Erster Abschnitt.

Hydrostatik.

Gestalt der freien Oberfläche tropfbarer Flüssigkeiten.

(§. 308.)

135. Um die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse überhaupt zu finden, geht man am einfachsten von der in §. 305 erwähnten Eigenschaft der Flüssigkeiten aus, daſs sie den auf ihre Oberfläche ausgeübten Druck nach allen Richtungen hin gleichmäſsig fortpflanzen oder vertheilen; denn der Druck, welchen jedes Element der Flüssigkeit erleidet, kann als eine auf dasselbe wirkende Kraft angesehen werden, welche von einem Punct der Masse zum andern variirt und die sich sonach als eine Function der seine Lage bestimmenden Coordinaten darstellen oder ausdrücken läſst.

Betrachtet man nämlich die ganze Masse der Flüssigkeit als eine Zusammensetzung aus unendlich vielen rechtwinkeligen Parallelopipeden, deren drei Dimensionen unendlich kleine Elemente der ihre Lage bestimmenden Coordinaten sind, und zerlegt man die auf sie wirkenden beschleunigenden Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen; so erhält man drei partielle Differentialgleichungen zwischen diesen Kräften und dem aus ihnen hervorgehenden Drucke, aus denen sich durch Integration die Gröſse dieses Druckes, so wie die Bedingungen, denen die beschleunigenden Kräfte genügen müssen, wenn das Gleichgewicht bestehen soll, bestimmen lassen.

136. Es seyen daher AX, AY, AZ (Fig. 83) die drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen, wobei die letztere oder Achse der z in die Richtung der Schwere fallen, folglich die Ebene xy horizontal liegen soll. Befindet sich nun unterhalb dieser Ebene eine flüssige Masse (diese mag homogen oder heterogen, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar seyn) und zwar in jenem Winkel, in welchem die Coordinaten positiv sind, und bezeichnet man durch x, y, z die Coordinaten des dem Anfangspuncte A am nächsten liegenden körperlichen Winkels M eines der genannten unendlich kleinen Parallelopipeden; so ist das Volumen dieses Elementes $= dx\,dy\,dz$ und wenn ρ die Dichte der Flüssigkeit im Puncte M ist, dessen Masse $dm = \rho\,dx\,dy\,dz$. Dabei ist der Factor ρ bei homogenen Flüssigkeiten constant (wenn man nämlich von den etwa vorhandenen kleinen Compressionen abstrahirt) und bei heterogenen und elastischen Flüssigkeiten (welche sofort nicht durchaus gleichmäfsig comprimirt sind) variabel und irgend eine Function von x, y, z.

Es seyen X, Y, Z die drei parallel zu den Coordinatenachsen auf das Element dm wirkenden beschleunigenden Seitenkräfte, folglich $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ (Nr. **56**) die nach den Richtungen dieser Achsen auf dm wirkenden bewegenden Kräfte. Da nun das Element dm von der umgebenden Flüssigkeit auf alle sechs Seitenflächen einen Druck von aufsen nach innen erleidet, so müssen, wenn dieses Element in der Ruhe bleiben soll, diese äufseren Pressungen den innern Kräften $X\,dm$, $Y\,dm$, $Z\,dm$ das Gleichgewicht halten.

Bezeichnet daher p den Druck auf die Flächeneinheit, welcher in der Richtung der Schwere auf den Punct M Statt findet, so erleidet das Element dm auf seine obere Fläche $dx\,dy$ nach abwärts den Druck $p\,dx\,dy$, und da p im Allgemeinen eine Function der Coordinaten x, y, z ist, so wird dieser Druck p im Puncte M', dessen Coordinaten x, y, $z + dz$ sind, $p + \frac{dp}{dz}dz$ seyn, so, dafs also die untere Fläche dieses Elementes im Sinne der Schwere einem Drucke $(p + \frac{dp}{dz}dz)\,dx\,dy$ ausgesetzt ist. Da aber der Widerstand des Flüssigen, worauf sich das Element dm stützt, eine diesem Drucke gleiche und entgegengesetzte Kraft bildet; so wird dieses Element von den zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften $p\,dx\,dy$ und $(p + \frac{dp}{dz}dz)\,dx\,dy$ getrieben, welche als Resultirende die von unten nach oben wirkende Kraft $\left(\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz$ als Differenz der beiden vorigen geben. Damit sich dieses Element dm aber weder nach aufwärts noch nach abwärts bewege, so mufs diese letztere Kraft der oben genannten, nach der Achse der z wirkenden Kraft $Z\,dm = Z\rho\,dx\,dy\,dz$ gleich seyn, so, dafs man dafür hat:

