Zweiter Abschnitt.

Hydrodynamik.

Ausfluſs des Wassers bei *constanten* Druckhöhen.

(§. 321.)

151. Um die Analysis auf die Bewegung der Flüssigkeiten, deren Untersuchung einen der schwierigsten Theile der Mechanik bildet, mit einigem Erfolg anwenden zu können, geht man von der Voraussetzung aus, daſs sich die in einem Gefäſse bewegende Flüssigkeit durch lauter sehr enge Röhrchen ergiesse und alle Theilchen ein und derselben sehr dünnen Querschichte mit einerlei Geschwindigkeit in der Richtung der Achse der Röhre forteilen; in dieser Annahme, welche von der wahren Bewegung einer flüssigen Masse in einem röhrenförmigen Gefäſs um so weniger abweicht, je kleiner die normalen Querschnitte des Gefäſses sind, besteht die sogenannte Hypothese des Parallelismus der Querschichten oder schlechtweg der Schichten.

152. Um nun, auf diese Hypothese gestützt, den Ausfluſs des Wassers aus einer horizontalen Öffnung ab eines Gefäſses aB (Fig. 93) bei unverändertem Wasserspiegel AB zu bestimmen, sey bereits der Beharrungsstand, d. h. derjenige Zustand eingetreten, in welchem die Geschwindigkeiten der in einem Augenblicke durch irgend einen Querschnitt gehenden Flüssigkeitstheilchen dieselben sind, wie jene der Theilchen, welche in einem andern Augenblicke durch denselben Querschnitt gehen; ferner denke man sich die ganze flüssige Masse in lauter horizontale, unendlich dünne Schichten getheilt und bezeichne die obere Fläche der 1sten Schichte durch A, ihre untere Fläche oder die obere Fläche der 2ten Schichte durch z_1, die der 3ten Schichte durch z_2 u. s. w.

die der $n$ten Schichte MN, welche um die Tiefe $CD = x$ unterm Wasserspiegel liegt, durch z_{n-1} und die der folgenden mn (wofür $Dd = dx$) durch z_n; ferner werde der auf die Flächeneinheit bezogene, auf die 1te Schichte oder Fläche A ausgeübte Druck durch eine Wassersäule von der Höhe h', auf die 2te Fläche z_1, welches zugleich auch der Gegendruck (von unten nach oben) auf die 1ste Schichte ist, durch δ_1, auf die 3te Fläche z_2 durch δ_2 u. s. w., auf die $n$te Fläche $MN = z_{n-1}$ durch δ_{n-1} und auf die $n+1$ te $mn = z_n$ durch δ_n, so wie endlich der auf die Tiefe $CE = h$ unterm Wasserspiegel liegende Öffnung von der Gröfse a Statt findende Gegendruck durch die Wassersäule h'' ausgedrückt.

Betrachtet man nun eine dieser Schichten Mn, deren Masse sofort $dM = \gamma z dx$ ist, wenn γ wieder das Gewicht der cubischen Einheit des Wassers bezeichnet, bei ihrem Durchgange durch zwei unmittelbar aufeinander folgende Querschnitte MN und mn, und bezeichnet die betreffenden Geschwindigkeiten durch v' und v''; so ist die nöthige Arbeit oder Wirkungsgröfse um die Masse dM von der Geschwindigkeit v' auf jene v'' zu bringen (§. 186) $dw = \gamma z dx \left(\frac{v''^2 - v'^2}{2g}\right)$.

Da aber $z\gamma(\delta - \delta' + dx)$ die bewegende Kraft dieser Schichte und dx der dabei zurückgelegte Weg ist, so läfst sich diese Wirkungsgröfse auch (§. 172) durch $dw = z\gamma(\delta - \delta' + dx)$ ausdrücken und es ist daher:

$$z\gamma dx(\delta - \delta' + dx) = \gamma z dx \left(\frac{v''^2 - v'^2}{2g}\right) \ldots (i)$$

oder wenn man abkürzt und berücksichtiget, dafs wegen der (§. 306) vorausgesetzten Incompressibilität der Flüssigkeit durch jeden Querschnitt in derselben Zeit auch die nämliche Wassermenge durchfliefsen, folglich, wenn v die constante Geschwindigkeit ist, mit der das Wasser bei ab ausfliefst, $v' : v = a : z$ oder $v' = \frac{a}{z} v$ und eben so $v'' = \frac{a}{z'} v$ seyn mufs, auch:

$$\delta - \delta' + dx = \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{z'^2} - \frac{1}{z^2}\right) \ldots (a)$$

Setzt man nun in dieser Gleichung der Reihe nach:

$z = A, z_1, z_2 \ldots z_{n-2}$, also $z' = z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$ und

$\delta = h', \delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{n-2}$, also $\delta' = \delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{n-1}$;

so erhält man, $\frac{a^2 v^2}{2g} = N$ gesetzt:

$$h' - \delta_1 + \mathrm{d}x = N\left(\frac{1}{z_1^2} - \frac{1}{A^2}\right)$$

$$\delta_1 - \delta_2 + \mathrm{d}x = N\left(\frac{1}{z_2^2} - \frac{1}{z_1^2}\right)$$

$$\delta_2 - \delta_3 + \mathrm{d}x = N\left(\frac{1}{z_3^2} - \frac{1}{z_2^2}\right)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\delta_{n-2} - \delta_{n-1} + \mathrm{d}x = N\left(\frac{1}{z_{n-1}^2} - \frac{1}{z_{n-2}^2}\right)$$ # $\Sigma dx =$

und durch Summirung dieser Gleichungen, wobei $\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x$ ist:

$$h' - \delta + x = \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{A^2}\right) \ldots (b)$$

oder wenn man, um auf die Ausflufsöffnung überzugehen, $z = a$, $\delta = h''$ und $x = h$ setzt, auch:

$$h' - h'' + h = \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right)$$

woraus sofort:

$$v = A\sqrt{\left[2g\,\frac{(h + h' - h'')}{A^2 - a^2}\right]} \ldots (1)$$

folgt.

153. Da für die gewöhnlichen Fälle der Anwendung der Druck auf die Oberfläche und gegen die Mündung oder Ausflufsöffnung von der Atmosphäre herrührt und daher bei dem gewöhnlichen Höhenunterschied $h' = h''$ gesetzt, ferner auch, da die Ausflufsöffnung gegen den Querschnitt des Gefäfses gewöhnlich sehr klein ist, a^2 gegen A^2 ausgelassen werden darf; so erhält man aus der vorigen Gleichung (1) die gewöhnliche Formel: $v = \sqrt{2gh}$ . . (2)
(§. 321, Gleich. m).

Anmerkung 1. Hat das Gefäfs eine solche Form (Fig. 94), dafs das Wasser nachdem es bis zum tiefsten Punct gesunken, wieder bis zur Ausflufsöffnung ab steigen mufs; so sey CDE die Achse eines ganz willkürlich angenommenen sehr engen Wasserkanales, dessen obere und untere Mündung jedoch beziehungsweise auf AB und ab normal seyn soll, in welchem sich ein Wasserelement vom Wasserspiegel AB bis zur horizontalen Ausflufsöffnung ab bewegt. Denkt man sich nämlich durch die Puncte M und m, welche um die Tiefe $CP = x$ und $Cp = x + \mathrm{d}x$ unterm Wasserspiegel liegen, zwei Querschnitte des engen Kanals normal auf die Achse CDE; so schliefsen diese ein Wasserelement von der Länge $Mm = \mathrm{d}s$ ein. Behalten die obigen Gröfsen z, z', δ, δ', v' etc. die vorige Bedeutung, jedoch auf diesen engen Kanal bezogen; so hat man, da jetzt die Masse $\mathrm{d}M = \gamma z\,\mathrm{d}s$, die bewegende Kraft $= (\delta - \delta' + \mathrm{d}x)\,\gamma z$ und der zurückgelegte Weg

$= ds$ ist, anstatt der obigen Gleichung (i) in Nr. **152** die folgende:
$(\delta - \delta' + dx)\,\gamma z\, ds = \gamma z\, ds \left(\frac{v''^2 - v'^2}{2g}\right)$, welche, wenn man abkürzt und für v' und v'' wieder die Werthe $\frac{a}{z}v$ und $\frac{a}{z'}v$ setzt, genau in jene (a) übergeht, aus welcher durch dasselbe oben angewandte Verfahren wieder die Gleichung (b) entsteht, in welcher x die algebraische Summe aller Höhen Pp, pp'... der einzelnen Wasserelemente bezeichnet.

Ist nun wieder $FE = h$ der lothrechte Abstand der Ausflufsöffnung ab vom Wasserspiegel AB, so ist diese algebraische Summe vom Wasserspiegel angefangen bis zum tiefsten Punct und von da wieder hinauf bis zur Ausflufsöffnung, da sich die unter der horizontalen Ebene Jb befindlichen Höhen der ab- und aufwärts sich bewegenden Elemente aufheben, ebenfalls $= h$, so, dafs also auch die weitern Gleichungen (1) und (2) für diesen angenommenen Wasserkanal ihre Giltigkeit haben; da endlich dasselbe von allen den feinen Wasserkanälen gilt, aus welchen man sich den ganzen Querschnitt zusammengesetzt denken kann, so folgt, dafs diese genannten Gleichungen (1) und (2) auch bei dieser Form des Gefäfses gelten.

Anmerkung 2. Wie aus der Herleitung der Formel (2) aus jener (1) folgt, so ist diese nur richtig, wenn, wie es allerdings in der Regel der Fall, die Ausflufsöffnung a bedeutend kleiner als der obere Querschnitt A des Gefäfses ist. Im entgegengesetzten Falle ist die gemachte Voraussetzung der Rückwirkung und Fortpflanzung des Druckes nicht mehr zulässig und die Formel (2) gibt dann von der Wahrheit abweichende Resultate. Aus der richtigen Formel (1) erhält man auch in der That für $a = A$ eine unendlich grofse, und für $a > A$ eine imaginäre Geschwindigkeit. Die Ursache liegt in dem, dafs die Ausflufsgeschwindigkeit in diesen beiden Fällen nicht constant, sondern eine Function der Zeit ist (für $a = A$ wird $v = gt$) und dafs schon im erstern Falle, nämlich in dem gleichweiten, bodenlosen Gefäfs, das Wasser mit einer immer wachsenden und zuletzt mit einer unendlich grofsen Geschwindigkeit von oben zufliefsen mufs, um das abfliefsende zu ersetzen und die Mündung auszufüllen, ein Umstand, welcher im zweiten Falle ganz unmöglich ist.

Dieser schon von *Daniel Bernoulli* entwickelte und später von Einigen in Zweifel gezogene Satz, läfst sich übrigens auch noch auf folgende Weise ableiten.

Ist für den ersten Fall die horizontale Ausflufsöffnung a ein so kleiner Theil von dem obern Querschnitt A des Gefäfses, dafs man den Wasserspiegel als unbeweglich und daher die Druckhöhe h und Ausflufsgeschwindigkeit v als constant ansehen kann und ist Q das Gewicht der in jeder Secunde ausfliefsenden Wassermenge; so ist die Arbeits- oder Wirkungsgröfse dieses von der Höhe h herabsinkenden Gewichtes Q (§. 184) $= Qh$; um aber die Masse Q von der Ruhe aus auf die Geschwindigkeit v zu bringen, ist eine Wirkung (§. 186) $Q = \frac{v^2}{2g}$ nothwendig und da diese beiden Wirkungsgröfsen einander gleich seyn müssen, so hat man $h = \frac{v^2}{2g}$ oder $v = \sqrt{2gh}$.

Mufs dagegen, um den Wasserspiegel auf gleicher Höhe zu erhalten, beständig eben so viel Wasser oben zufliefsen als unten abfliefst und setzt man die Zuflufsgeschwindigkeit $= c$ und den obern Querschnitt des Gefäfses $= A$; so ist zuerst $Ac = av$, also $c = \frac{a}{A} v$ und dann die gesammte Arbeitsgröfse, wenn man $\frac{c^2}{2g} = h'$ setzt, $= Q(h + h')$, folglich:

$$Q(h + h') = Q \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2g(h + h')}$$

oder auch $\quad v = \sqrt{(2gh + c^2)}$ (vergleiche §. 322, Anmerk.)
und wenn man für c den vorigen Werth setzt und v bestimmt:

$$v = A \sqrt{\left(\frac{2gh}{A^2 - a^2}\right)}$$

welches, wenn man den Druck auf den Wasserspiegel jenem gegen die Ausflufsöffnung wieder gleich grofs voraussetzt, die obige Gleichung (1) ist.

Setzt man in der vorigen Formel für v den obigen Werth $\frac{A}{a} c$, so erhält man auch:

$$a = \frac{A}{\sqrt{\left(1 + \frac{2gh}{c^2}\right)}}$$

aus welcher Gleichung sofort folgt, dafs für jeden endlichen Werth von c, immer $a < A$ ist.

Beispiel. Ist z. B. $A = 60$ und $a = 12$ Quadratzoll, so würde die Formel (2) $v = \sqrt{2gh}$ die Geschwindigkeit v bedeutend zu klein geben, indem diese zufolge der richtigen Formel (1) noch mit dem Factor:
$\frac{A}{\sqrt{(A^2 - a^2)}} = \frac{60}{46{\cdot}433} = 1{\cdot}2922$ multiplicirt werden mufs. Wäre dagegen bei diesem Werthe von A nur $a = 1$ Quadratzoll, so würde dieser Factor $\frac{A}{\sqrt{(A^2 - a^2)}} = \frac{60}{59{\cdot}991} = 1{\cdot}0001$, so gut wie keinen Einflufs haben.

154. Wird die Flüssigkeit mittelst eines Kolbens, wie z. B. bei einer Druckpumpe oder Feuerspritze durch eine kleine Oeffnung hinausgetrieben, so sey, um die entsprechende Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Flüssigkeit austritt, A die Querschnittsfläche des Gefäfses, a jene der Öffnung, P der Druck auf den Kolben, $AB = h$ (Fig. 95) die anfängliche Druckhöhe und h' die Höhe einer Flüssigkeitssäule, derselben Gattung, welche über dem Kolben stehend denselben Druck P ausübt, also, wenn γ wieder das Gewicht der cubischen Einheit der betreffenden Flüssigkeit ist, $P = Ah'\gamma$; so ist im ersten Augenblicke die gesammte Druckhöhe $= h + h'$ und daher, wenn $\frac{a}{A}$ ein kleiner Bruch ist, die Ausflufsgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(h+h')}$ oder wegen $h' = \frac{P}{\gamma A} = \frac{p'}{\gamma}$, wenn man nämlich den auf die Flächeneinheit des Kolbens Statt findenden Druck durch p' bezeichnet, $v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p'}{\gamma}\right)}$. Ist dagegen der Druck auf die Flächeneinheit in der Tiefe der Öffnung $BC = p$, also $p = \left(h + \frac{p'}{\gamma}\right)\gamma$, so ist auch:

$$(3) \quad v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}};$$

die Ausflufsgeschwindigkeit ist also der Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit (gewöhnlich ist h gegen h' aufser Acht zu lassen) direct und dem spezifischen Gewichte der Flüssigkeit umgekehrt proportional. Wäre Quecksilber gerade 16 Mal so dicht als Wasser, so würde dieses bei gleichem Drucke 4 Mal langsamer als das Wasser ausfliefsen. Ist die Luft 770 Mal leichter als das Wasser, so strömt diese bei gleicher Pressung nahe $27\frac{3}{4}$ Mal schneller als das Wasser aus u. s. w.

Unterschied zwischen dem *hydrostatischen* und *hydraulischen* Drucke.

155. Aus der Gleichung (b) in Nr. **152** folgt für den Druck auf die Flächeneinheit der Schichte Mn (Fig. 93) während der Bewegung (wenn man δ statt $\gamma\delta$ nimmt):

$$\delta = h' + x - \frac{a^2 v^2}{2g}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{A^2}\right)$$

oder wenn man die Geschwindigkeitshöhen, welche den in AB und MN Statt findeden Geschwindigkeiten $\frac{a}{A}v$ und $\frac{a}{z}v$ entsprechen, mit h_1 und h_2 bezeichnet, wegen $h_1 = \frac{a^2v^2}{2gA^2}$ und $h_2 = \frac{a^2v^2}{2gz^2}$, auch:

$$(u) \ldots \delta = h' + x - (h_2 - h_1).$$

Da nun dieser Druck, wenn die Ausflufsöffnung nicht vorhanden, die Flüssigkeit nämlich in der Ruhe wäre, $\delta_1 = h' + x$ seyn würde, so folgt, dafs der Druck einer bewegten Flüssigkeit, der sogenannte *hydraulische* Druck, von jenem einer ruhenden, dem *hydrostatischen* Druck, verschieden, nämlich kleiner ist, und zwar ist dieser Unterschied

$\delta_1 - \delta = h_2 - h_1$ gleich der Differenz zwischen den Geschwindigkeitshöhen, welche der gedrückten Stelle und der Oberfläche entsprechen.

Nimmt also die Geschwindigkeit von der Oberfläche an zu, so nimmt dieser Druck (z. B. gegen die Gefäſswand) ab; kann man die Geschwindigkeit an der Oberfläche gleich Null setzen, so ist die Veränderung des Druckes $\delta_1 - \delta = h_2$ gleich der entsprechenden Geschwindigkeitshöhe. (Vergleiche auch §. 347)

Anmerkung. Bringt man an einen Ausfluſsapparat, welcher etwa die in Fig. 96 dargestellte Form hat und wobei der Querschnitt $CD > AB$, dagegen $EF < AB$ und $GH < EF$ seyn soll, in den Querschnitten CD, EF und GH communicirende Röhren (die jedoch keine Haarröhrchen seyn dürfen) DJ, EK und HL an; so steigt, während die Flüssigkeit durch diesen Apparat durchflieſst, diese letztere in dem Rohre DJ bis zu einem Puncte a, welcher über dem Niveau AB, dagegen im Rohre EK bis zu dem Puncte b, welcher unter diesem Niveau liegt, während, wenn der Querschnitt GH im Verhältniſs zu jenem AB sehr klein ist, sogar ein negativer Druck gegen die Gefäſswand im Puncte H entstehen, und durch den äuſsern Luftdruck die im Gefäſse RS enthaltene Flüssigkeit, z. B. gefärbtes Wasser, (um die Wirkung leichter wahrnehmen zu können) durch das in die Flüssigkeit eintauchende Röhrchen HL in den Apparat hineingedrückt oder eingesogen werden kann. Sind nämlich A, F, F', f der Reihe nach die Querschnittsflächen in AB, CD, EF und GH und ist h die der Schichte AB entsprechende Geschwindigkeitshöhe; so wird nach der obigen Gleichung (u) der in der Schichte CD Statt findende Druck durch die Flüssigkeitssäule von der Höhe $pa = pn + h\left(\frac{F^2 - A^2}{F^2}\right) = pn + na$, jener in der Schichte EF durch $qb = qm - h\left(\frac{A^2 - F'^2}{F'^2}\right) = qm - mb$, so wie endlich jener im Querschnitte GH durch die Höhe $HM - h\left(\frac{A^2 \quad f^2}{f^2}\right)$ gemessen. Dieser Druck ist aber Null oder sogar negativ, wenn $h\left(\frac{A^2}{f^2} - 1\right) \overline{\gtrless} HM$ ist.

So findet z. B. in einem engen verticalen Rohr, welches in ein weiteres Gefäſs oder Reservoir einmündet, wie in Fig. 97, während des Ausflusses des Wassers, fortwährend ein negativer hydraulischer Druck Statt. Denn ist h die ganze Gefällshöhe, so flieſst das Wasser durch das Rohr mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ und der Druck ist auf die Röhrenwand in der Nähe der Ausmündung CD gleich Null, weil die ganze Druckhöhe h zur Erzeugung der Geschwindigkeit v verwendet wird, es ist nämlich der hydraulische Druck an dieser Stelle $= h - \frac{v^2}{2g} = h - h = 0$. Dagegen ist der hydraulische Druck in dem um die Tiefe h' unterm Wasserspiegel liegenden

Querschnitt MN nach der Formel $(u) = h' - \frac{v^2}{2g} = h' \quad h = -(h - h')$ negativ, so, dafs wenn man an dieser Stelle die Röhrenwand durchbohren würde, sofort durch diese Öffnung die äufsere Luft eindringen und bei CD mit austreten müfste; der Luftdruck wurde hierbei unberücksichtigt gelassen, d. i. auf AB und CD als gleich grofs angenommen.

Ausflufs aus communicirenden Gefäfsen.

156. Sind mit einem oben offenen Gefäfse AN (Fig. 98) mehrere verschlossene Gefäfse von beliebiger Weite mit einander verbunden und communiciren diese durch die Öffnungen a_n, a_{n-1} . . a_2 mit einander; so läfst sich die aus der untersten Öffnung a_1 ausfliefsende Flüssigkeit, z. B. Wasser, sobald alle Gefäfse gefüllt sind und der Beharrungsstand eingetreten ist, ferner unter der Voraussetzung eines unveränderlichen Wasserspiegels AB auf folgende Weise bestimmen.

Es seyen von unten hinauf gezählt a_1, a_2, a_3 . . a_n die Ausflufsöffnungen, und zwar wenn Contractionen Statt finden, im kleinsten Querschnitt genommen; v_1, v_2 . . v_n die in diesen Querschnitten Statt findenden Aus- oder Durchflufsgeschwindigkeiten, h_1, h_2 . . h_n die zugehörigen Höhen; A_1, A_2 . . A_n die Querschnitte der Gefäfse in CD, EF . . MN, in welchen sich die Mündungen a_1, a_2 . . a_n befinden; V_1, V_2 . . V_n die Geschwindigkeiten der Wasserschichten in diesen Querschnitten, so wie H_1, H_2 . . H_n die zugehörigen Höhen; so hat man nach der gemachten Voraussetzung offenbar:

$$v_2 = \frac{a_1}{a_2} v_1, \quad v_3 = \frac{a_1}{a_3} v_1 \; . . \; v_n = \frac{a_1}{a_n} v_1, \quad V_1 = \frac{a_1}{A_1} v_1, \quad V_2 = \frac{a_1}{A_2} v_1 \; . .$$

$$V_n = \frac{a_1}{A_n} v_1, \; h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g} \; . . \; h_n = \frac{v_n^2}{2g}, \quad H_1 = \frac{V_1^2}{2g} \; . . \; H_n = \frac{V_n^2}{2g}$$

Um aber die Wasserschichte in CD oder A_1 von der Geschwindigkeit V_1 auf jene v_1 zu bringen, ist die Druckhöhe $\frac{v_1^2 - V_1^2}{2g} = h_1 - H_1$ nothwendig; eben so sind $h_2 - H_2$, . . $h_n - H_n$ die erforderlichen Druckhöhen, um die Wasserschichten A_2 . . A_n von den Geschwindigkeiten V_2 . . V_n auf jene v_2 . . v_n zu bringen; da endlich, um der über der obersten Öffnung a_n stehenden Schichte A_n die Geschwindigkeit V_n zu ertheilen, noch aufserdem die Geschwindigkeitshöhe H_n nothwendig ist; so hat man, wenn die ganze Druckhöhe $BS = h$ gesetzt wird, sofort:

$$h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n - (H_1 + H_2 + \cdot \cdot + H_n) + H_n$$

oder wenn man auf die Geschwindigkeiten übergeht und wieder annimmt, dafs der Druck auf die Oberfläche AB und gegen die Öffnung a_1 (auf die Flächeneinheit) beziehungsweise durch die Wassersäulenhöhen h' und h'' ausgedrückt wird, auch (nach der gewöhnlichen Ansicht):

$$h + h' - h'' = \frac{1}{2g}\left[v_1^2 + v_2^2 + \cdot v_n^2 - (V_1^2 + V_2^2 + \ldots V_n^2) + V_n^2\right]$$

oder wenn man auch noch für $v_2 \ldots v_n$, V_1, $V_2 \ldots V_n$ die vorigen Werthe setzt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{a_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^2 - \right.$$

$$\left.\left\{\left(\frac{a_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{A_2}\right)^2 + \cdot \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right\} + \left(\frac{a_1}{A_n}\right)^2\right]$$

oder nach der kürzern üblichen Bezeichnung, wenn man noch a_1^2 als Factor nimmt:

$$h + h' - h'' = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}\right] \cdot \cdot \ (\delta)$$

Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$v_1 = \frac{1}{a_1}\sqrt{\left[\frac{2g\,(h + h' - h'')}{\Sigma\left(\frac{1}{a_1^2}\right) - \Sigma\left(\frac{1}{A_1^2}\right) + \frac{1}{A_n^2}}\right]}$$

wobei für gewöhnlich $h' = h''$ gesetzt werden kann.

Endlich ist die per Secunde ausfliefsende Wassermenge $M = a_1 v_1$.

Anmerkung 1. Sollen a_1, $a_2 \ldots a_n$ die vorhandenen Ausflufsöffnungen ohne Rücksicht auf die Zusammenziehung der Wasserstrahlen bezeichnen, so mufs man, wenn m_1, $m_2 \ldots m_n$ die betreffenden Contractionscoeffizienten sind, überall $m_1 a_1$, $m_2 a_2 \ldots m_n a_n$ statt a_1, $a_2 \ldots a_n$ setzen

Anmerkung 2. Nach einer andern von *Navier* ausgehenden Ansicht kann man auch folgenden Weg einschlagen.

Verfolgt man die am Wasserspiegel AB befindliche Schichte vom Querschnitt A und unendlich kleiner Höhe, deren unendlich kleine Masse mit m bezeichnet werden soll, bei ihrer Bewegung bis zur Ausflufsöffnung a_1, wo diese Masse die Geschwindigkeit v_1 erhält, während sie in AB nur jene $\frac{a_1}{A} v_1$ besitzt; so ist zur Hervorbringung dieser Geschwindigkeitsänderung die Wirkungsgröfse (§. 186):

$$W = \frac{m}{2g}\left(v_1^2 - \frac{a_1^2}{A^2} v_1^2\right) = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{a_1^2}{A^2}\right) \text{ erforderlich.}$$

Da ferner diese Masse m, nachdem sie die Öffnung a_n passirt hat, plötzlich durch die vorhandene Erweiterung von der Geschwindigkeit v_n auf die kleinere V_n und zwar indem das Theilchen m auf die endliche, unter MN befindliche Wassermasse M stöfst, gebracht wird; so entsteht wie bei dem Stofse unelastischer Körper, wobei m gegen M verschwindet (§. 201) ein Verlust an lebendiger Kraft $= m(v_n - V_n)^2$ oder an Wirkungs-

$$\text{gröfse} = \frac{m}{2g}(v_n - V_n)^2 = \frac{m}{2g}\left(\frac{a_1}{a_n}v_1 - \frac{a_1}{A_n}v_1\right)^2 = \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A_n}\right)^2.$$

Auf gleiche Weise ist der Verlust an Wirkungsgröfse, beim Durchgange der genannten Schichte oder Masse m durch die Öffnungen $a_{n-1} \ldots a_2$ wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen von v_{n-1} in $V_{n-1}, \ldots$ v_2 in V_2, sofort $\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{A_{n-1}}\right)^2 \ldots \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2$ so, dafs man die Summe aller dieser Verluste an Arbeit oder Wirkung durch $\frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2$ ausdrücken kann, welche von der Arbeit oder Wirkung mh der von der Höhe $BS = h$ herabsinkenden Wasserschichte m abgezogen die obige Wirkungsgröfse W als Rest gibt; man hat nämlich:

$$mh - \frac{m a_1^2 v_1^2}{2g}\Sigma\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2 = \frac{m v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{a_1^2}{A^2}\right)$$

und daraus folgt, wenn man auch wieder wie oben $h + h' - h''$ statt h setzt:

$$v_1 = \sqrt{\left[\frac{2g(h + h' - h'')}{1 - \frac{a_1^2}{A^2} + a_1^2\,\Sigma\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{A_2}\right)^2}\right]}.$$

Diese hier entwickelten Gleichungen gelten übrigens auch für eine in Fig. 99 dargestellte Anordnung der Gefäfse.

157. Communiciren mehrere oben offene Gefäfse AK, BL, DM.. (Fig. 100) mit einander durch die Seitenöffnungen a_1, a_2, a_3.., welche im Vergleiche zur Gröfse der Gefäfse so klein seyn sollen, dafs die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser zu den Öffnungen gelangt, vernachlässigt werden können; so findet man die im Beharrungsstande aus der letzten Öffnung $a_n = a$ ausfliefsende Wassermenge, die also auch in gleicher Zeit in das erste Gefäfs wieder zufliefsen mufs, auf folgende Art.

Es sey M die in jeder Secunde in das erste Gefäfs AK zufliefsende Wassermenge, ferner der Beharrungsstand bereits eingetreten, so, dafs also eine gleiche Wassermenge M per Secunde aus einem Gefäfse in das andere überfliefst und daher die Wasserspiegel AB, CD, EF... zu einem unveränderlichen Stande gelangt sind; in diesem Zustande seyen die Druckhöhen $BC = h_1$, $DE = h_2$, $FG = h_3$..., so wie die lothrechte Höhe des Wasserspiegels AB über der Mitte der letzten Ausflufsöffnung a (oder wenn auch diese unter Wasser ausmündet, bis zum Spiegel des Unterwassers) $= h$; so hat man nach §. 330 die theoretischen Ausflufsmengen per Secunde der Reihe nach $M_1 = a_1\sqrt{2gh_1}$, $M_2 = a_2\sqrt{2gh_2}$, $M_3 = a_3\sqrt{2gh_3}$... und daraus wegen $M_1 = M_2 = M_3 = \ldots = M$ die Druckhöhen:

$$h_1 = \frac{M^2}{2ga_1^2},\ h_2 = \frac{M^2}{2ga_2^2}\dots.$$

Da nun $h_1 + h_2 + h_3 + \dots = h$ ist, so folgt:

$$h = \frac{M^2}{2g}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + - + \frac{1}{a^2}\right),$$

folglich: $$M = \sqrt{\left(\frac{2gh}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a^2}}\right)}$$

Sind alle Öffnungen gleich groſs, nämlich $= a$, und ihre Anzahl $= n$; so erhält man: $$M = a\sqrt{\left(\frac{2gh}{n}\right)},$$

so, daſs also bei derselben Druckhöhe h die ausflieſsende Wassermenge M um so kleiner wird, je gröſser n, d. i. die Anzahl der Öffnungen ist.

Anmerk. 1. Um (im Falle die Öffnungen nicht so erweitert und abgerundet sind, daſs keine Contraction Statt findet) die Contraction dabei zu berücksichtigen, muſs man wieder $m_1 a_1$, $m_2 a_2$ .. ma statt a_1 a_2 .. a setzen, wenn m_1, m_2 .. m die entsprechenden Coeffizienten sind.

Anmerkung 2.. Münden die oben geschlossenen Gefäſse, wie in Fig. 99. a, ohne Zwischenwände ineinander ein und nehmen diese in der Weite vom ersten bis zum letzten immer mehr ab, so, daſs das letzte Gefäſs das engste ist; so darf man in der obigen Formel (δ) (Nr. 156) nur $a_1 = a_2 = A_1$, $a_3 = A_2$, $a_4 = a_n = A_3 = A_{n-1}$ setzen. Man erhält dadurch, $h' = h''$ genommen:

$$h = \frac{v_1^2 a_1^2}{2g}\left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} - \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_4^2}\right] = \frac{v_1^2}{2g}$$

so, daſs also die Zwischengefäſse auf die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe der letzten Ausfluſsöffnung a_1 keinen Einfluſs haben, oder die einmal gewonnene Geschwindigkeit nicht mehr verloren geht.

Befindet sich dagegen, wie in Fig. 99. b, zwischen dem letzten Gefäſs ein engeres, so, daſs man für die dargestellte Anordnung $a_1 = A_1$, $a_2 = a_3 = A_2$ und $a_4 = A_3$, folglich aus der genannten Formel $h = \frac{v_1^2}{2g}\,\frac{a_1^2}{a_2^2}$ erhält, so folgt, weil $\frac{a_1}{a_2} v_1$ die der Ausfluſsöffnung a_2 entsprechende Geschwindigkeit ist, daſs die erforderliche Druckhöhe h nicht nach der, der letzten Ausfluſsöffnung a_1, sondern nach jener, der engsten Öffnung $a_2 = a_3$ zukommenden Geschwindigkeit, wovon wieder ein Theil verloren geht, bemessen oder bestimmt werden muſs.

Seitenausfluſs bei geringen Druckhöhen.

(§. 331.)

158. Bildet die Öffnung AD (Fig. 101) ein Rechteck von der Breite $AB = b$ und Höhe $AC = h$, dessen Seite AB im Wasserspiegel liegt; so hat man für die aus dem unendlich schmalen Streifen $Pp = b\,dx$ per Secunde ausfliefsende Wassermenge dM, wenn $AP = x$ ist, $dM = b\,dx\,.\sqrt{2gx} = b\sqrt{2g}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$; folglich ist:

$$M = b\sqrt{2g}\int_0^h x^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{3}\,b\,h\sqrt{2gh} \quad (\text{§. } 331).$$

159. Hat man statt dem Rechteck ein rechtwinkeliges Dreieck ACD (Fig. 102), dessen Spitze A im Wasserspiegel und Cathete CD horizontal liegt, und ist wieder $AC = h$, $CD = b$, $AP = x$, $PM = y$ und $Pp = dx$; so ist $dM = y\,dx\sqrt{2gx}$, oder wegen $y = \frac{b}{h}\,x$ auch $dM = \frac{b}{h}\sqrt{2g}\,.\,x^{\frac{3}{2}}\,dx$, folglich:

$$M = \frac{b}{h}\sqrt{2g}\int_0^h x^{\frac{3}{2}}\,dx = \tfrac{2}{5}\,b\,h\sqrt{2gh}.$$

Für die umgekehrte Lage, d. i. wenn CD im Wasserspiegel liegt, folgt wegen $y = \frac{b}{h}(h - x)$ sofort $dM = \frac{b}{h}\sqrt{2g}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(h - x)$ und daraus:

$$M = \tfrac{4}{15}\,b\,h\sqrt{2gh}.$$

Beide Querschnitte zusammen geben die Wassermenge von $\frac{2}{5} + \frac{4}{15}$, d. i. wieder von $\frac{2}{3}\,b\,h\sqrt{2gh}$, wie es seyn soll.

160. Für die trapezförmige Öffnung (Fig. 103), wovon die parallele Seite AB im Wasserspiegel liegen soll, sey $AB = B$, $CD = b$, $EC = FD = h$, $AE = b'$ und $BF = b''$; so ist nach den unmittelbar vorhergehenden Nrn., die per Secunde ausfliefsende Wassermenge $M = (\frac{2}{3}\,b + \frac{4}{15}\,b' + \frac{4}{15}\,b'')\,h\sqrt{2gh}$, oder wegen: $\frac{4}{15}(b' + b'') = \frac{4}{15}(B - b)$, wenn man reducirt:

$$M = \tfrac{2}{15}(3\,b + 2\,B)\,h\sqrt{2gh}.$$

Eben so einfach läst sich M auch für die umgekehrte Lage des Trapezes bestimmen.

161. Ist die Öffnung ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunct um die Tiefe h unterm Wasserspiegel liegt, so nehme man in der betreffenden verticalen Seitenwand die durch den Mittelpunct des Kreises gezogene Verticallinie zur Abscissenachse und den Mittelpunct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten; so schliefsen zwei unmittelbar aufeinander folgende Ordinaten die Fläche $2\,y\,dx$ ein, und wenn diese vom Mittelpunct abwärts den Abstand x haben, so liegt dieses Flächenelement um die Tiefe $h + x$ unterm Wasserspiegel und es ist die per Secunde aus dieser unendlich niederen Öffnung ausfliefsende Wassermenge $dM = 2\,y\,dx\,.\sqrt{2g(h+x)}$ oder wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ auch $dM = 2\sqrt{2gh}\,.\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)}\,.\sqrt{\left(1+\frac{x}{h}\right)}$, oder wenn man $\sqrt{\left(1+\frac{x}{h}\right)} = \left(1+\frac{x}{h}\right)^{\frac{1}{2}}$ in die bekannte Reihe auflöst, auch:

$$dM = 2\sqrt{2gh}\,.\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{h}\right) - \frac{1}{2.4}\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{h}\right)^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{x}{h}\right)^4 + ..\right].$$

Integrirt man diese Gleichung und nimmt die sämmtlichen Integrale $\int dx\sqrt{(r^2 - x^2)}$, $\frac{1}{2h}\int x\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)}$ u. s. w. innerhalb der Grenzen von $x = -r$ bis $x = +r$, so erhält man nach den bekannten Formeln, wenn man Kürze halber $r^2 - x^2 = X^2$ setzt:

$$\int_{-r}^{+r} dx\sqrt{X} = \frac{r^2}{2}\pi\,,\quad \int_{-r}^{+r} x\,dx\sqrt{X} = 0\,,\quad \int_{-r}^{+r} x^2\,dx\sqrt{X} = \frac{r^4}{8}\pi,$$

$$\int_{-r}^{+r} x^3\,dx\sqrt{X} = 0\,,\quad \int_{-r}^{+r} x^4\,dx\sqrt{X} = \frac{r^6}{16}\pi\,,$$ u. s. w. folglich, wenn man substituirt:

$$M = 2\sqrt{2gh}\,.\,\frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \ldots\right]$$

oder wenn man diese von der Einheit nur wenig abweichende convergente Reihe mit R und die Kreis- oder Ausflufsöffnung $r^2\pi$ mit F bezeichnet:

$$M = FR\sqrt{2gh}\,.$$

Liegt der Scheitel des Kreises im Wasserspiegel, so wird wegen $h = r$ sofort: $M = F\sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{1024} - ..\right)$
oder nahe $M = {\cdot}964\,F\sqrt{2gh} = {\cdot}964\,F\sqrt{2rg}\,.$

Übrigens kann man in jenen Fällen, in welchen $h > r$ ist, ohne Fehler $R = 1$, also $M = F\sqrt{2gh}$ setzen, d. h. den Abstand h des Mittelpunctes vom Wasserspiegel als die mittlere Druckhöhe gelten lassen.

Anmerkung. Es ist hier der Ort einige Bemerkungen über die Anlagen von Wehren zu machen, weil es dabei vorzüglich auf die Bestimmung der über ein Wehr abfliefsende Wassermenge ankömmt.

Wir haben bei der Voraussetzung, dafs die Überfallsschwelle mit scharfen Kanten versehen sey, in §. 333 die nöthigen Formeln zur Bestimmung der abfliefsenden Wassermenge angegeben und namentlich bemerkt, dafs nach den Versuchen von *Castel* über einen solchen Überfall, wenn die Seitencontractionen wegfallen, per Secunde die Wassermenge von (f) .. $Q = {\cdot}443\,bh\sqrt{2gh}$ Kubikfufs abfliefst, wenn b die Breite des Überfalles und h die Höhe des Wasserstandes im Zuflufscanal über den horizontalen Rand der Schwelle bezeichnet

Da jedoch die Wehren, welche zur Stauung des Wassers erbaut werden, keine scharfen Kanten, sondern eine ebene oder abgerundete Krone erhalten, so fällt dabei auch die untere Contraction weg und man ha nach *Eytelwein* statt des vorigen Ausdruckes jenen:

$$(g) \quad Q = \cdot 57\, b\, h \sqrt{2gh} \sqrt{\left(1 + \cdot 0364 \frac{u^2}{h}\right)}$$

wobei noch u die Geschwindigkeit des Wassers im Flusse etwas oberhalb des Wehres bezeichnet.

Bekanntlich erbaut man Wehren nur dort, wo der Wasserspiegel eines Flusses auf eine längere Strecke über seinen natürlichen Stand gehoben werden darf und entweder 1) kein natürliches Gefälle vorhanden, folglich um sich für technische Zwecke eine Betriebskraft zu schaffen, ein künstliches Gefäll gebildet werden soll, 2) wenn das vorhandene natürliche Gefäll nicht hinreichend ist, dieses also vergröfsert werden soll, 3) wenn in einem Bach oder Flufs auf eine kurze Strecke seines Laufes ein starkes Gefäll (eine Stromschnelle) vorhanden ist, welches auf einen gewissen Punct concentrirt werden soll, 4) wenn die natürlichen Veränderungen oder Schwankungen im Wasserstande aufgehoben werden sollen und wenn endlich das durch die tauung hervorzubringende Gefäll in der Regel nicht mehr als 8 Fufs beträgt.

