^2 ausgelassen werden darf; so erhält man aus der vorigen Gleichung (1) die gewöhnliche Formel: $v = \sqrt{2gh} \ldots (2)$ (§. 321, Gleich. m).

Anmerkung 1. Hat das Gefäfs eine solche Form (Fig. 94), dafs das Wasser nachdem es bis zum tiefsten Punct gesunken, wieder bis zur Ausflufsöffnung ab steigen mufs; so sey CDE die Achse eines ganz willkürlich angenommenen sehr engen Wasserkanales, dessen obere und untere Mündung jedoch beziehungsweise auf AB und ab normal seyn soll, in welchem sich ein Wasserelement vom Wasserspiegel AB bis zur horizontalen Ausflufsöffnung ab bewegt. Denkt man sich nämlich durch die Puncte M und m, welche um die Tiefe $CP = x$ und $Cp = x + dx$ unterm Wasserspiegel liegen, zwei Querschnitte des engen Kanals normal auf die Achse CDE; so schliefsen diese ein Wasserelement von der Länge $Mm = ds$ ein. Behalten die obigen Gröfsen z, z', δ, δ', v' etc. die vorige Bedeutung, jedoch auf diesen engen Kanal bezogen; so hat man, da jetzt die Masse $dM = \gamma z\, ds$, die bewegende Kraft $= (\delta - \delta' + dx)\gamma z$ und der zurückgelegte Weg

$= ds$ ist, anstatt der obigen Gleichung (i) in Nr. **152** die folgende: $(\delta - \delta' + dx)\gamma z\, ds = \gamma z\, ds\left(\frac{v''^2 - v'^2}{2g}\right)$, welche, wenn man abkürzt und für v' und v'' wieder die Werthe $\frac{a}{z}v$ und $\frac{a}{z'}v$ setzt, genau in jene (a) übergeht, aus welcher durch dasselbe oben angewandte Verfahren wieder die Gleichung (b) entsteht, in welcher x die algebraische Summe aller Höhen Pp, pp'... der einzelnen Wasserelemente bezeichnet.

Ist nun wieder $FE = h$ der lothrechte Abstand der Ausflufsöffnung ab vom Wasserspiegel AB, so ist diese algebraische Summe vom Wasserspiegel angefangen bis zum tiefsten Punct und von da wieder hinauf bis zur Ausflufsöffnung, da sich die unter der horizontalen Ebene Jb befindlichen Höhen der ab- und aufwärts sich bewegenden Elemente aufheben, ebenfalls $= h$, so, dafs also auch die weitern Gleichungen (1) und (2) für diesen angenommenen Wasserkanal ihre Giltigkeit haben; da endlich dasselbe von allen den feinen Wasserkanälen gilt, aus welchen man sich den ganzen Querschnitt zusammengesetzt denken kann, so folgt, dafs diese genannten Gleichungen (1) und (2) auch bei dieser Form des Gefäfses gelten.

Anmerkung 2. Wie aus der Herleitung der Formel (2) aus jener (1) folgt, so ist diese nur richtig, wenn, wie es allerdings in der Regel der Fall, die Ausflufsöffnung a bedeutend kleiner als der obere Querschnitt A des Gefäfses ist. Im entgegengesetzten Falle ist die gemachte Voraussetzung der Rückwirkung und Fortpflanzung des Druckes nicht mehr zulässig und die Formel (2) gibt dann von der Wahrheit abweichende Resultate. Aus der richtigen Formel (1) erhält man auch in der That für $a = A$ eine unendlich grofse, und für $a > A$ eine imaginäre Geschwindigkeit. Die Ursache liegt in dem, dafs die Ausflufsgeschwindigkeit in diesen beiden Fällen nicht constant, sondern eine Function der Zeit ist (für $a = A$ wird $v = gt$) und dafs schon im erstern Falle, nämlich in dem gleichweiten, bodenlosen Gefäfs, das Wasser mit einer immer wachsenden und zuletzt mit einer unendlich grofsen Geschwindigkeit von oben zufliefsen mufs, um das abfliefsende zu ersetzen und die Mündung auszufüllen, ein Umstand, welcher im zweiten Falle ganz unmöglich ist.

Dieser schon von *Daniel Bernoulli* entwickelte und später von Einigen in Zweifel gezogene Satz, läfst sich übrigens auch noch auf folgende Weise ableiten.

Ist für den ersten Fall die horizontale Ausflufsöffnung a ein so kleiner Theil von dem obern Querschnitt A des Gefäfses, dafs man den Wasserspiegel als unbeweglich und daher die Druckhöhe h und Ausflufsgeschwindigkeit v als constant ansehen kann und ist Q das Gewicht der in jeder Secunde ausfliefsenden Wassermenge; so ist die Arbeits- oder Wirkungsgröfse dieses von der Höhe h herabsinkenden Gewichtes Q (§. 184) $= Qh$; um aber die Masse Q von der Ruhe aus auf die Geschwindigkeit v zu bringen, ist eine Wirkung (§. 186) $Q = \frac{v^2}{2g}$ nothwendig und da diese beiden Wirkungsgröfsen einander gleich seyn müssen, so hat man $h = \frac{v^2}{2g}$ oder $v = \sqrt{2gh}$.