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)dx\,dy\,dz = \rho Z\,dx\,dy\,dz \text{ d. i. } \left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho Z.$$

Auf gleiche Weise erhält man auch noch die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho Y \text{ und } \left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho X,$$

welche Statt finden müssen, damit sich das Element dm weder im Sinne der Achse der y noch in jenem der Achse der x bewegt. Dabei ist man von der immer richtigen Voraussetzung ausgegangen, daſs der Druck auf die Seitenflächen $dx\,dz$ und $dy\,dz$ des Elementes auf die Flächeneinheit bezogen, ebenfalls $= p$ ist

Dieſs vorausgesetzt, sind daher die allgemeinen Gleichungen der Hydrostatik, d. i. des Gleichgewichtes einer flüssigen Masse, worauf beliebige beschleunigende Kräfte wirken (mag diese Masse gleichartig oder ungleichartig, zusammendrückbar oder unzusammendrückbar seyn) sofort:

$$(1) \quad \left(\frac{dp}{dx}\right) = \rho X, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right) = \rho Y, \quad \left(\frac{dp}{dz}\right) = \rho Z.$$

137. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz und addirt sie hierauf, so erhält man (Comp. §. 657):

$$(2) \quad dp = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

Soll nun p möglich seyn, so muſs dp ein vollständiges Differential einer Function von x, y, z darstellen; dieses ist aber der Fall, wenn (Lehrbuch III S. 63, Compend. §. 662) die drei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$(3) \quad \left(\frac{d.\rho X}{dy}\right) = \left(\frac{d.\rho Y}{dx}\right), \quad \left(\frac{d.\rho X}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho Z}{dx}\right), \quad \left(\frac{d.\rho Y}{dz}\right) = \left(\frac{d.\rho Z}{dy}\right).$$

Finden diese Gleichungen Statt, so läſst sich die Gleichung (2) integriren und der daraus gefundene Werth von p leistet dann den Bedingungsgleichungen (1) für das Gleichgewicht Genüge.

138. Setzt man in diesen Werth von $p = f(x, y, z)$ für die 3 Variablen die Coordinaten irgend eines Punctes der Umfläche ABA' (Fig. 84) der Flüssigkeit, so erhält man die Gröſse des Druckes dieser Flüssigkeit auf den entsprechenden Punct der Wand des Gefäſses, in welchem sie enthalten ist, ein Druck, welcher von der Festigkeit der Gefäſswand aufgehoben wird. Da jedoch dort, wo das Gefäſs offen ist, dieser Druck durch nichts aufgehoben würde, so muſs derselbe für das Gleichgewicht an diesen offenen Stellen, d. i. an der freien Oberfläche $ADA'E$ der Flüssigkeit gleich Null seyn, und dieſs gibt (Gleich. 2) sofort die Bedingungsgleichung:

$$(4) \quad X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Resultirende der beschleunigenden Kräfte X, Y, Z, welche auf jedes Theilchen der im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit wirkt, auf dieser freien Oberfläche perpendikulär steht. Denn zieht man auf dieser Oberfläche irgend eine Curve und ist $\mathrm{d}s$ das Element derselben, welches dem Puncte x, y, z entspricht; so sind $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ die Cosinus der Winkel, welche die an die Curve in diesem Puncte x, y, z gezogene Tangente mit den Achsen der x, y, z bildet. Ist ferner R die Resultirende aus den Kräften X, Y, Z, so sind eben so $\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R}$ die Cosinus der Winkel, welche R mit diesen Achsen einschliefst $[= Cos(R.x), Cos(R.y), Cos(R.z)]$. Dividirt man alle Glieder der vorigen Gleichung (4) durch $R\,\mathrm{d}s$, so erhält man:

