zugleich sind die sämmtlichen Niveauschichten concentrische Kugelflächen von demselben Mittelpuncte.

Von dem Gleichgewichte und Drucke schwerer Flüssigkeiten auf den Boden eines Gefäfses.

(§. 309.)

140. Es befinde sich in dem oben offenen Gefäfse CE (Fig. 85), dessen ebene Grundfläche horizontal seyn soll, irgend eine schwere homogene Flüssigkeit bis zur Höhe AB, so wird, wenn das Gleichgewicht eingetreten (Nr. **138**), die freie Oberfläche AB horizontal, d. i. perpendikulär auf die Richtung der Schwere seyn und das Gleichgewicht wird auch nicht gestört werden, wenn man auf diese Oberfläche noch aufserdem irgend einen constanten Druck in dieser Richtung ausübt.

Der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist ferner nach der ganzen Ausdehnung irgend einer horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant; setzt man diesen für die in der Tiefe z unter der Oberfläche AB liegenden Schichte mn gleich p und ist ρ die constante Dichte der Flüssigkeit, so wie g die Schwere, so hat man nach der Gleichung (2) in Nr. **137** (wegen $X=0$, $Y=0$, $Z=g$) sofort $dp=\rho g\,dz$ und wenn man integrirt: $p=\rho g z+q$,
wobei die Constante q den äufsern auf die Oberfläche AB Statt findenden Druck bezeichnet, welcher in der Regel in dem Drucke der Atmosphäre besteht. Dieser constante Druck pflanzt sich unverändert auf alle Puncte des Gefäfses, so wie auf die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper fort und er kommt in jedem Puncte der Flüssigkeit zu dem aus der Schwere herrührenden variablen Druck hinzu. Da man nun diesem Drucke der Atmosphäre überall leicht Rechnung tragen kann, so wollen wir ihn der gröfseren Einfachheit wegen hier ganz auslassen oder Null setzen, wodurch die vorige Gleichung in $p=\rho g z$ übergeht.

Ist nun die Bodenfläche $=F$, ihr Abstand von der Oberfläche $AB=h$, so wie der Druck auf den Boden $=P$; so folgt aus dieser Gleichung wegen $z=h$, sofort:

$$(m)\qquad P=pF=\rho g F h,$$

woraus also ersichtlich ist, dafs der auf den horizontalen Boden ausgeübte Druck, ohne Rücksicht auf die Form des Gefäfses (es mag gleich weit, oder nach aufwärts erweitert oder verengt seyn), gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitsprisma oder Cylinders, welcher F zur Grundfläche und h zur Höhe hat, dessen Volumen und Masse also beziehungsweise $V = Fh$ und $M = \rho Fh$ ist. (Da hier g das Gewicht der Masseneinheit bezeichnet, so ist §. 35, Anmerk. $Mg = P$ das Gewicht der Masse M.)

Anmerkung. Befinden sich in einem Gefäſse mehrere Flüssigkeiten eine über der andern, so ist es für das Gleichgewicht nothwendig und auch hinreichend, daſs die Separationsflächen zwischen zwei aufeinander folgenden Flüssigkeiten (138. Anmerk.) horizontal seyen, weil in diesem Falle jede über einer andern stehenden Flüssigkeit auf alle Puncte ihrer Grundfläche einen constanten Druck ausübt, welcher also nach der oben gemachten Bemerkung das Gleichgewicht der unter ihr liegenden Flüssigkeit nicht stören kann.

Gieſst man nun in das vorige Gefäſs CE (Fig 85) über die Flüssigkeit $ABCD$ eine neue, von der Dichte ρ', deren obere Fläche $A'B'$ wieder horizontal ist und über der Schichte AB den Abstand h' hat, so übt diese Flüssigkeit auf die Schichte $AB = F'$, als ihre Basis nach der vorigen Gleichung (m), den Druck $P' = \rho' g F' h'$ aus, welcher sofort durch die untere Flüssigkeit auf die Bodenfläche F des Gefäſses nach §. 307 gleichmäſsig fortgepflanzt wird und dadurch auf diesen den Druck $\rho' g F h'$ hervorbringt; der von beiden Flüssigkeiten auf die Bodenfläche ausgeübte Druck ist daher $P + P' = \rho g F h + \rho' g F h' = g F(\rho h + \rho' h')$.