Bezeichnet man die Stauung, welche durch das zu erbauende Wehr hervorgebracht werden soll mit h, die Breite des Wehres (gleich oder gröfser als jene des Flusses) mit b und die Wassermenge in Kubikfufs, welche per Secunde über das Wehr fliefsen soll, durch Q; so erbaut man, wenn $Q > \cdot 57\, b\, h \sqrt{2gh}$ ein Überfall-Wehr (wobei die Krone desselben über dem ungestauten Spiegel des Flusses steht), ist $Q < \cdot 57\, b\, h \sqrt{2gh}$, so errichtet man ein Grundwehr (wobei die Wehrkrone unter dem ungestauten Spiegel bleibt), ist endlich $Q = \cdot 57\, b\, h \sqrt{2gh}$ so mufs man die Krone des Wehres in den ungestauten Wasserspiegel des Flusses legen.

In der Regel wird man, wenn die Stauung nur bis 3 Fufs betragen soll, ein Grundwehr, bei 6 Fufs Stauung aber schon ein Überfallwehr errichten.

Setzt man, um die nöthige Höhe eines Überfallwehres zu bestimmen, die Tiefe der Wehrkrone unter dem gestauten Spiegel $= x$ (Fig. 103 a); so ist nach Formel (g), wenn man den zweiten Wurzelfactor als zu unbedeutend von der Einheit abweichend ausläfst:

$$Q = \cdot 57\, b\, x \sqrt{2gx} \text{ und daraus } x = \left(\frac{Q}{\cdot 57\, b \sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} \;.\;. \;(h)$$

Ist dagegen (Fig. 103, b bei einem Grundwehr x die Tiefe der Wehrkrone unter dem ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel, so kann man zur Berechnung von Q annehmen, dafs das Wasser von der Höhe h über den Überfall, jenes von der Höhe x dagegen durch eine untergetauchte Öffnung ausfliefst; für den erstern Theil ist $q = \cdot 57\, b\, h \sqrt{2gh}$ und für den letztern §. 330) $q' = \cdot 62\, b\, x \sqrt{2gh}$, so, dafs also $Q = q + q'$ und daraus, wenn man für q und q' diese Werthe substituirt:

$$x = \frac{Q - \cdot 57\, b\, h \sqrt{2 g h}}{\cdot 62\, b \sqrt{2 g h}} = \frac{Q}{\cdot 62\, b \sqrt{2 g h}} - \cdot 92\, h \quad (i)$$

folgt.

Liegt endlich die Wehrkrone im ursprünglichen oder ungestauten Wasserspiegel, so ist $Q = \cdot 57\, b\, h \sqrt{2 g h}$ und diese Wassermenge muſs nach der obigen Bemerkung genau jener gleich seyn, welche wirklich über das Wehr abflieſsen soll.

Die Stauweite selbst, d. i. die Entfernung, auf welche sich die Stauung stromaufwärts erstreckt, kann näherungsweise durch die ganz einfache Formel $h\, Cot.\, \alpha$ ausgedrückt werden, wenn α den Neigungswinkel der Oberfläche des Wassers unmittelbar bevor es zur Wehre gelangt mit dem Horizonte bezeichnet.

Ausfluſs bei *veränderlicher* Druckhöhe.

(§. 334.)

162. Es sey AOB (Fig. 104) der verticale Durchschnitt eines z. B. mit Wasser bis AB gefüllten Gefäſses von veränderlichem Querschnitt und mit einer horizontalen Bodenöffnung ab versehen. Nimmt man an, der Wasserspiegel AB sey während der Zeit t, diese vom Augenblicke an gerechnet, als der Ausfluſs beginnt, bis MM' und dann in dem darauf folgenden Zeitelemente dt bis mm' gesunken; nimmt man ferner die durch den tiefsten Punct O gezogene Verticallinie OC zur Abscissenachse und setzt $OC = h$, $OP = x$ also $Pp = dx$; so kann man die Druckhöhe x während der Zeit dt, d. i während der Spiegel um $Pp = dx$ herabsinkt, und folglich die momentane Ausfluſsgeschwindigkeit als constant ansehen, und man erhält daher, wenn a die Fläche der Ausfluſsöffnung ist, für die theoretische in der Zeit dt ausflieſsende Wassermenge (§ 322):

$$dP = a\, dt \sqrt{2 g x}.$$

Ist aber die Querschnittsfläche des Gefäſses an dieser Stelle $MM' = U$, so ist auch $dP = U\, dx$, folglich mit Rücksicht, daſs x abnimmt, wenn t zunimmt (dx und dt daher verschiedene Zeichen erhalten müssen):

$$(a) \;.\;.\; a\, dt \sqrt{2 g x} = - U\, dx, \text{ woraus } dt = - \frac{U x^{-\frac{1}{2}} dx}{a \sqrt{2 g}} \text{ folgt.}$$

Die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, ist daher:

$$t = - \frac{1}{a \sqrt{2 g}} \int_h^{h'} U x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{a \sqrt{2 g}} \int_{h'}^{h} U x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (1)$$

Da für die Entleerungszeit T, $h' = 0$ gesetzt werden muſs; so ist

$$T = \frac{1}{a \sqrt{2 g}} \int_0^{h} U x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (2)$$

163. Ist der Querschnitt des Gefäfses constant und $= A$, so hat man nach der Formel (1):

$$t = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'})$$

(§. 335. Gleich. 2)
und nach der Formel (2):

$$T = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_{0}^{h} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = 2 \frac{A}{a\sqrt{2g}} \sqrt{h}$$

(§. 334. Gleich. 1.)

164. Ist das Gefäfs durch Umdrehung der Curve AMO um die Achse CO entstanden, so ist, wenn man die zu x gehörige Ordinate $PM = y$ setzt, $U = y^2 \pi$, wodurch die vorigen Gleichungen (1) und (2) in die nachstehenden:

$$(3) \quad t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} y^2 x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad (4) \quad T = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{0}^{h} y^2 x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$$

übergehen.

165. So hat man z. B. wenn AMO eine gerade Linie ist, für den Ausflufs aus einem kegelförmigen Gefäfse, vom Halbmesser $CA = CB = r$ und der Höhe $CO = h$, nach diesen Formeln (3) und (4), wegen $y = \frac{r}{h} x$ sofort:

$$t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \cdot \frac{r^2}{h^2} \int_{h'}^{h} x^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{5} \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \frac{r^2}{h^2} (h^2\sqrt{h} - h'^2\sqrt{h'})$$

und
$$T = \frac{2}{5} \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} r^2 \sqrt{h} = \frac{6}{5} \frac{V}{a\sqrt{2gh}},$$

wenn man nämlich den Inhalt des Gefäfses $\frac{1}{3} r^2 \pi h = V$ setzt.

Würde die Druckhöhe h nicht abnehmen, so würde ein gleiches Volumen V schon in der Zeit $T' = \frac{V}{a\sqrt{2gh}}$ ausfliefsen, also ist $T = \frac{6}{5} T'$.

166. Ist die Curve AMO ein Kreisbogen vom Halbmesser r, also dafs Gefäfs kugelförmig, so ist wegen $y^2 = 2rx - x^2$, nach der Formel (3):

$$t = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x (2rx - x^2) \quad \text{d. i.}$$

$$t = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3} r (h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{5} (h^{\frac{5}{2}} - h'^{\frac{5}{2}}) \right]$$

und nach der Formel (4), die ganze Ausflufszeit:

$$T = \frac{2\pi}{a\sqrt{2g}}\left(\tfrac{2}{3} r h^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5} h^{\frac{5}{2}}\right)$$

Für die volle Halbkugel wird wegen $h = r$:

$$T = \tfrac{14}{15}\,\frac{\pi r^{\frac{5}{2}}}{a\sqrt{2g}} = \tfrac{7}{5}\,\frac{V}{a\sqrt{2rg}}$$

wenn man den Inhalt $\frac{2}{3} r^3 \pi = V$ setzt.

Für die ganze gefüllte Kugel wird, wegen $h = 2r$:

$$T = \tfrac{16}{15}\,\frac{\pi\sqrt{2}}{a\sqrt{2g}}\, r^{\frac{5}{2}} = \tfrac{4}{5}\,\frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{2rg}}\, V$$

wenn man den Inhalt der Kugel $\frac{4}{3} r^3 \pi = V$ setzt.

Anmerkung. Es unterliegt keinem Anstande auf dem angedeuteten Wege noch die Ausflufszeit aus vielen andern regelmäfsigen Gefäfsen zu finden. Bei irregulären Gefäfsen, mufs man zur Näherungsmethode Zuflucht nehmen.

Auch versteht es sich von selbst, dafs man, um auf die wirkliche Ausflufsmenge überzugehen, in allen diesen Formeln wieder na für a setzen mufs, wenn n den entsprechenden Contractions- oder Reductionscoeffizienten bezeichnet.

167. Erhält das Gefäfs einen beständigen Zuflufs von m Kubikfufs per Secunde oder in der Zeiteinheit, so verwandelt sich die Relation (α) in Nr. **162**, da jetzt während dem Zeitelement dt nicht blofs die Schichte $U\,dx$, sondern auch noch die Wassermenge $m\,dt$ ausfliefst, in die folgende: $$a\,dt\sqrt{2gx} = -U\,dx + m\,dt,$$

woraus: $$dt = \frac{-U\,dx}{-m + a\sqrt{2gx}} \text{ folgt.}$$

Für ein prismatisches Gefäfs von dem constanten Querschnitt $U = A$ erhält man also für die Zeit, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht:

$$t = A\int_{h'}^{h} \frac{dx}{-m + a\sqrt{2gx}}$$

oder wenn man $x^{\frac{1}{2}} = y$, also $dx = 2y\,dy$ setzt und in der bekannten Integralformel $\int \frac{y\,dy}{a+by} = \frac{y}{b} - \frac{a}{b^2}\, logn\,(a + by)$ gehörig substituirt, sofort:

$$t = 2A\left[\frac{\sqrt{h} - \sqrt{h'}}{a\sqrt{2g}} + \frac{m}{2ga^2}\, logn.\left(\frac{-m + a\sqrt{2gh}}{-m + a\sqrt{2gh'}}\right)\right] \ldots (1)\ (\S.\,336)$$

Da man für die Entleerungszeit T wieder $h' = 0$ setzen mufs, so erhält man:

$$T = 2A\left[\frac{\sqrt{h}}{a\sqrt{2g}} + \frac{m}{2ga^2}\, logn.\left(1 - \frac{a}{m}\sqrt{2gh}\right)\right] \ldots (2)$$

Ist nun die beständig zufliefsende Wassermenge $m = a\sqrt{2gh}$, so verwandelt sich die logarithmische Gröfse in $\log o$, und da dieser Logarithmus, folglich auch T imaginär wird; so ist diefs ein Zeichen, dafs unter diesen Umständen das Gefäfs niemals leer werden kann.

Anmerkung. Um überhaupt die Höhe h' zu finden, bis zu welcher der Wasserspiegel sinken mufs, damit das ausfliefsende Wasserquantum dem zufliefsenden gleich wird, von welchem Momente an, dann der Wasserspiegel constant bleibt, hat man aus $m = a\sqrt{2gh'}$ diese gesuchte Höhe

$$h' = \frac{m^2}{2ga^2} \quad (\beta)$$

Um also die Zeit zu finden, während welcher der Wasserspiegel so weit herabsinkt, um dann constant zu bleiben, mufs man diesen Werth von h' in der vorigen Formel (1) substituiren. Da jedoch dafur die Formel $t = \infty$ gibt, so ist diefs ein Beweis dafs sich der Wasserspiegel in aller Strenge niemals auf dieser Höhe h' unveränderlich erhält, sondern sich dieser Grenze in unendlich kleinen Oscillationen nähert, die jedoch für die Wirklichkeit als verschwindend erscheinen. Da übrigens die obige Gleichung (β) den Werth von h' auch $> h$ geben kann; so mufs der Wasserspiegel, anstatt um die genannte Grenze zu erreichen, zu fallen, vielmehr steigen, in welchem Falle in der Formel (1) nur h' mit h vertauscht werden darf, weil das Integrale in diesem Falle von h bis h' genommen werden mufs.

Endlich versteht es sich wieder von selbst, dafs, um auf die wirkliche Ausflufsmenge überzugehen, hier wie überall statt der Ausflufsöffnung a das Product na gesetzt werden mufs, wenn n den betreffenden Contractions- oder Reductionscoeffizienten bezeichnet.

168. Befindet sich bei Voraussetzung eines Gefäfses von durchaus gleicher Weite die Ausflufsöffnung in einer verticalen Seitenwand BC (Fig. 105); so sey, um hier nur den einfachsten Fall zu behandeln, diese bis zum Wasserspiegel reichende Öffnung ein Rechteck von der horizontalen Breite b und verticalen Höhe h.

Ist nun der Wasserspiegel während der Zeit t von der Höhe $AB = h$ bis auf jene $AM = x$ herabgesunken, so sinkt er in dem darauf folgenden Zeitelement dt noch um $Mm = dx$ und man hat nach Nr. **158** für die während dieser Zeit ausfliefsende theoretische Wassermenge:

$$dM = \tfrac{2}{3}\, b\, x\, dt\sqrt{2gx}.$$

Da aber, wenn der horizontale Querschnitt des Gefäfses $= A$ ist, dieselbe Wassermenge auch durch $A\,dx$ ausgedrückt wird, so hat man, mit Rücksicht auf die Zeichen von dx und dt:

$$\tfrac{2}{3}\, b\, x\, dt\sqrt{2gx} = -A\,dx$$

woraus sofort $$dt = -\tfrac{3}{2}\,\frac{A}{b\sqrt{2g}}\, x^{-\frac{3}{2}}\, dx$$ folgt.

Um daher die Zeit zu finden, während welcher der Wasserspiegel von der Höhe h auf jene h' herabgeht, hat man durch Integration, wenn man gleich das Zeichen ändert, folglich die Grenzen umkehrt:

$$t = \frac{3}{2} \frac{A}{b\sqrt{2g}} \int_{h'}^{h} x^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}x = -3 \frac{A}{b\sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h'}}\right)$$

oder $$t = \frac{3A}{b\sqrt{2g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h'}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right)$$

(Man vergleiche §. 337.)

169. Stehen in zwei communicirenden Gefäſsen AD und df, (Fig. 106), bevor die Communication, z. B. durch das Öffnen eines Hahnes hergestellt ist, auf ungleicher Höhe AB, ab; so findet man die Zeit, binnen welcher nach Herstellung der Communication beide Wasserspiegel gleich hoch stehen, auf folgende Weise:

Es seyen nämlich sowohl die beiden Gefäſse AD, df als auch das Verbindungsrohr prismatisch oder cylinderisch und ihre constanten Querschnitte beziehungsweise A, A', a; ferner sey während der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt als die Communication hergestellt worden, der Wasserspiegel AB bis MN gesunken und jener ab bis mn gestiegen und dafür $DN = x$, $dm = y$, $DB = h$ und $da = h'$; so wird im nächst darauf folgenden Zeitelement $\mathrm{d}t$ der erstere noch um $\mathrm{d}x$ fallen und der letztere um $\mathrm{d}y$ steigen, so daſs also, mit Rücksicht darauf, daſs x abnimmt während y zunimmt oder umgekehrt (wodurch $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ entgegengesetzte Zeichen erhalten):

$$A'\,\mathrm{d}y = -A\,\mathrm{d}x \quad \text{und (§. 338)} \quad A\,\mathrm{d}x = -a\,\mathrm{d}t\sqrt{2g(x-y)}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen integrirt gibt $A'y = C - Ax$, oder da für $x = h$, $y = h'$ seyn soll, daher die Constante $C = Ah + A'h'$ wird, auch: $$Ax + A'y = Ah + A'h' \ldots (m)$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung y, setzt diesen Werth in die zweite der vorigen Differenzialgleichungen und integrirt diese; so erhält man: $$\mathrm{d}t = -\frac{A\sqrt{A'}}{a\sqrt{2g}}\,\mathrm{d}x\,[(A+A')x - (Ah + A'h')]^{-\frac{1}{2}}$$

und $$t = C - \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A+A')\sqrt{2g}} \sqrt{[(A+A')x - (Ah + A'h')]}$$

oder da für $t = 0$, $x = h$ seyn muſs, also die Constante

$$C = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A+A')\sqrt{2g}} \sqrt{[A'(h-h')]} \text{ wird, auch:}$$

$$t = \frac{2A\sqrt{A'}}{a(A+A')\sqrt{2g}} \left[\sqrt{[A'(h-h')]} - \sqrt{[(A+A')x - Ah - A'h']}\right]$$

als diejenige Zeit während welcher der Wasserspiegel AB bis MN sinkt, oder jener ab bis mn steigt.

Ist nun die gesuchte Zeit, in welcher beide Spiegel gleich hoch stehen $= T$, so mufs man um T zu erhalten in der vorigen Gleichung $x = y = \frac{Ah + A'h'}{A + A'}$ (aus Gleich. m) setzen; dadurch erhält man, nach gehöriger, einfacher Reduction:

$$T = \frac{2AA'\sqrt{(h - h')}}{a(A + A')\sqrt{2g}},$$

wobei wieder, wenn eine Contraction Statt findet, na statt a zu setzen ist. (§. 341.)

Ausflufs aus einem Gefäfs, welches irgend eine geradlinige, veränderliche Bewegung besitzt.

170. Wird das Gefäfs AD (Fig. 107), welches eine schwere, incompressible Flüssigkeit enthält, in der Richtung RS mit einer veränderlichen Geschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t den Werth v haben soll, fortbewegt; so nimmt die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine Lage ab an, welche sich auf folgende Weise bestimmen läfst.

Betrachtet man in der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche irgend einen Punct M, dessen Masse $= m$ seyn soll, so wirken auf diesen nach der Richtung Mf die Schwerkraft mit dem Drucke mg und nach der Richtung MS die bewegende Kraft $m\frac{dv}{dt}$ (Nr. **56**). Um aber den während der Bewegung eintretenden Zustand auf das statische Gleichgewicht zurückzuführen, denke man sich an den Punct M eine der nach MS wirksamen Kraft $m\frac{dv}{dt}$, welcher die wirkliche Bewegung des Flüssigkeitstheilchens entspricht, gleiche Kraft nach gerad entgegesetzter Richtung von M gegen R $\left(\text{d. i. die Kraft } -m\frac{dv}{dt}\right)$ angebracht, so wird diese, wenn das Gefäfs keine Bewegung hat, mit dem ganzen Systeme im Gleichgewichte stehen. (M. s. die nachstehende Anmerkung.)

Ist also $Mf = mg$ und $Mn = Mn' = m\frac{dv}{dt}$, so wird die Gestalt der freien Oberfläche der Flüssigkeit, so wie die ihrer Niveauschichten (Nr. **138**) der Bedingung entsprechen müssen, dafs die Flüssigkeit unter der Einwirkung der beiden Kräfte Mn und Mf oder ihrer Resultirenden Md auf jedes ihrer Theilchen von der Masse m im Gleichgewichte bleibe; dieses findet aber (**138**) Statt, wenn der Spiegel ab, so wie alle Niveauschichten auf dieser Resultirenden Md perpendikulär stehen.

Anmerkung. Das hier angewendete Verfahren, um die Aufgabe der Bewegung auf eine Aufgabe des Gleichgewichtes zurückzuführen, beruht auf dem allgemeinen (in Nr. 61, Anmerk. 2, 7. erwähnten) Bewegungsgesetz, welches nach seinem Erfinder das *d'Alembert*'sche Princip genannt wird und in folgendem besteht.

Wirken auf ein System von materiellen Puncten, dessen Massen m, m', m'' . . seyn sollen und wovon sich keiner frei oder so bewegen kann, dafs er durch seine Bewegung nicht auch zugleich die der übrigen Puncte mit affiziren müfste, beziehungsweise die Kräfte p, p', p'' . . . in diese Massen m, m', m'' ein; so wird im Allgemeinen von jeder dieser Kräfte nur ein Theil auf die wirkliche Bewegung der Massen m, m' . . (in so weit diese letztere nämlich durch die wechselseitige Verbindung dieser Puncte möglich wird) verwendet, während der andere Theil durch das Verbindungssystem gerade so aufgehoben oder vernichtet wird, wie es der Fall seyn würde, wenn sich diese letzteren Theile der Kräfte an dem Systeme im Gleichgewichte befänden.

Nimmt man nun an, dafs durch die genannte Einwirkung der Kräfte p, p' . . die Massen m, m' . . eine Bewegung annehmen, wodurch sie in der Zeiteinheit und zwar in dem Augenblicke als man das System betrachtet, die Beschleunigungen s, s', s'' . . erhalten; so sind die zuerst genannten Theile der Kräfte p, p' . . welche die wirkliche Bewegung der Massen hervorbringen ms, $m's'$, $m''s''$ . . . und man kann diese Theile die wirksamen Kräfte des Systemes nennen. Die übrigen Theile der auf das System wirkenden Kräfte, welche sofort durch die Widerstandsfähigkeit der Verbindungen der einzelnen Massen vernichtet werden, befinden sich, wie bereits erwähnt, mit den Widerständen der Verbindungs- oder Verknüpfungsbänder, wenn man sich solche vorstellen will, im Gleichgewichte.

Bleiben sich also diese Widerstände gleich, es mag das System in der Ruhe oder in Bewegung seyn, so ist klar, dafs wenn man auf die Massen m, m' . . noch Kräfte anbringt, welche den wirksamen Kräften gleich, diesen aber gerade entgegengesetzt sind, d. i. wenn man noch beziehungsweise die Kräfte $-ms$, $-m's'$, $-m''s''$ . . . an den Massen m, m' . . des Systemes anbringt, diese mit den Kräften p, p', p'' . . . zusammen, das System in den Zustand der Ruhe (oder nach einem Anstofs, der gleichförmigen Bewegung) versetzen müssen.

Da dieses *d'Alembert*'sche Princip, oder eigentlicher dieser Lehrsatz, auch noch in änderer Art ausgesprochen wird, so denke man sich die Kraft p, welche in der Masse m, wenn sie frei, also mit den übrigen Puncten nicht verbunden wäre, in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit v erzeugen soll, also als bewegende Kraft durch mv ausgedrückt werden kann, in die zwei Seitenkräfte ms und mf zerlegt; so ist nach der obigen Voraussetzung, ms der wirksame und mf der verlorne Theil davon auf das System. Bezeichnen $m's'$ und $m'f'$, $m''s''$ und $m''f''$ u. s. w. dasselbe für die übrigen Kräfte p', p'' . . .; so folgt nach dem, was oben bemerkt wurde, dafs $mf + m'f' + m''f'' + \ldots = 0$ ist, und da folglich einige dieser Glieder negativ seyn müssen, die man im Gegensatze zu den verlornen Kräften gewonnene nennen kann, so kann man entweder sagen, dafs die in jedem Augenblicke verloren gehenden Kräfte sich aufheben oder im Gleichgewichte stehen, oder auch dafs sich in jedem Systeme die verlornen und gewonnenen Kräfte der verschiedenen materiellen Puncte das Gleichgewicht halten müssen, in welcher Form dieser Satz eigentlich nichts anderes als die Anwendung des (Nr. 65) allgemeinen Principes ist, dafs die Wirkung und Gegenwirkung einander immer gleich und entgegengesetzt sind.

Da man jede Seitenkraft wie mf ebenfalls als eine Mittelkraft und zwar aus $p = mv$ und $-ms$ ansehen kann, so läfst sich in der vorigen Bedingungsgleichung $mf + m'f' \ldots = 0$ jede dieser verlornen Kräfte durch die eben genannten gleichgeltenden Kräfte p und $-ms$, p' und $-m's'$ u. s. w. ersetzen, wodurch man wieder auf die ursprünglich ausgesprochene Form dieses Satzes kommt, in Folge welcher zwischen den gegebenen Kräften, welche auf die sämmtlichen materiellen Puncte eines in Bewegung befindlichen Systemes wirken, und jenen Kräften, welche in jedem Augenblicke die unendlich kleinen Geschwindigkeitsveränderungen in den materiellen Puncten hervorbringen, diese letzteren Kräfte jedoch nach entgegengesetzten Richtungen oder mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, fortwährend Gleichgewicht seyn mufs. Nach der gewählten Bezeichnungsart würde die Kraft p oder mv in dem materiellen Puncte m, wenn er frei wäre, in der unendlich kleinen Zeit dt die Geschwindigkeit vdt erzeugen, während die wirkliche Zunahme an Geschwindigkeit in dieser Zeit $= s\,dt$, und deren Richtung im Allgemeinen von jener der Geschwindigkeit $v\,dt$ verschieden ist.

171. Um nun die Richtung dieser Ebenen, wie jene ab zu bestimmen, sey der Winkel bMB, welchen die Ebene ab mit dem Horizonte bildet $= \varphi$, und der Winkel fMS, welchen die Bewegungslinie RS des Gefäfses mit der lothrechten Linie bildet $= \alpha$; so ist wenn man $Mn = m\frac{dv}{dt}$ und $Mf = mg$ abschneidet und das Parallelogramm nf construirt, endlich die Resultirende Md durch Q bezeichnet, ganz einfach $Q\,Sin\,\varphi = m\frac{dv}{dt}\,.\,Sin\,\alpha$ und wenn de parallel zu AB ist, wegen $Me = Q\,Cos\,\varphi = Mf - ef = mg - df\,.\,Cos\,\alpha$, auch:

$$Q\,Cos\,\varphi = mg - m\frac{dv}{dt}\,Cos\,\alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man mit m abkürzt:

$$tang\,\varphi = \frac{\frac{dv}{dt}\,Sin\,\alpha}{g - \frac{dv}{dt}\,Cos\,\alpha} \quad (1)$$

und $$Q = m\sqrt{\left[g^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - 2g\frac{dv}{dt}\, Cos\,\alpha\right]} \quad (2)$$

Diese Gleichungen zeigen, daſs sobald die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte, also überhaupt eine gleichförmig veränderliche ist, wofür bekanntlich (Nr. **52.**) der Quotient $\frac{dv}{dt}$ eine constante Gröſse ist, die beiden Gröſsen φ und Q in Beziehung zur Zeit constant sind und daher auch die Flüssigkeit gegen das Gefäſs eine unveränderte Lage beibehält.

Da bei einer gleichförmigen Bewegung $\frac{dv}{dt} = 0$ ist, so wird dafür $tang\,\varphi$, also auch $\varphi = 0$ und $Q = mg$ gleich dem Gewichte der Flüssigkeit, zum Beweis, daſs sich die Flüssigkeit dabei gerade so verhält, als wenn das Gefäſs in der Ruhe wäre.

172. Bezeichnet man den Wurzelausdruck der vorigen Gleichung (2) mit u, so ist auch $Q = mu$ oder die nach Md wirksame Resultirende Q ist im Stande dem Theilchen von der Masse m in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit u mitzutheilen. Da nun dasselbe auch für alle übrigen Flüssigkeitstheilchen gilt, so folgt, daſs die Wirkung dieser Kraft Q ganz ähnliche oder analoge Erscheinungen auf die bewegte Flüssigkeit hervorbringt wie die Schwerkraft auf eine ruhende Flüssigkeit, und da diese letztere Kraft durch $Q = mg$ ausgedrückt wird und lothrecht wirkt, so darf man nur u oder den genannten Wurzelausdruck statt g setzen und berücksichtigen daſs die Richtung dieser Kraft Md ist, um alle aus der Einwirkung der Schwere auf eine ruhende Flüssigkeit auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

Der genannte Wurzelausdruck ist auch:

$g\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{g\,dt}\right)^2 - 2\frac{dv}{g\,dt}\, Cos\,\alpha\right]}$ und da, wenn μ die Dichte der Flüssigkeit, also $\mu g = \gamma$ das Gewicht der cubischen Einheit derselben bezeichnet, so kann man auch bei dieser Umwandlung

$\gamma\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dv}{g\,dt}\right)^2 - 2\frac{dv}{g\,dt}\, Cos\,\alpha\right]}$ statt γ setzen.

Liegt z. B. ein Punct m in perpendikulärer Richtung gegen den Spiegel ab um die Tiefe $Mm = h$ unter der Oberfläche, so hat man für den in diesen Punct auf die Flächeneinheit Statt findenden hydraulischen Druck: $$p = p' + \gamma h \sqrt{U} \quad (3)$$
wenn nämlich p' den auf den Spiegel Statt findenden atmosphärischen Druck und $\sqrt{U}$ Kürze halber den letztern Wurzelausdruck bezeichnet.

12*

Endlich ist der Gesammtdruck P, welchen die ganze Flüssigkeit gegen das Gefäfs ausübt und sich wie eine durch den Schwerpunct der Flüssigkeit nach der Richtung Md wirksame Kraft äufsert, wenn man die Masse der ganzen Flüssigkeit durch M und ihr Gewicht durch Q' bezeichnet, sofort: $P = Mg\sqrt{U} = Q'\sqrt{U}$ (4)
wobei $\sqrt{U}$ den genannten Wurzelausdruck bedeutet.

173. Beispiele. 1) Gleitet z. B. das bis zu einer gewissen Höhe mit Wasser gefüllte Gefäfs DEF (Fig. 108) über die schiefe Ebene AB, also mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab, und ist der Neigungswinkel $ABC =$; so hat man wegen (§. 147) $v = gt\,Sin\,\beta$ sofort $\frac{d}{dt} = g\,Sin\,\beta$ und aufserdem $\alpha = 90^0 - \beta$, folglich nach der Relation (1) in **171**: $tang\,\varphi = \frac{g\,Sin\,\alpha\,Sin\,\beta}{g - g\,Sin\,\beta\,Cos\,\alpha} = \frac{Cos\,\beta\,Sin\,\beta}{1 - Sin^2\,\beta} = \frac{Sin\,\beta}{Cos\,\beta} = tang\,\beta$, oder $\varphi = \beta$, d. h. der Wasserspiegel stellt sich bei dieser Bewegung parallel mit der schiefen Ebene AB.

Da ferner der obige Wurzelausdruck:
$\sqrt{U} = \sqrt{(1 + Sin^2\beta - 2\,Sin^2\beta)} = \sqrt{(1 - Sin^2\beta)} = Cos\,\beta$ ist, so hat man für den hydraulischen Druck p in einem Puncte m, welcher um die Tiefe $Mm = h$ unterm Wasserspiegel liegt (Mm perpendikulär auf AB) nach der Formel (3) (Nr. **172**) $p = p' + \gamma h\,Cos\,\beta$ oder wenn man p' ausläfst, $p = \gamma h\,Cos\,\beta$; so wie endlich den Gesammtdruck der Flüssigkeit normal auf AB, nach der Formel (4), $P = Q'\,Cos\,\beta$, gerade so als ob ein starrer Körper vom Gewichte Q' auf der schiefen Ebene läge oder herabglitte.

2) Wird das Gefäfs mit gleichförmig beschleunigter Bewegung nach horizontaler Richtung fortgetrieben, so wird wegen $\alpha = 90^0$, wenn man $\frac{dv}{dt} = a$ setzt, $tang\,\varphi = \frac{a}{g}$ und $p = p' + \gamma h \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right)} = p' + \gamma h\sqrt{(1 + tang\,\varphi^2)} = p' + \gamma \frac{h}{Cos\,\varphi} = p' + \gamma h'$, wenn man nämlich durch den Punct m die lothrechte Linie mn (Fig 109) bis zum Wasserspiegel zieht und ihre Länge $= h'$ setzt. Der in irgend einem Puncte m Statt findende hydraulische Druck ist also eben so grofs, wie der hydrostatische Druck, welcher bei einer ruhenden Flüssigkeit auf den um die verticale Tiefe $nm = h'$ unter dem Spiegel liegenden Punct Statt finden würde.

Der Gesammtdruck ist in einer auf den Wasserspiegel ab perpendikulären Richtung nach der Formel (4), $P = Q'\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2}\right)}$.

3) Wird das Gefäfs mit gleichförmig beschleunigter Bewegung vertical aufwärts bewegt, so hat man $\alpha = 180^0$ zu setzen; dadurch wird (Nr. **171**) $tang\ \varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, zum Beweis, dafs in diesem Falle der Spiegel der Flüssigkeit horizontal bleibt.

Da ferner, wenn man wieder $\frac{dv}{dt} = a$ setzt, der obige Wurzelausdruck $\sqrt{U} = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{g^2} + 2\frac{a}{g}\right)} = 1 + \frac{a}{g}$ wird, so erhält man für den hydraulischen Druck in der Tiefe h unter der Oberfläche (mit Auslassung des atmosphärischen Drucks, der sich von selbst versteht) $p = \gamma\, h\left(1 + \frac{a}{g}\right)$, so wie für den Gesammtdruck in verticaler Richtung, $P = Q'\left(1 + \frac{a}{g}\right)$.

Wäre die Beschleunigung bei dieser Bewegung gerade gleich jener der Schwere, nämlich $= g$, so wäre $v = g\, t$ und $\frac{dv}{dt} = a = g$, folglich $p = 2\,\gamma\, h$ und $P = 2\, Q'$, also der Druck gerade doppelt so grofs, als wenn das Gefäfs ruhte.

4) Wird endlich das Gefäfs vertical abwärts bewegt und zwar wieder gleichförmig beschleunigt, so wird $\alpha = 0$ und daher $tang\ \varphi = 0$, also auch $\varphi = 0$, so, dafs also der Spiegel wieder horizontal bleibt; ferner ist $p = \gamma\, h\left(1 - \frac{a}{g}\right)$ und $P = Q'\left(1 - \frac{a}{g}\right)$.

Liefse man in diesem Falle das Gefäfs sammt der Flüssigkeit frei herabfallen, so würde wieder $\frac{dv}{dt} = a = g$ und daher $p = 0$ (oder eigentlich $p = p'$) und $P = 0$, so, dafs also der Gesammtdruck der Flüssigkeit gegen das Gefäfs, wie man voraus weifs, Null ist.

174. Es läfst sich jetzt auch leicht die Ausflufsmenge bestimmen, wenn das bisher betrachtete Gefäfs ABE (Fig. 110) mit einer kleinen Boden- oder Seitenöffnung C, deren Querschnitt $= a$ seyn soll, versehen ist.

Ist nämlich ab die nach Nr. **171** bestimmte Lage des Spiegels der Flüssigkeit und $CD = h$ der perpendikuläre Abstand des Mittelpunctes der Ausflufsöffnung von der Oberfläche ab der Flüssigkeit, so darf man in den frühern Nrn., welche von dem Ausflusse handeln, wenn nur die geradlinige Bewegung des Gefäfses gleichförmig beschleunigt, also der Quotient $\frac{dv}{dt} = A$ constant, folglich der obige Wurzelausdruck in Nr. **172**, den wir Kürze halber mit $\sqrt{U}$ bezeichnen wollen und

$=\sqrt{\left[1+\frac{A^2}{g^2}-2\frac{A}{g}\,Cos\,\alpha\right]}$ wird, nur statt der Richtung der Schwere die auf den Spiegel ab perpendikuläre Richtung, und statt ihrer Intensität g jene $g\sqrt{U}$ nehmen, wodurch dann auch das Gewicht γ der cubischen Einheit in $\gamma\sqrt{U}$ übergeht.

Man erhält dadurch, wenn der Spiegel ab unveränderlich ist, für die constante Ausflufsgeschwindigkeit V, oder wenn dieser allmählig herabsinkt, für die momentane Ausflufsgeschwindigkeit nach §. 321 oder Nr. **162**: $$V=\sqrt{[2gh\sqrt{U}]},$$ also für die in der Zeiteinheit ausfliefsende Flüssigkeitsmenge, wenn keine Contraction Statt findet, $M=aV=a\sqrt{[2gh\sqrt{U}]}$, oder wenn n der Contractionscoeffizient ist: $M=naV$.

Da V die relative Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeit gegen das Gefäfs ist, so mufs man, um die absolute Geschwindigkeit der ausströmenden Flüssigkeitstheilchen zu erhalten, aus den beiden Geschwindigkeiten v und V des Gefäfses und der ausströmenden Flüssigkeit die Resultirende suchen.

175. Beispiele. 1) Gleitet das Gefäfs z. B. über eine absolut glatte schiefe Ebene, deren Neigungswinkel $=\beta$ ist, herab, so hat man wegen (Nr. **173**) $\frac{dv}{dt}=g\,Sin\,\beta$ und $\alpha=90^0-\beta$, folglich $\sqrt{U}=Cos\,\beta$, die Ausflufsgeschwindigkeit $V=\sqrt{(2gh\,Cos\,\beta)}$.

2) Wird das Gefäfs vertical auf- oder abwärts bewegt, wobei also (Nr. **173**, 3, 4) der Flüssigkeitsspiegel horizontal bleibt; so erhält man wegen $\alpha=180^0$ oder 0, also $\sqrt{U}=1\pm\frac{A}{g}$ für beide Fälle:
$$V=\sqrt{\left[2gh\left(1\pm\frac{A}{g}\right)\right]}$$
wobei das obere Zeichen für die aufwärts, das untere für die abwärts gerichtete Bewegung gilt.

Für den besondern Fall von $\frac{dv}{dt}=A=g$, würde beziehungsweise $V=\sqrt{4gh}$ und $V=0$, so dafs also bei dieser raschen Bewegung nach aufwärts, die Ausflufsgeschwindigkeit im Verhältnifs von $1:\sqrt{2}$ gröfser als im Zustande der Ruhe wäre.

Wäre endlich die Bewegung gleichförmig, also $\frac{dv}{dt}=A=0$ und $\sqrt{U}=1$, so wäre der Spiegel horizontal und $V=\sqrt{2gh}$, gerade so wie im Zustande der Ruhe.

Ausflufs aus einem Gefäfs, welches um eine verticale Achse gedreht wird.

176. Wird das, bis auf eine gewisse Höhe mit einer schweren incompressibeln Flüssigkeit gefüllte Gefäfs BF (Fig. 111) mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse CG umgedreht, so findet man den Zustand des Gleichgewichtes der Flüssigkeit, welche an dieser Bewegung Theil nimmt, wenn man berücksichtiget, dafs auf jedes Theilchen M von der Masse m erstlich die Schwerkraft nach lothrechter Richtung $KM = g$ und dann noch die Centrifugalkraft LM nach horizontaler Richtung wirksam ist. Setzt man den, dem Puncte M entsprechenden Halbmesser $PM = y$, so ist die Gröfse dieser letztern Kraft, ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen (Nr. **60**, Anmerk.) $LM = yw^2$, so, dafs wenn man das Kräftenparallelogramm LK ergänzt, die Resultante aus diesen beiden Kräften KM und LM sofort $QM = \sqrt{[g^2 + (yw^2)^2]}$ ist, welche in der Richtung QM wirkt. Hieraus folgt (**138**) dafs das genannte Gleichgewicht der Flüssigkeit nur bestehen kann, wenn die freie Oberfläche, und folglich auch alle Niveauschichten in jedem Puncte auf der entsprechenden Richtung QM normal stehen.

Ist daher BF ein durch die Achse CG geführter verticaler Durchschnitt, NAN' die von der freien Oberfläche gebildete Curve, MT die an irgend einen Punct M derselben geführte Tangente, so wie für diesen Punct $AP = x$, $PM = y$ als rechtwinkelige Coordinaten und der Winkel $MTC = \alpha$; so folgt wegen W. QML = W. MTC sofort:

$$tang\,\alpha = \frac{QL}{ML} = \frac{KM}{ML} = \frac{g}{yw^2}.$$

und da auch, wie bekannt $tang\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat man durch Gleichsetzung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{yw^2} \quad \text{oder} \quad y\,dy = \frac{g}{w^2}\,dx.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$y^2 = \frac{2g}{w^2}\,x \;.\;. \quad (1)$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Aus dieser Gleichung (1) folgt also, dafs die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine durch Umdrehung der Parabel NAN', deren Parameter $= \frac{2g}{w^2}$ ist und Scheitel A in der Umdrehungsachse liegt, erzeugte paraboloidische Fläche bildet. (Vergleiche §. 399.)