$$\frac{X}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0$$

woraus sofort folgt (Comp. §. 572), dafs die Resultirende R mit der Tangente der Curve, welche man auf der freien Oberfläche willkürlich gezogen hat, einen rechten Winkel einschliefst, folglich die Richtung von R mit der Normale des betreffenden Punctes x, y, z zusammenfällt. Aufserdem versteht es sich von selbst, dafs diese Kraft R von aufsen nach innen gerichtet seyn mufs.

Anmerkung. Ist die Flüssigkeit homogen, so ist ihre Dichte ρ constant und wenn man sie zur Einheit nimmt, so wird die obige Gleichung (2) in Nr. 137: $\mathrm{d}p = X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$, wobei also, wenn p möglich seyn soll, der zweite Theil dieser Gleichung ein vollständiges Differenzial seyn mufs.

Die vorige Bedingungsgleichung (4) integrirt, gibt:

$$\int (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) = C,$$

wobei C die willkürliche Constante ist. Gibt man derselben nach und nach verschiedene Werthe, so erhält man eben so viele particuläre Integrale, welche eben so vielen Flächen angehören und jede die obige Gleichung (4) als Differenzialgleichung haben, und folglich ebenfalls die Eigenschaft besitzen, die Resultirende der Kräfte X, Y, Z unter rechten Winkeln zu schneiden; man nennt diese Flächen daher Niveau-Flächen. Die von zwei unendlich nahen Niveauflächen begrenzte unendlich dünne Schichte heifst Niveau-Schichte.

Ist die Flüssigkeit nicht gleichförmig dicht und $X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z$ ein vollständiges Integral, so wird, wenn man Kürze halber

$\int (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) = u$ setzt, wo u irgend eine Function von x, y, z ist, die Gleichung (2):

$$(5)\quad dp = \rho\, du.$$

Damit aber der zweite Theil dieser Gleichung, wie es der erste ist, ein vollständiges Differenziale sey, so mufs ρ irgend eine Function von u seyn; dann ist aber auch p eine Function von u und die Gleichung der freien Oberfläche des Flüssigen fürs Gleichgewicht: $f(u) = Const.$ oder einfach $u = Const$ (wegen $p = f(u)$ ist $dp = df(u)$, daher wegen $p = 0$ für die freie Oberfläche, $df(u) = 0$ und $f(u) = Const.$) Die Druckkraft p und Dichte ρ sind daher für alle Puncte in derselben Niveauschichte constant. Das Gesetz der Dichtigkeitsveränderung von einer Niveauschichte zur andern hängt von einer dieses Gesetz bestimmenden Function von u ab, wodurch dann auch der, jeder Schichte entsprechende Druck durch die Integration der Gleichung (5) gegeben ist.

Aus allem bisher Gesagten folgt also, dafs, wenn eine flüssige Masse (tropfbar oder luftförmig) mit freier Oberfläche ins Gleichgewicht kommen soll, sie sich so lagern mufs, dafs 1stens die Dichte für alle Niveau-Schichten zwischen zwei unendlich nahen Niveau-Flächen constant, und 2tens die Resultirende der auf die äufsere Oberfläche wirkenden beschleunigenden Kräfte auf diese perpendikulär seyn mufs.

139. Um eine weitere Anwendung von der vorigen Gleichung (4) zu zeigen, wollen wir annehmen, dafs alle Theilchen einer völlig freien (in keinem Gefäfse eingeschlossenen), nicht schweren Flüssigkeit von einer Kraft angezogen werden, welche von einem im Innern derselben liegenden festen Punct ausgeht und dem Abstande von diesem Puncte proportional ist. Ist nun φ der Werth dieser Kraft im Abstande 1, und nimmt man den genannten festen Punct zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten, so sind $X = \varphi x$, $Y = \varphi y$, $Z = \varphi z$ die auf das Element oder den Punct x, y, z wirkenden, mit den Achsen parallelen Seitenkräfte, folglich ist, wenn man diese Werthe in der obigen Gleichung substituirt und gleich mit φ abkürzt, $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ die Differenzialgleichung für alle Niveau-Flächen, also auch der freien Oberfläche selbst.