Auf dieselbe Weise findet man, daſs, wenn über diese zweite noch eine dritte Flüssigkeit von der Dichte ρ'' bis $A''B''$ gegossen wird und diese Schichte $A''B''$, welche von der vorigen $A'B'$ um h'' abstehen mag, wieder horizontal steht, dadurch erstens das Gleichgewicht nicht gestört wird und dann der Gesammtdruck auf den Boden des Gefäſses:
$= (\rho h + \rho' h' + \rho'' h'') g F$ ist.

Fährt man so fort, so zeigt sich, daſs wenn beliebig viele übereinander befindliche Flüssigkeiten von verschiedener Dichte in einem Gefäſse im Gleichgewichte stehen, der Druck auf die horizontale Bodenfläche lediglich von der Gröſse dieser Fläche, von der Höhe der einzelnen Flüssigkeitsschichten und von ihren Dichtigkeiten abhängt. Da dieser Satz auch noch Statt findet, wenn diese horizontalen Schichten unendlich dünn sind, so gilt er auch für den Fall, daſs sich die Dichte der Flüssigkeit nach verticaler Richtung continuirlich und gleichmäſsig ändert, wie dieſs bei compressiblen Flüssigkeiten der Fall ist Auch gilt dieser Satz noch, wenn mit der Dichte die Schwere von Schichte zu Schichte variirt.

141. Wird der Boden des Gefäſses durch keine Ebene, sondern durch irgend eine krumme Fläche gebildet, so seyen, um den Druck auf denselben zu bestimmen, x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten irgend eines Punctes M (Fig. 86), so wie w das demselben Puncte entsprechende Flächenelement dieser krummen Fläche (wobei z wieder in der Richtung der Schwere liegen soll). Bezeichnet ferner p den Druck auf die Flächeneinheit, so ist $p w$ der auf dieses Flächenelement nach der Richtung der Normale NM Statt findende Druck. Bildet diese Normale mit den drei Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel α, β, γ; so sind bekanntlich die Neigungswinkel des Flächenelementes w, d. i der Tangentialebene im Puncte M mit den Ebenen der $x y$, $x z$, $y z$ beziehungsweise $= \gamma, \beta, \alpha$, so, daſs wenn das Flächenelement auf die 3 genannten coordinirten Ebenen projicirt und die Projectionen beziehungsweise mit u, u', u'' bezeichnet werden, sofort:

$$u = w \, Cos \, \gamma, \quad u' = w \, Cos \, \beta, \quad u'' = w \, Cos \, \alpha \quad \text{Statt findet.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit p, so erhält man:

$$p u = p w \, Cos \, \gamma, \quad p u' = p w \, Cos \, \beta, \quad p u'' = p w \, Cos \, \alpha,$$

woraus hervorgeht, daſs die Producte $p u$, $p u'$, $p u''$ nichts anderes als die nach den drei Achsen der z, y, x genommenen, also beziehungsweise auf den Ebenen der $x y$, $x z$, $y z$ perpendikulären Seitenkräfte des Normaldruckes $p w$ sind, so daſs man also überhaupt den aus dem Normaldruck $p w$ abgeleiteten senkrechten Druck auf irgend eine Ebene erhält, wenn man in dem Producte $p w$ das Element der krummen Fläche w mit dessen Projection auf die betreffende Ebene vertauscht.

142. Wird nun auf die Oberfläche der in dem prismatischen oder cylindrischen Gefäſse enthaltenen tropfbaren Flüssigkeit ein verticaler Druck P der Art ausgeübt, daſs davon auf die Flächeneinheit der Druck p (welcher sofort §. 307 auf jedes Flächenelement normal ist) entfällt, und abstrahirt man dabei von dem Gewichte der Flüssigkeit; so ist der Gesammtdruck auf den Boden CDE des Gefäſses nach verticaler, d. i. lothrechter Richtung $= p u + p u_1 + p u_2 + \text{—} = p(u + u_1 + ..) = p F$, wenn nämlich F die Projection der krummen Fläche auf die horizontale Ebene CE ist.