Anmerkung. Da die in horizontaler Richtung wirkende Centrifugalkraft keinen Einfluſs auf die lothrecht wirkende Schwerkraft hat, so muſs in irgend einem Puncte J der Druck p auf die Flächeneinheit eben so groſs, nämlich $p = \gamma h$ seyn, wenn $JM = h$ und γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit ist, als er in einer ruhigen Flüssigkeit auf einen Punct Statt findet, welcher um die Tiefe h unterm horizontalen Wasserspiegel liegt. (Der atmosphärische Druck ist dabei wieder ausgelassen.) Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes auch dadurch überzeugen, daſs man die auf das Theilchen M in der Richtung QM drückende Kraft, wieder in die zwei ursprünglichen Seitenkräfte KM und LM nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt, wodurch die erstere $= g$ also gerade so wie die Schwerkraft wirkt.

Bildet die Umdrehungsachse CG zugleich die geometrische Achse des Gefäſses, welches also gegen diese symmetrisch ist; so heben sich die, in je zwei diametral gegenüberliegenden, gleich weit von der Achse abstehenden Puncten, wirkenden Centrifugalkräfte auf, d. h. die Resultante der aus den sämmtlichen Centrifugalkräften hervorgehenden Pressungen, ist auf die ganze Flüssigkeit gleich Null, folglich äuſsert sich der Gesammtdruck der Flüssigkeit bloſs in verticaler Richtung und es ist dieser gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

177. Um nun den Ausfluſs der Flüssigkeit aus dem Gefäſs DN (Fig. 112), welches eine gleichförmige Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse BC besitzt, zu untersuchen, sey, sobald der Beharrungsstand eingetreten, DAE die in der vorigen Nr. bestimmte Parabel der freien Oberfläche der Flüssigkeit und $AB = h$ die Druckhöhe für den Scheitel. Denkt man sich nun in den Puncten B und N des Bodens zwei, im Verhältniſs zum Querschnitt des Gefäſses, sehr kleine Öffnungen, setzt $BN = y$ und die Ausfluſsgeschwindigkeiten in diesen Öffnungen beziehungsweise $= v$ und V; so ist nach der vorigen Anmerk. die Pressung der Flüssigkeit in diesen Puncten B und N genau so groſs wie in einem ruhenden Gefäſse, in welchem AB und MN die Druckhöhen sind, also $v^2 = 2g . AB$ und $V^2 = 2g\ MN$, oder da $AB = h$ und $MN = NP + PM = h + x = h + \frac{y^2 w^2}{2g}$ (vorige Nr., Gleich. 1) ist, auch $v = \sqrt{2gh}$ und $V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]}$ oder wenn man die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes N, d. i. $yw = u$ setzt, auch $V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{u^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh + u^2)}$. (Vergleiche § 401.)

Die Ausfluſsgeschwindigkeit nimmt also immer mehr zu, je weiter die Öffnung von der Rotationsachse CB absteht.

Ist für die Seitenöffnung O der Abstand $AR = h'$, jener $OR = Y$ und die Rotationsgeschwindigkeit des Punctes $O = U$; so ist für diese kleine Seitenöffnung bei unveränderlichem Spiegel der Flüssigkeit die constante, bei veränderlichem Spiegel die momentane Ausflufsgeschwindigkeit: $$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + \frac{Y^2 w^2}{2g}\right)\right]} = \sqrt{(2gh' + U^2)}.$$

Anmerkung 1. Es versteht sich von selbst, dafs diese Resultate keine Änderung erleiden, wenn auch die Oberfläche der Flüssigkeit nicht frei, sondern das Gefäfs oben geschlossen ist, so, dafs sich dieser parabolische Trichter gar nicht bilden kann; immer kommt es dabei auf die Rotationsgeschwindigkeit der Ausflufsöffnung an.

Anmerkung 2. Um den Ausflufs aus einer engen Röhre Ef (Fig 113) zu bestimmen, welche ebenfalls mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w um die verticale Achse AB umgedreht wird, darf man nur wieder auf das vorige Gefäfs zurückgehen und sich vorstellen, dafs sich die Flüssigkeit in lauter sehr feinen Fäden oder Canälen von beliebiger Form, wovon MO (Fig. 112) einer seyn soll, durch die Ausflufsöffnung O ergiefse; dafür war aber, wenn man $Pr = h$ und $RO = y$ setzt, die Ausflufsgeschwindigkeit
$$V = \sqrt{\left[2g\left(h + \frac{y^2 w^2}{2g}\right)\right]} \ldots \quad (\alpha)$$

Setzt man aber $AP = y'$, ferner $Mr = h'$, d. i. $h' = h + PM = h + \frac{y'^2 w^2}{2g}$ (176), so ist $h = h' - \frac{y'^2 w^2}{2g}$ und wenn man auf jeder Seite dieser Gleichung $\frac{y^2 w^2}{2g}$ addirt:
$$h + \frac{y^2 w^2}{2g} = h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}$$
so, dafs man die vorige Gleichung (α) auch unter der Form schreiben kann:
$$V = \sqrt{\left[2g\left(h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right)\right]}.$$

Dieselbe Gleichung gilt nun aber auch für die erwähnte Röhre in Fig. 113, wenn man darin $AB = h'$, $AC = y'$ und $BD = y$ setzt und dabei den Spiegel EF als unveränderlich voraussetzt.

Hier ist durchaus angenommen worden, dafs der, gegen die Oberfläche der Flüssigkeit etwa Statt findende Druck (wie z, B. jener der Atmosphäre) jenem gegen die Ausflufsöffnung gleich sey; wäre diefs nicht der Fall, sondern der Druck auf die Flächeneinheit der Oberfläche EF (Fig 113) $= p$ und auf die Ausflufsöffnung $ef = p'$, so müfste z. B. die Geschwindigkeit V der letzten Formel aus der Gleichung
$$\gamma\frac{V^2}{2g} = p - p' + \gamma\left[h' + (y^2 - y'^2)\frac{w^2}{2g}\right]$$ bestimmt werden, wobei wieder γ das Gewicht der cubischen oder Volumen Einheit der Flüssigkeit ist.

Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

(§. 342.)

178. Bezeichnet man den innern oder lichten Durchmesser der Röhre mit D, den Umfang mit U, den Querschnitt mit A, die Länge derselben mit L, die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre mit v und den durch die Reibung des Wassers an den Röhrenwänden entstehenden Gefällsverlust, d. h. die Höhe der Wassersäule, deren Gewicht im Stande ist diesen Reibungswiderstand zu überwinden, mit z; so hat man nach §. 344, wenn α und β zwei Erfahrungscoeffizienten sind, für Röhren von was immer für einer Querschnittsform:

$$z = \frac{UL}{A}(\alpha v + \beta v^2) \quad . \quad . \quad (1)$$

und für cylinderische Röhren:

$$z = \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2) \quad . \quad . \quad (2)$$

Legt man dabei den Meter als Einheit zum Grunde, so kann man für die Coeffizienten α, β nach *Prony* die Werthe nehmen $\alpha = {}^{\cdot}00001733$ und $\beta = {}^{\cdot}0003483$. . ($a$) Nimmt man dagegen den Wiener Fuſs zur Einheit, so verwandeln sich diese Werthe in $\alpha = {}^{\cdot}00001733$ und $\beta = {}^{\cdot}0001101$ . . (m).

Nach den genauesten Versuchen von *Du Buat*, *Bossut* und *Couplet*, hat *d'Aubuisson* folgende Werthe erhalten, und zwar wenn man den Meter zur Einheit nimmt:

$$\alpha = {}^{\cdot}0000188\,,\ \beta = {}^{\cdot}0003425 \quad . \quad . \quad (b)$$

und wenn man den Wiener Fuſs zum Grunde legt:

$$\alpha = {}^{\cdot}0000188\,,\ \beta = {}^{\cdot}0001083 \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

Unter Berücksichtigung des Einflusses der Contraction des Wassers beim Eintritte in die Röhrenleitung, nach welcher die ganze Druckhöhe $h = \frac{v^2}{2gn^2} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ und $n = {}^{\cdot}8125$ gesetzt wurde, fand *Eytelwein* aus 51 Beobachtungen von *Couplet*, *Bossut* und *Du Buat* für das Metermaſs:

$$\alpha = {}^{\cdot}0000223579\,,\ \beta = 000283174.$$

Weisbach dagegen fand unter derselben Voraussetzung mit Zugrundelegung von 49 Beobachtungen:

$$\alpha = {}^{\cdot}000057287\,,\ \beta = {}^{\cdot}00023097.$$

So wäre z. B. für die Geschwindigkeiten von $v = {}^{\cdot}1$, 1, 2 und 4 Meter beziehungsweise nach den erstern Werthen (a) von α und β:

$\alpha v + \beta v^2 =$ ·0000052, ·0003656, ·0014277 und ·0056421, also z. B. für cylinderische Röhren in diesen 4 Fällen die Wassersäule zur Überwindung des Reibungswiderstandes $z =$ ·0000208$\frac{L}{D}$, ·0014624$\frac{L}{D}$, ·0057108$\frac{L}{D}$ und ·0225684$\frac{L}{D}$ Meter.

Für die in (*b*) angegebenen Werthe von α und β, wäre dagegen $\alpha v + \beta v^2 =$ ·0000053, ·0003613, ·0014076, ·0055552.

179. Anstatt dafs in den vorigen Formeln nach der gewöhnlichen Methode nebst der 2ten auch noch die 1ste Potenz der Geschwindigkeit eingeführt ist, findet ***Weisbach***, welcher die frühern Versuche von ***Prony***, ***Eytelwein***, ***Couplet***, ***Bossut*** und ***Du Buat*** so wie seine eigenen 11 Versuche (nebst einem von ***Gueymond*** in Grenoble) nämlich 63 an der Zahl zum Grunde legt, dafs man der Wahrheit näher komme, wenn man statt der 1sten die $\frac{3}{2}$te Potenz von der Geschwindigkeit in die Formel aufnimmt. Er findet nämlich nach der Methode der kleinsten Quadrate, wenn man diese Widerstandshöhe durch

$$z = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \qquad (3)$$

ausdrückt und den Meter zur Einheit nimmt, sofort:

$\alpha =$ ·01439 und $\beta =$ ·0094711, wobei $g = 9$·808 ist.

Legt man den Wiener Fufs zum Grunde, so hat man:

$\alpha =$ ·01439 und $\beta =$ ·01685 zu setzen, wobei $g = 31$ ist.

Nach dieser Formel würde man für die vorigen Beispiele von $v =$ ·1, 1, 2 und 4 Meter beziehungsweise erhalten $z =$ ·0000226$\frac{L}{D}$, ·0012164$\frac{L}{D}$, ·0043026$\frac{L}{D}$ und ·0155999$\frac{L}{D}$.

Die Vergleichung mit den vorigen Werthen zeigt, dafs bei gröfseren Geschwindigkeiten die Widerstandshöhen nach der *Weisbach*'schen Formel bedeutend geringer als nach allen frühern, besonders den französischen Formeln ausfallen. So wäre z. B. für $D = \frac{1}{4}$ und $L = 200$ Meter nach *Redtenbacher* $z = 18$ und nach *Weisbach* $= 12\frac{1}{2}$ Meter. *Weisbach* führt übrigens an, dafs er seine Versuche mit weitern Röhren als es früher geschehen, nämlich mit Röhren von 33, 71 und 275 Millimeter angestellt und dabei die Geschwindigkeit v bis auf 4·648 Meter ausgedehnt habe. Auch mufs noch bemerkt werden, dafs sich diese Werthe auf metallene Röhren von gewöhnlicher Beschaffenheit beziehen und dafs man diese, auf hölzerne Röhren angewendet, nach *Weisbach* mit 1·75 multipliciren müsse.

180. Um den durch plötzliche Verengungen oder Erweiterungen des Röhrenquerschnittes herbeigeführten Verlust an

G e f ä l l s h ö h e zu bestimmen, wollen wir zuerst annehmen, dafs sich die normale Querschnittsfläche A der Röhre (Fig. 114) plötzlich erweitere und in A' übergehe. Ist daher v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt A und v' jene in der Erweiterung A', so mufs die gröfsere Geschwindigkeit v plötzlich auf die kleinere v' gebracht werden. Jedes Wassertheilchen m stöfst also gegen die unendlich gröfsere Wassermasse m' und verliert wie bei dem Stofse unelastischer Körper (§. 201) an lebendiger Kraft $\frac{m m' (v - v')^2}{m + m'}$, oder da m gegen m' verschwindet, $\frac{m m'}{m'} (v - v')^2 = m (v - v')^2$, folglich ist der Verlust an Wirkungsgröfse $= \frac{m (v - v')^2}{2 g}$ oder an Gefällshöhe $z' = \frac{(v - v')^2}{2 g}$.

Da sich nun die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Querschnitte verhalten müssen, um in derselben Zeit gleiche Wassermengen durchzuführen, so ist $v' = \frac{A}{A'} v$ und daher der G e f ä l l s v e r l u s t:

$$z' = \left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 . \frac{v^2}{2 g}.$$

A n m e r k u n g. Der hier betrachtete Verlust kann durch Abrunden der Kanten und allmähliges Übergehen von einer Röhre in die andere, wie in Fig. 114′, bedeutend vermindert und selbst ganz aufgehoben werden.

181. Ein ähnlicher Verlust an Gefällshöhe entsteht auch dann, wenn das Wasser aus einem Gefäfse oder Behälter, wie in Fig 115, in eine Röhre tritt. Ist dieser Eintritt noch durch eine dünne Wand, d. i. ein D i a p h r a g m a, oder auch, wie es oft der Fall, durch ein S i e b oder G i t t e r verengt; so sey wieder A der Querschnitt der Röhre und f jener der Öffnung des Diaphragma oder die Summe der Öffnungen des Siebes, so wie α der entsprechende Contractionscoeffizient beim Durchgange des Wassers durch diese Öffnungen. Da nun αf der Querschnitt der gröfsten Zusammenziehung, also, wenn wieder v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, $\frac{A}{\alpha f} v$ die in diesem Statt findende Geschwindigkeit ist, welche plötzlich in jene v übergeht; so hat man wie vorhin dadurch den Gefällsverlust $z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2 g}$ . . (a)

Fällt das Diaphragma weg, so ist wegen $f = A$ in diesem Falle

$$z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2 g} . . \quad (b)$$

(Vergleiche Zusatz 5. auf S. 613.)

Nach den Versuchen von *Weisbach* kann man für die Werthe von $\frac{f}{A} = \cdot 1, \cdot 2, \cdot 3, \cdot 4, \cdot 5, \cdot 6, \cdot 7, \cdot 8, \cdot 9, 1$ den Contractionscoeffizient $\alpha = \cdot 616$, $\cdot 614$, $\cdot 612$, $\cdot 610$, $\cdot 607$, $\cdot 605$, $\cdot 603$, $\cdot 601$, $\cdot 598$, 596 setzen. So wäre z. B. für $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$ oder $f = \frac{1}{2} A$, nach der vorigen Formel der durch diese Verengung entstehende Verlust an Gefällshöhe:
$z' = \left(\frac{2}{\cdot 607} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = 5 \cdot 266 \, \frac{v^2}{2g}$, also $5\frac{1}{4}$ Mal gröſser als die der Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe. Für $\frac{f}{A} = \frac{1}{10}$ wäre sogar $z' = 232 \, \frac{v^2}{2g}$.

182. Tritt das Wasser anstatt aus einem weiten Behälter, nur aus einer etwas weitern Röhre in die engere ein (Fig. 116), so bleibt die Erscheinung, also wenn man die vorige Bezeichnung beibehält, auch die Formel (α) oder jene (β), d. i. jene für den Fall eines Diaphragma,
$z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ und ohne dasselbe $z' = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$ dieselbe, nur daſs dabei, wegen der jetzt eintretenden u n v o l l s t ä n d i g e n Contraction, der Coeffizient α, welcher von dem Verhältniſs $\frac{f}{F}$ der verengten Öffnung f und des Querschnittes des weitern Zuleitungsrohres F abhängt, gröſser ausfällt.

Nach *Weisbach*'s Versuchen ist für $\frac{f}{F} = \cdot 1, \cdot 2, \cdot 3, \cdot 4, \cdot 5, \cdot 6, \cdot 7, \cdot 8, \cdot 9, 1$ beziehungsweise $\alpha = \cdot 624, \cdot 632, \cdot 643, \cdot 659, \cdot 681, \cdot 712, \cdot 755, \cdot 813, \cdot 892, 1 \cdot 000$.

Wäre z. B. das Zuleitungsrohr 4, die Öffnung des Diaphragma 2 und das Ausfluſsrohr 3 Zoll weit und sollte, wenn diese Röhren nur ganz kurz sind, die Druckhöhe h' gefunden werden, für welche per Minute 20 Kubikfuſs Wasser durch diesen Apparat flieſsen; so wäre $\frac{f}{F} = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, folglich, wenn man die vorige Reihe interpolirt, der betreffende Contractionscoeffizient $\alpha = \cdot 637$. Ferner ist $\frac{A}{f} = \frac{9}{4}$, daher

$$\frac{A}{\alpha f} - 1 = \frac{9}{4 \times \cdot 637} - 1 = 2 \cdot 532.$$

Die Ausfluſsgeschwindigkeit v findet sich aus der Gleichung $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \pi v = \frac{20}{60}$ und zwar ist $v = \frac{2 \times 64}{6 \pi} = 6 \cdot 792$ Fuſs, folglich die Widerstandshöhe z', d. i. diejenige Wassersäulenhöhe, welche durch die verengte Öffnung absorbirt wird: $$z' = 2{\cdot}532 \frac{(6{\cdot}792)^2}{62} = 1{\cdot}884$$

und daher die gesuchte Druckhöhe $h = z' + \frac{v^2}{2g}$ d. i.

$$h = (2{\cdot}532 + 1)\frac{(6{\cdot}792)^2}{62} = 2{\cdot}628 \text{ Fuſs.}$$

Ohne diese Verengung wäre $h = {\cdot}744$ Fuſs.

183. Befindet sich das Diaphragma, wie in Fig. 117, in der gleichweiten Röhre und ist wieder A der Querschnitt der Röhre, f jener der Durchgangsöffnung und α der entsprechende Contractions-coeffizient, so ist wie vorhin die Widerstandshöhe $z' = \left(\frac{A}{\alpha f} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$.

Was dabei den Coeffizienten α betrifft, so hat er dieselben in der vorigen Nr. angegebenen Werthe, nur muſs man statt dem Quotienten $\frac{f}{F}$ jenen $\frac{f}{A}$ setzen. Wäre z. B. dieser Quotient $\frac{f}{A} = \frac{1}{2}$, so würde man $\alpha = {\cdot}681$ setzen und damit die Widerstandshöhe oder den Gefällsverlust $z' = 3{\cdot}751 \frac{v^2}{2g}$ also $3\frac{3}{4}$ Mal so groſs als die Geschwindigkeitshöhe von v erhalten.

Dieser Verlust läſst sich bedeutend vermindern, wenn nicht ganz beseitigen, wenn man durch Abrunden der Kanten die Contraction vermindert, oder durch Einsetzung eines sich allmählig nach beiden Seiten erweiternden Rohres (Fig. 118) gänzlich aufhebt.

184. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie in Fig. 119 dargestellt ist, wobei das Wasser aus dem gröſseren Querschnitt A in den engern A' plötzlich, und von da wieder eben so in den weitern Querschnitt A'' übertritt, hat man, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre A, und α den Contractionscoeffizient für den Übergang aus A in A' bezeichnet, also die Geschwindigkeiten in A' und $A'' = v'$ und v'', die Werthe haben $v' = \frac{A}{A'} v$ und $v'' = \frac{A'}{A''} v'$, genau wieder wie in Nr. **182** für den Verlust an Gefällshöhe beim Übergang von A in A': $z_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{A^2}{A'^2} \frac{v^2}{2g}$ und für jenen beim Übergang von A' in A'' wie in Nr. **180**:

$z_2 = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{v'^2}{2g} = \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2 \frac{A^2}{A'^2} \frac{v^2}{2g}$ folglich ist der Gesammtverlust für diese Verbindung $z' = z_1 + z_2$, d. i.

$$z' = \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \left(1 - \frac{A'}{A''}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung. Diese Formel zeigt, dafs z' jeden auch noch so grofsen Werth durch Verkleinerung des verengten Querschnittes A' annehmen kann, indem sich dadurch der Quotient $\frac{A}{A'}$ immer mehr der Grenze Unendlich nähert.

185. Bei einer Röhrenverbindung, wie sie Fig. 120 zeigt, wobei das Wasser aus dem normalen Querschnitt A in den erweiterten A' und von da wieder in den normalen A oder überhaupt nur in einen engern A'' übertritt, hat man eben so, wenn v die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitte A, und α den Contractionscoeffizienten für den Übertritt des Wassers von A' in A'' bezeichnet, für den Verlust an Gefällshöhe:

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{A^2}{A''^2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

Im Falle $A'' = A$ ist, wird

$$z' = \left[\left(1 - \frac{A}{A'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Anmerkung 1. Wie man aus der letzten Formel sieht, so kann durch die Erweiterung A' die Widerstandshöhe z' keineswegs, wie bei der vorigen Verengung, ohne Ende zunehmen, sondern diese ist (weil für $A' = \infty$ der Quotient $\frac{A}{A'} = 0$ wird) an die Grenze $\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$ gebunden.

Anmerkung 2. Was endlich die durch Verengungen mittelst Hähnen, Klappen und Ventilen herbeigeführten Verluste an der Gefällshöhe betrifft, die oft sehr bedeutend werden können; so hat *Weisbach* auch hierüber zahlreiche Versuche durchgeführt und die Resultate zur Bestimmung der betreffenden Widerstandscoeffizienten tabellarisch zusammengestellt.

a) Ist z. B. $abcd$ (Fig. 121) ein, gegen die Achse der Röhre perpendikulärer Schieber oder Schubventil, mittelst welchem der Querschnitt der Röhre $AD = A$ bis auf die Durchflufsöffnung $Ab = A'$ verengt wird, so hat man, den Verlust an Gefällshöhe $z_1 = n_1 \frac{v^2}{2g}$ gesetzt, für den Widerstandscoeffizienten n_1 nach *Weisbach*,

für parallelopipedische Röhren (Fig. 121):

wenn $\frac{A'}{A} =$	1,	·9,	·8,	·7,	·6,	·5,	·4,	·3,	·2,	·1 ist,
sofort $n_1 =$	0·00,	0·09,	0·39,	0·95,	2·08,	4·02,	8·12,	17·8,	44·5,	193

für cylinderische Röhren (Fig. 122):

wenn $\frac{A'}{A} =$	1,	$\frac{7}{8}$,	$\frac{6}{8}$,	$\frac{5}{8}$,	$\frac{4}{8}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{2}{8}$,	$\frac{1}{8}$ ist,
sofort $n_1 =$	0·00,	0·07,	0·26,	0·81,	2·06,	5·52,	17·0,	97·8

b) Bei Drehklappen oder Drosselventilen theilt sich das Wasser beim Durchgang durch die Röhre AE (Fig. 123) in zwei Theile und geht durch die verengten Öffnungen Aa und Bb, deren Querschnitt in

Summa $= A'$, so wie der Querschnitt der Röhre $= A$ seyn soll. Ist der Dreh- oder Stellwinkel $DCF = \alpha$, und der Durchmesser ab der Klappe gleich dem Durchmesser der Röhre, so ist nach *Weisbach* der Widerstandscoeffizient n_1,

für parallelopipedische Röhren:

für $\alpha =$ 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°,
und $\frac{A'}{A} =$ ·913, ·826, ·741, ·658, ·577, ·500, ·426, ·357, ·293, ·234,
sofort $n_1 =$ ·28, ·45, ·77, 1·34, 2·16, 3·54, 5·72, 9·27, 15·07, 24·9,
55°, 60°, 65°, 70°, 90°
·181, ·134, ·094, ·060, 0
42·7, 77·4, 158, 368 ∞

für cylinderische Röhren,

für dieselben Werthe von α und $\frac{A'}{A}$:

$n_1 =$ 24 52, ·90, 1·54, 2·51, 3·91, 6·22, 10·8, 18·7, 32·6, 58·8, 118, 256, 751 ∞.

c) Tritt das Wasser durch ein Kegelventil cd (Fig. 124) und ist wieder A die Querschnittsfläche der Röhre AB v die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, der Querschnitt der Öffnung ab des Ventilsitzes $= f$, so wie jener der ringförmigen Öffnung $AcBd = f'$; so kann man für die eigentliche verengte Öffnung das arithmetische Mittel nehmen und $A' = \frac{1}{2}(f + f')$ setzen. Ist endlich wieder α der entsprechende Contractionscoeffizient, so hat man nach Nr. **182** den Widerstandscoeffizienten

$$n_1 = \left(\frac{A}{\alpha A'} - 1\right)^2.$$

Dabei fand *Weisbach* nach einem Versuche, wobei $\frac{A,}{A} =$ ·381 war, $\alpha =$ ·608.

d) Bei einem Klappenventil CD (Fig. 125) fand *Weisbach* bei einem Verhältniſs der Öffnung $ab = A'$ im Ventilsitz zum Querschnitt der Röhre A, d. i. bei $\frac{A'}{A} =$ ·535 bei verschiedenen Stellwinkeln α folgende Werthe für den Widerstandscoefficienten n_1 und zwar

für $\alpha =$ 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, 60°, 65°, 70°
sofort $n_1 =$ 90, 62, 42, 30, 20, 14, 9·5, 6 6, 4·6, 3·2, 2·3, 1·7

e) Bei Hähnen tritt das Wasser (Fig. 126) aus dem Querschnitt A der Röhre durch die verengte Öffnung $ab = A'$, in die eben so weite Bohrung A und von da wieder durch die verengte Öffnung $cd = A'$ in den ursprünglichen Querschnitt A über. Bei den von *Weisbach* angestellten Versuchen, war das Verhältniſs von $\frac{A'}{A}$ derart, daſs bei den parallelopipedischen Röhren dieselben bei einem Stellwinkel $\alpha = 66\frac{3}{4}^0$ und bei den cylinderischen Röhren bei $\alpha = 82\frac{1}{8}^0$ vollkommen geschlossen waren. Dieſs vorausgesetzt, fand er den Widerstandscoeffizienten n_1, bei parallelopipedischen Röhren:

für $\alpha =$ 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, $66\frac{3}{4}$°

und $\frac{A'}{A} =$ ·926, ·849, ·769, ·687, ·604, ·520, ·436, ·352, ·269, ·188, ·110, 0

sofort $n_1 =$ 05, ·31, ·88, 1·84, 3·45, 6·15, 11·2, 20·7, 41·0, 95·3, 275, ∞

bei cylinderischen Röhren:

für $\alpha =$ 5°, 10°, 15° 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 50°,

und $\frac{A'}{A} =$ ·926, ·850, ·772, ·692, ·613, ·535, ·458, ·385, ·315, ·250,

sofort $n_1 =$ ·05, ·29, ·75, 1·56, 3·10, 5·47, 9·68, 17·3, 31·2, 52·6,

55°, 60°, 65°, $82\frac{1}{8}$°

·190, ·137, ·091, 0

106, 206, 486, ∞ *)

186. Kommt bei einer Röhrenleitung eine Krümmung vor, so läfst sich der dabei eintretende Gefällsverlust, welcher wieder dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers proportional ist, nach *Redtenbacher*'s Angabe durch

$$z'' = (\cdot 0039 + \cdot 0186\, R)\,\frac{S}{R^2}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

ausdrücken, wenn R den Krümmungshalbmesser CA der Achse (Fig. 127), S die Länge des betreffenden Bogens ANB bezeichnet und der Meter zur Einheit des Längenmafses genommen wird.

Auf den Wiener Fufs bezogen würde

$$z'' = (\cdot 01233 + \cdot 0186\, R)\,\frac{S}{R^2}\cdot\frac{v^2}{2g}\ .\ .\ (m)$$

Weisbach findet aus seinen Versuchen, dafs man den Widerstandscoeffizienten $n'' = \left[\cdot 131 + \cdot 163\left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right]\frac{\alpha^0}{180}$ ausdrücken kann, wenn D den Durchmesser der cylinderischen Röhre, R den Krümmungshalbmesser und α den Krümmungswinkel ACB in Graden ausgedrückt bezeichnet.

Für parallelopipedische Röhren wäre eben so:

$$n'' = \left[\cdot 124 + \cdot 274\left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}}\right]\frac{\alpha^0}{180}.$$

Ist z. B. bei einer solchen Krümmung von cylinderischen Röhren $D = \frac{1}{2}$, $R = 10$ Fufs und $\alpha = 90°$, so wäre nach der *Weisbach*'schen Formel, da der Theil $\cdot 163\left(\frac{D}{R}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 163\left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{7}{2}} = \cdot 000004556$ hier keinen Ein-

---

*) M. s. das Weitere in den „Versuchen über den Ausflufs des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von *Jul. Weisbach.* Leipzig, 1842.“

flufs hat, $n'' = \cdot 131 \times \frac{1}{2} = \cdot 0655$, folglich der Gefällsverlust

$$z'' = \cdot 0655 \frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen würde nach der erstern Formel (m) wegen $S = R\alpha = 10 \times \frac{3\cdot 1416}{2}$ $= 15\cdot 7080$, diese Widerstandshöhe $z'' = \cdot 19833 \times \frac{15\cdot 708}{100} \frac{v^2}{2g}$ d. i.

$$z'' = \cdot 03115 \frac{v^2}{2g}$$

ungefähr nur halb so grofs. Jedenfalls ist dieser Widerstand so gering, dafs er in der Regel gegen die übrigen vernachlässiget werden kann, besonders wenn der Krümmungshalbmesser nicht gar zu klein ist.

187. Bildet endlich die Achse der Leitung an irgend einem Puncte B (Fig. 128) einen scharfen Winkel ABC, also die Röhre an dieser Stelle ein Knie,, so läfst sich der dadurch herbeigeführte Verlust der Gefällshöhe z''' auf folgende Weise bestimmen.

Ist wieder A der Querschnitt der Röhre, v die Geschwindigkeit des Wassers, der Ablenkungswinkel $CBD = \alpha$, und nimmt man an, dafs sich jedes Wassertheilchen in einer, zur gebrochenen Linie ABC parallelen Richtung fortbewegt; so geht in jedem Zeitelement dt eine Wasserschichte von dem Volumen $Av\,dt$, oder, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, von dem Gewichte $\gamma A v\,dt$ mit der Geschwindigkeit v von der Richtung AB plötzlich in jene BC über, vereinigt sich mit dem in diesem Schenkel befindlichen Wasser und fliefst mit derselben Geschwindigkeit v weiter.

Zerlegt man nun die Geschwindigkeit dieser Wassermasse $m = \gamma A v\,dt$ vor und nach dem Stofs in zwei Seitenkräfte, eine nach der Richtung AB, die andere darauf senkrecht; so hat man für diese beiden Seitenkräfte vor dem Stofs beziehungsweise v und 0, und nach dem Stofs $v\,Cos\,\alpha$ und $v\,Sin\,\alpha$, also ist der durch den Stofs herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft nach der Relation (2) in Nr. **89**, Anmerk.

$$m\left[(v - v\,Cos\,\alpha)^2 + (0 - v\,Sin\,\alpha)^2\right] = 2mv^2(1 - Cos\,\alpha)$$
$$= 4\,mv^2\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Es ist also der Verlust an Wirkungsgröfse oder Arbeit während der Zeit dt, wenn man für m den Werth herstellt:

$$4\,\frac{\gamma A v\,dt}{2g}\,v^2\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

oder für die Zeiteinheit, wenn man die entsprechende Masse $\gamma A v = M$ setzt:

$$4\,M\,\frac{v^2}{2g}\,Sin^2\tfrac{1}{2}\alpha;$$

es ist also $$M z''' = 4 M \frac{v^2}{2g} \, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha$$
und daher die gesuchte Widerstandshöhe:
$$z''' = 4 \frac{v^2}{2g} \, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha = n''' \frac{v^2}{2g},$$
wenn man den Widerstandscoeffizienten $4 \, Sin^2 \frac{1}{2} \alpha = n'''$ setzt.

Anmerkung. Der hier theoretisch gefundene Widerstandscoeffizient ist gegen die Erfahrung aus dem Grunde zu grofs, weil sich die Wassertheilchen nicht sämmtlich mit der gebrochenen Linie ABC parallel, sondern die mittlern Fäden in Curven bewegen, welche einen geringeren Verlust an lebendiger Kraft bedingen. *Weisbach* glaubt aus seinen Versuchen diesen Widerstandscoeffizienten durch die Formel
$$n''' = \cdot 9457 \, Sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha + 2\cdot 047 \, Sin^4 \tfrac{1}{2} \alpha$$
ausdrücken zu können und berechnet darnach eine Tabelle, nach welcher für $\alpha =$ 20°, 40°, 60°, 80°, 90°, 100°, 110°, 120°, 130°, 140°, sofort $n''' =$ ·046, ·139, ·364, ·740, ·984, 1·260, 1·556, 1·861, 2·158, 2·431 wird.

Aber selbst wenn diese Coeffizienten nicht zu klein seyn sollten, ist der Widerstand immer noch grofs genug, um sich bestimmen zu lassen, alle scharfen Winkel bei den Leitungen möglichst zu vermeiden und dafür sanfte Krümmungen zu wählen.

188. Verbindet nun eine Röhrenleitung von den in den vorigen Nrn. angenommenen Dimensionen, d. i. vom Durchmesser D und der Länge L, den obern Sammelbehälter ABC (Fig. 129) mit einem tiefer liegenden Behälter $A'B'D$, wobei der Oberwasserspiegel AB die Fläche F und der untere $A'B'$ jene f haben soll, und ist, sobald der Beharrungsstand eingetreten und das Wasser durch die Röhre mit der Geschwindigkeit v fliefst, die constante Druck- oder Gefällshöhe $EF = H$, ferner die Geschwindigkeitshöhen, welche den Geschwindigkeiten $v' = \frac{A}{F} v$ und $v'' = \frac{A}{f} v$ entsprechen, mit welchen die Wasserschichten in den obern Behälter bei AB ein- und im untern Behälter $A'B'$ austreten, $\frac{v'^2}{2g} = h'$ und $\frac{v''^2}{2g} = h''$; so hat man, wenn der atmosphärische Druck auf beide Wasserspiegel als gleich grofs angenommen wird, die allgemeine Gleichung:
$$H + h' = h'' + z + \Sigma(z') + \Sigma(z'') + \Sigma(z''') \ldots \quad (1)$$
wenn man die Wassersäulenhöhe z zur Überwindung der Reibung an den Röhrenwänden aus Nr. **178** oder **179**, die Summe der Wassersäulenhöhen $\Sigma(z')$ zur Überwindung der in der Leitung vorkommenden

plötzlichen Verengungen oder Erweiterungen nach den Nrn. **180** bis **185**, jene $\Sigma(z'')$ zur Überwindung des Widerstandes in Krümmungen nach Nr. **186** und endlich jene $\Sigma(z''')$ welche dem Widerstande in scharfen Biegungen entsprechen nach Nr. **187** bestimmt. Führt man statt diesen Widerstandshöhen z, z'.. die entsprechenden Widerstandscoeffizienten n, n'... und anstatt der Geschwindigkeitshöhen h, h', h'' die Geschwindigkeiten selbst ein; so verwandelt sich die vorige Gleichung (1) wegen $z = n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ (welche Form man auch dem Ausdruck (2) in **178** geben kann) und $z' = n' \frac{v^2}{2g}$, $z'' = n'' \frac{v^2}{2g}$.. in die folgende:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2} - \frac{A^2}{F^2} + n\frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''')\right] \quad (2)$$

Ist der untere Behälter nicht vorhanden, sondern mündet die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft aus, so ist $f = A$ und wenn man unter der Voraussetzung, dafs der Querschnitt A der Röhre gegen jenen des Behälters F sehr klein sey, das Glied $\frac{A^2}{F^2}$ vernachlässigt (die Wasserschichten bei AB nämlich als still stehend ansieht), sofort:

$$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + n\frac{L}{D} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''')\right] \quad (3)$$

Mündet dagegen die Leitungsröhre durch ein verengtes Mundstück in die freie Luft aus, so mufs man, wenn f der Querschnitt der Ausmündung ist, anstatt 1 wieder das obige Glied $\frac{A^2}{f^2}$ der Gleich. 2 setzen, wenn keine Contraction Statt hat, sonst aber $\frac{A^2}{\alpha f^2}$ nehmen, wenn α der entsprechende Contractionscoeffizient ist. Sind nicht alle Kanten gehörig abgerundet, so mufs man in die Summe $\Sigma(n')$ auch noch den Widerstandscoeffizienten aufnehmen, welcher dem Widerstande entspricht den das Wasser beim Durchgang durch dieses Mundstück erfährt.

Anmerkung. Wäre der Druck auf die Flächeneinheit auf den obern Wasserspiegel durch die Wassersäule h' und auf den untern Wasserspiegel durch jene h'' ausgedrückt und h' von h'' verschieden; so müfste man in dieser Gleichung $H + h' - h''$ anstatt H setzen.

Bestimmung der Ausflufsgeschwindigkeit aus einer Röhrenleitung.

189. Für den ganz allgemeinen Fall darf man nur die vorige Gleichung (2) oder (3) nach v auflösen, um diese Geschwindigkeit zu erhalten. Nehmen wir hier nur den einfachsten Fall und setzen eine Leitung voraus, in welcher weder Verengungen noch Krümmungen vorkommen und bei welcher auch durch gehörige Erweiterung der Einflußöffnung die Contraction des Wassers beim Eintritt aus dem Behälter in die Röhrenleitung vermieden ist; so hat man, mit Beibehaltung aller frühern Bezeichnungen in der vorigen Formel (3) alle mit dem Summenzeichen Σ behafteten Glieder auszulassen und

$$(a) \quad H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

zu setzen, woraus sofort

$$v = \sqrt{\left[\frac{2gH}{1 + n\frac{L}{D}}\right]} \quad (3) \text{ folgt.}$$

Tritt dagegen das Wasser aus dem Behälter mit Contraction in die Leitung, so hat man mit Hinzufügung des betreffenden Widerstandscoeffizienten $(\frac{1}{\alpha} - 1)^2$ (Nr. **181**, Gleich. β)

$H = \frac{v^2}{2g}\left[1 + (\frac{1}{\alpha} - 1)^2 + n\frac{L}{D}\right]$ oder wenn man Kürze halber

$\frac{\alpha}{\sqrt{[\alpha^2 + (1-\alpha)^2]}} = m$ setzt, auch

$$(a') \quad H = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right) \text{ woraus sofort}$$

$$v = m\sqrt{\left(\frac{2gH}{1 + nm^2\frac{L}{D}}\right)} \quad (4) \quad \text{folgt.}$$

Anmerkung. Da man den diesem Fall entsprechenden Contractionscoeffizienten (Nr. **181**, Anmerk.) $\alpha = {}^{\cdot}596$ setzen kann, so folgt für den Coeffizienten m der mittlere Werth $m = {}^{\cdot}83$ welcher nahe mit dem Geschwindigkeitscoeffizienten ·815 beim Ausflusse des Wassers aus kurzen cylinderischen Ansatzröhren übereinstimmt (Zusatz 4. auf S. 613) und da er diesen in etwas übertrifft, nur den Beweis liefert, daſs selbst bei einem kurzen Ansatzrohr schon einiger Reibungswiderstand an den Röhrenwänden Statt findet. (Vergleiche auch Zusatz 5 auf derselben Seite.)