Diese Gleichung gibt, wenn man integrirt $x^2 + y^2 + z^2 = C$, und wenn man, um die Constante C zu bestimmen, den Abstand des Punctes x, y, z vom Ursprung der Coordinaten $= r$ setzt, wodurch (Comp. §. 549) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ wird, so folgt $C = r^2$, mithin wird die vorige Integralgleichung, wenn man für C diesen Werth substituirt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

welches sofort (Comp. §. 596) die Gleichung einer Kugelfläche vom Halbmesser r ist. Die flüssige Masse bildet also in diesem Falle eine Kugel, deren Mittelpunct der genannte feste Anziehungspunct ist;

zugleich sind die sämmtlichen Niveauschichten concentrische Kugelflächen von demselben Mittelpuncte.

Von dem Gleichgewichte und Drucke schwerer Flüssigkeiten auf den Boden eines Gefäſses.

(§. 309.)

140. Es befinde sich in dem oben offenen Gefäſse CE (Fig. 85), dessen ebene Grundfläche horizontal seyn soll, irgend eine schwere homogene Flüssigkeit bis zur Höhe AB, so wird, wenn das Gleichgewicht eingetreten (Nr. **138**), die freie Oberfläche AB horizontal, d. i. perpendikulär auf die Richtung der Schwere seyn und das Gleichgewicht wird auch nicht gestört werden, wenn man auf diese Oberfläche noch auſserdem irgend einen constanten Druck in dieser Richtung ausübt.

Der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist ferner nach der ganzen Ausdehnung irgend einer horizontalen Schichte der Flüssigkeit constant; setzt man diesen für die in der Tiefe z unter der Oberfläche AB liegenden Schichte mn gleich p und ist ρ die constante Dichte der Flüssigkeit, so wie g die Schwere, so hat man nach der Gleichung (2) in Nr. **137** (wegen $X=0$, $Y=0$, $Z=g$) sofort $dp=\rho g\,dz$ und wenn man integrirt: $p=\rho g z+q$,
wobei die Constante q den äuſsern auf die Oberfläche AB Statt findenden Druck bezeichnet, welcher in der Regel in dem Drucke der Atmosphäre besteht. Dieser constante Druck pflanzt sich unverändert auf alle Puncte des Gefäſses, so wie auf die in die Flüssigkeit eingetauchten Körper fort und er kommt in jedem Puncte der Flüssigkeit zu dem aus der Schwere herrührenden variablen Druck hinzu. Da man nun diesem Drucke der Atmosphäre überall leicht Rechnung tragen kann, so wollen wir ihn der gröſseren Einfachheit wegen hier ganz auslassen oder Null setzen, wodurch die vorige Gleichung in $p=\rho g z$ übergeht.

Ist nun die Bodenfläche $=F$, ihr Abstand von der Oberfläche $AB=h$, so wie der Druck auf den Boden $=P$; so folgt aus dieser Gleichung wegen $z=h$, sofort:

$$(m)\quad P=pF=\rho g F h,$$

woraus also ersichtlich ist, daſs der auf den horizontalen Boden ausgeübte Druck, ohne Rücksicht auf die Form des Gefäſses (es mag gleich weit, oder nach aufwärts erweitert oder verengt seyn), gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitsprisma oder Cylinders, welcher F zur Grundfläche und h zur Höhe hat, dessen Volumen und Masse also beziehungsweise $V = Fh$ und $M = \rho Fh$ ist. (Da hier g das Gewicht der Masseneinheit bezeichnet, so ist §. 35, Anmerk. $Mg = P$ das Gewicht der Masse M.)

