Erster Abschnitt.

Hydrostatik.

Gestalt der freien Oberfläche tropfbarer Flüssigkeiten.

(§. 308.)

135. Um die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse überhaupt zu finden, geht man am einfachsten von der in §. 305 erwähnten Eigenschaft der Flüssigkeiten aus, daſs sie den auf ihre Oberfläche ausgeübten Druck nach allen Richtungen hin gleichmäſsig fortpflanzen oder vertheilen; denn der Druck, welchen jedes Element der Flüssigkeit erleidet, kann als eine auf dasselbe wirkende Kraft angesehen werden, welche von einem Punct der Masse zum andern variirt und die sich sonach als eine Function der seine Lage bestimmenden Coordinaten darstellen oder ausdrücken läſst.

Betrachtet man nämlich die ganze Masse der Flüssigkeit als eine Zusammensetzung aus unendlich vielen rechtwinkeligen Parallelopipeden, deren drei Dimensionen unendlich kleine Elemente der ihre Lage bestimmenden Coordinaten sind, und zerlegt man die auf sie wirkenden beschleunigenden Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen; so erhält man drei partielle Differentialgleichungen zwischen diesen Kräften und dem aus ihnen hervorgehenden Drucke, aus denen sich durch Integration die Gröſse dieses Druckes, so wie die Bedingungen, denen die beschleunigenden Kräfte genügen müssen, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, bestimmen lassen.

136. Es seyen daher AX, AY, AZ (Fig. 83) die drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen, wobei die letztere oder Achse der z in die Richtung der Schwere fallen, folglich die Ebene xy horizontal liegen soll. Befindet sich nun unterhalb dieser Ebene eine flüssige Masse (diese mag homogen oder heterogen, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar seyn) und zwar in jenem Winkel, in welchem die Coordinaten positiv sind, und bezeichnet man durch x, y, z die Coordinaten des dem Anfangspuncte A am nächsten liegenden körperlichen Winkels M eines der genannten unendlich kleinen Parallelopipeden; so ist das Volumen dieses Elementes $= dx\,dy\,dz$ und wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit im Puncte M ist, dessen Masse $dm = \rho\,dx\,dy\,dz$. Dabei ist der Factor ρ bei homogenen Flüssigkeiten constant (wenn man nämlich von den etwa vorhandenen kleinen Compressionen abstrahirt) und bei heterogenen und elastischen Flüssigkeiten (welche sofort nicht durchaus gleichmäfsig comprimirt sind) variabel und irgend eine Function von x, y, z.

Es seyen X, Y, Z die drei parallel zu den Coordinatenachsen auf das Element dm wirkenden beschleunigenden Seitenkräfte, folglich $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ (Nr. **56**) die nach den Richtungen dieser Achsen auf dm wirkenden bewegenden Kräfte. Da nun das Element dm von der umgebenden Flüssigkeit auf alle sechs Seitenflächen einen Druck von aufsen nach innen erleidet, so müssen, wenn dieses Element in der Ruhe bleiben soll, diese äufseren Pressungen den innern Kräften $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ das Gleichgewicht halten.

Bezeichnet daher p den Druck auf die Flächeneinheit, welcher in der Richtung der Schwere auf den Punct M Statt findet, so erleidet das Element dm auf seine obere Fläche $dx\,dy$ nach abwärts den Druck $p\,dx\,dy$, und da p im Allgemeinen eine Function der Coordinaten x, y, z ist, so wird dieser Druck p im Puncte M', dessen Coordinaten x, y, $z + dz$ sind, $p + \frac{dp}{dz}dz$ seyn, so, dafs also die untere Fläche dieses Elementes im Sinne der Schwere einem Drucke $(p + \frac{dp}{dz}dz)\,dx\,dy$ ausgesetzt ist. Da aber der Widerstand des Flüssigen, worauf sich das Element dm stützt, eine diesem Drucke gleiche und entgegengesetzte Kraft bildet; so wird dieses Element von den zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften $p\,dx\,dy$ und $(p + \frac{dp}{dz}dz)\,dx\,dy$ getrieben, welche als Resultirende die von unten nach oben wirkende Kraft $\left(\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz$ als Differenz der beiden vorigen geben. Damit sich dieses Element dm aber weder nach aufwärts noch nach abwärts bewege, so mufs diese letztere Kraft der oben genannten, nach der Achse der z wirkenden Kraft $Z\,dm = Z\rho\,dx\,dy\,dz$ gleich seyn, so, dafs man dafür hat:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz = \rho Z\,dx\,dy\,dz \text{ d. i. } \left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho Z.$$

Auf gleiche Weise erhält man auch noch die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho\, Y \text{ und } \left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho\, X,$$

welche Statt finden müssen, damit sich das Element dm weder im Sinne der Achse der y noch in jenem der Achse der x bewegt. Dabei ist man von der immer richtigen Voraussetzung ausgegangen, daſs der Druck auf die Seitenflächen $dx\,dz$ und $dy\,dz$ des Elementes auf die Flächeneinheit bezogen, ebenfalls $= p$ ist