190. Nimmt man für die Widerstandshöhe z anstatt des Ausdruckes (3) in Nr. **179**, jenen (2) in Nr. **178**, so wird

$$(b) \quad H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

und daraus, wenn man $g = 31$ und für α, β die in Nr. **178** angegebenen, auf den Wiener Fuſs sich beziehenden Werthe (m) setzt (und durch Division mit $8g\beta$ den Coefficienten $8g\beta L + D$ auf die Form $L + 36{\cdot}6\,D$ bringt)

$$v = -\frac{\cdot 002536\, g\, L}{L + 36\cdot 6\, D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002536\, g\, L}{L + 36\cdot 6\, D}\right)^2 + \frac{73\cdot 2\, g\, D\, H}{L + 36\cdot 6\, D}\right]} \quad (5)$$

Ist die Leitung so lang, dafs man $36\cdot 6\, D$ gegen L auslassen darf, so ist einfacher

$$v = -\cdot 002536\, g + \sqrt{\left[(\cdot 002536\, g)^2 + \frac{73\cdot 2\, g\, D\, H}{L}\right]} \quad (6)$$

Ist die Geschwindigkeit v gröfser als 2 Fufs, so kann man, da dann das Glied mit der 1sten Potenz von v vernachlässigt werden darf (§. 345)

$$v = 8\cdot 427 \sqrt{\left(\frac{g\, H\, D}{L + 35\cdot 5\, D}\right)} = 46\cdot 95 \sqrt{\left(\frac{H\, D}{L + 35\cdot 5\, D}\right)} \quad (7)$$

setzen.

Nimmt man dagegen die wenigstens eben so viel Vertrauen verdienenden Werthe (n) (aus Nr. **178**), so erhält man:

$$(5') \quad v = -\frac{\cdot 002800\, g\, L}{L + 37\cdot 2\, D} + \sqrt{\left[\left(\frac{\cdot 002800\, g\, L}{L + 37\cdot 2\, D}\right)^2 + \frac{74\cdot 405\, g\, D\, H}{L + 37\cdot 2\, D}\right]}$$

Kann man $37\cdot 2\, D$ gegen L auslassen, so ist:

$$(6') \quad v = -\cdot 002800\, g + \sqrt{\left[(\cdot 002800\, g)^2 + \frac{74\cdot 405\, g\, D\, H}{L}\right]}$$

Ist die Geschwindigkeit v nach der einen oder andern dieser Formeln bestimmt, so findet man die per Secunde durch die Röhrenleitung fliefsende Wassermenge aus der Formel

$$M = \tfrac{1}{4}\pi D^2 v = \cdot 7854\, D^2 v \quad (8)$$

Anmerkung. Man sieht von selbst, dafs sich diese Formeln nicht nur auf den Wiener Fufs als Einheit, sondern auch auf den Meter und überhaupt auf jedes beliebige Mafs beziehen, wenn man nur g im erstern Falle $= 31$, im zweiten $= 9\cdot 808$ und so überhaupt in dem landesüblichen Mafs ausgedrückt substituirt.

191. Um die Gefällshöhe H zu bestimmen, welche vorhanden seyn mufs, damit eine Röhrenleitung von der Länge L und dem Durchmesser D per Secunde M Kubikfufs Wasser liefere, suche man zuerst aus der vorigen Gleichung (8) die Geschwindigkeit $v = \frac{4M}{\pi D^2}$ und damit die Gefällshöhe H aus (a) oder (a') in Nr. **189**, oder aus (b) in Nr. **190**, d. i. entweder, wenn das Wasser aus dem Behälter ohne Contraction in die Röhren tritt, aus der Formel

$$H = \left(1 + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

wobei $n = \cdot 01439 + \frac{\cdot 01685}{\sqrt{v}}$ ist, oder, wenn das Wasser mit Contraction eintritt, aus der Formel:

$$H = \left(\frac{1}{m^2} + n\frac{L}{D}\right)\frac{v^2}{2g},$$

wobei n den vorigen Werth hat und $m = \cdot 83$ ist, oder endlich aus der

Formel: $$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

wobei $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101$ oder auch $\alpha = \cdot 0000188$ und $\beta = \cdot 0001083$ ist.

Beispiel. Um diese verschiedenen Werthe wenigstens an einem Beispiele mit einander zu vergleichen, in welchem $D = \cdot 79$ und $L = 4587$ Fuſs ist, ferner $M = 1\cdot 235$ Kubikfuſs seyn soll, hat man zuerst aus der Formel (8) für die Geschwindigkeit $v = 2\cdot 5196$ Fuſs und damit aus der letzten Formel für die Gefällshöhe $H = 17\cdot 35$ oder $H = 17\cdot 17$ Fuſs, je nachdem man für die Coeffizienten α und β die erstern oder letztern der eben angegebenen Werthe nimmt.

192. Um den Durchmesser D zu bestimmen, welchen eine Röhrenleitung erhalten muſs, damit diese bei einem Gefälle $= H$ in jeder Secunde M Kubikfuſs Wasser liefere, hat man zuerst, wenn man in die Formel (8) (Nr. **190**) den genäherten Werth für v aus der Formel (7) setzt, und darin noch $35\cdot 5\,D$ gegen L ausläſst:

$$M = \cdot 7854 \times 46\cdot 95\, D^2 \sqrt{\left(\frac{HD}{L}\right)} = 36\cdot 874 \sqrt{\left(\frac{HD^5}{L}\right)}$$

und daraus $$D = \cdot 2362 \sqrt[5]{\left(\frac{LM^2}{H}\right)} \quad (c)$$

Anmerkung. Genauer kann man diesen Durchmesser dadurch finden, daſs man in der Gleichung $D = \sqrt{\frac{4M}{\pi v}}$ (welche aus 8 folgt) für v versuchsweise mehrere Werthe annimmt und damit die entsprechenden Werthe von D berechnet. Je zwei zusammengehörige Werthe von v und D setzt man dann in die Gleichung $H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ Gleich. b in Nr. 190) oder wenn man die *Weisbach*'schen vorzieht, in jene (a) oder (a') in Nr. 189; so sind jene Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, die wahren Werthe von v und D.

193. Um endlich noch die vortheilhafteste Geschwindigkeit zu finden, bei welcher die Wasserkraft, welche durch eine Röhrenleitung von gegebenen Dimensionen erhalten werden kann, ein Maximum wird, hat man die Wirkungsgröſse der per Secunde mit der Geschwindigkeit v ausflieſsenden Wassermenge M, wenn diese durch W bezeichnet wird, $W = \gamma M \frac{v^2}{2g} = \gamma M h$, oder wegen $M = \frac{1}{4}\pi D^2 v$ auch $W = AD^2 h v$, wenn man Kürze halber $\frac{1}{4}\gamma\pi = A$ setzt. Nun folgt aber aus

$$H = h + z = h + \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2) \text{ sofort } h = H - \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$$

folglich ist $$W = A D^2 \left[H v - \frac{4L}{D}(\alpha v^2 + \beta v^3) \right]$$

und es mufs in dieser Gleichung v so bestimmt werden, dafs dafür W am gröfsten wird. Nun ist aber, wenn man nach der bekannten Regel verfährt:

$$\frac{dW}{dv} = A D^2 \left[H - \frac{4L}{D}(2\alpha v + 3\beta v^2) \right] = 0 \text{ oder } 2\alpha v + 3\beta v^2 = \frac{DH}{4L}$$

und daraus $$v = -\frac{\alpha}{3\beta} + \sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{9\beta^2} + \frac{1}{12\beta} \cdot \frac{HD}{L} \right]}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck für α und β die obigen Werthe (m) aus Nr. **178**, d. i. $\alpha = \cdot 00001733$ und $\beta = \cdot 0001101$, so erhält man nahe genug, für die vortheilhafteste Geschwindigkeit, wofür die Wirkung W, weil dafür der 2te Differenzialquotient negativ ausfällt, in der That ein Maximum wird:

$$v = -\cdot 0525 + \sqrt{\left(\cdot 002756 + 756 \cdot 9 \frac{HD}{L} \right)}.$$

Anmerkung. Diese Entwicklung kann, da man es nicht in seiner Gewalt hat diese vortheilhafteste Geschwindigkeit herbeizuführen, nur dazu dienen, um sich zu überzeugen (man vergleiche diese Formel mit jener (6) in Nr. 190), dafs diese vortheilhafteste Geschwindigkeit in der Regel immer kleiner als die wirkliche ist, folglich auch das Maximum der Wirkung des durch die Leitung fliefsenden Wassers nicht erreicht werden kann.

194. Bestände die Röhrenleitung aus mehreren Stücken, beziehungsweise von den Längen $L, L_1, L_2 \ldots$, den Querschnitten $A, A_1, A_2 \ldots$, den Durchmessern $D, D_1, D_2 \ldots$, in welchen das Wasser mit den Geschwindigkeiten $v, v_1, v_2 \ldots$ fliefst und wären $n, n_1, n_2 \ldots$ die entsprechenden Reibungscoeffizienten, so müfste man in den Formeln (2) und (3) Nr. **188** statt $n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$ setzen:

$$n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + n_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + n_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + \ldots \text{ d. i.}$$

wegen $v_1 = \frac{D^2}{D_1^2} v$, $v_2 = \frac{D^2}{D_2^2} v \ldots$ sofort:

$$\left(n \frac{L}{D} + n_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{D^4}{D_1^4} + n_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{D^4}{D_2^4} + \ldots \right) \frac{v^2}{2g}$$

d. h. also man mufs $n \frac{L}{D} + n_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{D^4}{D_1^4} + \ldots$ anstatt $n \frac{L}{D}$ setzen.

195. Um die Höhe von springenden Strahlen zu bestimmen, welche durch Röhrenleitungen gespeist werden, mufs man, wenn das Mundstück *abcd* (Fig. 130) lang oder sehr eng ist, nicht blofs auf den durch die plötzliche Querschnittsänderung hervorgehenden, sondern auch auf jenen Widerstand Rücksicht nehmen, welcher aus der Reibung beim Durchgange des Wassers durch dieses Mundstück entsteht. Bezeichnet man nämlich die Länge des Mundstückes mit l, ihren Durchmesser mit d und den nach Nr **182** (Anmerk.) zu bestimmenden Widerstandscoeffizienten für den Eintritt des Wassers mit μ, so mufs man nach der eben gemachten Bemerkung (vorige Nr.) in der allgemeinen Formel (2) statt $n\frac{L}{D}$ setzen: $n\frac{L}{D}+n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}$ und wenn man den Widerstand, welcher beim Eintritte des Wassers in das Mundstück von der allgemeinen Summe $\Sigma(n')$ ausscheidet und für sich hinstellt, $\mu+\frac{A^2}{f^2}$ statt $\frac{A^2}{f^2}\left(=\frac{D^4}{d^4}\right)$ setzen; dadurch erhält man für den vorliegenden Fall, wenn man wieder den kleinen Quotienten $\frac{A^2}{F^2}$ ausläfst:

$$H=\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2}+\mu+n\frac{L}{D}+n_1\frac{l}{d}\frac{D^4}{d^4}+\Sigma(n')+\Sigma(n'')+\Sigma(n''')\right] \quad (9)$$

dabei bezeichnen, wie bereits bemerkt, μ den Widerstandscoeffizienten für den Eintritt des Wassers in das Mundstück (Nr. **182**), $n\frac{L}{D}$ und $n_1\frac{l}{d}$ die Widerstandscoeffizienten für die Reibung des Wassers an den Wänden der Leitungsröhre und des Mundstückes (Nr. **178** u. **179**), n' den Widerstandscoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch irgend eine in der Leitungsröhre befindliche Scheidewand, plötzliche Erweiterung oder Verengung, wozu auch der Eintritt des Wassers aus dem Sammelbehälter in die Röhre gehört, wenn diese nicht nach aufwärts gehörig erweitert ist, ein Ventil u. s. w. (Nr. **180** bis **185**), n'' den Widerstandscoeffizienten durch eine Krümmung (Nr. **186**) und endlich n''' den Widerstandscoeffizienten für den Durchgang des Wassers durch ein Knie (Nr. **187**).

Anmerkung. Was den Coeffizienten n_1 betrifft, so kann man diesen, da für gewöhnlich die Geschwindigkeit des Wassers im Mundstück sehr grofs ist $n_1 = {}^{\cdot}016$ setzen.

196. Da das Wasser aus der Mündung mit der Geschwindigkeit $\frac{A}{f}v$ ausspringt, so erreicht der Strahl (abgesehen vom Widerstande der

Luft) die Höhe $h = \frac{A^2}{f^2} \frac{v^2}{2g}$. Führt man diese Sprunghöhe h in die vorige Formel ein, und setzt Kürze halber die Summe der Glieder $\mu + n \frac{L}{D} + n_1 \frac{l}{d} \frac{D^4}{d^4} + \Sigma(n') + \Sigma(n'') + \Sigma(n''') = S$; so erhält man

$$(10) \quad H = h\left(1 + \frac{f^2}{A^2} S\right) \text{ und daraus } h = \frac{H}{1 + \frac{f^2}{A^2} S} \quad . \quad . \ (11)$$

Da aus der Gleichung (10) $h = H - h\frac{f^2}{A^2} S$ und (Fig. 131) $ED = EC - CD = H - h = H - (H - h\frac{f^2}{A^2} S) = h\frac{f^2}{A^2} S$ ist, so folgt, dafs die Sprunghöhe $CD = h$ um diese Höhe $ED = h\frac{f^2}{A^2} S$ kleiner als die disponible Druckhöhe $CE = H$ ist.

Anmerkung. Denkt man sich die Druckhöhe $CE = H$ im Puncte D so getheilt, dafs sich verhält $CD : DE = h : H - h = 1 : \frac{f^2}{A^2} S$, so bezeichnet ED den Verlust an Druckhöhe, d. i. die gesammte Widerstandshöhe und CD die wirksame Druckhöhe oder Sprunghöhe.

Mit Rücksicht darauf, dafs der vertical aufsteigende Wasserstrahl, theils wegen des Luftwiderstandes, theils weil die zurückfallenden Wassertheilchen die Bewegung der aufsteigenden hindern, nicht völlig diese Höhe h sondern die geringere Höhe h_1 erreicht, kann man nach *D'Aubuisson* für diese Steighöhe setzen

$$h_1 = h(1 - \cdot 0032\, h)$$

wenn man nämlich den Wiener Fufs zur Einheit nimmt.

197. Um schlüfslich noch den in irgend einem Querschnitt mn (Fig. 129) der Röhrenleitung Statt findenden hydraulischen Druck zu finden, sey die diesem Drucke entsprechende Druckhöhe $= \mathfrak{z}$, der lothrechte Abstand des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes mn unter dem obern Wasserspiegel AB d. i $ac = z$, die Länge des Röhrenstückes $Cc = l$ und jene von $cD = L - l = l'$; so ist, wenn man zuerst jenen Theil cD der Leitung betrachtet, welcher zwischen der gedrückten Stelle c und der Ausmündung liegt, in der Gleichung (2) Nr. **188**, in welcher man sich den ersten Theil (nach Anmerk. der erwähnten Nr.) mit $H + h' - h''$ geschrieben denken mufs, $\mathfrak{z}$ statt h' und $H - z$ statt H zu setzen. Bezeichnet man ferner noch die Summenzeichen Σ durch Σ_1 in so ferne sie sich auf jene Widerstände, als Verengungen u. s. w beziehen, welche im obern Theile Cc, dagegen mit Σ_2 in so ferne sie sich auf die im untern Theile cD der Leitung vorkommenden Widerstände beziehen und setzt statt F eine allgemeine Querschnittsfläche a; so hat man für das Stück cD:

$$H-z+\mathfrak{z}-h''=\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{f^2}-\frac{A^2}{a^2}+n\frac{l'}{D}+\Sigma_2(n')+\Sigma_2(n'')+\Sigma_2(n''')\right] \quad (k)$$

Zieht man nun diese Gleichung von der genannten (2) in Nr. **188** ab, so erhält man für den obern Röhrentheil, wegen $L-l'=l$ und $\Sigma-\Sigma_2=\Sigma_1$ sofort:

$$\mathfrak{z}=z+h'-\frac{v^2}{2g}\left[\frac{A^2}{a^2}-\frac{A^2}{F^2}+n\frac{l}{D}+\Sigma_1(n')+\Sigma_1(n'')+\Sigma_1(n''')\right] \quad (12)$$

d. h. die Druckhöhe, welche dem im Querschnitte a Statt findenden hydraulischen Drucke entspricht, ist gleich der verticalen Tiefe des Mittelpunctes des betreffenden Querschnittes unter dem Wasserspiegel des Behälters, vermehrt um die Wassersäulenhöhe, welche dem auf den Wasserspiegel Statt findenden Drucke entspricht und vermindert um die Summe der Geschwindigkeitshöhe des Wassers im betreffenden Querschnitt und der Widerstandshöhen aller im obern Theile der Röhre, vom betreffenden Querschnitte an bis zum Behälter vorkommenden Hindernisse.

Ist γ das Gewicht von 1 Kubikfuſs Wasser, so ist der hydraulische Druck q auf die Flächeneinheit, d. i. auf 1 Quadratfuſs:

$$q=\gamma\mathfrak{z}.$$

198. Für den Fall als der untere Behälter nicht vorhanden ist und die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet, ferner weder im obern Behälter noch in der Röhre plötzliche Querschnittsänderungen vorkommen, endlich auck keine Contraction bei der Einmündung der Röhre Statt findet, hat man für den hydraulischen Druck auf die Flächeneinheit in irgend einem Puncte des Behälters, wegen $a=F$ und $n=n'..=0$:

$$q=\gamma\mathfrak{z}=\gamma z+\gamma h';$$

dagegen für irgend einen Querschnitt der Röhre, z. B. bei c (Fig. 132) wegen $a=A$ und wenn man den in der Regel sehr kleinen Quotienten $\frac{A^2}{F^2}$ wieder ausläſst:

$$q=\gamma z+\gamma h'-\gamma\left(1+n\frac{l}{D}\right)\frac{v^2}{2g}$$

oder da für diesen Fall die Gleichung (3) in Nr. **188** in $H=\frac{v^2}{2g}\left(1+n\frac{L}{D}\right)$ übergeht, woraus $\frac{v^2}{2g}=\frac{H}{1+n\frac{L}{D}}$ folgt, auch:

$$q = \gamma h' + \gamma z - \gamma H \frac{1 + n\frac{l}{D}}{1 + n\frac{L}{D}} \quad (13)$$

Da dieser Quotient $1 + n\frac{l}{D} : 1 + n\frac{L}{D}$, besonders wenn l nicht sehr verschieden von L ist, also namentlich für die untern Querschnitte der Leitung, nahe $= \frac{l}{L}$ ist; so hat man auch sehr nahe

$$q = \gamma h' + \gamma (z - \frac{l}{L} H) \quad (14)$$

Anmerkung. Findet in einer horizontalen Röhrenleitung keine plötzliche Verengung oder Erweiterung, so wie auch keine Contraction beim Eintritt des Wassers Statt, so ist, wenn die Röhre mit voller Öffnung in die freie Luft ausmündet, nach der Formel (k) in Nr. 197, wegen $f = a = A$, $n' = n'' = .. = 0$ und $z = H$ sofort:

$$\mathfrak{z} - h'' = n \frac{l'}{D} \frac{v^2}{2g},$$

so, daſs also der Überschuſs des innern Wasserdruckes (oder wenn man den Druck der Atmosphäre, da er, wenn es sich z. B. um die Bestimmung der Wanddicke handelt, von innen und auſsen gleich stark ist und sich aufhebt, unberücksichtigt läſst, sofort der hydraulische Druck) an dem betreffenden Querschnitt, dem Drucke einer Wassersäule gleich kommt, welche nothwendig ist, um die Reibung des Wassers in jenem Theile der Röhre, welcher zwischen der gedrückten Stelle und der Ausmündung liegt, zu überwinden. Dieser Druck wächst also genau wie die Entfernung der gedrückten Stelle von der Ausmündung, in welchem Puncte er gleich Null ist.

Ist dagegen die Ausmündung verengt und vernachlässigt man den Röhrenwiderstand, so folgt wieder aus derselben Formel (k), wegen $a = A$:

$$\mathfrak{z} - h'' = \frac{A^2}{f^2}\frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = H - h \text{ oder } \gamma(\mathfrak{z} - h'') = \gamma(H - h)$$

d. h. der Überschuſs dieses Druckes, oder wenn man den atmosphärischen Druck $\gamma h''$ unberücksichtiget läſst, der hydraulische Druck, ist in diesem Falle in der ganzen Röhre derselbe, und zwar gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Höhe die um die Geschwindigkeitshöhe des flieſsenden Wassers verminderte Druckhöhe ist. (Vergleiche §. 348.)

199. Ist B (Fig. 132) jener Punct des Wasserspiegels, welcher lothrecht über der Einmündung C der Röhre liegt, und zieht man die Gerade BD; so werden in der Regel die Stücke Bb und BD sehr wenig von jenen Cc und CD, d. i. von l und L verschieden seyn, so, daſs

man nahe $\frac{Bb}{BD} = \frac{l}{L}$, und wegen $ab : ED = Bb : BD$ auch
$ab = \frac{Bb}{BD} ED = \frac{l}{L} H$ setzen kann.

Da nun $ac = z$ ist, so wird nahe $bc = z - \frac{l}{L} H$, folglich nach der letzten Gleichung (14) der hydraulische Druck q in c sehr nahe gleich $\gamma h' + \gamma . bc$, d. i. gleich dem hydrostatischen Drucke einer oben offenen Wassersäule von der Höhe bc seyn, auf deren obere Fläche also noch der atmosphärische Druck $\gamma h'$ wirkt.

Würde man daher die Röhre c an der obern Seite durchbohren und auf diese Öffnung ein oben offenes Rohr (einen sogenannten Piezometer oder Druckmesser) aufsetzen, so würde das Wasser darin bis auf die Höhe b steigen und sonach den in diesem Puncte der Leitung Statt findenden hydraulischen Druck messen oder angeben.

Macht man die über B gezogene Verticale $BF = h'$, d. i. gleich der Höhe einer mit dem Luftdrucke im Gleichgewichte stehenden Wassersäule (also nahe = 32 Fufs) und zieht FG parallel mit BD; so wird der in c herrschende hydraulische Druck q mit Inbegriff des atmosphärischen durch das Gewicht einer Wassersäule von der Höhe cN ausgedrückt, oder es ist $q = \gamma . Nc$. (Vergleiche auch die Anmerkungen zu §. 348.)

Anmerkung. Liegt der betreffende Punct c in b, so ist $bc = 0$ und $q = \gamma h' = \gamma . Nb$. Liegt c in N, so ist $bc = - bN = - h'$ und $q = 0$. Könnte c über N z. B. in c' liegen, was z. B. der Fall wäre, wenn die Leitung die Form $Cc'D$ hätte, so wäre cN, also auch der Druck q negativ. Es ist jedoch leicht zu sehen, dafs die Gerade FG die Grenze ist, über welche hinaus kein Punct der Leitung liegen, ja dafs man selbst nicht einmal so weit gehen darf, wenn der Ausflufs durch die Leitung möglich seyn soll.

Theilt man die ganze Druckhöhe $ED = H$ in die beiden Höhen $EH = h_1$ und $HD = h_2$, wovon also die erstere dem Zuflufsbehälter oder Reservoir und die letztere der Röhre zukommt; so ist, wenn die Röhre ohne alle Verengungen und Biegungen in die freie Luft ausmündet, nach Gleichung (3) in Nr. 188:

$$H = h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + n \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g},$$

oder wenn man für den Reibungswiderstand den Ausdruck (2) in Nr. 178 wählt, auch:

$$h_1 + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{4L}{D} (\alpha v + \beta v^2).$$

Damit nun das Wasser den Querschnitt der Röhre völlig ausfülle oder mit vollem Querschnitt ausfliefse, mufs das Reservoir eine hinlängliche Quantität Wasser in die Röhre drücken, was nur geschieht, wenn $h_1 > \frac{v^2}{2g}$ also $h_2 < \frac{4L}{D}(\alpha v + \beta v^2)$ ist, eine Bedingung, welche ohne Reibungswiderstand gar nicht möglich wäre, indem das Wasser eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen würde.

Diese Bedingungen kann man, wenn sie nicht ohnehin schon vorhanden sind, dadurch herbeiführen, dafs man entweder das Reservoir tiefer, also h_1 gröfser macht, oder die Leitung unter Wasser ausmünden läfst und dadurch h_2 vermindert.

So beträgt in dem Beispiele 1, in §. 345 (S. 310) die Widerstandshöhe der $764\frac{1}{2}$ Klafter langen Leitung nahe 16·73 und die ganze Gefällshöhe 16·83 Fufs, also die wirksame Druckhöhe $\frac{1}{10}$ Fufs, in Folge welcher das Wasser nahe mit $2\frac{1}{2}$ Fufs Geschwindigkeit aus der Leitung ausfliefst. Würde man nun die Druckhöhe des Reservoirs $h_1 < \frac{1}{10}$ also jene der Leitung $h_2 > 16·73$ Fufs nehmen, so würde das Wasser, da es in der Leitung eine beschleunigte Bewegung erhielte, nicht mehr mit vollem Querschnitte in die freie Luft ausfliefsen.

Von dem Stofse eines isolirten Wasserstrahles.

(§. 353.)

200. Um die Pressungen oder den hydraulischen Druck eines Wasserstrahles zu finden, welcher in einer bestimmten Richtung und mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit gegen die Oberfläche eines festen Körpers trifft, sey allgemein CM (Fig. 133) die Richtung und V die Geschwindigkeit des an die Fläche AMB stofsenden isolirten Strahles; MD die Richtung und v die Geschwindigkeit nach und mit welcher diese Fläche gleichförmig ausweicht oder sich fortbewegt; endlich BG die Richtung und u die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Fläche verläfst.

Um die Untersuchung zu vereinfachen und das Ganze auf ein System zurückzuführen, in welchem die Fläche AMB ruht, kann man sich, ohne dafs dadurch an dem mechanischen Zustande des vorliegenden Systemes etwas geändert wird, vorstellen, dafs allen Puncten desselben nach der gemeinschaftlichen Richtung MD' die gleichförmige Geschwindigkeit v, welche nämlich jener der Fläche AMB gleich und gerade entgegengesetzt ist, mitgetheilt werde; dadurch erhält man ohne Änderung der Sache ein System, in welchem die Fläche AMB ruht, dagegen das ein- und austretende Wasser die sogenannte relative Geschwindigkeit gegen diese Fläche annimmt.

Schneidet man daher $MC' = MC = V$, ferner $MD' = MD = v$ ab und construirt das Parallelogramm $C'D'$; so stellt die Diagonale ME

die Richtung und Gröfse der **relativen** Geschwindigkeit des eintretenden Strahles vor, welche V' heifsen soll.

Eben so ist, wenn man $BG = u$, gleich der relativen Geschwindigkeit des austretenden Wassers, und auf der durch B mit MD parallelen Geraden $BH = v$, gleich der Geschwindigkeit der Stofsfläche abschneidet und das Parallelogramm GH construirt, die Diagonale BJ sofort die **absolute** Geschwindigkeit des austretenden Wassers, die wir mit U bezeichnen wollen.

Es gibt in der That, wenn man nach der vorigen Bemerkung an dem Puncte B die der MD gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit $BK = v$ anbringt, diese letztere mit der absoluten Geschwindigkeit $BJ = U$ die gegen die Fläche AMB relative Geschwindigkeit $BG = u$.

201. Bezeichnet man den Winkel DMC', welchen die positiven absoluten Geschwindigkeiten V und v miteinander bilden, durch α, jenen $C'ME$, welchen die positiven Geschwindigkeiten V und V' einschliefsen, durch β, so wie jenen GBH, welchen die relative Geschwindigkeit u mit der absoluten v einschliefst, mit γ; so hat man zuerst aus dem Dreieck $MD'E$, ME oder

$$V' = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2\,V\,v\,Cos\,\alpha)} \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$Sin\,\beta = \frac{v}{V'}\,Sin\,\alpha \quad . \quad . \quad (2)$$

ferner aus dem Dreiecke BHJ, BJ oder

$$U = \sqrt{(v^2 + u^2 + 2\,v\,u\,Cos\,\gamma)} \quad . \quad . \quad (3)$$

Anmerkung. Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich leicht die, den in der Praxis am häufigsten vorkommenden speciellen Fällen entsprechenden Formeln.

Weicht nämlich die Fläche AMB in der Richtung CM des anstofsenden Strahles aus, so ist $\alpha = 0$ und daher aus (1) und (2):

$$V' = V - v \text{ und } \beta = 0. \quad (e)$$

Bewegt sich dagegen die Fläche dem anstofsenden Strahle gerade **entgegen**, so ist $\alpha = 180^0$ und daher:

$$V' = V + v \text{ und } \beta = 0. \quad (f)$$

Ist endlich diese Fläche AMB **unbeweglich**, so ist $v = 0$ und daher:

$$V' = V \text{ und } \beta = 0. \quad (g)$$

In Beziehung auf die Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeit noch nach dem Stofse besitzt, sind für die Praxis besonders zwei Fälle herauszuheben, und zwar 1stens der Fall, in welchem der anstofsende Wasserstrahl seine ganze relative Geschwindigkeit gegen die Stofsfläche verliert, und 2tens jener Fall, in welchem das Wasser nach dem Stofse ohne Hindernifs längs dieser Fläche hingleitet und dieselbe mit einer relativen Geschwindigkeit verläfst, welche der relativen Eintrittsgeschwindigkeit gleich ist. Für den erstern dieser beiden Fälle hat man $u = 0$ und daher aus Gleichung (3)

$$U = v,$$

und für den zweiten Fall:

$$u = V' = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2\,V v \; Cos\,\alpha)} \text{ und } U = \sqrt{(V'^2 + v^2 + 2\,V' v \; Cos\,\gamma)}.$$

Durch das oben angewendete Verfahren wird man sich in allen Fällen die Fläche AMB als ruhend vorstellen, während der Wasserstrahl mit der absoluten Geschwindigkeit $V' = EM$ eintritt und im erstern dieser beiden genannten Fälle die ganze Geschwindigkeit verliert, so, dafs $u = 0$ wird, und im zweiten Falle mit derselben Geschwindigkeit $u = V'$ wieder austritt. Ruht diese Fläche AMB nicht, so bezeichnen V' und u die relativen Ein- und Austrittsgeschwindigkeiten, und man darf für V' nur den Werth aus Gleichung (1) setzen, um die Resultate als Functionen der absoluten Geschwindigkeiten V und v zu erhalten.

202. Um nun die Stofskraft oder Pressung P zu bestimmen, die ein continuirlicher Wasserstrahl, welcher im Augenblicke als er die Fläche trifft, seine Richtung und Geschwindigkeit plötzlich ändert, ausübt, wollen wir ein Wassertheilchen M (Fig. 134) von der Masse m betrachten, welches sich nach der Richtung AM mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt und während der sehr kleinen Zeit t von seiner Richtung MN in jene MN' abgelenkt und gezwungen wird in dieser neuen Richtung mit der Geschwindigkeit v_2 weiter zu gehen. Soll aber diese plötzliche Änderung in der Masse m durch die constante Kraft P bewirkt werden, deren Richtung mit AN den Winkel φ bildet, so bemerke man, dafs wenn W. $NMN' = \delta$ ist und die nach MN' wirksame Geschwindigkeit v_2 in zwei aufeinander senkrechte Geschwindigkeiten nach MN und MO zerlegt wird, sofort die erstere $= v_2 \; Cos\,\delta$ und die letztere $= v_2 \; Sin\,\delta$ ist, folglich die Masse m während dieser Zeit t nach MN die Geschwindigkeit $v_1 - v_2 \; Cos\,\delta$ verliert und in der darauf perpendikulären Richtung MO jene $v_2 \; Sin\,\delta$ gewinnt; da man aber annehmen kann, dafs dieser Verlust und Gewinnst mit der sehr kleinen Zeit t gleichförmig zugenommen hat, so beträgt dieser bei der constanten Einwirkung der Kraft P während der Zeiteinheit beziehungsweise $\frac{v_1 - v_2 \; Cos\,\delta}{t}$ und $\frac{v_2 \; Sin\,\delta}{t}$.

Zerlegt man nun auch die Kraft P in zwei Seitenkräfte nach NM und MO, so sind diese respective $P \; Cos\,\varphi$ und $P \; Sin\,\varphi$, wovon die erstere offenbar den eben genannten Verlust und die letztere den Gewinn an Geschwindigkeit während der Zeiteinheit hervorbringen mufs. Da nun diese beiden Seitenkräfte ebenfalls constante Kräfte sind, so hat man nach §. 146 die Relationen:

$$P\, Cos\,\varphi = \frac{m}{g\,t}(v_1 - v_2\, Cos\,\delta) \text{ und } P\, Sin\,\varphi = \frac{m}{g\,t}\, v_2\, Sin\,\delta \quad (a)$$

dabei muſs man für m diejenige Wassermenge substituiren, welche während der angenommenen Zeit t diese plötzliche Geschwindigkeitsänderung erleidet.

Anmerkung Bezeichnet m' die Masse und m das Gewicht dieser Masse, so ist nach der französischen Bezeichnung (§. 35 und Nr. **54**, Anmerk. 3, ferner auch Nr. **60**) $m' = \frac{m}{g}$ und da man nach Nr. **54** die constanten Kräfte durch die Gröſse ihrer Bewegung nach der Zeiteinheit, also hier beziehungsweise durch $m'\left(\frac{v_1 - v\, Cos\,\delta}{t}\right)$ und $m'\frac{v_2\, Sin\,\delta}{t}$ ausdrückt, so kommt man, wenn man auf das Gewicht m der Masse m' übergeht, wieder auf die vorigen Ausdrücke (a).

203. Wendet man diese beiden Formeln (a) auf den vorliegenden Fall in Fig. 133 an und setzt den Winkel, welchen die positiven Richtungen der relativen Eintrittsgeschwindigkeit V' und des Druckes oder Stoſses P (welcher auf der absolut glatten Fläche nur normal seyn kann) gleich φ; so ist

$$P\, Cos\,\varphi = \frac{m}{g\,t}(V' - u\, Cos\,\delta) \text{ und } P\, Sin\,\varphi = \frac{m}{g\,t}\, u\, Sin\,\delta \quad (b)$$

204. Um endlich noch die Wassermasse m zu finden, welche in der sehr kleinen Zeit t zum Stoſs gelangt, so lassen sich dabei zwei Fälle unterscheiden, nämlich erstens jener, in welchem die Stoſsfläche mit der Geschwindigkeit v ins Unbestimmte fortschreitet und sich von der Ausfluſsöffnung des Strahles immer mehr entfernt (oder umgekehrt auch nähert) und dann jener, in welchem die Fläche an derselben Stelle bleibt, oder wenn sie sich bewegt, augenblicklich, d. i. in den kleinen Zeitintervallen t, nachdem sie den Stoſs empfangen hat, durch eine neue Fläche an derselben Stelle ersetzt wird (beiläufig so, wie dieſs mit den Schaufeln eines unterschlächtigen Rades der Fall ist) Da aber der erstere Fall fast gar keine practische Anwendung zuläſst, so soll derselbe hier übergangen und sofort nur dieser letztere berücksichtigt werden.

Bezeichnet man nun den normalen Querschnitt des Wasserstrahles mit a und das Gewicht eines Kubikfuſs Wassers mit γ, so ist offenbar in diesem letztern Falle die dem Gewichte nach ausgedrückte Wassermasse $m = \gamma\, a\, V\, t$; mit diesem Werthe von m erhalten die beiden letzten Formeln (b) die Form:

$$P\, Cos\,\varphi = \frac{\gamma}{g}\, a\, V\,(V' - u\, Cos\,\delta),\quad P\, Sin\,\varphi = \frac{\gamma}{g}\, a\, V\, u\, Sin\,\delta \quad . . (4)$$

Anmerkung. Nimmt man, um in Kürze auf den erwähnten ersten Fall, in welchem die Stoſsfläche in's Unbestimmte ausweicht, zurückzukommen, diese Fläche als eine Ebene DE (Fig. 135) an, welche sich in der Richtung MN mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, während der Wasserstrahl in der Richtung AM mit der Geschwindigkeit V ankömmt, setzt, wie oben, den W. $NMM' = \alpha$ und jenen $AMD = \varepsilon$, nimmt ferner $MN = v$ und zieht durch N mit DE die Parallele $D'E'$, so stellt $D'E'$ die Lage der Stoſsfläche am Ende der Zeiteinheit, d. i. einer Secunde vor, wenn DE diese Lage im Anfange dieser Secunde bezeichnet. Da nun $MM' = \frac{Sin(\alpha + \varepsilon)}{Sin\,\varepsilon} v$ ist, so ist in dem obigen Ausdrucke von $m = \gamma a V t$ statt der absoluten Geschwindigkeit V die relative $V - MM'$ zu setzen, wodurch man für die in diesem Falle während der Zeit t zum Stoſse gelangende Wassermasse den Ausdruck

$$m = \gamma a \left[V - \frac{Sin(\alpha + \varepsilon)}{Sin\,\varepsilon} v \right] t \quad \text{erhält.}$$

Bewegt sich die Fläche mit dem Strahle in derselben Richtung, so ist $\alpha = 0$ und daher $m = \gamma a (V - v) t$.

Bewegt sich diese Fläche dem Strahle direct entgegen, so ist $\alpha = 180^0$ und $m = \gamma a (V + v) t$.

Wäre die Fläche unbeweglich, also $v = 0$, so wäre $m = \gamma a V t$.

Stoſs eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe durch den Stoſs seine ganze relative Geschwindigkeit verliert.

205. Mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen (in Nr. **200** und Nr. **201**) und mit Beziehung auf Fig. 133 folgt aus den Gleichungen (4) der vorigen Nr., da die relative Austrittsgeschwindigkeit $u = 0$ ist, sofort $P\,Cos\,\varphi = \frac{\gamma a}{g} V V'$ und $P\,Sin\,\varphi = 0$, folglich ist $\varphi = 0$ und

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \quad . \quad (5)$$

Die Fläche AMB erleidet also in der Richtung FM einen Stoſs oder vielmehr continuirlichen Druck P, welcher durch diese letzte Gleichung bestimmt wird; setzt man in diese für V' den Werth aus (1) in Nr. **201**, so wird dieser Druck als Function der absoluten Geschwindigkeiten V und v des Strahles und der Fläche ausgedrückt. Die Richtung FM dieses Druckes ist durch die Gleichung (2) gegeben.

206. Dieser eben betrachtete Fall findet Anwendung bei dem Stoſse eines Strahles auf die Schaufeln eines unterschlächtigen

Wasserrades. Bewegen sich dabei die Schaufeln in der Richtung des einfallenden Strahles, so ist (Nr. **201**, Relat. *e*) $V' = V - v$ und daher der Stofs nach der vorigen Formel (5):

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V - v) \;.\;.\; (6)$$

Ruht die Fläche, so ist $v = 0$ und $V' = V$, folglich

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2\gamma a h$$

wobei $h = \frac{V^2}{2g}$ die Druck- oder Geschwindigkeitshöhe zu V bezeichnet. (Vergl. §. 356.)

Stofs eines isolirten Strahles gegen eine bewegte Fläche, wenn derselbe mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit auch wieder austritt.

207. Tritt der Strahl CM (Fig. 136) mit der Geschwindigkeit V gegen die Fläche AMB, welche in dieser Richtung mit Randleisten versehen ist, also gleichsam wie in eine Rinne ein, so wird sich der Strahl nur nach dieser einen Richtung MB herumbiegen, längs der als absolut glatt gedachten Fläche MB hingleiten und mit der relativen Eintrittsgeschwindigkeit V' bei B nach der Richtung BG austreten, so dafs also $u = V'$ wird.

Setzt man, wie in Nr. **202**, den Winkel der positiven Geschwindigkeiten u und V' gleich δ, so wie jenen der positiven Geschwindigkeit V' mit der Richtung des Druckes P gleich φ; so hat man nach den Relationen (4) in Nr. **204** (wegen $u = V'$):

$$P \, Cos\,\varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' (1 - Cos\,\delta) \text{ und } P \, Sin\,\varphi = \frac{\gamma a}{g} V V' \, Sin\,\delta \;.\;.\; (f)$$

woraus sofort, wenn man beide Gleichungen quadrirt und summirt:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V V' \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]} \;.\;.\; (7)$$

und (durch Division dieser beiden Gleichungen)

$$tang\,\varphi = \frac{Sin\,\delta}{1 - Cos\,\delta} = Cot\,\tfrac{1}{2}\delta = tang\,\tfrac{1}{2}(180 - \delta)$$

also

$$\varphi = 90^0 - \tfrac{1}{2}\delta \quad (8)$$

folgt.