Anmerkung. Stellt dieses Gefäſs, welches ein Cylinder vom Halbmesser r seyn mag, einen beweglichen Kolben z. B. einer Wassersäulenmaschine vor, so ist der Wasserdruck auf denselben ganz gleich, er mag durch irgend eine krumme Fläche CDE oder durch die Kreisebene $CE = r^2 \pi$ geschlossen seyn, indem dieser Druck immer $= p r^2 \pi$ ist, wenn p den Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet.

143. Rührt der Druck auf die Bodenfläche von dem Gewichte der Flüssigkeit her, so ist p nicht mehr constant, sondern eine Function von z, wenn z die Tiefe des betreffenden Flächenelementes unter dem Spiegel der Flüssigkeit ist, die Ebene der $x y$ also mit diesem Spiegel zusammenfällt. In diesem Falle findet man den lothrechten Druck auf die krumme Fläche, also senkrecht auf die Ebene der xy, so wie auch gegen die beiden übrigen coordinirten Ebenen durch eine doppelte Integration, wie aus dem nachstehenden Beispiele zu ersehen ist.

Beispiel. Es sey z. B die Kugelschale CDE (Fig. 86), welche die Hälfte einer hohlen Kugel vom Halbmesser r bilden und deren Kreisebene CE horizontal liegen und mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, bis an diese Kreisebene mit einer Flüssigkeit gefüllt, wovon das Gewicht der cubischen Einheit $= \gamma$ ist.

Bezeichnet man den Gesammtdruck auf die Kugelschale in der Richtung der Schwere oder Achse der z mit P, so ist (**142.**) $dP = pu$ oder wegen $p = \gamma z$ und $u = dx\,dy$ auch $dP = \gamma\,dx\,dy\,z$, wobei aus der Gleichung der Kugelfläche (Comp. §. 596) $z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(\rho^2 - y^2)}$ folgt, wenn man Kürze halber $r^2 - x^2 = \rho^2$ setzt. Durch eine zweifache Integration erhält man
$$P = 4\gamma \int_0^r dx \int_0^\rho dy \sqrt{(\rho^2 - y^2)}.$$

Nun ist aber
$$\int_0^\rho dy \sqrt{(\rho^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2}\rho^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$$

folglich
$$P = 4\gamma . \frac{\pi}{4} \int_0^r dx\,(r^2 - x^2) = \gamma\pi . \tfrac{2}{3} r^3 = \tfrac{2}{3} r^3 \pi . \gamma$$

gleich dem Gewichte der in dem Gefäfse enthaltenen Flüssigkeit, wie es seyn soll.

Erscheint diese Kugelschale als Boden des Cylinders AE, welcher ebenfalls mit dieser Flüssigkeit und zwar bis AB gefüllt ist, so kommt zu dem vorigen Drucke, noch der constante auf die Kreisfläche CE ausgeübte Druck $\gamma . r^2 \pi h$ hinzu, wenn h der Abstand des Spiegels AB von der genannten Ebene CE ist. Ist der Cylinder gleich weit, so ist der Gesammtdruck $\gamma . \frac{2}{3} r^3 \pi + \gamma . r^2 \pi h =$ dem Gewichte der in dem Gefäfse enthaltenen Flüssigkeit, wie es sich von selbst versteht.

Seitendruck.

(§. 310.)

144. Es sey auf der schiefen Wand DE (Fig. 87) des bis auf die Höhe AB mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten prismatischen Gefäfses die krumme Linie $aMbma$ gezeichnet und der Druck der Flüssigkeit auf die von dieser Curve begrenzte ebene Fläche zu bestimmen.

Legt man durch den Punct A eine verticale Ebene AJ senkrecht auf die Ebene DE, zählt auf der dadurch entstehenden Durchschnittslinie AL von A aus die Abscissen und nimmt darauf senkrecht die, Ordinaten der geschlossenen Curve, welche also horizontal seyn werden setzt nämlich für einen beliebigen Punct M der Curve, welche wir der