Anmerkung. Befinden sich in einem Gefäfse mehrere Flüssigkeiten eine über der andern, so ist es für das Gleichgewicht nothwendig und auch hinreichend, dafs die Separationsflächen zwischen zwei aufeinander folgenden Flüssigkeiten (138. Anmerk.) horizontal seyen, weil in diesem Falle jede über einer andern stehenden Flüssigkeit auf alle Puncte ihrer Grundfläche einen constanten Druck ausübt, welcher also nach der oben gemachten Bemerkung das Gleichgewicht der unter ihr liegenden Flüssigkeit nicht stören kann.

Giefst man nun in das vorige Gefäfs CE (Fig 85) über die Flüssigkeit $ABCD$ eine neue, von der Dichte ρ', deren obere Fläche $A'B'$ wieder horizontal ist und über der Schichte AB den Abstand h' hat, so übt diese Flüssigkeit auf die Schichte $AB = F'$, als ihre Basis nach der vorigen Gleichung (m), den Druck $P' = \rho' g F' h'$ aus, welcher sofort durch die untere Flüssigkeit auf die Bodenfläche F des Gefäfses nach §. 307 gleichmäfsig fortgepflanzt wird und dadurch auf diesen den Druck $\rho' g F h'$ hervorbringt; der von beiden Flüssigkeiten auf die Bodenfläche ausgeübte Druck ist daher $P + P' = \rho g F h + \rho' g F h' = g F(\rho h + \rho' h')$.

Auf dieselbe Weise findet man, dafs, wenn über diese zweite noch eine dritte Flüssigkeit von der Dichte ρ'' bis $A''B''$ gegossen wird und diese Schichte $A''B''$, welche von der vorigen $A'B'$ um h'' abstehen mag, wieder horizontal steht, dadurch erstens das Gleichgewicht nicht gestört wird und dann der Gesammtdruck auf den Boden des Gefäfses:
$= (\rho h + \rho' h' + \rho'' h'') g F$ ist.

Fährt man so fort, so zeigt sich, dafs wenn beliebig viele übereinander befindliche Flüssigkeiten von verschiedener Dichte in einem Gefäfse im Gleichgewichte stehen, der Druck auf die horizontale Bodenfläche lediglich von der Gröfse dieser Fläche, von der Höhe der einzelnen Flüssigkeitsschichten und von ihren Dichtigkeiten abhängt. Da dieser Satz auch noch Statt findet, wenn diese horizontalen Schichten unendlich dünn sind, so gilt er auch für den Fall, dafs sich die Dichte der Flüssigkeit nach verticaler Richtung continuirlich und gleichmäfsig ändert, wie diefs bei compressiblen Flüssigkeiten der Fall ist Auch gilt dieser Satz noch, wenn mit der Dichte die Schwere von Schichte zu Schichte variirt.

141. Wird der Boden des Gefäfses durch keine Ebene, sondern durch irgend eine krumme Fläche gebildet, so seyen, um den Druck auf denselben zu bestimmen, x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten irgend eines Punctes M (Fig. 86), so wie w das demselben Puncte entsprechende Flächenelement dieser krummen Fläche (wobei z wieder in der Richtung der Schwere liegen soll). Bezeichnet ferner p den Druck auf die Flächeneinheit, so ist pw der auf dieses Flächenelement nach der Richtung der Normale NM Statt findende Druck. Bildet diese Normale mit den drei Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel α, β, γ; so sind bekanntlich die Neigungswinkel des Flächenelementes w, d. i der Tangentialebene im Puncte M mit den Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise $=\gamma, \beta, \alpha$, so, dafs wenn das Flächenelement auf die 3 genannten coordinirten Ebenen projicirt und die Projectionen beziehungsweise mit u, u', u'' bezeichnet werden, sofort:

$u = w \, Cos\, \gamma$, $u' = w\, Cos\, \beta$, $u'' = w\, Cos\, \alpha$ Statt findet.

Multiplicirt man diese Gleichungen mit p, so erhält man:

$$pu = pw\, Cos\, \gamma,\ pu' = pw\, Cos\, \beta,\ pu'' = pw\, Cos\, \alpha,$$

woraus hervorgeht, dafs die Producte pu, pu', pu'' nichts anderes als die nach den drei Achsen der z, y, x genommenen, also beziehungsweise auf den Ebenen der xy, xz, yz perpendikulären Seitenkräfte des Normaldruckes pw sind, so dafs man also überhaupt den aus dem Normaldruck pw abgeleiteten senkrechten Druck auf irgend eine Ebene erhält, wenn man in dem Producte pw das Element der krummen Fläche w mit dessen Projection auf die betreffende Ebene vertauscht.