Diese letzte Gleichung zeigt, dafs der Winkel GMF, welchen die positive Geschwindigkeit V' mit der Richtung der negativen Geschwindigkeit u einschliefst durch die Richtung MP des Druckes P halbirt wird.

208. Dieser letztere Fall findet u. A. Anwendung auf den Stofs des Wassers gegen die Schaufeln eines horizontalen Wasserrades oder einer Turbine. Bewegen sich diese dabei in der Richtung CM des eintretenden Strahles, so hat man (Nr. **201**) $V' = V - v$, oder, wenn sich die Schaufeln dem Strahle direct entgegen bewegen, $V' = V + v$. Es ergibt sich also für beide Fälle der Druck oder Stofs gegen die Schaufel nach der vorigen Formel (7):

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]} \;.\;.\; (9)$$

Für eine ruhende Fläche wäre $v = 0$, also

$$P = \frac{\gamma a}{g} V^2 \sqrt{[2(1 - Cos\,\delta)]}.$$

209. Zerlegt man in jenen Fällen, in welchen die Stofsfläche in der Richtung des eintretenden Strahles ausweicht oder sich dem Strahle direct entgegen bewegt, wobei also $V' = V \mp v$ ist und wegen $\beta = 0$ (Nr. **201**, Relat. e) die Richtungen FE und CC' zusammenfallen, den in der Richtung MP entstehenden Druck oder Stofs in zwei Seitenstöfse, P_1 und P_2, wovon der erstere parallel mit dem eintretenden Strahl CM und der letztere darauf perpendikulär ist; so hat man wegen W. EMP = W. $CMP = \varphi$ (Fig. 136) sofort:

$$P_1 = P\,Cos\,\varphi \quad \text{und} \quad P_2 = P\,Sin\,\varphi,$$

oder wenn man für $P\,Cos\,\varphi$ und $P\,Sin\,\varphi$ die Werthe aus (f) (Nr. **207**) und zugleich $V' = V \mp v$ setzt, auch:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \\ P_2 &= \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\,Sin\,\delta \end{aligned}\right\} (10)$$

Man nennt hier P_1 den Parallelstofs und P_2 den Seitenstofs des Wasserstrahles.

Gerader Stofs eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche.

210. Es sey BMB' (Fig. 137) eine durch Umdrehung der Curve MB um die Achse MC erzeugte Fläche und V die absolute Geschwindigkeit des in der Richtung AMC eintretenden Wasserstrahles, zugleich bewege sich die Rotationsfläche in derselben Richtung der Achse oder auch in direct entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit v, so, dafs in diesen beiden Fällen die relative Geschwindigkeit des

Strahles respective $V - v$ und $V + v$ ist. Setzt man ferner den Winkel der am Endpuncte B an die Erzeugungscurve gezogenen Tangente BT mit der Achse MC gleich δ und nimmt an, dafs die Fläche vollkommen glatt sey, folglich keine Reibung beim Hingleiten des Wassers Statt finde; so trifft der Strahl die Oberfläche mit der relativen Geschwindigkeit $V \mp v$, breitet sich hierauf über dieselbe nach allen Seiten um die Achse gleichförmig aus und verläfst diese bei BB' in Richtungen, welche sämmtlich gegen die Achse MC die Neigung δ haben, mit derselben relativen Geschwindigkeit $u = V \mp v$.

Denkt man sich den Wasserstrahl in einzelne Wasserfäden aufgelöst, wovon jeder den Querschnitt a' haben soll, und nimmt an, dafs sich diese gleichförmig um die Fläche nach den Richtungen MB und MB' d. i. nach den Durchschnittslinien legen, welche aus einer durch die Achse MC gelegten Ebene mit der Fläche entstehen, wenn sich diese Ebene um die Achse allmählig umdreht oder Positionen annimmt, für welche die aufeinander folgenden Neigungswinkel unendlich klein sind.

Bezeichnet man nun den Parallelstofs eines jeden solchen elementaren Strahles oder Wasserfadens durch p_1 und dessen Seitenstofs durch p_2; so folgt nach den vorigen Relationen (10):

$$p_1 = \frac{\gamma a'}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \text{ und } p_2 = \frac{\gamma a'}{g} V (V \mp v) Sin\,\delta$$

Da sich aber von den Seitenstöfsen p_2 je zwei, welche in ein und derselben von den um die Achse gedachten Ebenen liegen, da sie gleich und entgegengesetzt sind, aufheben, so bildet die Summe aus allen Parallelstöfsen p_1 die Resultirende, d. i. den Parallelstofs P_1 des ganzen Wasserstrahles, und es ist daher, wenn n solcher Wasserfäden vorhanden sind, wegen $np_1 = P_1$ und $na' = a$ sofort:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v)(1 - Cos\,\delta) \quad (11)$$

während der Seitenstofs $P_2 = 0$ ist.

211. Ist die Stofsfläche eine Ebene BB' (Fig. 138), gegen welche der Strahl AM perpendikulär anstöfst und nach allen Seiten um einen rechten Winkel abgelenkt wird; so ist wegen $\delta = 90^0$ aus der vorigen Relation:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V (V \mp v) \quad (12)$$

und wenn die Tafel oder Fläche unbeweglich ist, $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V^2 = 2 \gamma a h$ (Vergleiche Nr. **206.**)

212. Ist endlich die obige Rotationsfläche gegen den Strahl zu concav und wird dieser bei seinem Austritte bei BB' parallel zur Achse, aber nach entgegengesetzter Richtung des einfallenden Strahles abgelenkt; so folgt wegen $\delta = 180^0$ aus der vorigen Relation (11):

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \quad (13)$$

und wenn die Fläche BMB' unbeweglich ist,

$$P_1 = 2\frac{\gamma a}{g} V^2 = 4\gamma a \frac{V^2}{2g} = 4\gamma a h$$

also doppelt so grofs als bei der Ebene.

Anmerkung 1. Aus diesem Grunde wird auch der Stofs gegen eine Ebene, deren Umfang, wie in Fig. 140, mit Leisten besetzt ist, gröfser als wenn diese Ränder fehlen. *Weisbach* erwähnt eines Versuches, bei welchem der Strahl 1 Zoll Dicke und die cylinderische Einfassung der Stofsebene 3 Zoll Durchmesser und $3\frac{1}{2}$ Linien Höhe hatte; der Strahl trat beinahe gänzlich in der umgekehrten Richtung aus und gab eine Stofskraft von $3{\cdot}93\,\gamma a \frac{V^2}{2g}$. Übrigens versteht es sich von selbst, dafs wegen der Reibung des Wassers an der Fläche der obige theoretische Maximalwerth von $4\gamma a \frac{V^2}{2g}$ niemals vollständig erreicht werden kann.

Anmerkung 2. Weicht die Fläche BMB' (Fig. 137) in der Richtung der Achse MC dem gerade anstofsenden Strahle mit der Geschwindigkeit v aus, so ist die Arbeits- oder Wirkungsgröfse dieses Stofses (Relat. 11)

$$W = P_1 v = \frac{\gamma a}{g} Vv(V - v)(1 - Cos\,\delta),$$

folglich für ein Maximum

$$\frac{dW}{dv} = \frac{\gamma a}{g} V(1 - Cos\,\delta)(V - 2v) = 0$$

und daraus $v = \frac{1}{2} V$. (Vergleiche §. 362.)

Der mit diesem Werthe von v entstehende Maximalwerth der Wirkungsgröfse des Stofses ist daher, wenn man das Gewicht der per Secunde zum Stofs gelangenden Wassermenge $\gamma a V = M$ setzt:

$$W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g}(1 - Cos\,\delta).$$

Dieser Werth geht für eine ebene Stofsfläche (209) wegen $\delta = 90^0$ über in $W = \frac{1}{2} M \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} Mh$,

dagegen für die concave Fläche in Nr. 211 (Fig. 139), wegen $\delta = 180^0$ in

$$W = M\frac{V^2}{2g} = Mh$$

über, so, dafs dieser Werth genau mit der theoretischen Wirkungsgröfse, oder, wie man sich ausdrückt, dynamischen Kraft übereinstimmt, welche in der von der Höhe h herabsinkenden Wassermasse M enthalten ist.

213. Zur Bestimmung des schiefen Stofses gegen eine ebene Fläche, mufs man unterscheiden, ob das Wasser nach dem Stofs nur nach einer, oder nach zwei direct entgegengesetzten, oder endlich nach allen Richtungen abfliefsen kann

Im erstern Falle gilt, wenn der isolirte Strahl, oder (§. 361) das begrenzte Wasser gegen die Ebene BB' (Fig. 141) unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit V anstöfst und diese in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v ausweicht, die obige Formel (11) in Nr. **210**, oder es ist wegen $\delta = \alpha$:

$$P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V - v)(1 - Cos\,\alpha) \quad (14)$$

214. Trifft im zweiten Falle der Strahl AM (Fig. 142) die ebene Fläche BB' unter dem Winkel $AMB' = \alpha$ und ist diese Fläche nach der Richtung BB' mit Randleisten versehen, so theilt sich der Strahl in zwei Theile MB und MB', welche nach gerad entgegengesetzten Richtungen abfliefsen.

Eine einfache Betrachtung zeigt, dafs die Querschnitte a' und a'' dieser beiden Theile ungleich seyn werden; auch wird der Stofs oder hydraulische Druck P', welchen der Theil AMB gegen die Fläche BB' ausübt, in einer auf derselben normalen Ebene liegen; dasselbe gilt von dem Drucke P'' des Theiles AMB', folglich wird auch die Resultirende aus P' und P'', d. i. der Gesammtdruck P in dieser normalen Ebene ABB' liegen und zugleich, da die Fläche BB' als absolut glatt gedacht wird, auf dieser Fläche normal seyn müssen. Sind daher N', R' die Seitenkräfte von P', und N'', R'' jene von P'', und zwar respective normal und parallel zur Ebene BB'; so müssen, wenn die Resultante P aus P' und P'' auf der Ebene BB' normal seyn soll, sofort die beiden Seitenkräfte R' und R'' einander gleich und direct entgegengesetzt und dann $P = N' + N''$ seyn.

Nun war aber (Nr. **209**) als man den Druck $Mc = P$ (Fig. 143 und Fig. 136) in zwei Seitenkräfte $Ma = P_1$ und $Mb = P_2$ darauf perpendikulär zerlegte (Relat. 10) $Ma = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\delta)$ und $Mb = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)\,Sin\,\delta$, folglich ist auch, wenn man denselben Druck $P = Mc$ in zwei Seitenkräfte Ma' und Mb' parallel und normal zur Ebene BB' zerlegt, wegen W. BMc = W. aMc (Relat. 8) sofort $Ma' = Ma$ und $Mb' = Mb$.

Geht man also auf die beiden Theildrücke P' und P'' über, so hat man nach demselben Verfahren für den Theil AMB (Fig. 142) des Strahles, wofür $\delta = \alpha$ ist, $R' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v)(1 - Cos\,\alpha)$ und $N' = \frac{\gamma a'}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha$; ferner für den Theil AMB', wofür $\delta = 180^0 - \alpha$ ist, $R'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v)(1 + Cos\,\alpha)$ und $N'' = \frac{\gamma a''}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha$.

Setzt man daher der vorigen Bemerkung gemäfs $R' = R''$ und $P = N' + N''$, so erhält man aus der erstern dieser beiden Gleichungen, wenn man für R' und R'' die eben gefundenen Werthe substituirt und noch berücksichtiget, dafs $a' + a'' = a$ ist, sofort $a' = \frac{1}{2} a (1 + Cos\,\alpha)$ und $a'' = \frac{1}{2} a (1 - Cos\,\alpha)$.

Die zweite der genannten Gleichungen gibt jetzt mit diesen Werthen, welche man in N' und N'' zu substituiren hat

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha \quad (15)$$

Um endlich noch aus diesem Normalstofs P gegen die Ebene BB' den Parallelstofs P_1 in der Richtung AM und den darauf perpendikulären Seitenstofs P_2 (Nr. **209**) zu bestimmen, hat man durch Zerlegung der Kraft P in diese zwei Seitenkräfte P_1 und P_2, wegen W. $PMP_2 = \alpha$ sofort:

$$P_1 = P\,Sin\,\alpha \text{ und } P_2 = P\,Cos\,\alpha,$$

oder wenn man für P seinen Werth setzt,

$$\left.\begin{array}{l} \text{für den Parallelstofs: } P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) Sin^2\alpha \\ \text{und für den Seitenstofs: } P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha \end{array}\right\} (16)$$

215. Was endlich den dritten Fall anbelangt, in welchem der Strahl nach dem Stofs nach allen Seiten hin über die ebene Fläche abfliefsen kann, so begnügt man sich hier, da eine mathematisch scharfe Theorie ohnehin nicht möglich ist, indem man dabei von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen kann, mit blofsen Näherungswerthen.

Scheffler findet, indem er annimmt, dafs sich der Strahl auf der ebenen Fläche in vier Theile theilt, welche sich rechtwinkelig schneiden und indem er auf ähnliche Weise, wie diefs in der vorigen Nr. geschehen, die Querschnitte der vier abgelenkten Theile bestimmt, für den Normalstofs:

$$P = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin \, \alpha \qquad (17)$$

und daraus wieder durch Zerlegung in zwei Seitenstöſse, für

$$\left.\begin{array}{l} \text{den Parallelstoſs: } P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin^2 \alpha \\ \text{und den Seitenstoſs: } P_2 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \, Sin \, \alpha \, Cos \, \alpha \end{array}\right\} \quad (18)$$

also dieselben Werthe, wie im vorigen Falle.

Anmerkung. *Weisbach* findet unter der Annahme einer allerdings willkürlichen Voraussetzung $P = 2 \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v \frac{Sin \, \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$.

Duchemin dagegen setzt $P = 2 \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v) \frac{Sin^2 \alpha}{1 + Sin^2 \alpha}$ (gl ich dem Parallelstoſs nach *Weisbach*).

Navier erhält obschon die Voraussetzung, daſs alle abgelenkten Wasserfäden eine gleiche Stärke besitzen, nicht richtig ist, für den Normalstoſs P den obigen Werth (17), dagegen für den Parallelstoſs den unrichtigen Werth $P_1 = \frac{\gamma a}{g} V(V \mp v)$.

Schlüſslich ist zu bemerken, daſs die obigen theoretischen Resultate und Formeln über den Stoſs isolirter Strahlen mit der Erfahrung nur dann übereinstimmen, wenn die Ausdehnung der Stoſsfläche wenigstens so groſs ist, daſs die Wasserfäden in parallelen Richtungen zu den letzten Elementen der gestoſsenen Fläche austreten können, ohne jedoch im Gegentheile wieder so groſs zu seyn, daſs das Gewicht und die Adhäsion der auf der Fläche befindlichen Flüssigkeit einen hemmenden Einfluſs äuſsern kann.

Nach den gemachten Erfahrungen muſs, namentlich bei dem geraden Stoſs, der Durchmesser der Stoſsfläche wenigstens 4 Mal so groſs als jener des anstoſsenden Strahles seyn. Nach den Versuchen von *Langsdorf* vermindert sich, wenn die Fläche nur eben so groſs als der Querschnitt des Strahles ist, der Stoſs gegen diese Fläche beiläufig um die Hälfte des durch die obige Formel (12) angegebenen Werthes.

Von den Wasserrädern.

(§. 363.)

216. Obschon wir dem Verdienste jener Autoren, welche, wie namentlich Herr Professor ***F. Redtenbacher***, bemüht waren eine vollständige Theorie der Wasserräder zu entwickeln, volle Gerechtigkeit widerfahren lassen; so ziehen wir es hier dennoch vor, nach dem Vorgange der französischen Schule, bei dieser Entwicklung nur jene Widerstände in Rechnung zu bringen, welche sich mit einiger Verläſslichkeit bestimmen lassen und alle übrigen, welche entweder an und für sich unbedeutend oder deren Bestimmung nur annäherungsweise möglich ist und für den practischen Gebrauch zu äufserst unbequemen, complicirten Formeln führen, auszulassen und summarisch durch einen so weit wie möglich richtig ermittelteten Erfahrungscoefficienten, welcher selbst auch im erstern Falle nicht ganz entbehrt werden kann, zu ersetzen.

Von diesem Gesichtspuncte ausgehend sey allgemein für was immer für ein Wasserrad oder einen sonstigen hydraulischen Motor, Q das per Secunde zufliefsende Wasser in Kubikfufs, $M = 56{\cdot}5\,Q$ die Masse desselben in Pfunden ausgedrückt, H die Gefällshöhe, d. i. der Verticalabstand des Wasserspiegels im Zuflufs- über dem Wasserspiegel im Abflufscanal (oder des Ober- vom Unterwasserspiegel), V die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad eintritt oder den Umfang desselben erreicht, w die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Rade austritt und v die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, alle diese Mafse in Fufsen ausgedrückt, ferner P der auf den Umfang des Rades reducirte Nutzwiderstand, welchen das Rad wirklich überwindet, $E_a = MH = 56{\cdot}5\,QH$ der absolute Effect des verwendeten Wassers oder (wie man sich auch ausdrückt) dessen dynamische Kraft, $E_n = Pv$ der Nutzeffect des Rades, diese beiden Gröfsen in Fufspfund ausgedrückt, so wie endlich $N_a = \frac{E_a}{430}$ und $N_n = \frac{E_n}{430}$ der absolute Effect und der Nutzeffect in Pferdekräften ausgedrückt.

Theilt man die Gefällshöhe H in zwei Theile und setzt $H = h_1 + h'$, wobei h_1 die verticale Höhe vom Oberwasserspiegel bis zu dem Eintrittspunct des Wassers in das Rad, und h' die Höhe dieses Punctes über dem Unterwasserspiegel bezeichnet, setzt ferner die Geschwindigkeitshöhe $\frac{V^2}{2g} = h$; so ist fürs erste (§. 365) immer $h < h_1$, so, dafs das eigentlich disponible oder wirksame Gefälle $h + h' < h_1 + h'$ d. i. immer $< H$ ist, und zwar hängt dieser, schon von vorne herein Statt findende Verlust an lebendiger Kraft oder Wirkungsgröfse von der Anordnung der Schütze und Zuführung des Wassers in das Rad ab. Die Berücksichtigung aller in den frühern Nrn. oder §§. gemachten, hierauf bezüglichen Bemerkungen, geben die Mittel an die Hand, diesen Verlust so weit als möglich zu vermindern.

Da beim Eintritte des Wassers in das Rad durch den Stofs, oder überhaupt dadurch, dafs V von v, sey es der Gröfse oder Richtung nach, verschieden ist, ein Verlust an lebendiger Kraft, also auch (§. 201

und Zusatz auf S. 605) an Wirkungsgröſse entsteht; so werde dieser letztere allgemein durch $\frac{Mu^2}{2g}$ ausgedrückt, wobei u eine gewisse Function von V, v und dem Winkel, welchen die Richtungen dieser beiden Geschwindigkeiten miteinander bilden, so wie von der Anordnung der Schaufeln oder Zellen seyn wird.

Da ferner das austretende Wasser noch die absolute Geschwindigkeit w, welche von der Richtung und Geschwindigkeit des Wassers und des letzten Schaufelelementes abhängt, also die Wirkungsgröſse $\frac{Mw^2}{2g}$ besitzt, so muſs auch dieser Theil von der disponiblen Arbeits- oder Wirkungsgröſse des Wassers abgezogen werden, und da diese letztere $= M(h + h')$ ist, so hat man offenbar für den theoretischen Nutzeffect des Wasserrades oder hydraulischen Motors Pv oder

$$E_n = M(h + h') - \frac{M}{2g}(u^2 + w^2) \quad . \; . \; (1)$$

so wie für den wirklichen Nutzeffect e_n den Werth $e_n = k' E_n$, oder für die Praxis bequemer

$$e_n = k E_a = k M H \quad . \; . \; (2)$$

wobei k der betreffende Erfahrungscoefficient und dabei immer kleiner als die Einheit ist.

Anmerkung. Zu den in der Formel (1) nicht berücksichtigten, oben erwähnten Widerständen oder Effectverlusten gehören besonders 1) die Zapfenreibung, 2) die Wasserreibung oder Adhäsion desselben und 3) der Luftwiderstand. Mit Ausnahme jedoch des erstern Widerstandes, welcher sich übrigens immer leicht nach §. 237 bestimmen läſst und dem Effectverlust, welcher durch die eintretenden, von dem besondern Baue und der Anordnung jeder einzelnen Radgattung abhängigen Wasserverluste entsteht, sind alle übrigen Widerstände in der Regel sehr unbedeutend und werden am besten und einfachsten durch den Erfahrungscoefficienten k vertreten oder in Rechnung gebracht.

Was namentlich den durch die Zapfenreibung herbeigeführten Effectverlust anbelangt, so ist dieser $= \frac{\pi}{60} n d f G = \frac{1}{19} n d f G$ F. Pf, wenn G das gesammteGewicht des Rades in Pfunden, d den Durchmesser des Zapfens in Fuſsen, n die Anzahl der Umdrehungen per Minute und f den betreffenden Reibungscoeffizienten bezeichnet.

Da aber *Redtenbacher* aus vielen Berechnungen über die Gewichte der verticalen Wasserräder gefunden hat, daſs dasselbe für jede Pferdekraft Nutzeffect von 400 bis 500 Kilogramm beträgt; so kann man in runder Zahl $G = 900\, N$ Pfund, ferner den Zapfendurchmesser diesem Gewichte proportional und zwar $d = {\cdot}095 \sqrt{N}$ Fuſs setzen. Werden diese Werthe für d und G in dem vorigen Ausdrucke substituirt, so erhält man bei allen verticalen Wasserrädern für den Effectverlust durch die Zapfenreibung den Näherungswerth:

$$4{\cdot}5\, n f N \sqrt{N} \;.\;. \quad (\alpha)$$

217. Die vorige Gleichung (1) zeigt, dafs das absolute Maximum des Nutzeffectes, nämlich der Werth

$$E_n = M(h + h') \;.\;. \quad (3)$$

nur erreicht wird, wenn $u^2 + w^2 = 0$, d. h. wenn sowohl $u = 0$ als auch $w = 0$ ist, wenn nämlich das Wasser ohne Stofs in das Rad gelangt und ohne alle Geschwindigkeit aus demselben austritt (§. 366). Zugleich wird dabei angenommen, dafs das Wasser so tief als möglich, nämlich im Unterwasserspiegel austrete.

Da sich übrigens diese beiden Bedingungen nur sehr selten realisiren lassen, ja sogar oft miteinander im Widerspruche stehen, so mufs man in diesen Fällen wenigstens das relative Maximum, welches auf die bekannte Weise (indem man den betreffenden Differenzialquotienten $= 0$ setzt) gefunden wird, zu erreichen trachten.

Anmerkung. Es ist übrigens leicht zu erkennen, welche Vorzüge die Wasserräder durch ihre gleichförmige rotirende Bewegung gegen oscillirende Motoren (wie z. B. der hydraulischen Schaukel) haben, bei welchen, da v und w niemals constant werden, immer ein Verlust an lebendiger Kraft eintritt, welcher nur dadurch vermindert werden oder fast auf Null gebracht werden kann, dafs man V und v sehr klein macht.

218. Untersucht man die obige Bedingung von $u = 0$ genauer und nimmt an, die Schaufel AMB (Fig. 144) werde in der Richtung CM von dem Wasserstrahle mit der Geschwindigkeit V getroffen und sie selbst weiche in der Richtung MN mit der Geschwindigkeit v aus, setzt, wenn ST eine Tangente im Puncte M bildet, W. $CMT = \alpha$, W. $TMN = \beta$ und zerlegt jede der beiden Geschwindigkeiten V und v in zwei V', V'' und v', v'', wovon V'' und v'' in die Richtung ST der Tangente oder der Schaufelfläche fallen und die beiden andern V' und v' auf derselben perpendikulär stehen; so hat man $V' = V \,Sin\, \alpha$, $v' = v \,Sin\, \beta$, $V'' = V \,Cos\, \alpha$ und $v'' = v \,Cos\, \beta$.

Ist nun $V \,Sin\, \alpha > v \,Sin\, \beta$, so entsteht beim Eintritt des Wassers in die Schaufel ein Stofs und für die während der Zeit dt zum Stofs gelangende Wassermasse dM ein Verlust an Wirkungsgröfse (§. 354) von $\frac{dM}{2g}(V \,Sin\, \alpha - v \,Sin\, \beta)^2$, welcher Verlust bei der continuirlichen Wiederholung gegen die nämliche oder eine ähnliche Schaufel in der Zeiteinheit, d. i. während einer Secunde den Werth

$$\int \frac{dM}{2g}(V\,Sin\,\alpha - v\,Sin\,\beta)^2 = \frac{M}{2g}(V\,Sin\,\alpha - v\,Sin\,\beta)^2 \text{ erhält.}$$

Die erwähnte Bedingung von $u = 0$ wird also erfüllt und daher der Verlust an lebendiger Kraft beim Eintritt in das Rad vermieden, wenn $V\,Sin\,\alpha = v\,Sin\,\beta$ ist. Diefs findet aber Statt:

1) wenn man über $Ma = V$ und $Mb = v$ das Parallelogramm construirt und es sich zeigt, dafs ac mit ST parallel läuft, weil dann $V\,Sin\,\alpha = Ma\,Sin\,\alpha = am$, $v\,Sin\,\beta = Mb\,Sin\,\beta = bn$ und $am = bn$ ist;

2) wenn $V = v$ und gleichzeitig $\alpha = \beta$ oder $\alpha = 180^0 - \beta$ ist, und

3) wenn $\alpha = 0$ oder 180^0 und $\beta = 0$ und 180^0 ist, nämlich das Wasser in der Richtung der Schaufel eintritt und die Geschwindigkeit der letztern mit jener des Wassers in eine gerade Linie fällt.

Anmerkung. Im Falle sich die Schaufeln dem eintretenden Wasserstrahle entgegen bewegen, müfste man entweder v oder β mit dem entgegengesetzten Zeichen einführen und dann wäre der obige Verlust an Wirkungsgröfse in der Zeiteinheit $= \frac{M}{2g}(V\,Sin\,\alpha + v\,Sin\,\beta)^2$

219. Die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser nach dem Stofse über die Fläche der Schaufel fliefst, ist $V'' - v''$, oder wenn man für V'' und v'' die Werthe aus Nr. **218** setzt, wird diese relative Geschwindigkeit, je nach dem Sinne von v:

$$V\,Cos\,\alpha \mp v\,Cos\,\beta.$$

Tritt der vorhin erwähnte günstige Fall von $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ (welcher nur bei krummen Schaufeln möglich ist) ein und sind V und v im gleichen Sinne gerichtet; so ist $Cos\,\alpha = Cos\ \ = 1$ und daher die genannte relative Geschwindigkeit $= V - v$. (Vergleiche auch Nr. **201**, Anmerk.)

220. Tritt der Strahl in ein Gefäfs oder eine Zelle (Kübel) wie in Fig. 145 ein, so verliert er durch wiederholte Stöfse (die man jetzt nicht mehr wie vorhin nach normaler Richtung auf die Schaufel ab zu untersuchen braucht) seine ganze relative Geschwindigkeit u. Diese ist, wenn wieder V und v die Geschwindigkeiten des eintretenden Wasserstrahls und der ausweichenden Zelle bezeichnen und ihre positiven Richtungen den Winkel φ einschliefsen (Nr. **201**, Gleich. 1)

$$u = \sqrt{(V^2 + v^2 - 2\,V\,v\,Cos\,\varphi)}$$

folglich ist der in der Zeiteinheit oder einer Secunde Statt findende Verlust an Wirkungsgröfse

$$\frac{Mu^2}{2g} = \frac{M}{2g}(V^2 + v^2 - 2\,V\,v\,Cos\,\varphi)\quad . \; . \quad (m)$$

eine Gröſse, welche im Allgemeinen nur verschwinden oder Null werden kann, wenn $\varphi = 0$ und $V = v$ ist, d. h. wenn die beiden Geschwindigkeiten V und v sowohl ihrer Richtung als Gröſse nach einander gleich sind.

221. Untersucht man nun auch die zweite der obigen, dem absoluten Maximum entsprechenden Bedingungsgleichungen, nämlich jene $w = 0$, so flieſst das Wasser nach der Bemerkung in Nr. **219** nach dem Stoſs mit der relativen Anfangsgeschwindigkeit $V\,Cos\alpha \mp v\,Cos\beta$ über die Schaufelfläche, tritt jedoch im Allgemeinen durch die Einwirkung von beschleunigenden oder verzögernden Kräften von der Schaufel nach der Verlängerung BG (Fig. 133) des letzten Elementes mit einer davon verschiedenen relativen Geschwindigkeit $BG = u'$ aus, wofür, wenn v' die Geschwindigkeit des letzten Elementes der Schaufelfläche und γ der Winkel zwischen u' und v' ist, für die absolute Geschwindigkeit BJ oder (Nr. **201**, Gleich. 3)

$$w = \sqrt{(v'^2 + u'^2 + 2\,v'\,u'\,Cos\,\gamma)}$$

Statt findet.

Diese Gröſse kann aber im Allgemeinen nur Null werden, wenn man gleichzeitig $v' = u'$ und $\gamma = 180^0$ hat, d. h. wenn das Wasser mit einer Geschwindigkeit und nach einer Richtung die Schaufel verläſst, welche jener des letzten Elementes derselben gleich und direct entgegengesetzt ist. Da diese Bedingung jedoch in der Wirklichkeit fast niemals vollständig zu erreichen ist, indem erstlich wegen der Schwierigkeit beim Austreten des Wassers der Supplementswinkel $180^0 - \gamma$ niemals (wie es eben verlangt wurde) $= 0$, sondern öfter sogar bis 30^0 genommen werden muſs und zweitens auch nicht immer v' genau gleich u' seyn kann, indem v' von v abhängt und v gegen V, wenn die erste der genannten Bedingungen, d. i. $u = 0$ erfüllt werden soll (Nr. **218**), in einer bestimmten Relation stehen müssen, so folgt, daſs es im Allgemeinen nicht möglich ist, den genannten beiden Bedingungsgleichungen $u = 0$ und $w = 0$ vollständig zu entsprechen und den absolut gröſsten Nutzeffect (3) in Nr. **217** zu erreichen, und daſs man daher darauf angewiesen ist, für jedes einzelne Wasserrad das r e l a t i v e Maximum des Nutzeffectes (Nr. **217**) oder das Minimum von $\frac{M}{2g}(u^2 + w^2)$ zu bestimmen.

222. Für das unterschlächtige Wasserrad (§. 368) folgt nun mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen, wenn sich dabei P und v auf den mittlern Umfang des Rades (in welchem nämlich die Stofsmittelpuncte der Schaufeln liegen) beziehen, wegen $u = V - v$, $w = v$, $h' = 0$ und $h = \frac{V^2}{2g}$ für den theoretischen Nutzeffect aus der allgemeinen Formel (1) in Nr. **216**:

$$E_n = \frac{MV^2}{2g} - \frac{M}{2g}(V - v)^2 - \frac{Mv^2}{2g}$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$E_n = \frac{Mv}{g}(V - v) \quad . \quad . \quad (4)$$

(§. 374 und Nr. **205**, wo $\gamma a V = M$ ist.)

Dabei tritt (da hier das absolute Maximum unmöglich) das relative Maximum, wie bereits in Nr. **212**, Anmerk. 2 gezeigt ist, bei der Geschwindigkeit von $v = \frac{1}{2} V$ ein und es ist dafür

$$(E_n)_{\text{max.}} = \frac{1}{4}\frac{MV^2}{g} = \frac{1}{2} Mh.$$

Was endlich den zur Bestimmung des wirklichen Nutzeffectes betreffenden Erfahrungscoeffizienten k' oder k (in Nr. **216**) betrifft, so ist im Durchschnitt $k' = \frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{5}$ also für diesen leztern Werth

$$e_n = {\cdot}3\, Mh = 16\, Q h' \quad . \quad . \quad (5)$$

(wegen $M = 56{\cdot}5\, Q$), wobei $h = H - {\cdot}6$ Fufs gesetzt werden kann.

Anmerkung 1. Für vorkommende Fälle, in welchen der Spielraum zwischen den Schaufeln sn (Fig. 146) und dem Gerinne ad unverhältnifsmäfsig grofs ist, kann man die vorige Formel (5) der Wirklichkeit dadurch etwas näher bringen, dafs man statt der Fläche $abcd = A$ jene $mnop = A'$ in die Rechnung bringt.

Es läfst sich nämlich der mittelbare Wasserstand ac unterm Rade im Beharrungsstande entweder durch directe Messung oder dadurch finden, dafs man $Q = AV = ab.ac.V$ setzt, woraus diese Höhe $ac = \frac{Q}{ab.V}$ folgt. Dadurch ist aber mo, folglich auch die Fläche $A' = mn.mo$ bekannt, welche man statt A in dem vorigen Ausdrucke $e_n = 16\, AVh$ setzen wird, obschon auch selbst dadurch noch der Effect zu grofs gefunden wird, indem das Wasser auf die durch das Gerinne gehörig begrenzte Schaufel, wie diese Formel (5) voraussetzt, eine gröfsere Wirkung als im vorliegenden Falle ausübt, wo das Wasser nach allen Seiten mehr oder weniger ausweichen kann.

Anmerkung 2. *Redtenbacher* berechnet zuerst (S. dessen Theorie u. Bau der Wasserräder S. 44) das zwischen den Schaufeln durchgehende Wasser, welches keine Geschwindigkeitsänderung erleidet, also auch keine Wirkung ausübt, und findet, dafs dieses für gewöhnlich ausgeführte unterschlächtige Räder (von 12 Fufs Durchmesser, 19 Zoll Schaufeltheilung, $v = \frac{1}{2} V$ und die Dicke der zufliefsenden oder anstofsenden Wasserschichte von 4 bis 5 Zoll beträgt) 18 bis (wenn nämlich das Rad schneller geht und $v = \frac{2}{5} V$ ist) 27 Procent des zufliefsenden Wassers beträgt, und dafs dieser Verlust nur dadurch vermieden werden kann, dafs man dem Gerinne am tiefsten Puncte des Rades auf die Länge von zwei Schaufeln (die eine vor und die andere nach dem tiefsten Puncte) eine mit dem Radumfange concentrische Krümmung gibt und das Rad in diese einsenkt.

Was den Wasserverlust betrifft, welcher durch das Entweichen des Wassers durch den Spielraum zwischen den Schaufeln und dem Gerinne entsteht; so ist dieser (wenn man den Spielraum an den Seitenwänden des Gerinnes unberücksichtigt läfst) nur bei einem geradlinig fortlaufenden Gerinne, oder wenn der Boden des Abflufscanales tiefer liegt als jener des Zuflufscanals, von einigem Belange, dagegen dort, wo der Boden des Zuflufs- in den Boden des Abflufscanals durch einen Bogen übergeht, beinahe Null.

Redtenbacher berechnet ein unterschlächtiges Wasserrad, für welches der äufsere Durchmesser 15·8 Fufs, die per Secunde zufliefsende Wassermenge 31·66 Kubikfufs, Tiefe des Rades (Differenz zwischen dem äufsern und innern Halbmesser) 19 Zoll, Breite desselben $6\frac{1}{3}$ Fufs, die Schaufeltheilung am äufsern Umfang des Rades gemessen 19 Zoll, der Spielraum zwischen den Radschaufeln und Gerinnsboden, bei einem geradlinig fortlaufenden Gerinne $\frac{3}{4}$ Zoll und die Geschwindigkeit des zufliefsenden Wassers 14 Fufs beträgt, und er findet dafs die vortheilhafteste Geschwindigkeit v zwischen $·3\,V$ und $·4\,V$ liege, das dabei zwischen den Schaufeln durchgehende Wasser, ohne zum Stofs zu gelangen oder seine Geschwindigkeit zu verändern, per Secunde 1 Kubikfufs, also 10 Procent, jenes, welches zwischen den Schaufeln und dem Gerinnsboden durchgeht 2·3 Kubikfufs oder 23 Procent des zufliefsenden Wassers und der wirkliche Nutzeffect 23·7 Procent von dem absoluten, d. i. nahe 5650 F. Pf. betrage. Man kann also nach dieser Annahme von einem unterschlächtigen Wasserrade mit geradlinigem Gerinne nur einen Nutzeffect von ungefähr 25 Procent erwarten, während bei einem Gerinne, wobei der Gerinnsboden des Zuflufscanals durch einen Bogen oder gekrümmten Theil (in welchem das Rad eingesenkt) mit dem Boden des Abflufscanals verbunden ist, also die Wasserverluste beinahe gänzlich verschwinden, dieser Nutzeffect, welcher dann bei einer Geschwindigkeit von $v = ·45\,V$ eintritt, bei sehr günstiger Construction des Rades bis 37 Procent steigen kann.

Nach dieser Regel ist in Fig. 147 C der Mittelpunct und D der tiefste Punct des Rades, EDF der bogenförmige und AE der gerade Gerinnsboden, welcher gegen den Horizont um $\frac{1}{20}$ geneigt ist. Die nahe am Rade angebrachte Schütze LB ist gegen den Horizont um 60° geneigt. Die Dicke des Wasserstrahles vor dem Rade ist annähernd $= \frac{Q}{b\sqrt{2gh}}$, wobei b die Breite des Rades (parallel zur Achse) und H

die Höhe des Wasserstandes JG im Zuflufscanal über den Punct G ist. BG ist parallel mit AE, die Höhe des Wasserstandes im Abflufscanal correspondirt mit der Höhe des Punctes G. Endlich sind die Schaufeln so gestellt, dafs sie im Puncte F vertical stehen. Die Umfangsgeschwindigkeit ist $v = \cdot 4 \sqrt{2gH}$, der Halbmesser R beträgt von 6 bis 12 Fufs. Die Anzahl der Schaufeln wird durch diejenige ganze Zahl n bestimmt, welche dem Werthe $\frac{2R\pi}{\cdot 6 + \cdot 7a}$ (wobei, Alles in Fufsen ausgedrückt, $a = R - r$ die Tiefe des Rades ist) am nächsten liegt und aufserdem durch die Anzahl der Radarme (gleich jener dem Werthe $\cdot 6(3{\cdot}2 + R)$ am nächsten liegenden ganzen Zahl) theilbar ist. Ist b die Breite des Rades (parallel zur Achse gemessen) und a die Tiefe desselben, d. h. die Differenz zwischen dem äufsern und innern Halbmesser, so soll abv wenigstens $= 2Q$ seyn; setzt man $abv = 2Q$, so ist die Gröfse einer Schaufelfläche $ab = \frac{2Q}{v}$.

Ist endlich e die Entfernung von einer Schaufel zur andern, am äufsern Umfang gemessen (die Schaufeltheilung), so ist $e = \frac{2R\pi}{n}$.

Übrigens wendet man das unterschlächtige Rad mit Vortheil nur bis zu einem Gefäll von 3 Fufs an, was man als die Grenze für dessen Kraftgebiet ansehen kann.

223. Für das *Poncelet*'sche Rad (§. 379) wird man nach den im §. 380 gegebenen Erläuterungen in der obigen Formel (1) $u = 0$, $h' = 0$ und $w = V - 2v$ setzen; dadurch erhält man für dieses Rad nach einer einfachen Reduction:

$$E_{\text{u}} = 2\frac{Mv}{g}(V - v) \quad . \quad . \quad (5)$$

welche Formel mit jener (4) verglichen, sofort zeigt, dafs der theoretische Nutzeffect bei dem *Poncelet*'schen Rade doppelt so grofs als bei dem gewöhnlichen unterschlächtigen Rade mit ebenen Schaufeln ist. Da ferner für den gröfsten Effect $w = 0$, also $v = \frac{1}{2}V$ seyn mufs, so hat man dafür:

$$(E_{\text{u}})_{\text{max.}} = \frac{1}{2}\frac{MV^2}{g} = Mh,$$

wodurch in der That, wenn auch noch durch eine zweckmäfsige Anlage der Schütze $h = H$ würde, der Nutzeffect dem absoluten Effect des Wassers gleich, und so das Ideal eines guten hydraulischen Motors erreicht seyn würde.