Dieſs vorausgesetzt, sind daher die allgemeinen Gleichungen der Hydrostatik, d. i. des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse, worauf beliebige beschleunigende Kräfte wirken (mag diese Masse gleichartig oder ungleichartig, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar seyn) sofort:

$$(1) \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho\, X, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho\, Y, \quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho\, Z.$$

137. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz und addirt sie hierauf, so erhält man (Comp. §. 657):

$$(2) \quad dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Soll nun p möglich seyn, so muſs dp ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z darstellen; dieses ist aber der Fall, wenn (Lehrbuch III S. 63, Compend. §. 662) die drei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(3) \quad \left(\frac{d.\rho X}{dy}\right) = \left(\frac{d.\rho Y}{dx}\right), \quad \left(\frac{d.\rho X}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho Z}{dx}\right), \quad \left(\frac{d.\rho Y}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho Z}{dy}\right).$$

Finden diese Gleichungen Statt, so läſst sich die Gleichung (2) integriren und der daraus gefundene Werth von p leistet dann den Bedingungsgleichungen (1) für das Gleichgewicht Genüge.

138. Setzt man in diesen Werth von $p = f(x, y, z)$ für die 3 Variablen die Coordinaten irgend eines Punctes der Umfläche ABA' (Fig. 84) der Flüssigkeit, so erhält man die Gröſse des Druckes dieser Flüssigkeit auf den entsprechenden Punct der Wand des Gefäſses, in welchem sie enthalten ist, ein Druck, welcher von der Festigkeit der Gefäſswand aufgehoben wird. Da jedoch dort, wo das Gefäſs offen ist, dieser Druck durch nichts aufgehoben würde, so muſs derselbe für das Gleichgewicht an diesen offenen Stellen, d. i. an der freien Oberfläche $ADA'E$ der Flüssigkeit gleich Null seyn, und dieſs gibt (Gleich. 2) sofort die Bedingungsgleichung:

$$(4) \quad X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Resultirende der beschleunigenden Kräfte X, Y, Z, welche auf jedes Theilchen der im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit wirkt, auf dieser freien Oberfläche perpendikulär steht. Denn zieht man auf dieser Oberfläche irgend eine Curve und ist $\mathrm{d}s$ das Element derselben, welches dem Puncte x, y, z entspricht; so sind $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ die Cosinus der Winkel, welche die an die Curve in diesem Puncte x, y, z gezogene Tangente mit den Achsen der x, y, z bildet. Ist ferner R die Resultirende aus den Kräften X, Y, Z, so sind eben so $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$ die Cosinus der Winkel, welche R mit diesen Achsen einschliefst $[= Cos\,(R.x),\ Cos\,(R.y),\ Cos\,(R.z)]$. Dividirt man alle Glieder der vorigen Gleichung (4) durch $R\,\mathrm{d}s$, so erhält man:

$$\frac{X}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0$$

woraus sofort folgt (Comp. §. 572), dafs die Resultirende R mit der Tangente der Curve, welche man auf der freien Oberfläche willkürlich gezogen hat, einen rechten Winkel einschliefst, folglich die Richtung von R mit der Normale des betreffenden Punctes x, y, z zusammenfällt. Aufserdem versteht es sich von selbst, dafs diese Kraft R von aufsen nach innen gerichtet seyn mufs.

Anmerkung. Ist die Flüssigkeit homogen, so ist ihre Dichte ρ constant und wenn man sie zur Einheit nimmt, so wird die obige Gleichung (2) in Nr. 137: $\mathrm{d}p = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$, wobei also, wenn p möglich seyn soll, der zweite Theil dieser Gleichung ein vollständiges Differenzial seyn mufs.

Die vorige Bedingungsgleichung (4) integrirt, gibt:

$$\int (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) = C,$$

wobei C die willkürliche Constante ist. Gibt man derselben nach und nach verschiedene Werthe, so erhält man eben so viele particuläre Integrale, welche eben so vielen Flächen angehören und jede die obige Gleichung (4) als Differenzialgleichung haben, und folglich ebenfalls die Eigenschaft besitzen, die Resultirende der Kräfte X, Y, Z unter rechten Winkeln zu schneiden; man nennt diese Flächen daher Niveau-Flächen. Die von zwei unendlich nahen Niveauflächen begrenzte unendlich dünne Schichte heifst Niveau-Schichte.

Ist die Flüssigkeit nicht gleichförmig dicht und $X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$ ein vollständiges Integral, so wird, wenn man Kürze halber $\int (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) = u$ setzt, wo u irgend eine Function von x, y, z ist, die Gleichung (2):

(5) $dp = \rho\, du$.