142. Wird nun auf die Oberfläche der in dem prismatischen oder cylindrischen Gefäfse enthaltenen tropfbaren Flüssigkeit ein verticaler Druck P der Art ausgeübt, dafs davon auf die Flächeneinheit der Druck p (welcher sofort §. 307 auf jedes Flächenelement normal ist) entfällt, und abstrahirt man dabei von dem Gewichte der Flüssigkeit; so ist der Gesammtdruck auf den Boden CDE des Gefäfses nach verticaler, d. i. lothrechter Richtung $= pu + pu_1 + pu_2 + - - = p(u + u_1 + ..) = pF$, wenn nämlich F die Projection der krummen Fläche auf die horizontale Ebene CE ist.

Anmerkung. Stellt dieses Gefäfs, welches ein Cylinder vom Halbmesser r seyn mag, einen beweglichen Kolben z. B. einer Wassersäulenmaschine vor, so ist der Wasserdruck auf denselben ganz gleich, er mag durch irgend eine krumme Fläche CDE oder durch die Kreisebene $CE = r^2\pi$ geschlossen seyn, indem dieser Druck immer $= pr^2\pi$ ist, wenn p den Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet.

143. Rührt der Druck auf die Bodenfläche von dem Gewichte der Flüssigkeit her, so ist p nicht mehr constant, sondern eine Function von z, wenn z die Tiefe des betreffenden Flächenelementes unter dem Spiegel der Flüssigkeit ist, die Ebene der xy also mit diesem Spiegel zusammenfällt. In diesem Falle findet man den lothrechten Druck auf die krumme Fläche, also senkrecht auf die Ebene der xy, so wie auch gegen die beiden übrigen coordinirten Ebenen durch eine doppelte Integration, wie aus dem nachstehenden Beispiele zu ersehen ist.

Beispiel. Es sey z. B die Kugelschale CDE (Fig. 86), welche die Hälfte einer hohlen Kugel vom Halbmesser r bilden und deren Kreisebene CE horizontal liegen und mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, bis an diese Kreisebene mit einer Flüssigkeit gefüllt, wovon das Gewicht der cubischen Einheit $= \gamma$ ist.

Bezeichnet man den Gesammtdruck auf die Kugelschale in der Richtung der Schwere oder Achse der z mit P, so ist (142.) $dP = pu$ oder wegen $p = \gamma z$ und $u = dx\,dy$ auch $dP = \gamma\,dx\,dy\,z$, wobei aus der Gleichung der Kugelfläche (Comp. §. 596) $z = \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} = \sqrt{(\rho^2 - y^2)}$ folgt, wenn man Kürze halber $r^2 - x^2 = \rho^2$ setzt. Durch eine zweifache Integration erhält man

$$P = 4\gamma \int_0^r dx \int_0^\rho dy \sqrt{(\rho^2 - y^2)}.$$

Nun ist aber

$$\int_0^\rho dy \sqrt{(\rho^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2}\rho^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$$

folglich

$$P = 4\gamma . \frac{\pi}{4} \int_0^r dx\,(r^2 - x^2) = \gamma\pi . \tfrac{2}{3} r^3 = \tfrac{2}{3} r^3 \pi . \gamma$$

gleich dem Gewichte der in dem Gefäfse enthaltenen Flüssigkeit, wie es seyn soll.

Erscheint diese Kugelschale als Boden des Cylinders AE, welcher ebenfalls mit dieser Flüssigkeit und zwar bis AB gefüllt ist, so kommt zu dem vorigen Drucke, noch der constante auf die Kreisfläche CE ausgeübte Druck $\gamma . r^2 \pi h$ hinzu, wenn h der Abstand des Spiegels AB von der genannten Ebene CE ist. Ist der Cylinder gleich weit, so ist der Gesammtdruck $\gamma . \frac{2}{3} r^3 \pi + \gamma . r^2 \pi h =$ dem Gewichte der in dem Gefäfse enthaltenen Flüssigkeit, wie es sich von selbst versteht.