Indefs ist für den wirklichen Nutzeffect der Erfahrungscoeffizient (§. 381) $k' = \frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$, nämlich $e_{\text{u}} = \frac{2}{3}Mh$ bis $\frac{3}{4}Mh$ und wenn man die ganze Gefällshöhe H berücksichtiget $k = \cdot 60$ bis $\cdot 65$, d. i. $e_{u} = \cdot 60\, MH$ bis $\cdot 65\, MH$, also immer noch mehr als doppelt so grofs als bei dem unterschlächtigen Rade mit ebenen Schaufeln.

224. Um bei diesem Rade den Einflufs der Centrifugalkraft kennen zu lernen, indem mit Rücksicht darauf die Kranzbreite oder Tiefe des Rades zu bestimmen ist, sey w die Winkelgeschwindigkeit des Rades und dm ein Element der Wassermasse, welches von der Achse des Rades den Abstand ρ hat und an der krummen Schaufelfläche hinaufsteigt; so ist ρw die Geschwindigkeit dieses Wassertheilchens, und daher die, nahe mit der Richtung der Schwere zusammenfallende Centrifugalkraft (welche dem Aufsteigen des Elementes entgegenwirkt) nach Nr. **61**, Formel (i)

$$F = \mathrm{d}m\, \rho\, w^2,$$

oder wenn dM das Gewicht der Masse dm ist (§. 155):

$$F = \frac{\mathrm{d}M}{g}\, \rho\, w^2.$$

Durchläuft das Element dM während der unendlich kleinen Zeit dt den Raum dρ im Sinne des Radhalbmessers, so ist die während dieser Zeit von der Centrifugalkraft ausgeübte Wirkungs- oder Arbeitsgröfse $= \frac{\mathrm{d}M}{g} . w^2 \rho\, \mathrm{d}\rho$. Sind daher R und r der äufsere und innere Radhalbmesser, und nimmt man auf die geringe Veränderung in der Lage der Schaufel, welche durch die Umdrehung des Rades während der kurzen Zeit als das Wasserelement mit derselben Schaufel in Berührung bleibt, keine Rücksicht; so hat man für diese Arbeitsgröfse vom Augenblicke des Eintrittes des Wasserelementes in die Schaufel bis es zum innern Umfange des Rades gestiegen ist:

$$\int_r^R \frac{\mathrm{d}M}{g} . w^2 \rho\, \mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}M}{g} . w^2 \frac{(R^2 - r^2)}{2}.$$

Was ferner die Arbeitsgröfse der in demselben Sinne wirkenden Schwerkraft betrifft, so ist diese, wenn das Wasser im tiefsten Puncte des Rades eintritt und sich auf die Höhe $R - r$ erhebt $= \mathrm{d}M . (R - r)$.

Da nun das Wasserelement dM mit der relativen Geschwindigkeit $V - v$ in das Rad tritt, so ist dessen Wirkungsgröfse $= \mathrm{d}M . \frac{(V - v)^2}{2g}$ und da diese, während die Masse dM über die Schaufel hinaufsteigt und zuletzt alle Geschwindigkeit verliert, durch die Gegenwirkung der Centrifugal- und Schwerkraft erschöpft wird, so hat man

$$\mathrm{d}M . \frac{(V - v)^2}{2g} = \mathrm{d}M . \frac{w^2}{2g} (R^2 - r^2) + \mathrm{d}M . (R - r)$$

oder, wenn man abkürzt, $(V - v)^2 = w^2 (R^2 - r^2) + 2g(R - r)$ aus welcher Gleichung sich ganz einfach, da die Gröfsen, V, $v = Rw$ R und w gegeben sind, r also auch die Radtiefe $R - r$ bestimmen läfst.

Läfst man den Einflufs der Centrifugalkraft, welche verursacht dafs das Wasser an der Schaufel nicht so hoch als ohne dieselbe hinaufsteigen kann, aufser Acht; so hat man ganz einfach $R - r = \frac{(V - v)^2}{2g}$ oder für den gröfsten Effect, d. i. für $v = \frac{1}{2} V$ auch $R - r = \frac{1}{4} \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{4} h$ als Radkranzbreite, welcher Werth sofort etwas zu grofs ist, so, dafs wenn man diese dem 4ten Theile des disponiblen Gefälles gleich macht, man sicher seyn kann, dafs das Wasser nicht darüber hinaussteigt.

Anmerkung 1. Da sich indefs das Rad oft etwas langsamer als mit $v = \frac{1}{2} V$ bewegt und das, was von einer unendlich dünnen Wasserschichte gilt, nicht auch von dem wirklichen Strahle angenommen werden kann, indem die zuerst eintretenden Wassertheilchen durch die nachfolgenden etwas weiter hinaufgestofsen werden; so nimmt man in der Praxis diese Kranzbreite bei Gefällen von 1·9 bis 2·5 Fufs von $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{2}$, und bei gröfseren Gefällen, von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ des Gefälles H.

Anmerkung 2. Nach *Redtenbacher*'s Angabe gelten für das *Poncelet* Rad folgende Regeln:

Ist (Fig. 148) $ba = H$ das Gefäll, so ist der Halbmesser des Rades $R = 2H$, der Spielraum zwischen Rad und Gerinne $= \cdot 02\, H$. Neigung der schiefen Ebene AB gegen den Horizont $= 3^0$, Winkel, welche dem bogenförmigen Theile des Gerinnes entsprechen $BCF = FCD = 15^0$, Dicke der Wasserschichte unmittelbar vor dem Rade $= \cdot 19\, H$, fa parallel mit AB, am Horizontallinie, welche den Wasserstand im Abflufscanal bestimmt, dc der mittlere Wasserfaden, co senkrecht darauf, oc Krummungshalbmesser der Radschaufeln, Höhe der Radkrone $st = \cdot 509\, h$, Breite des Rades $b = 5\cdot 26 \frac{Q}{h\sqrt{(2gH)}}$, wobei Q die obige Bedeutung 216) hat, Tiefe des Wassers im Abflufscanal, unmittelbar hinter dem Rade $mn = \cdot 6\, H$, Umfangsgeschwindigkeit $v = \cdot 55 \sqrt{2gH}$. Der Nutzeffect wird dabei durchschnittlich von 60 bis 65 Procent und die Grenze, bis zu welcher das *Poncelet*'sche Rad noch mit Vortheil angewendet werden kann, mit $R = 9\frac{1}{2}$ und $b = 12\frac{1}{2}$ Fufs, also die Gefällshohe H unter 3 bis $5\frac{1}{2}$ Fufs (weil man für grofsere Gefälle $R = 1\cdot 75\, h$ setzt) angenommen.

225. Für das oberschlächtige Rad (§. 383) hat man in der allgemeinen Formel (1) (Nr. **216**), wenn die Richtungen von Vt und v zusammenfallen, $u = V - v$ und $w = v$ zu setzen; dadurch erhält man für den theoretischen Nutzeffect dieses Rades:

$$E_n = M(h + h') - \frac{M}{2g}\left[(V - v)^2 + v^2\right] \;\; . \; . \; (a)$$

oder wenn man für h seinen Werth $\frac{V^2}{2g}$ setzt und gehörig reducirt:

$$E_n = M h' + \frac{M v}{g}(V - v) \;\; . \; . \; (b)$$

wobei augenfällig das 1ste Glied im zweiten Theil dieser Gleichung die Wirkung oder Arbeit des Wassers während des Herabsinkens durch die Höhe h' und das 2te Glied die Wirkung durch den Stofs beim Eintritt in die Zellen (**222**, Gleich. 4) bezeichnet.

Anmerkung. Bildet die Richtung der Geschwindigkeit V mit jener der Geschwindigkeit v den nicht ganz zu vernachlässigenden Winkel φ, so darf man nicht mehr $\frac{M}{2g}u^2 = \frac{M}{2g}(V - v)^2$, sondern man mufs in der Gleich. (a), um diesen durch den Stofs entstehenden Verlust an Wirkungsgröfse zu erhalten, nach Nr. 220, $\frac{M u^2}{2g} = \frac{M}{2g}(V^2 + v^2 - 2 V v \operatorname{Cos} \varphi)$ setzen.

226. Die Gleichung (a) zeigt, dafs beim oberschlächtigen Rade das absolute Maximum nicht zu erreichen ist, weil dafür $(V - v)^2 + v^2$ d. i. $(V - v)^2 = 0$ und $v^2 = 0$, nämlich $V = v$ und $v = 0$ Statt finden müfste.

Um dagegen das relative Maximum zu erhalten, hat man, wenn V durch die Anlage der Zuleitung des Wassers auf das Rad bestimmt, und nur v veränderlich ist, aus der Gleichung (b):

$$\frac{dE_n}{dv} = \frac{M}{g}(V - 2v) = 0, \text{ folglich } v = \tfrac{1}{2}V \text{ und damit}$$

$$(E_n)_{max.} = M h' + \tfrac{1}{2} M h = M(h' + \tfrac{1}{2} h) \;\; . \; . \; (6)$$

Ist dagegen für gewisse Zwecke die Geschwindigkeit des Rades v im Voraus festgesetzt worden und soll dafür die Geschwindigkeit V des in das Rad tretenden Wassers so bestimmt werden, dafs der Effect E_n ein Maximum wird; so hat man aus der Gleichung (a), in welcher $h + h'$ als constant anzusehen ist:

$$\frac{dE_n}{dV} = 2(V - v) = 0, \text{ also } V = v \text{ und mit diesem Werthe:}$$

$$(E_n)_{max.} = M(h + h') - \frac{M v^2}{2g} \;\; . \; . \; (7)$$

so, dafs beim Eintritt des Wassers gar kein, sondern überhaupt nur jener Verlust an Wirkungsgröfse entsteht, welche das Wasser bei seinem Austritt aus dem Rade noch besitzt, woraus sofort folgt, dafs man dem Rade die möglichst kleinste Geschwindigkeit geben soll. Übrigens werden, wenn man die Geschwindigkeitshöhe des austretenden Wassers $\frac{v^2}{2g} = h''$ setzt, diese beiden Maximalwerthe für $h'' = \frac{1}{2} h$ einander gleich.

Anmerkung. Es bedarf kaum der Bemerkung, dafs auch hier in diesem theoretischen Nutzeffect die Zapfenreibung mit inbegriffen ist, und dafs man zur Erlangung des disponiblen Nutzeffectes von E_n den durch die Formel (α) in Nr. 216 (Anmerk.) näherungsweise angegebenen Effectverlust abziehen mufs.

Die noch übrigen Effectverluste betreffend, so entsteht durch das „Freihängen" des Rades, wenn der tiefste Punct des Rades noch um die Höhe h'' über dem Spiegel des Unterwassers liegt, zuerst der Verlust Mh''. Ferner tritt ein nicht unbedeutender Verlust auch dadurch ein, dafs die Zellen das Wasser nicht bis zu dem tiefsten Puncte des Rades führen, sondern dasselbe schon früher fallen oder entweichen lassen. *Redtenbacher* findet durch eine genauere Rechnung, wobei jedoch die bei guten Anordnungen ohnehin ohne bedeutenden Einflufs bleibende Centrifugalkraft vernachlässigt wird, für den betreffenden Effectverlust, je nach dem der Füllungscoeffizient $\frac{Q}{abv}$ (wo a die Tiefe des Rades oder Radkranzbreite, b die Radbreite parallel zur Achse und v die Umfangsgeschwindigkeit ist*), d. i. das Verhältnifs zwischen dem Volumen der Wassermenge Q, welche per Secunde dem Rade zufliefst und dem Volumen der Zellenräume, welche diese Wassermenge aufzunehmen haben $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ist, beziehungsweise ·198, ·179, ·144, ·109, es beträgt nämlich dieser Verlust bei Rädern mit gewöhnlichem Zellenbau von 10 (wenn die Füllung $\frac{1}{4}$) bis 20 Procent (wenn die Füllung $\frac{2}{3}$ ist) von dem absoluten Effecte des Motors.

Dieser Verlust kann jedoch durch eine enge Theilung, einen zweckmäfsigen Zellenbau und namentlich bei schnell gehenden und stark gefüllten Rädern, durch einen genau anschliefsenden Mantel (Mantelräder) gröfstentheils vermieden werden.

Mit Rücksicht auf alle diese Verluste kann man den wirklichen Nutzeffect der oberschlächtigen Wasserräder, bei kleineren Gefällen (von 9 bis 15 Fufs) von 50 bis 60, dagegen bei gröfseren Gefällen über 15 oder 16 Fufs von 60 bis 75 Procent rechnen. (§. 388.)

---

*) Ist e die Entfernung von einer Zelle zur andern auf dem äufsern Umfang gemessen, d. i. die Zellen- oder Schaufeltheilung, so ist $Q\frac{e}{v}$ die Wassermenge, welche ein Schaufel- oder Zellenraum aufzunehmen hat, und das Volumen eines solchen Raumes $= abe$; es mufs also $abe > Q\frac{e}{v}$ oder $abv > Q$, d. i. $abv = mQ$ oder $\frac{1}{m} = \frac{Q}{abv}$ seyn. Für Schaufelräder ist gewöhnlich $m = 2$, für Zellenräder $m = 3$, 4 und selbst $= 5$.

$\frac{Q}{bv}$

227. Da es nicht uninteressant ist den Einflufs der Centrifugalkraft bei diesem Rade genauer kennen zu lernen, sey C (Fig. 149) der Mittelpunct des Rades, aMb die Oberfläche des Wassers in einer Zelle, $MB = m$ das Gewicht eines in M befindlichen Wassertheilchens, $CM = x$ die Entfernung desselben vom Mittelpuncte des Rades, $MA = \frac{mv^2}{gx}$ (§. 155) die nach radialer Richtung auf das Theilchen m wirkende Centrifugalkraft und MD die Resultante aus diesen beiden Kräften MA und MB. Verlängert man diese Gerade DM, welche sofort (Nr. **138**) auf der Wasseroberfläche aMb normal seyn mufs, bis zum Durchschnitt O mit dem verlängerten verticalen Durchmesser, so folgt aus den beiden ähnlichen Dreiecken MDB und MOC:

$$OC : CM = MB : BD \text{ d. i. } OC : x = m : \frac{mv^2}{gx}$$

woraus also $OC = g\left(\frac{x}{v}\right)^2$, oder wenn man, was hier erlaubt ist, $x = R$ setzt, $OC = g\left(\frac{R}{v}\right)^2$ folgt; da also OC für alle Puncte der Oberfläche aMb sehr nahe constant bleibt; so schneiden sich die sämmtlichen Normallinien sehr nahe in einem Puncte O und es bilden daher die Wasserflächen in den einzelnen Zellen concentrische Cylinderflächen, deren gemeinschaftliche horizontale Achse durch den Punct O geht.

Macht das Rad per Minute n Umdrehungen, so ist $v = \frac{n \cdot 2R\pi}{60}$ oder $\frac{R}{v} = \frac{9 \cdot 55}{n}$; setzt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck, so wird auch, wegen $g = 31$ nahe

$$OC = \frac{2830}{n^2} \text{ Fufs.}$$

Da nun für die gröfseren oberschlächtigen Wasserräder n immer so klein ist, dafs OC sehr grofs ausfällt, so kann man in solchen Fällen, die Wasseroberflächen in den Zellen nahezu als horizontale Ebenen ansehen, gerade so, als ob die Centrifugalkraft gar nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. *Redtenbacher* empfiehlt für das oberschlächtige Wasserrad folgende Verzeichnung (Fig. 150):

Der äufsere Umfang des Rades wird von dem höchsten Wasserstande im untern Canal berührt. Die Tiefe des Punctes a unter dem niedrigsten Wasserstande im obern Canal ist $ah = 4\frac{v^2}{2g}$. Ist n die Anzahl der Zellen, so wird diese durch diejenige ganze Zahl bestimmt, welche dem Werthe $\frac{2R\pi}{6 + 7a}$ (wo a die Tiefe des Rades $= R - r$, Alles in Fufsen ausgedrückt) am nächsten liegt und die durch die Anzahl der Radarme theilbar ist. Ist e die Entfernung zweier Zellen, so ist die Zellentheilung $e = \frac{2R\pi}{n}$. Ist $aa' = e$ und $a'l = \frac{1}{4}e$, so ist lfg eine gerade radiale Linie und $lf = fg = \frac{1}{2}a$. Erscheinen die äufsern Zellenwände zu convergirend, so mufs fa schwach gekrümmt werden. Werden die Zellenwände aus Blech hergestellt, so nimmt man für diese eine durch die Puncte afg gehende stetige krumme Linie an. Ist ad der Richtung nach eine Tangente an den äufsern Radumfang und der Gröfse nach $= v$, ferner ac eine Tangente an den Punct a der äufsern Zellenwand; so mufs die Diagonale ab des Parallelogramms cd der Gröfse nach $V = 2v$ seyn und das Wasser nach der Richtung ba bei a ankommen, um ohne Stofs gegen die Zellenwände in das Rad zu gelangen. Dazu ist ae ein parabolischer Einlauf, dessen Scheitel in e liegt und in a von ba berührt wird. Der Horizontalabstand der Puncte a und e ist $= ah \,.\, Sin \,.\, 2\,bad$ und deren Verticalabstand $= ah \,.\, Sin^2 \,.\, bad$. Die Wassermenge, welche eine Zelle aufzunehmen hat, ist $= Q\frac{e}{v}$. Das Verhältnifs zwischen der Breite b und Tiefe a kann durch $u = \frac{b}{a} = 2{\cdot}25 \sqrt[3]{N_a}$ (wo N_a die absolute Arbeit des zufliefsenden Wassers in Pferdekräften ist) ausgedrückt und dann $b = \sqrt{\frac{uQ}{mv}}$ (wo $m = \frac{Q}{abv}$ der Füllungscoeffizient ist) und $a = \frac{b}{u}$ gesetzt werden. Der Halbmesser ist $R = \frac{1}{2}\left(h - \frac{V^2}{2g}\right)$ oder für $V = v$ auch $R = \frac{1}{2}\left(h - 4.\frac{v^2}{2g}\right)$. Die Umfangsgeschwindigkeit ist für kleinere Gefälle $v = 4$ bis $4{\cdot}8$, für gröfsere Gefälle 5 Fufs. Das Kraftgebiet dieses Rades erstreckt sich von 8 bis 40 Fufs Gefällshöhe und von 9 bis 25 Kubikfufs Wassermenge, welche per Secunde auf das Rad fällt.

228. Für das Kropfrad (§. 392) gelten dieselben Bemerkungen, welche in Nr. **225** für das oberschlächtige Rad gemacht wurden, daher auch die beiden Gleichungen (a) und (b), so wie für den gröfsten Effect die Formeln (6) und (7) in Nr. **226**. Was dabei den Erfahrungscoeffizienten k (Nr. **216**) anbelangt, so wäre nach den in Frankreich mit solchen Rädern angestellten Messungen für Geschwindigkeiten von v, welche zwischen 2 und 7 Fufs liegen, $k = {\cdot}74$, also der wirkliche Nutzeffect $e_n = {\cdot}74\, E_a$; dabei kann diesen Versuchen zufolge v ohne merklichen Nachtheil zwischen ·33 und ·66 V liegen.

Anmerkung 1. Der Spielraum zwischen den Schaufeln und dem Kreis- oder Kropfgerinne betrug dabei nicht mehr als $4\frac{1}{2}$ Linie, so wie auch die Wasserhöhe über dem Eintrittspunct des Wassers in das Rad nur einen sehr kleinen Bruch der ganzen Gefällshöhe ausmachte. Bei einer weniger genauen und sorgfältigen Ausführung geht daher der genannte Coeffizient k bis ·65 und zuweilen auch noch weiter herab.

Da für kleine Umfangsgeschwindigkeiten v, auch $V = 2v$ und daher auch die Geschwindigkeitshöhe h nur gering ausfällt, so wendet man für solche Fälle gerne eine Überfallsschütze an, gibt aber der darüber stehenden Wasserschichte höchstens eine Dicke oder Höhe von 7 bis 10 Zoll und lieber, wenn eine bedeutende Wassermasse verwendet werden muſs, dem Rade eine gröſsere Breite parallel zur Achse.

Anmerkung 2. Nach *Redtenbacher* wird das Kropfrad auf folgende Weise construirt:

Ist C (Fig 151) der Mittelpunct und D der tiefste Punct des Rades, mn der niedrigste Wasserstand im obern, pq der mittlere Wasserstand im untern Canale, dabei $Dm = \frac{1}{2} DL = \frac{1}{2} a$ und $CD = R$; so liegt der Punct B um $2\frac{1}{2}$ Fuſs unterm Wasserspiegel mn. AB bildet einen parabolischen Einlauf, wobei die an den Punct B gezogene Tangente gegen den Horizont um $\alpha = 35$ bis 45 Grad geneigt ist. Die Coordinaten des Scheitels A sind $BE = 2·5 \; Sin\, 2\alpha$, $EA = 2·5 \; Sin^2 \alpha$ (da nämlich die Parabel BAF mit jener übereinstimmen soll, welche ein mit der Geschwindigkeit V vom Puncte B aus in der Richtung BT unter dem Winkel $EBT = \alpha$ mit dem Horizonte geworfener Körper beschreibt, deren Scheitel A also Nr. 57, Gleich. (w) die Coordinaten $x = \frac{V^2}{2g} Sin\, 2\alpha$ und $y = \frac{V^2}{2g} Sin^2 \alpha$ hat). Die Schütze ist gegen den Horizont um beiläufig 60 Grad geneigt. Um die Schaufelstellung zu erhalten, macht man $Dn = \frac{1}{4} a$, beschreibt aus C den Bogen ns, zieht su vertical und st radial (diese Regel gilt zugleich für die Schaufelung aller Schaufelräder). Den Zwischenraum zwischen dem äuſsern Umfang des Rades und der innern Krümmung des Gerinnes macht man für eiserne Räder von ·57 bis $\frac{3}{4}$ Zoll oder gegen 7 Linien, für hölzerne von $\frac{3}{4}$ bis 1·1 Zoll.

Da bei dieser Anordnung des Einlaufes das Wasser den Punct B mit einer Geschwindigkeit von nahe $12\frac{1}{2}$ Fuſs erreicht, so ist die Umfangsgeschwindigkeit des Rades $v = 6\frac{1}{4}$ Fuſs. Darf diese Geschwindigkeit kleiner seyn, so erhält man einen bessern Effect, wenn man den Punct B nur um $1\frac{1}{2}$ Fuſs $\left(\text{oder überhaupt um } 4 \frac{v^2}{2g}\right)$ unter den Wasserspiegel legt. Auch kann man die Tangente an den Punct B so ziehen, daſs sie zugleich auch den Radumfang an dieser Stelle berührt.

Den Halbmesser des Rades betreffend, so nimmt man $R = 1·5\, H$ bis $2·5\, H$ und den Füllungscoeffizienten $\frac{Q}{abv}$ (Nr. 226) $= 2$. $\frac{1}{2}$ Die Schaufelzahl wird wie beim unterschlächtigen Rade (Nr. 222, Anmerk.) und die Breite b wie beim oberschlächtigen Rade (Nr. 227, bestimmt. Der Nutzeffect wird dabei bloſs mit 40 bis 50 Procent angenommen.

Das Kropfrad wird am zweckmäſsigsten bei einem ziemlich constanten Wasserstand im obern Canal und einem Gefäll unter 5 Fuſs, so wie einer zuflieſsenden Wassermenge, welche mehr als 60 Kubikfuſs per Secunde beträgt, angewendet.

229. Legt man bei diesem Rade eine Überfallsschütze an, so erhält man das sogenannte Schaufelrad mit Überfall-Einlauf, für welches sofort dieselben Bemerkungen wie für das Kropfrad gelten.

Da man die obere Kante der Schütze sehr zweckmäſsig mit einer parabolischen Leitfläche AB (Fig. 152) versieht, so kann man dabei die Parabel auf folgende Weise bestimmen:

Ist b die Breite des Einlaufes (in der Regel um 3 bis 4 Zoll schmäler als die lichte Breite des Rades), s die Dicke oder Höhe der Wasserschichte über dem Scheitel des Überfalles und wieder Q die per Secunde abflieſsende Wassermenge (in Kubikfuſs); so hat man (§. 333):

$$Q = \cdot 44\, b\, s \sqrt{2\, g\, s} \text{ und daraus } s = \left(\frac{Q}{\cdot 44\, b \sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ist B der Punct, in welchem die Parabel AB den äuſsern Radumfang berührt, d. h. in welchem beide Curven (Kreis und Parabel) eine gemeinschaftliche Tangente besitzen, so nimmt man die Tiefe dieses Punctes B um $1 \cdot 5\, s$ unterm Wasserspiegel mn und bestimmt den Scheitel A der Parabel mittelst der rechtwinkeligen Coordinaten $BC = 1 \cdot 4\, s$ und $CA = \cdot 5\, s$, dabei ist die Umfangsgeschwindigkeit v zu $4\frac{1}{2}$ Fuſs angenommen.

Anmerkung. Nach *Redtenbacher* soll für das Überfallrad $H > 4 \cdot 75$ Fuſs und $Q < 65$ Kubikfuſs seyn. Der Halbmesser R wird dabei von $1\frac{1}{4}\, H$ bis $1\frac{1}{2}\, H$ und der Nutzeffect von 60 bis 65 Procent angenommen. Das Kraftgebiet dieses Rades soll sich bis $7\frac{1}{2}$ Fuſs Gefällshöhe und 77 Kubikfuſs Wasser per Secunde und nicht darüber hinaus erstrecken.

230. Für das Schaufelrad mit Coulissen-Einlauf bleibt wieder, bis auf den Einlauf, Alles dasselbe wie beim vorhergehenden Rade, nur kann die Umfangsgeschwindigkeit v bis auf 5 Fuſs und die Gefällshöhe H von $7\frac{1}{2}$ bis 14 Fuſs steigen, dagegen die Wassermenge Q von 75 bis 10 Kubikfuſs abnehmen, ohne daſs der Nutzeffect weniger als 65 bis 70 Procent beträgt; was den Halbmesser R betrifft, so nimmt man $R = H$.

Anmerkung. Was den Coulissen-Einlauf anbelangt, so muſs das Wasser auf eine solche Weise in das Rad treten, daſs weder das Stoſsgefäll zu groſs ausfällt, noch die Schaufeln gegen den eintretenden Strahl schlagen können. Nach *Redtenbacher*'s Berechnung soll bei einer Umfangsgeschwindigkeit von $4\frac{3}{4}$ bis $5\frac{3}{4}$ Fufs der Winkel, unter welchem die Coulissen dem Umfange des Rades begegnen sollen, im Mittel 36 Grad betragen. Ist daher C (Fig. 153) der Mittelpunct des Rades und mn der obere Wasserspiegel (welcher um die Gefällshohe H über dem untern Spiegel, und dieser selbst um $\frac{1}{2}a$ über dem tiefsten Punct des Rades gezeichnet wird), so nimmt man den Punct 1 in einer Tiefe von 1 Fufs unter mn an, macht $1,2 = 2,3 = .. = \frac{1}{3}a$ (für gewöhnlich nahe 4 Zoll), zieht die Gerade $A\,1$ unter einem Winkel $A\,1\,C = 36^{\circ}$, verlängert diese bis I so, dafs $1\,I = \cdot 8\,a$ wird und beschreibt aus C mit dem Halbmesser CI den Kreisbogen ab; so liegen in diesem Bogen die Mittelpuncte der Coulissenkrümmungen $1,1'$, $2,2'$, $3,3'$.. als Kreisbögen vom Halbmesser $I1 = II2 = III3 = . \; = \cdot 8\,a$.

Ist t die äufsere normale Entfernung von zwei aufeinander folgenden Coulissen und h' die Tiefe des Mittelpunctes der betreffenden Ausflufsöffnung unterm Spiegel mn; so kann man die aus dieser Öffnung per Sec. ausfliefsende Wassermenge $= 4\,b\,t\,\sqrt{2g\,h'}$ setzen. Theilt man nun die Wassermenge Q durch diesen Werth, so erhält man die nöthige Anzahl solcher Coulissenöffnungen, welche man jedoch noch um so viele Canäle vermehren mufs, als der Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Wasserstande im Obercanal entspricht.

231. Schlüfslich erwähnen wir noch des rückenschlächtigen Zellenrades mit Coulissen-Einlauf, welches sich für Gefälle von 8 bis 25 Fufs und Wassermengen von 12 bis 40 Kubikfufs per Secunde eignet (also ein bedeutendes Kraftgebiet besitzt) und bei richtiger Ausführung einen Nutzeffect von 60 bis 70 Procent gewährt. Man nimmt dabei $R = \frac{2}{3}H$, die Umfangsgeschwindigkeit $v = 4\frac{3}{4}$ bis 5 Fufs, die Breite b und Tiefe a, so wie die Anzahl der Zellen genau so wie beim oberschlächtigen Rad in Nr. **227** (Anmerk.) und den Füllungscoeffizienten $\frac{Q}{abv} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und selbst $\frac{1}{5}$. Das Wasser tritt dabei etwas oberhalb der Achse des Rades ein und die Zellen erhalten, damit die eingeschlossene Luft entweichen kann, der ganzen Breite des Rades nach $\frac{3}{4}$ bis 1 Zoll hohe Luftspalten, d. h das Rad wird ventilirt.

Anmerkung. Die Verzeichnung des Coulisseneinlaufes betreffend, so dienen nach *Redtenbacher* folgende Angaben:

Der tiefste Punct des äufsern Radumfanges wird vom höchsten Wasserstande im untern Canal berührt. Nachdem man den innern und äufsern Umfang des Rades, und mit diesem concentrisch in einem Abstand von $\frac{3}{5}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll die Krümmung des Gerinnes gezeichnet, nehme man (Fig. 154) auf der letztern den Punct 1 in einer Tiefe von 1 Fufs unterm Wasserspiegel mn, mache $1,2 = 2,3 .. = \cdot 4\,a$ (gewöhnlich von 4 bis 5·7 Zoll), verzeichne die Zelle $1\,de$ in einer solchen Lage, dafs sie durch den Punct

1 geht; so liegen die Puncte 5, d, e in einem Radius und es ist $5, d = de = \frac{1}{2} a$ (bei e werden die Luftspalten gelassen). Wird $d1$ nach b verlängert, $1, a$ tangirend an den Umfang des Gerinnes gezogen, $1, a = v$ abgeschnitten, durch a eine Parallele ac mit $1, b$ gezogen und der Punct c von 1 aus so abgeschnitten, dafs $1, c$ gleich der Geschwindigkeit V, hier also $= \sqrt{2g} \times 1 = 7{\cdot}874$ Fufs ist; so stellt $c1$ (als Diagonale des Parallelogramms ab) die Richtung vor, in welcher das Wasser in die Zelle eintreten mufs, um weder die Schaufel $1, d$ zu stofsen, noch von ihr gestofsen zu werden. Endlich ist $1 I = a$ senkrecht auf $1, c$ und wenn man aus dem Mittelpunct C des Rades mit dem Halbmesser CI einen Kreisbogen beschreibt, so liegen in demselben die sämmtlichen Mittelpuncte II, III... der Coulissen, als Kreisbögen vom Halbmesser $1, I = 2, II = 3, III = .. = a$.

Die Anzahl der Coulissen wird eben so wie beim Überfallsrad der vorigen Nr. bestimmt, nur dafs man anstatt des dortigen Coeffizienten ·4 hier ·75 nimmt.

232. Nimmt man für den Nutzeffect der verticalen Wasserräder, die oben bei den einzelnen Rädern angegebenen Mittelwerthe, nämlich für das unterschlächtige Rad ~~25~~ bis 35, für das *Poncelet*-Rad 60 bis 65, für das Kropfrad 40 bis 50, für das Schaufelrad mit Überfalleinlauf 60 bis 65, für das Schaufelrad mit Coulisseneinlauf 65 bis 70, für das rückenschlächtige Zellenrad mit Coulisseneinlauf 60 bis 70, für das oberschlächtige Rad für kleinere Gefälle (von $9\frac{1}{2}$ bis 16 Fufs) 50 bis 60 und für gröfsere (über 16 Fufs betragende) Gefälle von 60 bis 75 Procent an; so kann man die nöthige Wassermenge, welche per Secunde auf das Rad fliefsen mufs, näherungsweise, jedoch in vielen Fällen und namentlich bei der ersten oder vorläufigen Berechnung der Anlage eines Wassertriebwerkes genau genug aus dem Nutzeffecte, welchen das Rad entwickeln soll und dem disponiblen Gefälle berechnen. Man hat nämlich für die in Kubikfufs ausgedrückte Wassermenge, welche dem Rade per Secunde zugeführt werden mufs, wenn man Kürze halber den Quotienten aus der in Fufsen ausgedrückten Gefällshöhe H in den in Pferdekräften (zu 430 $^{\text{F. Pf.}}$) ausgedrückten Nutzeffect N_n, welchen das Rad liefern soll, d. i. $\frac{N_n}{H} = K$ setzt, sofort für das

unterschlächtige Rad: . . . . $Q = 21{\cdot}8\,K$ bis $25{\cdot}5\,K$
Poncelet-Rad: . . . . $Q = 11{\cdot}7\,K - 12{\cdot}7\,K$
Kropfrad: . . . . $Q = 15{\cdot}2\,K - 19\,K$
Schaufelrad mit Überfalleinlauf: $Q = 11{\cdot}7\,K - 12{\cdot}7\,K$
„ „ Coulisseneinlauf: $Q = 10{\cdot}9\,K - 11{\cdot}7\,K$

rückenschlächtige Zellenrad mit
Coulisseneinlauf . . . . . $Q = 10{\cdot}9\,K$ bis $12{\cdot}7\,K$
oberschlächtige Rad für kleinere
Gefälle . . . . $Q = 12{\cdot}7\,K - 15{\cdot}2\,K$
oberschlächtige Rad für gröſsere
Gefälle . . . . $Q = 10{\cdot}2\,K - 12{\cdot}7\,K$

Anmerkung. In jenen, nur selten vorkommenden Fällen, in welchen Wasserkräfte von mehr als 80 Pferdekraft verwendet werden müssen, wendet man lieber zwei Räder an, weil Wasserräder über 80 Pferdekraft schon zu colossale Dimensionen erhalten. Auch muſs man dort, wo ein System von Arbeitsmaschinen zu betreiben ist, welche nicht wohl mit einander arbeiten können, wie z. B. bei Eisenwerken, statt einem Rade mehrere Räder anlegen.

Die *Jonval*'sche Turbine.

233. Da die von *Jonval* angegebene Turbine in neuester Zeit und zwar mit dem besten Erfolge vielfältig zur Anwendung kommt, so soll hier in Kürze das Wichligste hierüber bemerkt und entwickelt werden.

Diese Turbine, welche in Fig. 155 im Durchschnitte, in Fig. 155, *a* in einer äuſsern Ansicht dargestellt ist, und wobei noch Fig. 155, *b* den Grundriſs der Turbinenstube (in etwas kleinerem Maſsstabe), Fig. 155, *c* den vierten Theil der obern Ansicht des Leit-Curvenapparates und Fig. 155, *d* einen solchen Quadranten der obern Ansicht des Turbinenrades vorstellt, unterscheidet sich von der *Fourneyron*'schen (§. 407), deren Princip auch dabei zum Grunde liegt, wesentlich dadurch, daſs das Leitcurvenrad nicht innerhalb, sondern über, in besondern Fällen auch unter dem Turbinenrade angebracht und auſserdem so aufgestellt wird (wodurch sich diese Turbine auch von der *Fontaine*'schen unterscheidet), daſs das Turbinenrad ab (Fig. 155) mehrere (selbst nahe bis 30) Fuſs über den Wasserspiegel CD des Abfluſscanales zu liegen kommt. Da das Wasser aus dem Zuleitungscanal K in den etwas conisch zulaufenden Leitcurvenapparat (das Leitcurvenrad) bf, und von da in das Turbinenrad ab eintritt, von wo es, nachdem es gewirkt, in dem cylinderischen Rohre ag, in welchem der ganze Apparat sammt dem um die verticale Achse cd umlaufenden Rade eingeschlossen ist, herabfällt; so wirkt das Wasser von oben durch den Druck und von unten durch den Zug (durch Saugen), weſshalb solche Turbinen auch doppelt wirkend genannt werden. Die unten angebrachte Schütze EE (Fig. 155 und Fig. 155, *a*), welche das Wasser aus dem Cylinder-Mantel entweder nur von einer Seite, oder wie bei den neuern Turbinen, ringsherum ausströmen läſst, dient zur Regulirung der auf das Rad wirkenden Wassermenge, indem das unten abflieſsende Wasser zugleich auch jenes ist, welches von oben her in das Rad eintritt. Auch die obere Schütze muſs zur Regulirung des Ganges der Turbine eine angemessene Stellung (den gehörigen Schützenzug) erhalten.

234. Es sey nun zur Berechnung der Hauptabmessungen dieser Turbine in Fig. 156, R' der äuſsere, R'' der innere und $R = \frac{1}{2}(R' + R'')$ der mittlere Halbmesser des Turbinenrades; ferner stelle Fig. 157 einen Theil der Abwicklung des mittleren Schnittes in eine Ebene vor, welcher Schnitt dadurch entsteht, das man das Leit- und Turbinenrad durch einen Cylinder vom Halbmesser R schneidet, dessen Achse mit jener cd (Fig. 155) zusammenfällt. In dieser Abwicklung seyen ab, $a'b'$ zwei Leit- und cd, $c'd'$ zwei Radschaufeln (welche windschiefe oder schraubenförmige Flächen bilden); α sey der mittlere Winkel, welchen die Leitschaufeln mit der untern Ebene des Leitrades, β der Winkel, welchen die Radschaufeln mit der obern Ebene des Turbinenrades bilden, so wie γ der Winkel, unter welchem das Wasser gegen die untere Ebene dieses Rades aus demselben austritt. Ferner sey (Fig. 155) h' die Tiefe der untern Fläche des Leitschaufelrades unter dem Oberwasserspiegel AB, h die Höhe des Turbinenrades, h'' der verticale Abstand der untern Fläche dieses Rades über dem Unterwasserspiegel CD, und H die ganze Gefällshöhe; ferner bezeichne n und n' beziehungsweise die Anzahl der Leit- und Radschaufeln, $s = bi$ (Fig. 157) und $s' = md'$ die mittlere normale untere Weite der Leit- und Radcanäle, F und F' die Summe der Ausfluſsöffnungen sämmtlicher Canäle im Leitcurven- und im Turbinenrad, so wie $s'' = cn$ die obere Weite und F'' die Summe der obern Querschnitte der Kanäle des Turbinenrades; ferner seyen k und k' die Contractionscoeffizienten für den Ausfluſs des Wassers aus dem Leitcurven- und Turbinenrade; v die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Punctes im Umfange des Kreises vom Halbmesser R, V die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Leitcurvenrad austritt, u, u' die relativen Geschwindigkeiten des Wassers gegen die Radschaufeln beim Ein- und Austritt, und U die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verläſst. Endlich sey $\mathfrak{H}$ die Höhe einer Wassersäule, welche dem Drucke der Atmosphäre entspricht, $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ zwei Wassersäulenhöhen, welche beziehungsweise dem Drucke entsprechen, der zwischen den beiden

Rädern und unter dem Turbinenrade Statt findet, f der Querschnitt der untern Ausflußöffnung am cylinderischen Mantel, k'' der betreffende Contractionscoeffizient, A der Querschnitt des cylinderischen Rohres, in welchem das aus dem Turbinenrade austretende Wasser herabsinkt, Q die per Secunde auf das Rad wirkende Wassermenge in Kubikfuſs, E_n der Nutzeffect der Turbine in Fuſspfund und N_n dieser Effect in Pferdekräften zu 430 F. Pf. ausgedrückt. Dieſs vorausgesetzt, hat man zuerst für die theoretische Ausfluſsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Leitschaufelrade:

$$V = \sqrt{[2g(\mathfrak{H} + h' - \mathfrak{H}')]} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daſs diese Ausfluſsgeschwindigkeit, sowohl von der Gröſse der Ausströmungsöffnungen im Turbinenrad, als auch von der Umdrehungsgeschwindigkeit dieses Rades abhängt. Zugleich sieht man aus dieser Formel (1) daſs $V = >< \sqrt{2gh'}$ wird, je nachdem $\mathfrak{H}' = <> \mathfrak{H}$ ist.