Mufs dagegen, um den Wasserspiegel auf gleicher Höhe zu erhalten, beständig eben so viel Wasser oben zufliefsen als unten abfliefst und setzt man die Zuflufsgeschwindigkeit $= c$ und den obern Querschnitt des Gefäfses $= A$; so ist zuerst $Ac = av$, also $c = \frac{a}{A} v$ und dann die gesammte Arbeitsgröfse, wenn man $\frac{c^2}{2g} = h'$ setzt, $= Q(h + h')$, folglich:

$$Q(h + h') = Q \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2g(h + h')}$$

oder auch $\quad v = \sqrt{(2gh + c^2)}$ (vergleiche §. 322, Anmerk.) und wenn man für c den vorigen Werth setzt und v bestimmt:

$$v = A \sqrt{\left(\frac{2gh}{A^2 - a^2}\right)}$$

welches, wenn man den Druck auf den Wasserspiegel jenem gegen die Ausflufsöffnung wieder gleich grofs voraussetzt, die obige Gleichung (1) ist.

Setzt man in der vorigen Formel für v den obigen Werth $\frac{A}{a} c$, so erhält man auch:

$$a = \frac{A}{\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{c^2}\right)}}$$

aus welcher Gleichung sofort folgt, dafs für jeden endlichen Werth von c, immer $a < A$ ist.

Beispiel. Ist z. B. $A = 60$ und $a = 12$ Quadratzoll, so würde die Formel (2) $v = \sqrt{2gh}$ die Geschwindigkeit v bedeutend zu klein geben, indem diese zufolge der richtigen Formel (1) noch mit dem Factor:

$\frac{A}{\sqrt{(A^2 - a^2)}} = \frac{60}{46{\cdot}433} = 1{\cdot}2922$ multiplicirt werden mufs. Wäre dagegen bei diesem Werthe von A nur $a = 1$ Quadratzoll, so würde dieser Factor

$\frac{A}{\sqrt{(A^2 - a^2)}} = \frac{60}{59{\cdot}991} = 1{\cdot}0001$, so gut wie keinen Einflufs haben.

154. Wird die Flüssigkeit mittelst eines Kolbens, wie z. B. bei einer Druckpumpe oder Feuerspritze durch eine kleine Oeffnung hinausgetrieben, so sey, um die entsprechende Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Flüssigkeit austritt, A die Querschnittsfläche des Gefäfses, a jene der Öffnung, P der Druck auf den Kolben, $AB = h$ (Fig. 95) die anfängliche Druckhöhe und h' die Höhe einer Flüssigkeitssäule, derselben Gattung, welche über dem Kolben stehend denselben Druck P ausübt, also, wenn γ wieder das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit ist, $P = Ah'\gamma$; so ist im ersten Augenblicke die gesammte Druckhöhe $= h + h'$ und daher, wenn $\frac{a}{A}$ ein kleiner Bruch ist, die Ausflufsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(h + h')}$ oder wegen $h' = \frac{P}{\gamma A} = \frac{p'}{\gamma}$, wenn man nämlich den auf die Flächeneinheit des Kolbens Statt findenden Druck durch p' bezeichnet, $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p'}{\gamma}\right)}$. Ist dagegen der Druck auf die Flächeneinheit in der Tiefe der Öffnung $BC = p$, also $p = \left(h + \frac{p'}{\gamma}\right)\gamma$, so ist auch:

$$(3) \quad v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}};$$

die Ausflufsgeschwindigkeit ist also der Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit (gewöhnlich ist h gegen h' aufser Acht zu lassen) direct und dem spezifischen Gewichte der Flüssigkeit umgekehrt proportional. Wäre Quecksilber gerade 16 Mal so dicht als Wasser, so würde dieses bei gleichem Drucke 4 Mal langsamer als das Wasser ausfliefsen. Ist die Luft 770 Mal leichter als das Wasser, so strömt diese bei gleicher Pressung nahe $27\frac{3}{4}$ Mal schneller als das Wasser aus u. s. w.

Unterschied zwischen dem *hydrostatischen* und *hydraulischen* Drucke.

155. Aus der Gleichung (b) in Nr. **152** folgt für den Druck auf die Flächeneinheit der Schichte Mn (Fig. 93) während der Bewegung (wenn man δ statt $\gamma\delta$ nimmt):

$$\delta = h' + x - \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{A^2}\right)$$

oder wenn man die Geschwindigkeitshöhen, welche den in AB und MN Statt findeden Geschwindigkeiten $\frac{a}{A}v$ und $\frac{a}{z}v$ entsprechen, mit h_1 und h_2 bezeichnet, wegen $h_1 = \frac{a^2 v^2}{2gA^2}$ und $h_2 = \frac{a^2 v^2}{2gz^2}$, auch:

$$(u) \; . \; . \; \delta = h' + x - (h_2 - h_1).$$

Da nun dieser Druck, wenn die Ausflufsöffnung nicht vorhanden, die Flüssigkeit nämlich in der Ruhe wäre, $\delta_1 = h' + x$ seyn würde, so folgt, dafs der Druck einer bewegten Flüssigkeit, der sogenannte *hydraulische* Druck, von jenem einer ruhenden, dem *hydrostatischen* Druck, verschieden, nämlich kleiner ist, und zwar ist dieser Unterschied