Damit aber der zweite Theil dieser Gleichung, wie es der erste ist, ein vollständiges Differenziale sey, so mufs ρ irgend eine Function von u seyn; dann ist aber auch p eine Function von u und die Gleichung der freien Oberfläche des Flüssigen fürs Gleichgewicht: $f(u) = Const.$ oder einfach $u = Const$ (wegen $p = f(u)$ ist $dp = df(u)$, daher wegen $p = 0$ für die freie Oberfläche, $df(u) = 0$ und $f(u) = Const.$) Die Druckkraft p und Dichte ρ sind daher für alle Puncte in derselben Niveauschichte constant. Das Gesetz der Dichtigkeitsveränderung von einer Niveauschichte zur andern hängt von einer dieses Gesetz bestimmenden Function von u ab, wodurch dann auch der, jeder Schichte entsprechende Druck durch die Integration der Gleichung (5) gegeben ist.

Aus allem bisher Gesagten folgt also, dafs, wenn eine flüssige Masse (tropfbar oder luftförmig) mit freier Oberfläche ins Gleichgewicht kommen soll, sie sich so lagern mufs, dafs 1stens die Dichte für alle Niveau-Schichten zwischen zwei unendlich nahen Niveau-Flächen constant, und 2tens die Resultirende der auf die äufsere Oberfläche wirkenden beschleunigenden Kräfte auf diese perpendikulär seyn mufs.

139. Um eine weitere Anwendung von der vorigen Gleichung (4) zu zeigen, wollen wir annehmen, dafs alle Theilchen einer völlig freien (in keinem Gefäfse eingeschlossenen), nicht schweren Flüssigkeit von einer Kraft angezogen werden, welche von einem im Innern derselben liegenden festen Punct ausgeht und dem Abstande von diesem Puncte proportional ist. Ist nun φ der Werth dieser Kraft im Abstande 1, und nimmt man den genannten festen Punct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, so sind $X = \varphi x$, $Y = \varphi y$, $Z = \varphi z$ die auf das Element oder den Punct x, y, z wirkenden, mit den Achsen parallelen Seitenkräfte, folglich ist, wenn man diese Werthe in der obigen Gleichung substituirt und gleich mit φ abkürzt, $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ die Differenzialgleichung für alle Niveau-Flächen, also auch der freien Oberfläche selbst.

Diese Gleichung gibt, wenn man integrirt $x^2 + y^2 + z^2 = C$, und wenn man, um die Constante C zu bestimmen, den Abstand des Punctes x, y, z vom Ursprung der Coordinaten $= r$ setzt, wodurch (Comp. §. 549) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ wird, so folgt $C = r^2$, mithin wird die vorige Integralgleichung, wenn man für C diesen Werth substituirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

welches sofort (Comp. §. 596) die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser r ist. Die flüssige Masse bildet also in diesem Falle eine Kugel, deren Mittelpunct der genannte feste Anziehungspunct ist;

zugleich sind die sämmtlichen Niveauschichten concentrische Kugelflächen von demselben Mittelpuncte.

Von dem Gleichgewichte und Drucke schwerer Flüssigkeiten auf den Boden eines Gefäfses.

(§. 309.)

140. Es befinde sich in dem oben offenen Gefäfse CE (Fig. 85), dessen ebene Grundfläche horizontal seyn soll, irgend eine schwere homogene Flüssigkeit bis zur Höhe AB, so wird, wenn das Gleichgewicht eingetreten (Nr. **138**), die freie Oberfläche AB horizontal, d. i. perpendikulär auf die Richtung der Schwere seyn und das Gleichgewicht wird auch nicht gestört werden, wenn man auf diese Oberfläche noch aufserdem irgend einen constanten Druck in dieser Richtung ausübt.

Der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist ferner nach der ganzen Ausdehnung irgend einer horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant; setzt man diesen für die in der Tiefe z unter der Oberfläche AB liegenden Schichte mn gleich p und ist ρ die constante Dichte der Flüssigkeit, so wie g die Schwere, so hat man nach der Gleichung (2) in Nr. **137** (wegen $X=0$, $Y=0$, $Z=g$) sofort $dp=\rho g\,dz$ und wenn man integrirt: $p=\rho g z+q$,
wobei die Constante q den äufsern auf die Oberfläche AB Statt findenden Druck bezeichnet, welcher in der Regel in dem Drucke der Atmosphäre besteht. Dieser constante Druck pflanzt sich unverändert auf alle Puncte des Gefäfses, so wie auf die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper fort und er kommt in jedem Puncte der Flüssigkeit zu dem aus der Schwere herrührenden variablen Druck hinzu. Da man nun diesem Drucke der Atmosphäre überall leicht Rechnung tragen kann, so wollen wir ihn der gröfseren Einfachheit wegen hier ganz auslassen oder Null setzen, wodurch die vorige Gleichung in $p=\rho g z$ übergeht.

Ist nun die Bodenfläche $=F$, ihr Abstand von der Oberfläche $AB=h$, so wie der Druck auf den Boden $=P$; so folgt aus dieser Gleichung wegen $z=h$, sofort:

$$(m)\qquad P=pF=\rho g F h,$$

woraus also ersichtlich ist, dafs der auf den horizontalen Boden ausgeübte Druck, ohne Rücksicht auf die Form des Gefäfses (es mag gleich weit, oder nach aufwärts erweitert oder verengt seyn), gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitsprisma oder Cylinders, welcher F zur Grundfläche und h zur Höhe hat, dessen Volumen und Masse also