235. Was ferner den Übertritt des Wassers aus dem Leitschaufel- in das Turbinenrad betrifft, so müssen die Leit- und Radschaufeln wieder so construirt werden, daſs dieser Übertritt ohne Stoſs Statt findet. Ist demnach AB (Fig. 158) die Richtung und Gröſse der Geschwindigkeit V, mit der das Wasser in das Rad tritt, welches selbst nach der Richtung CA die Geschwindigkeit v besitzt; so nehme man in entgegengesetzter Richtung $AC = v$ und construire aus diesen beiden Geschwindigkeiten AB und AC das Parallelogramm BC, um durch die Diagonale AD die Gröſse und Richtung der relativen Eintrittsgeschwindigkeit u zu erhalten; es muſs daher, damit die genannte Bedingung erreicht werde, diese Gerade AD die Curve der Radschaufel im Eintrittspuncte A berühren. Aus dem Dreieck ABD folgt aber

$$v = V \frac{Sin\,(\alpha + \beta)}{Sin\,\beta} \; . \; . \; (2) \quad \text{und} \quad u = V \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} \; . \; . \; (3)$$

Ferner ist auch, wenn $ab = u'$ die relative Austrittsgeschwindigkeit des Wassers und $ac = v$ die Geschwindigkeit des Rades bezeichnet, sofort die Diagonale $ad = U$ die absolute Geschwindigkeit des aus dem Rade austretenden Wassers und daher

$$U^2 = u'^2 + v^2 - 2\,u'\,v\,Cos\,\gamma \quad . \; . \; . \; (4)$$

Soll nun das Wasser seine ganze lebende Kraft im Rade verlieren, so muſs $U = 0$ seyn, was nur möglich ist, wenn die beiden Bedingungsgleichungen

$$u' = v \text{ und } \gamma = 0 \quad (5)$$

Statt finden.

Es ist ferner, wie leicht zu sehen

$$\frac{u'^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + (\mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'') \;.\;.\; (6)$$

und $$\mathfrak{H}'' + h'' = \mathfrak{H} \;.\;.\; (7)$$

oder mit Rücksicht auf die erste der Bedingungsgleichungen (5):

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + \mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'' \quad (8)$$

Aus der Gleichung (1) folgt $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - \frac{V^2}{2g}$ und aus jene (7): $\mathfrak{H}'' = \mathfrak{H} - h''$, mithin ist $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'' = h' + h'' - \frac{V^2}{2g}$ und $\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}'' + h = H - \frac{V^2}{2g}$. Dieser Werth in (8) substituirt gibt:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + H - \frac{V^2}{2g} \;.\;.\; (9)$$

Setzt man in diese Gleichung für v und u die Werthe aus (2) und (3), so erhält man:

$$H = \frac{V^2}{2g}\left(1 + \frac{Sin^2(\alpha+\beta)}{Sin^2\beta} - \frac{Sin^2\alpha}{Sin^2\beta}\right) \;.\;.\; (10)$$

oder da der eingeklammerte Theil auch (Formelsammlung, S. 5 Formeln 16 und 13)

$$= \frac{2\,Cos\,\alpha\,Sin\,(\alpha+\beta)}{Sin\,\beta} \quad \text{ist}$$

und wenn man dann V bestimmt,

$$V = \sqrt{\left[\frac{g\,H\,Sin\,\beta}{Cos\,\alpha\,Sin\,(\alpha+\beta)}\right]} \;.\;.\; (11)$$

Wird dieser Werth von V in der Formel (2) substituirt, so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$v = \sqrt{\left[\frac{g\,H\,Sin\,(\alpha+\beta)}{Cos\,\alpha\,Sin\,\beta}\right]} \;.\;.\; (12)$$

Aus (1) folgt $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - \frac{V^2}{2g}$ oder mit Rücksicht auf (11)

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - \frac{H\,Sin\,\beta}{2\,Cos\,\alpha\,Sin\,(\alpha+\beta)} \;.\;.\; (13)$$

Ferner ist noch im Beharrungsstande, und da alle Canäle ausgefüllt seyn sollen

$$Q = kVF = u\,F'' = k'u'\,F' \;.\;.\; (14)$$

folglich $$F = \frac{Q}{k\,V} \;.\;.\; (15)$$

und wenn man in $kVF = u\,F''$ für u den Werth aus (3) setzt:

$$\frac{F''}{F} = k\,\frac{Sin\,\beta}{Sin\,\alpha} \;.\;.\; (16);$$

setzt man dagegen in $k V F = k' u' F'$, (Gleich. 7 und 2) $u' = v = V \frac{Sin(\alpha + \beta)}{Sin \beta}$, so wird

$$\frac{F'}{F} = \frac{k}{k'} \frac{Sin \beta}{Sin(\alpha + \beta)} \quad . \ . \quad (17)$$

Anmerkung 1. Wie aus der Relation (13) hervorgeht, so wird der Druck des Wassers zwischen beiden Rädern jenem der Atmosphäre, d. i. $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ gleich, wenn $h' = \frac{H \, Sin \beta}{2 \, Cos \alpha \, Sin(\alpha + \beta)}$ ist.

Damit das Wasser im Zusammenhange zufliefse, so darf $\mathfrak{H}'$ niemals Null seyn, woraus also folgt, dafs immer

$$\mathfrak{H} + h' > \frac{H \, Sin \beta}{2 \, Cos \alpha \, Sin(\alpha + \beta)} \text{ seyn müsse.}$$

Damit sich ferner das Wasser nicht von der Grundfläche des Turbinenrades losreifse, mufs $\mathfrak{H}'' > 0$ seyn, was aus der Relation (7) die Bedingung von

$$h'' < \mathfrak{H} \text{ gibt,}$$

oder, da streng genommen, die Höhe h'' durch die Geschwindigkeit des aus der untern Schützen- oder Mantelöffnung f ausfliefsenden Wassers herabgezogen oder um h_1 vermindert wird, wenn $h_1 = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{k'' f}\right)^2$ die Geschwindigkeitshöhe für das unten ausfliefsende Wasser bezeichnet; so ist statt der Relation (7) jene

$$\mathfrak{H}'' + h'' - h_1 = \mathfrak{H}$$

zu setzen, so dafs also für die zuletzt erwähnte Bedingung

$$h'' < \mathfrak{H} + h_1$$

seyn mufs, dabei kann jedoch in allen Fällen, in welchen die Öffnung f grofs, also die Ausflufsgeschwindigkeit sehr klein ist, $h_1 = 0$ gesetzt werden.

Anmerkung 2. Wegen $\frac{Sin \beta}{Cos \alpha \, Sin(\alpha + \beta)} = \frac{2 \, Sin \beta}{Sin(2\alpha + \beta) + Sin \beta}$ ist für $2\alpha + \beta = 180^\circ$ aus Relation (11), $V = \sqrt{2gH}$ und aus (13), $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} + h' - H$.

Für $2\alpha + \beta < 180^\circ$ wird $V < \sqrt{2gH}$ und $\mathfrak{H}' > \mathfrak{H} + h' - H$ und für $2\alpha + \beta > 180$ wird $V > \sqrt{2gH}$ und $\mathfrak{H}' < \mathfrak{H} + h' - H$.

Während nun bei der Schottischen und *Cadiat*'schen Turbine $2\alpha + \beta > 180^\circ$ ist, hat man bei der *Jonval*'schen immer $2\alpha + \beta < 180^\circ$ und zwar empfiehlt *Redtenbacher* für die meisten vorkommenden Fälle die Werthe $\alpha = 24^\circ$ und $\beta = 66^\circ$. Nur für grofse Gefälle und geringe Wassermengen ist es besser den Winkel α etwas kleiner, etwa von 15 bis 18 Grad zu nehmen, damit das Rad gröfser ausfalle. Den Winkel γ endlich kann man im Mittel zu 16° Grad annehmen, indem es, um dem Wasser den gehörigen Abflufs zu verschaffen, nicht möglich ist, wie es die Theorie verlangt (Relat. 5) $\gamma = 0$ zu setzen.

236. Zur Bestimmung des **Radhalbmessers** sey $cd = \delta$ (Fig. 159) die Dicke einer Leit-, so wie δ' die Dicke einer Radschaufel, so ist, da man die Leitschaufeln nach unten zu gerade macht,

$ad = ab \, Sin \, \alpha = \frac{2 R \pi}{n} Sin \, \alpha$, folglich $ac = ad - cd$, d. i.

$$s = \frac{2 R \pi}{n} Sin \, \alpha - \delta \; . \; . \quad (18)$$

Der Querschnitt eines Canales des Leitcurvenrades ist daher $s(R' - R'') = (R' - R'')\left(\frac{2 R \pi}{n} Sin \, \alpha - \delta\right)$, folglich aller n Kanäle n Mal so grofs; diese Summe der Querschnitte $(R' - R'')(2 R \pi \, Sin \, \alpha - n \delta)$ wird jedoch verengt durch die Dicken der Radschaufeln. Es ist nämlich $\delta' = mo = mn \, Sin \, \beta$ und $mi = mn \, Sin \, \alpha = \frac{\delta'}{Sin \, \beta} Sin \, \alpha$, folglich $n'(R' - R'') mi = n'(R' - R'') \frac{Sin \, \alpha}{Sin \, \beta} \delta'$ und daher die Summe der wirklichen Ausflufsöffnungen:

$$F = (R' - R'')(2 R \pi \, Sin \, \alpha - n \delta) - n'(R' - R'') \frac{Sin \, \alpha}{Sin \, \beta} \delta'$$

oder reducirt:

$$F = 2 R (R' - R'') \pi \, Sin \, \alpha \left(1 - \frac{n \delta}{2 R \pi \, Sin \, \alpha} - \frac{n' \delta'}{2 R \pi \, Sin \, \beta}\right) \quad (a)$$

und wegen $2 R = R' + R''$ auch:

$$F = R'^2 \left[1 - \left(\frac{R''}{R'}\right)^2\right] \pi \, Sin \, \alpha \left(1 - \frac{n \delta}{2 R \pi \, Sin \, \alpha} - \frac{n' \delta'}{2 R \pi \, Sin \, \beta}\right) = \frac{Q}{k V}$$

(wegen Relat. 15); aus dieser Gleichung folgt endlich:

$$R' = \sqrt{\left[\frac{Q}{k V \left[1 - \left(\frac{R''}{R'}\right)^2\right] \pi \, Sin \, \alpha \left(1 - \frac{n \delta}{2 R \pi \, Sin \, \alpha} - \frac{n' \delta'}{2 R \pi \, Sin \, \beta}\right)}\right]} \quad (19)$$

Substituirt man, um zugleich auch s' zu finden, in der obigen Relation (17) für F' und F die Werthe, d. i.

$$F' = n' s' (R' - R'') \; . \; . \quad (b)$$

und für F den Werth aus der Relation (a) und bestimmt dann s', so erhält man nach einer einfachen Reduction:

$$s' = \frac{k}{n' k'} \frac{Sin \, \beta}{Sin \, (\alpha + \beta)} \left(2 R \pi \, Sin \, \alpha - n \delta - n' \delta' \frac{Sin \, \alpha}{Sin \, \beta}\right) \; . \; . \quad (20)$$

Durch eine etwas complicirte Entwicklung findet man für den Druck P, welchen das Wasser nach verticaler Richtung auf das Rad, d. i. auf die Flächeneinheit der Radbreite $(R_1^2 - R_2^2) \pi$ ausübt, sofort:

$$P = \frac{\gamma Q^2}{g} \left(\frac{Sin \, \beta}{F'} - \frac{Sin \, \gamma}{F'}\right) \; . \; . \quad (21)$$

Endlich erhält man ganz einfach und analog mit der Bestimmung von s, sofort:

$$s'' = \frac{2 R \pi}{n'} \, Sin \, \beta - \delta' \; . \; . \; (22)$$

und analog mit F in Relation (a):

$$F'' = \left(2 R \pi \, Sin \beta - n' \delta' - n \delta \frac{Sin \beta}{Sin \alpha}\right)(R' - R'') \; . \; . \; (c)$$

Anmerkung. Was die übrigen Gröfsen und Verhältnifszahlen betrifft, so nimmt man für hohe Gefälle, um dem nachtheiligen Einflufs der Fliehkraft möglichst zu begegnen, die Differenz $R' - R''$ kleiner als für niedrigere Gefälle. In der Regel kann man (m. s. *Redtenbacher* über Turbinen) $R'' = \frac{2}{3} R'$ und $R = \frac{5}{6} R'$, so wie für hohe Gefälle $R'' = \frac{3}{4} R'$ nehmen.

Ferner ist in der Regel $n = 16$, $n' = 24$, $\delta = \delta' = \frac{1}{40} R$, $k = 1$ und $k' = {}^{\cdot}9$ zu nehmen. Versuche haben gezeigt, dafs man die vortheilhafteste Geschwindigkeit v erhält, wenn man die oben in (12) angegebene theoretische mit dem Factor ·774 multiplicirt, also

$$v = {}^{\cdot}774 \sqrt{\left[\frac{g \, H \, Sin(\alpha + \beta)}{Cos \, \alpha \, Sin \, \beta}\right]} \; . \; . \; (d)$$

setzt.

Ferner ist $n . 2 R \pi = 60 \, v$, daher $n = \frac{60}{2 \pi} \frac{v}{R} = 9{\cdot}548 \frac{v}{R}$.

Redtenbacher setzt die Höhe des Turbinenrades $= \frac{3}{7} R$, jene des Leitrades $= \frac{4}{7} R$, Abstand der obern Ebene des Leitrades von der untern Ebene des Turbinenrades $= \frac{1}{40} R$, Halbmesser des cylinderischen Mantels, welcher das Turbinenrad umgibt $= R' + \frac{1}{40} R$, Höhe der Ausflufsöffnung in dem untern Theile dieses Mantels *a)* wenn die Ausströmung ringsherum Statt hat $= \frac{1}{2} R'$, *b)* wenn die Ausströmung einseitig, auf eine Breite von $2 R'$ Statt findet $= \frac{\pi}{2} R'$, Breite des Abflufscanales an der Stelle wo die Turbine aufgestellt ist $= 4 R'$. Endlich kann man noch in den meisten Fällen $V = {}^{\cdot}707 \sqrt{2 g H}$, $R' = 1{\cdot}380 \sqrt{\frac{Q}{V}}$, $s = {}^{\cdot}1372 \, R$, $s' = 0{\cdot}811 \, R$ und $v = {}^{\cdot}6 \sqrt{2 g H}$ nehmen.

Schlüfslich wollen wir noch bemerken, dafs den Versuchen zufolge die vortheilhafteste Geschwindigkeit der Turbine die Hälfte von jener ist, welche sie beim Umlaufen im unbelasteten Zustande annimmt.

237. Um endlich auch noch den Nutzeffect dieser Turbine zu bestimmen, kann man wieder, um complicirtere Entwicklungen zu vermeiden, von der Coeffizienten-Methode Gebrauch machen und dabei auf folgende Weise verfahren.

Man kann unter der Voraussetzung einer richtigen Construction der Leit- und Radschaufeln, so wie der Erfüllung der Bedingungsgleichung (2) in **235**, annehmen, dafs das Wasser aus dem Leitcurvenrade in das Turbinenrad ohne Stofs, also ohne Verlust an lebendiger Kraft, und zwar, wenn man von der Reibung in den Leitcurven-Canälen abstrahirt (oder diese in den folgenden Widerstandscoeffizienten mit einbezieht), mit der Geschwindigkeit V, wie sie in (1) oder (11) ausgedrückt ist, eintritt. Nimmt man ferner an, dafs das Wasser beim Durchgange durch das Turbinenrad, der entstehenden Reibungen und Störungen wegen, die Geschwindigkeitshöhe $\varepsilon \frac{u'^2}{2g}$ verliert, so ist die relative Austrittsgeschwindigkeit nicht mehr u', sondern nur $u' \sqrt{1-\varepsilon}$, wobei ε einen aus der Erfahrung zu bestimmenden Widerstandscoeffizienten bezeichnet. Diefs vorausgesetzt, ist der dadurch entstehende Effectverlust $= \gamma Q \varepsilon \frac{u'^2}{2g}$, wenn nämlich γ wieder das Gewicht von 1 Kubikfufs Wasser bezeichnet.

Wie bereits (Nr. **234**, Anmerk. 2) bemerkt wurde, ist es in der Praxis unmöglich den Ausflufswinkel $\gamma = 0$ zu machen, folglich läfst sich auch die, durch die beiden Relationen (5) ausgedrückte Bedingung, dafs die absolute Ausflufsgeschwindigkeit $U = 0$ seyn soll, niemals vollständig realisiren, und es ist, wenn man wenigstens die eine Bedingung erfüllt und $u' = v$ setzt, sofort:

$$U^2 = 2 v^2 (1 - Cos\,\gamma) = 4 v^2 Sin^2 \tfrac{1}{2} \gamma.$$

Die in dem, mit dieser Geschwindigkeit U aus dem Rade tretenden Wasser, noch enthaltene, für den Nutzeffect also verlorne Wirkungsgröfse ist daher $= \frac{\gamma Q}{2g} \cdot 4 v^2 Sin^2 \frac{1}{2} \gamma$.

Endlich (da wir von der Zapfenreibung wieder abstrahiren) geht für den Nutzeffect auch noch jene Wirkungsgröfse verloren, welche erforderlich ist, um das Wasser aus der untern Schützenöffnung f mit der gehörigen Geschwindigkeit austreten zu machen. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit mit v', so ist der genannte Effectverlust $= \gamma Q \frac{v'^2}{2g}$, oder wegen $Q = k'' f v'$, woraus $v' = \frac{Q}{k'' f}$ folgt, auch $= \frac{\gamma Q}{2g} \left(\frac{Q}{k'' f}\right)^2$.

Zieht man diese hier aufgezählten Effectverluste von der absoluten Wirkung des Wassers, nämlich von $\gamma Q H$ ab, so erhält man den gesuchten, relativ gröfsten Nutzeffect (wegen $u' = v$):

$$E_n = \gamma Q H - \left[\varepsilon v^2 + 4 v^2 Sin^2 \tfrac{1}{2} \gamma + \left(\frac{Q}{k'' f}\right)^2 \right] \frac{\gamma Q}{2g} \quad . . \text{ (I)}$$

Anmerkung. Die Bedingung, unter welcher das Wasser aus dem Leitcurvenapparate in das Turbinenrad ohne Stofs eintreten kann, läfst sich auch noch auf folgende Weise ableiten.

Zerlegt man die Geschwindigkeit V, mit welcher das Wasser nach der Tangente des letzten Elementes der Leitschaufel aus dem Leitcurvenrad ausströmt, in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten T und N, nach den Richtungen der Tangente AT (Fig. 160), welche an das erste Element der Radschaufel gezogen wird und der Normale AN; so ist, wegen W. $n = 90^0 - \beta$, sofort $T = V \, Sin(\alpha + \beta - 90)$ und $N = V \, Cos(\alpha + \beta - 90 = V \, Sin(\alpha + \beta)$. Zerlegt man ferner die Geschwindigkeit v, mit welcher das erste Element der Radschaufel nach Av ausweicht, ebenfalls in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten T' und N' nach denselben Geraden; so ist $T' = v \, Cos \beta$ und $N' = v \, Sin \beta$. Nun findet aber offenbar nur dann kein Stofs des Wassers gegen die Radschaufel oder umgekehrt der Schaufel gegen dat Wasser Statt, wenn $N = N'$ d. i. wenn $V \, Sin(\alpha + \beta) = v \, Sin \beta$ Statt findet, was sofort durch die obige Bedingungsgleichung (2) bereits ausgesprochen ist.

238. Durch die Einführung des Widerstandscoeffizienten ε erhält man nun auch für die Geschwindigkeit v einen von den obigen, in (12) angegeben, etwas verschiedenen Werth, und zwar mufs man jetzt statt der obigen Gleichung (6) setzen:

$$\frac{u'^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + (\mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'') - \varepsilon \frac{u'^2}{2g}$$

es ist nämlich $(1 + \varepsilon) u'^2 = u^2 + 2g(\mathfrak{H}' + h - \mathfrak{H}'')$, oder wegen $u^2 = V^2 + v^2 - 2 V v \, Cos \, \alpha$ (Dreieck ABD in Fig. 158), ferner $u' = v$ (Relat. 5), $V^2 = 2g(\mathfrak{H} + h' - \mathfrak{H}')$ (Relat. 1) und $V = \dfrac{v \, Sin \beta}{Sin(\alpha + \beta)}$ (Relat. 2), auch, wenn man substituirt und reducirt:

$$\left[\varepsilon + \frac{2 \, Sin \beta \, Cos \alpha}{Sin(\alpha + \beta)}\right] v^2 = 2g(\mathfrak{H} + h + h' - \mathfrak{H}'')$$

oder wegen $\mathfrak{H}'' = \mathfrak{H} - h''$ (Relat. 7) und $h + h' + h'' = H$, endlich, wenn man gleich v bestimmt:

$$v = \sqrt{\left[\frac{2gH \, Sin(\alpha + \beta)}{\varepsilon \, Sin(\alpha + \beta) + 2 \, Sin \beta \, Cos \alpha}\right]} \quad . \; . \; (23)$$

Anmerkung. Ist $Z = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{Q}{k''f}\right)^2$ die Geschwindigkeitshöhe für das aus der untern Schütze ausfliefsende Wasser, so sollte man, streng genommen, in diesem Ausdrucke von v anstatt H setzen $H - Z$; allein da bei einer hinreichend grofsen Schützenöffnung f der Werth von Z sehr klein wird, so kann man immerhin ohne beachtenswerthen Fehler H statt $H - Z$ setzen.

239. Um den oben angenommenen Widerstandscoeffizienten ε zu bestimmen, wollen wir von dem Erfahrungssatze Gebrauch machen, dafs wenn man die Turbine bei aufgezogener Schütze (so, dafs sie dabei die normale Wassermenge consumirt) leer laufen läfst, diese eine Geschwindigkeit annimmt, welche nahe der doppelten Gefällshöhe H entspricht, so zwar, dafs wenn die Turbine dabei das absolute Maximum des Effectes erreichen könnte, sofort $v = \sqrt{(2g \cdot 2H)} = 2\sqrt{gH}$ seyn würde. Da sich ferner aus den zahlreichen Versuchen, welche mit solchen gut ausgeführten *Jonval*'schen Turbinen gemacht wurden, herausgestellt hat, dafs die vortheilhafteste, dem gröfsten Nutzeffecte entsprechende Geschwindigkeit v halb so grofs, als die eben erwähnte, d. i. sehr nahe $v = \sqrt{gH}$ ist; so hat man zur Bestimmung von ε die Gleichung, wenn man diesen Werth in der Relat. (23) substituirt und die Gleichung quadrirt:

$$gH = \frac{2gH\,Sin(\alpha+\beta)}{\varepsilon\,Sin(\alpha+\beta) + 2\,Sin\beta\,Cos\alpha}\,.$$

woraus sofort:

$$\varepsilon = 2\left[1 - \frac{Sin\beta\,Cos\alpha}{Sin(\alpha+\beta)}\right] = \frac{2\,Sin\alpha\,Cos\beta}{Sin(\alpha+\beta)}\;.\;.\;(24)\text{ folgt.}$$

Für die oben angenommenen Werthe von $\alpha = 24^0$ und $\beta = 66^0$ wird insbesondere $\varepsilon = 2\,Sin^2\,24^0 = \cdot33$.

Anmerkung. Um die mögliche Übereinstimmung des oben erwähnten und zur Bestimmung von ε benützten Erfahrungssatzes, dafs eine gut construirte *Jonval*'sche Turbine, wenn sie leer läuft und dabei die normale Wassermenge Q consumirt, eine Geschwindigkeit annimmt, welche nahe der doppelten Gefällshöhe H entspricht, mit der Theorie nachzuweisen, müssen wir fürs erste auf die bereits in Nr. 234 (Anmerk.) erwähnte Eigenschaft zurückkommen, nach welcher die Ausflufsgeschwindigkeit V des Wassers aus dem Leitcurvenrade nicht blofs von dem Gefälle, sondern zugleich auch von der Weite der Radcanäle und der Geschwindigkeit des Turbinenrades abhängt, indem diese Ausflufsgeschwindigkeit nach Umständen gleich, kleiner oder gröfser seyn kann, als wenn das Rad nicht vorhanden wäre. Bei der gewöhnlichen Construction der Radcanäle und der bedeutenden Geschwindigkeit, mit welcher das Rad im leeren Zustande umläuft, kann daher die Geschwindigkeit V sehr wohl $1\cdot1\sqrt{2gH}$ betragen, und da ihre Richtung gegen eine Horizontale einen mittlern Winkel von 20 bis 25 Grad bildet, dessen Cosinus z. B. für $\alpha = 24^0$, wie wir bisher angenommen $= \cdot9135$ ist, so wird die nach der Richtung der Radgeschwindigkeit v genommene Seitengeschwindigkeit:

$$V\,Cos\,\alpha = 1\cdot1 \times \cdot9135\sqrt{2gH} \text{ nahe genug } = \sqrt{2gH}.$$

Um nun aber das per Secunde mit dieser Geschwindigkeit nach dieser Richtung fliefsende Wasser γQ auf jene des Rades $\sqrt{(2g \cdot 2H)} = 2\sqrt{gH}$ (im leeren Zustande) zu bringen, ist eine Arbeit von

F. Pf.

$$\frac{\gamma Q}{2g}(4gH - 2gH) = \gamma QH$$ erforderlich, was sofort die absolute dynamische Gröfse der Betriebskraft ist; so, dafs also eine Turbine

wenigstens bei dieser Geschwindigkeit, das absolute Maximum erreichen würde, welche unbelastet, bei Consumirung der ganzen nor alen Wassermenge eine Geschwindigkeit von $v = \sqrt{(2g \times 2H)} = 2\sqrt{gH}$ annähme.

Vergleicht man den zweiten Erfahrungssatz, dafs nämlich die Turbine im belasteten Zustande am vortheilhaftesten arbeitet, wenn ihre Geschwindigkeit die Hälfte der eben genannten des Leerlaufens beträgt, d. i. wenn $v = \sqrt{gH}$ ist, mit dem oben (Nr. 236, Anmerk.) angeführten Werth von $\cdot 6\sqrt{2gH} = \cdot 6 \times 1\cdot 414\sqrt{gH} = \cdot 85\sqrt{gH}$; so ist dieser letztere Werth um beiläufig 15 Procent kleiner als der erstere, wobei jedoch zu bemerken ist, dafs sich die Geschwindigkeit des Rades überhaupt von jener, welche dem gröfsten Nutzeffect entspricht, bedeutend entfernen kann, ohne dafs dadurch ein merklicher Nachtheil entsteht.

(Eine strenge theoretische Deduction des hier erwähnten Satzes, dafs die vortheilhafteste Anzahl der Umdrehungen der Turbine halb so grofs ist, als die Anzahl der Umdrehungen welche sie leer laufend unter sonst gleichen Umständen macht, findet man in dem mehr erwähnten Werke: »Theorie und Bau der Turbinen« von *F. Redtenbacher*, 1844, auf S. 192 u. f.)

240. Wir haben endlich bei dieser *Jonval*'schen Turbine noch auf einen Punct, nämlich auf die untere Schütze EE aufmerksam zu machen und zu bemerken, dafs sie keineswegs die Eigenschaft der übrigen Schützenvorrichtungen bei Wasserrädern und anderer Turbinen besitzt, nach welcher es möglich ist, mehr oder weniger Wasser auf das Rad wirken zu lassen, wornach dann auch der Nutzeffect sehr nahe dieser Wassermenge proportional ist. Mittelst dieser Schütze (die ursprünglich nur aus einem einfachen ebenen Schieber bestand) läfst sich zwar bei einem Überflufs an Aufschlagwasser die Geschwindigkeit des Rades bis zu einer gewissen Grenze reguliren, indem man dieselbe nicht ganz aufzieht; sie kann aber durchaus nicht als Regulirungsschütze bei Wassermangel dienen, indem, wenn z. B. nur halb so viel Wasser durch die Turbine geht, nicht auch, wie es bei den übrigen Wasserrädern nahe der Fall, der Nutzeffect blofs halb so grofs wird, sondern vielmehr bis auf den 8ten Theil herabsinkt. Ist nämlich im erstern Falle Q die durch das Rad gehende Wassermenge und H die wirksamse Gefällshöhe, so ist der Effect $E = \gamma QH$. Nimmt dagegen die Wassermenge um die Hälfte ab und strömt in derselben Zeit nur die Menge $\frac{1}{2}Q$ durch das Rad, so mufs, da die Querschnittsöffnungen des Leitschaufelrades dieselben bleiben und nicht auch auf die Hälfte reducirt werden können, die Geschwindigkeit halb, also die entsprechende Geschwindigkeitshöhe nur den vierten Theil so grofs werden als im ersten Falle, so, dafs wenn Q in $\frac{1}{2}Q$ übergeht, sofort H in $\frac{1}{4}H$ übergehen mufs und sonach der

Effect im letztern Falle $E' = \frac{1}{2} Q \times \frac{1}{4} H = \frac{1}{8} QH = \frac{1}{8} E$ wird, woraus $E : E' = 1^3 : (\frac{1}{2})^3$ folgt. Man sieht leicht, dafs bei dieser Sachlage überhaupt und unter allen Umständen der Effect der Turbine dem Kubus der wirksamen Wassermenge proportional ist.

Um also auch kleinere Wassermengen, als wofür die Turbine berechnet ist, eben so vortheilhaft benützen zu können, bleibt vor der Hand nichts anderes übrig, als durch Beilagstücke, wodurch R_2 vergröfsert, also die Breite $R_1 - R_2$ vermindert wird, die Öffnungen F und F' gehörig zu verengen.

Anmerkung. Was endlich die Bestimmung der zweckmäfsigsten Form der Radflächen betrifft, so verweisen wir ebenfalls wieder auf die mehr genannten *Redtenbacher*'schen Schriften und bemerken hier nur noch, dafs sich die Relation, welche zwischen den drei Winkeln α, β, γ wenigstens annäherungsweise Statt finden sollen, einfach auf folgende Weise ableiten läfst. Es ist nämlich wie leicht zu sehen, wenn man auf die Schaufeldicke keine Rücksicht nimmt:

$$F = 2 R \pi \, Sin\,\alpha, \quad F' = 2 R \pi \, Sin\,\gamma, \quad F'' = 2 R \pi \, Sin\,\beta,$$

folglich auch $\frac{F'}{F} = \frac{Sin\,\gamma}{Sin\,\alpha}$, und wenn man diesen Werth jenem in Relation (17) gleich setzt: $\frac{Sin\,\gamma}{Sin\,\alpha} = \frac{Sin\,\beta}{Sin(\alpha + \beta)}$, woraus sofort folgt:

$$Cot.\,\alpha + Cot.\,\beta = \frac{1}{Sin\,\gamma} \quad (y)$$

Mit dieser Relation erhält man nun auch für den Widerstandscoeffizienten ε aus der Relation (24) den Ausdruck:

$$\varepsilon = 2(1 - Sin\,\gamma \, Cot\,\alpha) \quad (z)$$

241. Beispiele. 1. Unter den vielen *Jonval*'schen Turbinen, welche in Österreich in der neuesten Zeit durch den besonders in diesem Zweige geschickten Ingenieur Herrn *Wetterneck* construirt und in der *Specker*'schen Maschinenfabrik ausgeführt oder gebaut wurden, gehört jene, welche in der *Girandoni*'schen Baumwoll-Spinnfabrik zu Günseldorf aufgestellt und Ende April 1847 von einer Kommission des n. ö. Gewerbvereins probirt und untersucht wurde, mit zu den vorzüglichsten; wir wählen daher diese Turbine als Beispiel und berechnen ihren Nutzeffect nach der vorstehenden Theorie.

Diese Turbine ist für einen Nutzeffect von 45 Pferdekraft gebaut, welches bei dem disponiblen Gefälle von 16 Fufs eine Wassermenge von beiläufig 30 Kubikfufs per Secunde zu consumiren hat. Um jedoch die Frein-Versuche zu erleichtern, wurden die Radöffnungen durch 2 Zoll breite oder dicke Beilagen (in der Richtung des Radius gemessen) so weit verengt, dafs die Turbine während des Versuches nur 17 Kubikfufs Wasser verbrauchte und dabei, nachdem sich das Gefälle, durch den Rückstau im Unterwasser, welcher durch den Einbau eines Überfalles (zum Behufe der Bestimmung der consumirten Wassermenge) bewirkt wurde, constant auf 13 Fuſs gestellt hatte, einen Nutzeffect von nahe 25 Pferdekraft entwickelte.

Die hier zur Berechnung dienenden Dimensionen und Daten sind nun folgende: $R' = 20''$, $R'' = 16''$ folglich $R = 18'' = 1{\cdot}5'$, $H = 13'$. $Q = 17^{c.'}$, $n = 12$, $n' = 20$, $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 18^\circ$, $F = 1$, $F' = {\cdot}914\square'$ (ohne die eingelegten Beilagen ist $F = 1{\cdot}53$, $F' = 1{\cdot}35$). Die Turbine machte im belasteten Zustande 124 und im unbelasteten 249 Umläufe per Minute. Die Höhe des Leitcurvenrades beträgt 10 und des Turbinenrades 6 Zoll. Die kreisförmige Schütze, welche selbst im gänzlich aufgezogenen Stande noch ins Unterwasser taucht, kann 2 Fuſs hoch aufgezogen werden.

Aus diesen Angaben folgt fürs erste $v = \frac{124}{60} \times 2 R \pi = 19{\cdot}48'$ und aus der vorigen Relation (z) der Widerstandscoeffizient $\varepsilon = {\cdot}3$. Mit diesen Werthen erhält man aus der Formel I (wobei man das der Abfluſsgeschwindigkeit, die dabei nur ungefähr 2 Fuſs beträgt, entsprechende Glied $\left(\frac{Q}{k''f}\right)^2$ ohne weiteres auslassen kann) für den Nutzeffect $E_n = 10148^{\text{F. Pf.}}$ und da der absolute Effect $E_a = 56{\cdot}5 \times 17 \times 13 = 12486{\cdot}5^{\text{F. Pf.}}$ ausmacht, folglich $E_n = {\cdot}814\, E_a$ ist, so beträgt dieser Nutzeffect nahe $81\frac{1}{2}$ Procent, die erwähnte Freinprobe gab dafür 85 Procent.

Es muſs bemerkt werden, daſs der zur Bestimmung der verbrauchten Wassermenge angebrachte Überfall von $B = 15$ Fuſs Breite mit 18 Zoll breiten Flügelwänden versehen war, wodurch $b = 12$ Fuſs und $\frac{b}{B} = {\cdot}8$ wurde, wozu nach §. 333 der Reductionscoeffizient $m = {\cdot}431$ gehört, womit eben die hier in Rechnung gebrachte Wassermenge von 17 Kubikfuſs gefunden wurde.

Die Geschwindigkeit eines Punctes im mittlern Umfange des Rades vom Halbmesser R ist 39 Fuſs, dagegen die der doppelten Gefällshöhe entsprechende Geschwindigkeit $= 7{\cdot}874 \sqrt{26} = 40$ Fuſs, also bestätigt sich auch hier der oben angeführte Erfahrungssatz von der Radgeschwindigkeit im u n b e l a s t e t e n Zustande, so wie jener, daſs die Turbine bei ihrem gröſsten Effect im belasteten Zustande nur h a l b so viele Umläufe, als im unbelasteten Zustande macht.

Da endlich der Durchmesser des Zapfens $3\frac{1}{2}$ Zoll und das Gewicht des Turbinenrades sammt der Welle 700 Pfund (wogegen der verticale nach Relation (21) zu bestimmende Druck des Wassers vernachlässigt werden kann) beträgt, so absorbirt die Zapfenreibung, wenn man den Reibungscoeffizienten $= \frac{1}{10}$ setzt, nahe $90^{\text{F. Pf.}}$ oder etwas über $\frac{1}{5}$ Pferdekraft.

2. Bei der Turbine, welche in der Spinnerei des Herrn *Mohr* zu Neunkirchen aufgestellt, und durch dieselbe Kommission untersucht wurde, finden folgende Verhältnisse Statt.

Während der Probe waren im Turbinenrade wieder Segmente und zwar von 5 Zoll Breite beigelegt, dadurch war $R' = 36$, $R'' = 32$, folglich $R = 34$ Zoll $= 2{\cdot}833'$; ferner war $H = 11{\cdot}65'$ und wenn man wieder mit dem Coeffizienten $m = \cdot431$ rechnet; $Q = 33\cdot5^{c.'}$, die Turbine machte per Minute im (am vortheilhaftesten) belasteten Zustande 56, und im leeren Zustande 122 Umläufe. Ferner war $F = 1\cdot87$, $F' = 1\cdot86$ Quadratfuſs (ohne die Beilagen ist $F = 4\cdot33$ und $F' = 4\cdot06$); ferner ist $n = 16$, $n' = 26$, Höhe des Leitcurvenrades 12 und des Turbinenrades 9 Zoll. Der Durchmesser des Zapfens ist 5 Zoll und das Gewicht des Turbinenrades sammt dem Wellbaum = 2500 Pfund.

Mit diesen Daten findet man $v = 16\cdot61$ und wenn man wieder $\gamma = 18^0$ und $\varepsilon = \cdot3$ setzt, $E_n = 22050 - 3351 = 18699$; da nun $E_a = 22050$ ist, so wird $E_n = \cdot848\,E_a$, was sofort einen Nutzeffect von nicht ganz 85 Procent gibt, während durch die Freinprobe (bei der Annahme von $33\frac{1}{2}$ Kubikfuſs verbrauchte Wassermenge dafür 83 Procent gefunden wurde, wobei jedoch der durch die Zapfenreibung entstehende Effectverlust nicht abgeschlagen ist, so, daſs sich, da dieser Verlust $203^{\text{F. Pf.}}$ beträgt, der Nutzeffect eigentlich um 1 Procent höher, nämlich auf 84 Procent stellt, was mit der obigen Theorie und Formel *I* auf die befriedigendste Weise übereinstimmt.

A n m e r k u n g. Stellt man die aus der Theorie und den Versuchen sich ergebenden Resultate übersichtlich zusammen, so erhält man im Wesentlichen folgende Sätze:

1) Bei ungeänderter Gröſse der untern Ausfluſsöffnungen des Turbinenrades ist die consumirte Wassermenge von der Anzahl der Umdrehungen des Rades u n a b h ä n g i g.

2) Die Anzahl der Umdrehungen der Turbine kann sich bedeutend von der vortheilhaftesten Umdrehungszahl entfernen, ohne daſs dadurch eine merkliche Änderung im Nutzeffecte entsteht. So fand eine im *Aspach-le-pont* zur Prüfung einer von *André Köchlin & Comp.* verfertigten *Jonval*'schen Turbine zusammengesetzte Kommission, daſs der von 72 bis 83 Procent betragende Nutzeffect derselbe blieb, obgleich die Geschwindigkeit des Rades von 90 bis auf 168 Umdrehungen per Minute stieg, während der Wasserverbrauch nur um circa $\frac{1}{10}$ Procent zunahm. (*Bulletin de la Soc. industr. de Mulhouse*, 1844, Nr. 58.)

3) Mit dem unten angebrachten Schieber oder der Schütze ist es nicht möglich, gröſsere oder kleinere Wasserquantitäten gleich gut nutzbringend zu machen.

4) Die Anzahl der Umdrehungen der l e e r laufenden Turbine ist bei ganz aufgezogener Schütze d o p p e l t so groſs, als die vortheilhafteste Anzahl der Umdrehungen im b e l a s t e t e n Zustande.

5) Die Turbine erreicht ihren gröſsten Nutzeffect nur dann, wenn ihr die Wassermenge, wofür sie construirt ist, auf eine r u h i g e und c o n s t a n t e Weise zugeführt wird.

Auſser dem groſsen Vortheile, daſs bei der *Jonval*'schen Turbine der Wasserbau, und da die Trockenlegung sehr leicht, die Überwachung und Instandhaltung derselben weit einfacher und weniger kostspielig als bei der *Fourneyron*'schen Turbine ist, bietet sie gegen diese letztern noch folgende wesentliche Vortheile dar.

Erstlich wird bei dieser das zuströmende Wasser aus seiner Richtung nur einmal, und zwar blofs um beiläufig 60 Grad abgelenkt, während diefs bei der *Fourneyron*'schen Turbine zweimal, und jedes Mal um nahe 90 Grad geschieht. Ferner kann der Halbmesser und die Umdrehungszahl bei dieser Turbine innerhalb viel weiterer Grenzen variiren als bei der *Fourneyron*'schen.

Dagegen steht die *Jonval*'sche Turbine der *Fourneyron*'schen darin nach, dafs nicht alle Puncte der obern horizontalen Radschaufelkanten (wie es im Gegentheil mit den Puncten der innern verticalen Schaufelkanten bei der *Fourn.* Turbine der Fall ist) einerlei Geschwindigkeit, sondern die von der Achse entfernteren eine gröfsere, die näher liegenden eine kleinere Geschwindigkeit besitzen, was zur Folge hat, dafs das Wasser nicht nach der ganzen Breite der Schaufeln völlig ohne Stofs in das Rad eintreten kann. Ferner, dafs aus demselben Grunde die äufsern Wassertheilchen eine gröfsere, die mehr gegen die Achse zu liegenden aber eine kleinere Fliehkraft besitzen, wodurch in denselben ein gewisses Drängen und eine Art Störung entsteht; beide diese Nachtheile lassen sich jedoch dadurch fast ganz unschädlich machen, dafs man die Kranzbreite $R' - R''$ so klein als möglich nimmt.

Wassersäulenmaschine.

(§. 412.)

242. Wir wählen hier als ein weiteres Beispiel dieser sehr nützlichen Kraftmaschine zur Hebung der Grubenwasser in Bergwerken, die von dem ***Ingénieur des mines*** Herrn ***Juncker*** in den Bergwerken von ***Huelgoat*** in der Bretagne, nach ***Reichenbach***'s Princip sehr schön und vollkommen ausgeführte, einfach wirkende Wassersäulenmaschine, welche in ihren wesentlichsten Bestandtheilen in den Figuren **161**, **161**.*a* und **161**.*b* dargestellt ist.

Der oben offene Treibcylinder ***Y*** (Fig. 161), in welchem sich der Treibkolben ***P*** auf und abbewegt, communicirt mit dem nebenstehenden Steyercylinder ***HH'*** durch das Rohr ***T***, so wie dieser letztere Cylinder durch das Rohr ***O*** mit dem Einfalls- und durch jenes ***S*** mit dem Abflufsrohr. Der nach der Zeichnung eben im Niedergehen begriffene und genau auf halbem Wege befindliche Steuerkolben ***R*** ist durch seine Stange ***E*** mit einem etwas gröfseren Gegenkolben ***J*** verbunden, so, dafs also beide Kolben zusammen durch das Kraftwasser immer aufwärts getrieben werden, so lange nicht eine neue nach abwärts wirkende Hilfskraft hinzutritt. Diese neue Kraft wird aber dadurch erzeugt, dafs man das Kraftwasser durch das Rohr a_3 a, (welches in Fig. 161. a in einem gröfseren Mafsstabe gezeichnet ist), den Cylinder $i\,e$ und die Öffnung o über den Kolben J, und zwar nur über einen schmalen ringförmigen Theil w desselben, welcher durch das Aufsetzen des hohlen Cylinders K entsteht, treten läfst, welches, nachdem es gewirkt, wieder durch den schmalen Canal o, den kleinen Cylinder $i\,e$ und die Röhre $e\,e_2\,e_3$ abfliefsen und in das Abzugsrohr S gelangen kann.

Das abwechselnde Zulassen und Absperren des Kraftwassers in und von dem ringförmigen Raume w, wird durch eine Hilfsteuerung bewirkt, welche der Hauptsteuerung vollkommen ähnlich ist; auch diese besteht aus einer gleichen Kolbenverbindung, nämlich dem eigentlichen Steuerkolben r, dem Gegenkolben i und dem durch eine Stopfbüchse $n\,n$ gehenden cylinderischen Kolben k, welcher über dem Kolben i einen sehr schmalen ringförmigen Raum läfst, in welchem das Kraftwasser durch das enge Rohr u treten und dadurch den nöthigen geringen (kaum 50 Pfund betragenden) Gegendruck bilden kann, welcher zur Ausgleichung jenes Druckes nothwendig ist, den der untere Kolben r nach aufwärts durch die bis zum (um 14 Meter höher liegenden) Abflufscanal reichende Wassersäule erleidet.

Um endlich dieses letztere Kolbensystem, dessen Bewegung nur eine äufserst geringe Kraft erfordert, rechtzeitig zu steuern, indem diese Steuerung gleichsam die Seele der Maschine bildet, so ist dieses System an den um v' drehbaren Hebel $v'\,t$ aufgehängt und dieser durch das bewegliche Verbindungsglied t' mit dem um s' drehbaren Hebel $s\,s'$, der in ein Cirkelstück 1,2 ausläuft, verbunden. (Diese Art der Verbindung wurde durch den engen disponiblen Raum zwischen dem Treib- und Steuercylinder bedingt.) Aufserdem ist in dem Treibkolben P bei f eine runde Stange $d\,d$ vertical befestigt, welche oben bei g durch eine Führung geht und gegen den Steuercylinder zu eine flache Leiste $e'\,e'$ trägt, die gerade so dick als das genannte Cirkelstück ist, und während der ganzen Bewegung des Kolbens P diesen in derselben verticalen Ebene liegenden Kreisbogen 1,2 tangirt. An den zwei entgegengesetzten flachen Seiten dieser Leiste sind zwei Kämme oder Hebköpfe 3 und 4 mittelst Schrauben befestigt, deren Entfernung 3,4 man leicht verändern kann, indem die Leiste $e'\,e'$ zu diesem Ende der Länge nach mit einer Reihe von passenden Löchern versehen ist. Da endlich auch an den beiden entgegengesetzten flachen Seiten des genannten Sectors 1,2 zwei Ansätze oder Däumlinge 1 und 2 befestigt sind, welche mit den erwähnten Ansätzen 3 und 4 correspondiren; so ergreift beim Aufwärtsgehen des Treibkolbens der Ansatz 3 seinen correspondirenden 1 und hebt die kleinen Kolben *r, i, k* so lange bis der Hebkopf 3 den Ansatz 1 (durch die Bewegung des Sectors 1,2) ausläfst, worauf der Sector, also auch das genannte Kolbensystem ruhig stehen bleibt, während der Treibkolben seinen Lauf aufwärts vollendet. Bei dem darauf folgenden Niedergehen des Treibkolbens geht der Hebkopf 3 vor seinem correspondirenden Ansatz 1 ruhig vorbei, während bald darauf der Kamm 4 seinen correspondirenden Ansatz 2 ergreift und den Sector sammt dem kleinen Kolbensysteme wieder in die vorige, hier gezeichnete Lage herabführt.

Das Spiel der Maschine ist nun leicht einzusehen. In der jetzigen, in der Zeichnung dargestellten Stellung der einzelnen Theile, in welcher der Steuerkolben ***R*** (nebst seiner Verbindung) noch im Hinabgehen in dem Raume *b′ c′* begriffen ist, fängt das Kraftwasser von ***O*** her (durch die eigenthümliche conische Form des Kolbens, welcher auch noch mit passenden Einkerbungen versehen ist (Fig. 161. *b*) bereits zu wirken und den Treibkolben ***P*** zu heben an. Sobald der Kolben so hoch gestiegen ist, dafs durch den eben erwähnten Mechanismus das kleine Kolbensystem *r, i, k* der Hilfssteuerung gehoben wird, so fängt auch, weil dadurch die Communication zwischen dem ringförmigen Raum *w* und dem Abflufsrohr ***S*** (durch den schmalen Canal *o* und das Rohr $e\,e_1\,e_2\,e_3$) frei geworden ist und das Druckwasser aus diesem Raume *w* abfliefsen kann, das Kolbensystem ***R, J, K*** der Hauptsteuerung zu steigen an, und zwar ist in dem Augenblicke, als der Treibkolben bei verzögerter Geschwindigkeit seinen höchsten Stand erreicht hat, der Steuerungskolben ***R*** bereits auf jene Höhe gekommen, bei welcher die bei x_1 auslaufenden Einkerbungen des Kolbens über *b′* hinaufgekommen sind und dadurch schon eine beginnende Communication zwischen dem untern Theile des Treibcylinders und dem Ausflufsrohre ***S*** durch die Röhre ***T*** entsteht, die sich allmählig immer mehr vergröfsert und endlich wenn x_2 nach *b*, der Kolben ***R*** nämlich in den Raum *b c* gekommen ist, vollkommen herstellt; dadurch fängt nun auch, durch das Gewicht des mit der Treibkolbenstange ***X*** verbundenen Pumpen-Gestänges, der Treibkolben zu sinken an, wobei das unter demselben befindliche, bereits gewirkte oder sogenannte todte Wasser, durch die offene Communication ***Y T*** in das Abflufsrohr ***S*** fliefst. Hat bei diesem Herabgehen des Treibkolbens der vorhin erwähnte Kamm 4, das Kolbensystem *r, i, k* der Hilfssteuerung, wieder (in die durch die Zeichnung dargestellte Lage) herabgezogen, so tritt das Kraftwasser aus dem Steuerungscylinder durch das Rohr $a_3\,a_2\,a$ und den schmalen Canal *o* über den Gegenkolben *d* in den ringförmigen

J

Raum w und treibt den Steuerkolben **R** nach abwärts, welcher in dem Augenblicke als der Treibkolben (ebenfalls nachdem seine Geschwindigkeit nur allmählig bis Null abgenommen) seinen niedrigsten Stand erreicht, die in der Zeichnung angedeutete Stellung angenommen hat, so, dafs auch schon in dieser Stellung durch die conische Form des Steuerungskolbens und dessen von x'' bis x' reichenden Einkerbungen bewirkt, das Kraftwasser allmählig und wie der Kolben **R** weiter herabgeht immer mehr zu wirken anfängt und den Kolben **P** mit wachsender Kraft wieder in die Höhe treibt.

Anmerkung. Durch die bereits erwähnte conische Form, in welcher der Steuerkolben R (welcher in Fig. 161 b in einem etwas gröfseren Mafsstabe dargestellt ist) an den beiden Grundflächen ausläuft, so wie den daselbst angebrachten 8 Einkerbungen, gelang es dem Genie eines *Reichenbach* eine der gröfsten Schwierigkeiten, welche sich bei der Bewegung einer gänzlich unelastischen Flüssigkeit ergibt und sowohl in höchst nachtheiligen Stöfsen und Erschütterungen als in Verlusten an lebendiger Kraft, durch die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen der steigenden und fallenden Wassersäulen besteht, vollkommen zu besiegen, indem dadurch der Treibkolben, folglich auch die Wassersäulen im Fall- und Steigrohr von der Ruhe aus nur allmählig auf die normale Geschwindigkeit (welche übrigens niemals mehr als 6 Fufs betragen soll) und gegen Ende des Laufes eben so wieder allmählig zur Ruhe gebracht werden.

Aufser den bereits ersichtlich gemachten Vorzügen der Kolbensteuerung (gegen eine Hahnsteuerung, welche immer mit einer bedeutenden Reibung und Abnützung verbunden), ist noch darauf aufmerksam zu machen, dafs der Maschinenwärter die letzte Regulirung der Treibkolben-Geschwindigkeit ganz einfach durch die Handhabung der beiden Hähne a_1 und e, welche den, in und von dem ringförmigen Raume w zu- und abfliefsenden Wasserstrahl regulirt, bewirken, ja selbst den Gang der Maschine in jedem Augenblicke sistiren und wieder herstellen kann. Denn ist z. B. der Steuerungskolben R bei seinem Aufsteigen in die gezeichnete Stellung gekommen, so braucht man nur den Hahn e zu schliefsen um die Maschine augenblicklich zum Stillstande zu bringen; sie wird dagegen sogleich wieder durch das Öffnen dieses Hahnes in Bewegung gesetzt Ein ähnliches Resultat erhält man während des Herabgehens dieses Kolbens R, wobei man jedoch den Hahn a_1 schliefsen und im zweiten Falle öffnen mufs.

243. Bei dem Umstande, dafs das projectirte, mit der Kolbenstange **X** verbundene, 230 Meter lange Gestänge der Pumpe, welches in einer doppelten Kette (ähnlich jenen bei den Kettenbrücken) besteht, ein Gewicht von 16000 Kilogramm besitzt, mufste zur Herbeiführung eines regelmäfsigen Ganges dieses bedeutende Gewicht auf irgend eine Weise balancirt werden. Anstatt der sonst üblichen Mittel wurde hier ein sogenannter **hydraulischer Balancier** in Anwendung gebracht, welcher ganz einfach in einer zweiten Röhrentour, d. i. in einer verticalen Wassersäule besteht, welche mit dem Abflufsrohre *S* communicirt, so, dafs also das unter dem Treibkolben befindliche todte Wasser beim Herabgehen desselben nicht frei abfliefsen kann, sondern diese dem Gewichte des Gestänges entsprechende Wassersäule, welche sonach als Moderator wirkt, heben mufs.

Damit jedoch die eben genannte, als Hemmung oder zur Ausgleichung dienende Wassersäule keinen Effectverlust herbeiführe, und wie es bei sonstigen Gegengewichten der Fall, beim Aufsteigen des Treibkolbens durch ihr Gewicht wieder ersetzen und die Druckhöhe des Kraftwassers vermehren könne, wurde die Wassersäulenmaschine nicht auf die Höhe des Abflufscanals, sondern um die Höhe der genannten, den hydraulischen Balancier bildenden Wassersäule tiefer gestellt, wodurch also auch das Gefälle um dieselbe Höhe vermehrt wurde.

Anmerkung. Ohne hier in die letzten Details dieser Maschine, welcher noch eine ganz gleiche Schwester- oder Zwillingsmaschine zur Seite steht, einzugehen, die man in der gröfsten Ausführlichkeit im 8. Band (J. 1835) der *Annales des mines* findet, wollen wir hier nur Folgendes bemerken.

Obschon man den Kolbengang durch Veränderung der Distanz der beiden erwähnten Hebköpfe 3 und 4 auf der Leiste $e' e'$ reguliren kann; so geschieht diese Regulirung, besonders in Beziehung auf die Geschwindigkeit des Kolbenlaufes, doch noch zweckmäfsiger durch zwei Drosselklappen *V* und *V'*, wovon die eine im Zuleitungsrohr *O*, die andere im Ausflufsrohr *S* angebracht und jede so eingerichtet ist, dafs sie sich von aufsen durch einen einfachen Mechanismus beliebig um ihre verticale Achse drehen läfst, um das betreffende Rohr mehr oder weniger zu schliefsen; geschieht diefs mit der Klappe *V*, so wird die Geschwindigkeit des Treibkolbens *P* beim Aufwärtsgehen, dagegen mittelst der Klappe *V'* beim Abwärtsgehen vermindert. Man bediente sich in der That dieses Mittels und verringerte durch die Klappe *V* die Zuleitung des Kraftwassers bedeutend, weil die Maschine für den Fall berechnet ist, dafs die Pumpe in eine Tiefe von 230 Meter unter den Abflufscanal zu stehen kommt, während bis dahin, als diese Maschine beschrieben worden, die Pumpe erst in einer Tiefe von 170 Meter aufgestellt werden konnte.

Die zweite Bemerkung betrifft die bei dieser Maschine angebrachten Vorrichtungen, um zu verhindern, dafs das Steuerkolbensystem *R*, *J*, *K* am Ende seines Laufes keinen nachtheiligen Stofs erzeugt. Zu diesem Ende stöfst der durch die Stopfbüchse *N*, *N* gehende hohle Kolben *K* mit seiner obern Grundfläche gegen eine aus zwei Theilen bestehende blecherne Büchse *U*, *U'*, wovon sich der untere mit Pantoffelholz *U''* ausgefüllte Theil *U'* in den obern an einer eisernen Querstange befestigten Theil *U* hineinschiebt und dadurch einen elastischen Polster bildet. Bei der Abwärtsbewegung dagegen tritt der an der verlängerten Kolbenstange angebrachte Knopf oder Wulst σ in das mit Wasser gefüllte Gefäfs β und indem dieses daraus nur schwer entweichen kann, bildet es ein solches Hindernifs, dafs die Abwärtsbewegung des Kolbens ohne Stofs vernichtet wird.

Schlüfslich wollen wir noch bemerken, dafs die den hydraulischen Balancier bildende Wassersäule von 14 M. Höhe auf den Treibkolben von ·8177□m. Fläche statt 16000k (als Gewicht des Gestänges) nur einen Druck von 11400k. hervorbringt, dafs man jedoch wegen der schlechten Beschaffenheit des Gesteins im Schachte, die Maschine nicht tiefer als um diese 14 Meter herabsetzen und gehörig befestigen konnte, und dafs dieses Gewicht für den Anfang, als nämlich die Pumpe nur in einer Tiefe von 170m. arbeitete, also das Gestänge noch nicht ganz 12000k. wog, eine ganz gute Ausgleichung oder Verzögerung in dem herabgehenden Gestänge bewirkte.

Was endlich die Hauptdimensionen dieser Maschine anbelangt; so hat der Treibkolben einen Durchmesser von 1·0287m., und bei einem Lauf von 2·3m., eine Geschwindigkeit beim Aufwärtsgehen (im belasteten Zustande) von ·3 und beim Abwärtsgehen (im leeren Zustande) von ·7m., so dafs eine Pulsation, d. i. ein Auf- und Abgang binnen 10·9 Secunden vollendet ist, oder per Minute nahe $5\frac{1}{2}$ solche Pulsationen Statt finden. Die Durchmesser der drei Steuerkolben *R*, *J*, *K* sind der Reihe nach ·369, ·404, ·322 Meter und wiegen zusammen 390k.

Der kleine Cylinder *e i* hat im lichten Durchmesser ·05m. Die Fallröhren haben (da man schon vorhandene Röhren benützen wollte) eine innere Weite von nur ·38m Der Kolben der Pumpe hat einen Durchmesser von ·45m. und denselben Hub wie der Treibkolben. Die Saug- und untern Steigröhren haben eine lichte Weite von ·275m., die obere Tour dieser Steigröhren hat dieselbe Weite wie die Fallröhren. In Bezug auf die Wanddicke bilden sie 5 Reihen und zwar von unten nach oben nach der abnehmenden Progression der Zahlen 56, 48, 40, 32, 24. Die Fallröhren haben eine Wanddicke von ·027m.

Das wirksame Gefälle beträgt, da dieses vom obern Reservoir bis zum Abflufscanal zu rechnen ist, 60 Meter. Endlich erfordert jeder Hub des Treibkolbens, deren per Minute nahe $5\frac{1}{2}$ Statt finden, 1·88 Cubikmeter Kraftwasser, was per Secunde ·173c.m. ausmacht, so wie noch aufserdem jeder Kolbenhub ·33c.m. Einspritzwasser für den ringförmigen Raum *w* ober dem Kolben *J* erfordert, was per Secunde nahe ·03c.m. beträgt.

Die Maschine, so wie die Pumpe wurde dafür berechnet und construirt, um per Minute ein Wasserquantum von 1·792 Cubikmeter 230 Meter hoch zu heben.

244. Um nun auch, ohne in eine unnütze weitläufige Theorie einzugehen, diese Wassersäulenmaschine zu berechnen, sey *H* die Gefällshöhe vom Wasserspiegel des Reservoir bis zum mittlern Stand des Treibkolbens gemessen, $\mathfrak{H}$ die Höhe auf welche das Grubenwasser gehoben werden soll, h' die Höhe des Wasserspiegels im Reservoir über dem Abzugscanal und h die Höhe dieses Canals über dem Steuerungskolben R bei seinem mittleren Stande. Ferner sey D der Durchmesser und F die Querschnittsfläche des Treibkolbens, D' und F' der Durchmesser und die Fläche des Pumpenkolbens, d, d', d'' und f, f', f'' seyen der Reihe nach die Durchmesser und Querschnittsflächen der Steuerungskolben R, J, K; Q das per Secunde nöthige Kraft- oder Aufschlagwasser, q das per Secunde zu hebende Grubenwasser, v die mittlere Geschwindigkeit des Treib- und Pumpenkolbens beim Aufwärtsgehen, v' jene beim Niedergehen, p das Gewicht eines laufenden Fufses des Gestänges, so wie endlich γ das Gewicht eines Kubikfufs Wassers, wenn nämlich alle Dimensionen in Fufsen und die Gewichte in Pfunden ausgedrückt werden; so finden sofort folgende Relationen Statt:

Beim Aufgange des Treibkolbens, wenn man die in der Pumpe, so wie in den Fall- und Steigröhren Statt findenden hydraulischen Widerstände zu $\frac{1}{5}$ oder 20 Procent des statischen Druckes annimmt (§. 419):

$$\gamma F H (1 - \tfrac{1}{5}) = \gamma F' \mathfrak{H} (1 + \tfrac{1}{5}) + (\mathfrak{H} - h) p \quad . \; . \; (a)$$

beim Niedergange dieses Kolbens, wobei das todte unterm Kolben befindliche Wasser wieder auf die Höhe h gehoben wird:

$$\gamma F h (1 + \tfrac{1}{5}) = (\mathfrak{H} - h) p \quad . \; . \; (b)$$

Aus dieser Relation (b) folgt:

$$F = \frac{5}{6} \frac{p}{\gamma} \frac{(\mathfrak{H} - h)}{h} \; . \; . \; (1)$$

und wenn man diesen Werth für F in die Relation (a) substituirt und reducirt:

$$\tfrac{2}{3} p H \frac{\mathfrak{H} - h}{h} = \tfrac{6}{5} \gamma F' \mathfrak{H} + (\mathfrak{H} - h) p \quad . \; . \; (2)$$

Dabei ist noch, wie leicht zu sehen:

$$h + h' = H \; . \; . \; (3) \quad \text{und} \quad D = 1 \cdot 128 \sqrt{F} \; . \; . \; (4)$$

Bezeichnet man ferner noch den Reibungswiderstand der drei Steuerungskolben R, J, K mit R und ihr Gewicht mit G; so ist, beim Hinaufgehen dieser Kolben:

$$\gamma f h + \gamma f' H = \gamma f H + \gamma (f' - f'') h + R + G \; . \; . \; (c)$$

und beim Niedergange derselben:

$$\gamma (f' - f'') H + \gamma f H + G = \gamma f' H + \gamma f h + R \; . \; . \; (d)$$

Aus dieser letztern Relation erhält man:

$$f'' = \frac{G - R}{\gamma H} + f \left(1 - \frac{h}{H}\right) \; . \; . \; (5)$$

und wenn man diesen Werth in (c) substituirt und dann f' bestimmt:

$$f' = \frac{G+R}{\gamma(H-h)} - \frac{(G-R)h}{\gamma(H-h)H} + f\left(1-\frac{h}{H}\right) \quad . \ . \ (6)$$

dabei wird f, d. i. der Querschnitt des Steuerungskolbens R willkürlich angenommen.

Die Durchmesser dieser Kolben sind:

$$d = 1{\cdot}128\sqrt{f},\ d' = 1{\cdot}128\sqrt{f'},\ d'' = 1{\cdot}128\sqrt{f''} \quad . \ . \ (7)$$

Endlich ist, auf die Pumpe übergehend, wie man leicht findet:

$$F' = \frac{v+v'}{v v'}\, q \quad \text{und} \quad D' = 1{\cdot}128\sqrt{F'}$$

oder wenn man substituirt:

$$D' = 1{\cdot}128\sqrt{\left(\frac{v+v'}{v v'}\, q\right)} \quad . \ . \ (8)$$

Beispiel. Es sey, um uns wenigstens annähernd an die bei der *Huelgoat*'schen Maschine vorkommenden Zahlen zu halten, die per Secunde auf die Hohe von 730 Fuſs zu hebende Wassermenge = 1 Kubikfuſs, die Höhe des Wasserreservoirs über dem Ausfluſscanal (als wirksame Gefällshöhe) = 190 Fuſs, die mittlere Geschwindigkeit des Treib- und Pumpenkolbens beim Aufwärtssteigen 1 und beim leeren Niedergehen 2 Fuſs, ferner das Gewicht der drei Steuerungskolben R, J, K, 600, so wie ihr Reibungswiderstand, schätzungsweise angenommen 400 Pfund und endlich wiege der laufende Fuſs des Pumpen-Gestänges 40 Pfund; so ist $q = 1$ $\mathfrak{H} = 730$, $h' = 190$, $v = 1$, $v' = 2$, $G = 600$, $R = 400$, $p = 40$ und $\gamma = 56{\cdot}5$ zu setzen.

Aus den Relationen (2) und (3) folgt $h = 42$ und damit aus (1) und (4) $D = 3\frac{1}{3}$ und $F = 8{\cdot}7$, so wie aus (3) $H = 232$.

Nimmt man $f = \frac{1}{7}F = 1{\cdot}243$, so wird $d = 1{\cdot}25$ und aus den Relationen (6) und (5) $f' = 1{\cdot}1078$ und $f'' = 1{\cdot}0196$, folglich nach (7) $d' = 1{\cdot}19$ und $d'' = 1{\cdot}14$

Ferner erhält man aus (8) $D' = 1{\cdot}4$, so, daſs also $F' = 1{\cdot}54$ wird.

Da der Kolbenhub auf 7·28 Fuſs regulirt ist, so braucht derselbe zum Aufsteigen 7·28 und zum Niedergehen 3·64, folglich zu einem Auf und Abgang 10·92 Secunden, so, daſs also per Minute nahe $5\frac{1}{2}$ Kolbenhübe Statt finden. Mit diesen Werthen ist die per Minute gehobene theoretische Wassermenge $= 1{\cdot}54 \times 7{\cdot}28 \times 5{\cdot}5 = 61{\cdot}7$ Kubikfuſs, folglich da nach den von *Juncker* an der dortigen Pumpe vorgenommenen Versuchen, die wirkliche Wassermenge nur um $\frac{1}{30}$ oder $3\frac{1}{3}$ Procent geringer als die theoretische ist, die wirkliche Wassermenge $= 61{\cdot}7 - 2{\cdot}05 = 59{\cdot}65$ Kubikfuſs, so, daſs der Abgang auf die verlangte Zahl 60 leicht durch die oben erwähnte Regulirung in der Kolbengeschwindigkeit ersetzt werden kann.

Die per Secunde consumirte Wassermenge beträgt für den Treibkolben nahe 5·8 und für den ringformigen Raum w über dem Gegenkolben J, ·6, also zusammen 6·4 Kubikfuſs. Die absolute Wirkungsgröſse des Kraftwassers ist daher $E_a = 6{\cdot}4 \times 190 \times 56{\cdot}5 = 68704^{\text{F. Pf}}$, während der Nutzeffect $E_n = 1 \times 730 \times 56{\cdot}5 = 41245$ F. Pf., nämlich 60 Procent von dieser dynamischen Kraft beträgt.

Anmerkung. In der Wirklichkeit ist, wie bereits oben angeführt $D = 3{\cdot}254$, $D' = 1{\cdot}423$, $d = 1{\cdot}167$ $d' = 1{\cdot}277$ und $d'' = 1{\cdot}018$, so, dafs also dabei in der That der Gegenkolben J, so, als ob die 42 Fufs hohe Wassersäule (die dort 44 Fufs beträgt), welche den hydraulischen Balancier bildet, nicht vorhanden wäre, etwas gröfser als der Steuerungskolben R ist, während hier in diesem Beispiele das Gegentheil Statt findet.

Schlüfslich ersieht man aus den obigen Relationen (5) und (6) leicht, dafs eine Änderung in der Annahme der Reibung R, selbst von 400 auf 200 oder 600 fast gar keinen merkbaren Einflufs auf die Bestimmung der Kolbendurchmesser d', d'' hat, so, dafs man also in dieser Annahme nichts weniger als sehr genau seyn darf.

Pumpen.

(§. 415.)

245. Nachdem wir die detaillirten Entwickelungen über die verschiedenen Pumpen-Systeme bereits im Compendium von §. 418 bis 429 im Wesentlichen gegeben haben; so sollen hier nur ganz kurz die Resultate derselben, wie sie sich für den practischen Gebrauch am besten eignen, angeführt und übersichtlich zusammengestellt werden.

Bezeichnet h die Höhe, auf welche das Wasser durch das Pumpwerk gehoben, M die Wassermenge in Kubikfufs, welche per Secunde gefördert werden soll, D den Durchmesser des Kolbens, v dessen mittlere Geschwindigkeit, l die gesammte Länge der Röhren, welche das Wasser durchläuft, d den Durchmesser derselben, u die Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren, m einen Erfahrungscoeffizienten, welcher von der mehr oder weniger vollkommenen Ausführung der Pumpe abhängt und endlich E_n den Nutzeffect, welchen die Pumpe entwickeln oder besitzen mufs; so ist für einen doppelt wirkenden, oder zwei einfach wirkende Pumpencylinder $M = m\frac{D^2\pi}{4}v$ und daraus

$$D = 2\sqrt{\frac{M}{m\pi v}} \quad . . \quad (1)$$

Eben so folgt für einen blofs einfach wirkenden Cylinder aus $2M = m\frac{D^2\pi}{4}v$ sofort

$$D = 2{\cdot}828\sqrt{\frac{M}{m\pi v}} \quad . . \quad (2)$$

Was dabei den Erfahrungscoeffizienten m betrifft, so ist dieser für sehr vollkommen ausgeführte Pumpen, wie z. B. bei den ***Reichenbach***'schen in Baiern und der *Juncker*'schen in dem Bergwerk von ***Huelgoat*** (siehe S. 257), beinahe gleich 1, nämlich $m = \cdot 97$, für etwas weniger vollkommene Pumpen ist $m = \cdot 9$ und für gewöhnliche $m = \cdot 8$ zu setzen.

Als mittlere Kolbengeschwindigkeit nimmt man für sorgfältig ausgeführte Pumpen $v = \cdot 6$ bis $\cdot 9$ und bei unvollkommener Ausführung $v = 8$ bis $1 \cdot 1$ Fuſs.

Anmerkung. Eine wesentliche Bedingung einer guten Pumpe liegt schon deſshalb in einem langsamen Kolbengange, weil es dadurch leichter möglich wird, die Bewegung von der Ruhe aus nur allmählig beginnen und eben so wieder aufhören zu lassen, und da an dieser Bewegung sowohl die zu hebende Wassersäule, als auch die Ventile Theil nehmen, so geht weder lebendige Kraft, noch auch durch die Ventile Wasser verloren, weil sich diese, bevor der Kolben vollständig zur Ruhe kommt und seine Bewegung (eine sogenannte Sinusversus-Bewegung) wechselt, schon ganz nahe an ihren Sitzen befinden und dann augenblicklich schlieſsen, wie dieſs z. B. bei der oben (S. 253) erwähnten *Juncker*'schen Pumpe (welche unter einem Drucke von nahe 23 Atmosphären arbeitet) wirklich der Fall ist. Dazu ist jedoch eine besonders gute Liederung des Kolbens erforderlich, weil dieser sonst um so mehr Wasser durchläſst oder verliert, je langsamer er sich bewegt. Aus diesem Grunde gibt man dem Kolben bei einer unvollkommenen Herstellung der Pumpe eine gröſsere Geschwindigkeit als bei einer vollkommenen Ausführung.

Aus demselben Grunde ist auch (damit das Kolbenspiel nicht zu oft wechseln darf) ein langer Kolbenschub vortheilhafter als ein kurzer. Dort wo die Anlagskosten, wie z. B. bei den Bergwerkspumpen, weniger in Anschlag kommen, um den zu einem langen Hub kostspieligeren Bewegungs-Mechanismus herzustellen, nimmt man den Kolbenhub $\lambda = 3$, 4 ja selbst bis $5\,D$, während man für gewöhnliche Pumpen $\lambda = 2\,D$ und für sehr compendiöse wohl auch nur $\lambda = D$ setzt.

246. Bezeichnet man die Höhe der Wassersäule, welche dem Reibungswiderstande des Wassers in den Röhren entspricht wieder durch z, so ist (Nr. **178**, Relat. 2):

$$z = \frac{4l}{d}(\alpha u + \beta u^2) \quad (3)$$

und dabei $\alpha = \cdot 00001733$, $\beta = \cdot 0003483$.

Um nun den zum Betriebe eines Pumpwerkes nöthigen Effect einfach auszudrücken, kann man drei Cathegorien annehmen und setzen:

für sehr vollkommene Pumpwerke $E_n = 1 \cdot 1\,\gamma M (h + z)$ (4)

für gute Pumpwerke . . . . $E_n = 1 \cdot 2\,\gamma M (h + z)$ (5)

für gewöhnliche Pumpwerke . . $E_n = 1 \cdot 25\,\gamma M (h + z)$ (6)

Anmerkung. Für gewöhnliche Pumpen ist die Röhrenlänge l, folglich auch der Röhrenwiderstand so gering, dafs man die Widerstandshohe z vernachlässigen oder als Null ansehen kann.

Den lichten Durchmesser der Ventile, so wie der Saug- und Steigröhre nimmt man in der Regel $= \frac{1}{2} D$, dadurch wird die Geschwindigkeit des Wassers in diesen Röhren 4 Mal so grofs als im Kolbenrohr oder $u = 4v$, folglich (nach der obigen Annahme von v) von $2\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Fufs.

Beispiel. Es soll für eine Fabrik ein Pumpwerk angeordnet werden, welches per Secunde eine Wassermenge von 1 Kubikfufs auf eine Höhe von 30 Fufs fördert; dabei soll dasselbe durch ein Wasserrad betrieben werden, wofür ein Gefäll von 16 Fufs disponibel ist.

Wählt man hierzu ein Pumpwerk von zwei einfach wirkenden Cylindern und setzt, um ganz sicher zu gehen, die Wassermenge, welche die Pumpe liefert, um $\frac{1}{5}$ kleiner als das vom Kolben zurückgelegte Volumen; so ist $\frac{D^2 \pi}{4} v = (1 + \frac{1}{5}) M$ und daraus wegen $M = 1$ und wenn man auch $v = 1$ nimmt, sofort $D = 1{\cdot}24$ Fufs. Für den Durchmesser der Saug- und Steigröhren nehmen wir $d = \frac{1}{2} D = {\cdot}62$ Fufs und eben so weit machen wir auch die Ventile im lichten Durchmesser. Der Nutzeffect dieser Pumpe kann nach der obigen Formel (5) ausgedrückt werden, so, dafs man hat

$$E_n = 1{\cdot}2\, \gamma\, M\, (h + z).$$

Nun ist wegen $u = 4v = 4$ nach der Relation (3) die Widerstandshöhe $z = 193{\cdot}5 \times {\cdot}005642 = 1{\cdot}08$, so, dafs wir $z = 1$ Fufs setzen können. Mit diesem und den übrigen Werthen ist nun, wenn man substituirt:

$$E_n = 1{\cdot}2 \times 56{\cdot}5 \times 1 \times 31 = 2101{\cdot}8 \quad {}^{\text{F. Pf.}} = \frac{2101{\cdot}8}{430} = 4{\cdot}89$$

d. i. sehr nahe 5 Pferdekräfte.

Wählen wir nun zum Betriebe dieser Pumpe bei dem vorhandenen Gefälle von 16 Fufs ein oberschlächtiges Wasserrad, und suchen nach dem Grundsatze, dafs wenn der Receptor oder aufnehmende Theil (§. 278) seine vortheilhafteste Geschwindigkeit besitzt, auch das Werkzeug oder der arbeitende Theil die zweckmäfsigste Geschwindigkeit annehmen soll, den geometrischen Zusammenhang oder einfachsten Bewegungs-Mechanismus herzustellen, indem wir vorläufig nur versuchsweise die Umfangsgeschwindigkeit des Wasserrades nach Nr. 227 (Anmerk.) $v = 4{\cdot}8$, folglich die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad eintritt, $V = 2v = 9{\cdot}6$ Fufs setzen. Nach derselben Nr. ist dann der Halbmesser des Rades

$$R = \tfrac{1}{2}\left(h - \frac{V^2}{2g}\right) = \tfrac{1}{2} \times (16 - 1{\cdot}487) = 7{\cdot}25 \text{ Fufs.}$$

Die Anzahl der Umdrehungen des Rades per Minute ist

$$n = \frac{60}{2\pi} \frac{v}{R} = 9{\cdot}548 \times \frac{4{\cdot}8}{7{\cdot}25} = 6{\cdot}32.$$

Ist nun λ der noch zu bestimmende Kolbenschub bei der Pumpe und v die Kolbengeschwindigkeit, so ist

$$2n\lambda = 60v \text{ oder } \lambda = \frac{30v}{n},$$

also für $v = 1$ und $n = 6{\cdot}32$ sofort $\lambda = 4{\cdot}75$ Fuſs, ein Kolbenschub, welcher uns nicht ganz convenirt, da er zu groſs ist.

Nehmen wir daher, um eine gröſsere Umdrehungszahl n zu erhalten, die Umfangsgeschwindigkeit des Rades $v = 6$, also $V = 12$ Fuſs, so wird $R = \frac{1}{2}(16 - 2{\cdot}322) = 6{\cdot}84$ Fuſs und $n = 8{\cdot}36$, folglich der Kolbenschub $\lambda = \frac{30}{8{\cdot}36} = 3{\cdot}6$ Fuſs.

Da uns aber auch dieser Kolbenschub für die Fabrikspumpe noch zu groſs ist, und wir annehmen, daſs an Aufschlagwasser kein Mangel sey, so wollen wir lieber, anstatt von der Kolbengeschwindigkeit per 1 Fuſs abzugehen, oder den einfachen Bewegungs-Mechanismus einer mit der Radachse verbundenen Kurbel oder excentrischen Scheibe aufzugeben, von der vortheilhaftesten Umfangsgeschwindigkeit des Rades etwas fahren lassen und diese zu 7·5 Fuſs annehmen. Dadurch wird, wie vorhin gerechnet

$$R = 6{\cdot}185,\ n = 11{\cdot}6 \text{ und } \lambda = 2{\cdot}6 \text{ Fuſs},$$

was eine ganz angemessene Gröſse ist.

Rechnet man den Nutzeffect des Wasserrades hier bloſs zu 60 Procent, so muſs der absolute Effect desselben seyn:

$$E_a = \frac{E_n}{{\cdot}60} = \frac{2101{\cdot}8}{{\cdot}6} = 3503 \ ^{\text{F. Pf.}} = \frac{3503}{430} = 8{\cdot}15 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die per Secunde nöthige Wassermenge Q findet man aus der Relation $\gamma Q \times 16 = 3503$ und zwar folgt daraus $Q = 3{\cdot}87$ Kubikfuſs.

Die Dimensionen des Rades sind nach Nr. 227, Anmerk. $\frac{b}{a} = 2{\cdot}25 \sqrt[3]{8{\cdot}15} = 4{\cdot}5$ und wenn man den Füllungscoeffizienten $m = \frac{1}{8}$ setzt, nahe genug $a = {\cdot}6$ und $b = 2{\cdot}6$ Fuſs.

Da die Rechnung die Anzahl der Zellen $\frac{2R\pi}{{\cdot}6 + {\cdot}7a} = 38$ gibt, so kann man, je nach dem man ein System von 4, 6 oder 8 Radarmen wählt, dafür die Zahl 36 oder 40 nehmen.