Seitendruck.

(§. 310.)

144. Es sey auf der schiefen Wand DE (Fig. 87) des bis auf die Höhe AB mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten prismatischen Gefäfses die krumme Linie $aMbma$ gezeichnet und der Druck der Flüssigkeit auf die von dieser Curve begrenzte ebene Fläche zu bestimmen.

Legt man durch den Punct A eine verticale Ebene AJ senkrecht auf die Ebene DE, zählt auf der dadurch entstehenden Durchschnittslinie AL von A aus die Abscissen und nimmt darauf senkrecht die, Ordinaten der geschlossenen Curve, welche also horizontal seyn werden setzt nämlich für einen beliebigen Punct M der Curve, welche wir der gröfseren Einfachheit wegen, gegen ab als symmetrisch voraussetzen wollen, $AP = x$ und $PM = Pm = y$, zieht ferner in der Entfernung $Pp = dx$ eine zweite Ordinate; so ist die von diesen beiden Ordinaten eingeschlossene unendlich schmale Fläche $df = 2y\,dx$ und es liegen alle ihre Puncte um die Tiefe $NP = z$ unter der Oberfläche der Flüssigkeit, so dafs der Druck auf diesen schmalen Streifen (Nr. **140**) durch $dP = \gamma z\,df = 2\gamma z y\,dx$, oder wenn der Neigungswinkel $BAL = \alpha$ ist, wegen $z = x\,Sin\,\alpha$, durch $dP = 2\gamma\,Sin\,\alpha\,y\,x\,dx$ ausgedrückt wird, wenn γ das Gewicht der cubischen Einheit der Flüssigkeit bezeichnet.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die Grenzen $Aa = x'$ und $Ab = x''$ setzt, sofort durch Integration der gesuchte Normaldruck auf die von der Curve $aMbm$ eingeschlossene ebene Fläche:

$$P = 2\gamma\,Sin\,\alpha \int_{x'}^{x''} y\,x\,dx \quad . \quad (1)$$

wobei die Gleichung der Umfangscurve $y = f(x)$ gegeben seyn mufs.

145. Ist z. B. die betreffende Fläche ein Rechteck, dessen zwei Seiten, wovon jede $= a$ horizontal, also die beiden andern, jede b mit AL parallel seyn sollen; so hat man nach der vorigen Formel (1) wegen $y = \frac{1}{2}a$ und $x'' = x' + b$:

$$P = 2\gamma\,Sin\,\alpha \int_{x'}^{x'+b} \tfrac{1}{2}a\,x\,dx = \gamma\,a\,b\,(x' + \tfrac{1}{2}b)\,Sin\,\alpha.$$

Ist h der Abstand des Schwerpunctes dieses Rechteckes vom Spiegel der Flüssigkeit, so ist $h = (x' + \frac{1}{2}b)\,Sin\,\alpha$, folglich auch:

$$P = \gamma\,a\,b\,.\,h$$

(Vergleiche §. 310.)

Anmerkung. Ein Schutzbret oder eine Spundwand hat also, ohne Rücksicht darauf, ob viel oder wenig Wasser anliegt, immer denselben Druck auszuhalten, so lange sich der Abstand des Schwerpunctes dieser Wand vom Wasserspiegel nicht ändert.

146. Um auch eine Anwendung des in Nr. **141** entwickelten Satzes für den Druck auf krumme Flächen bei dem Seitendruck zu zeigen, wollen wir annehmen, dafs der hohle Kegel $ABMO$ (Fig. 88) ganz mit Wasser gefüllt sey und den dadurch entstehenden Druck im Gefäfse bestimmen.

Denkt man sich den Umfang der Grundfläche in unendlich viele gleiche Theile wie $Mm = ds$ getheilt und die Theilungspuncte mit der

Spitze des Kegels durch gerade Linien verbunden, so hat man die Mantelfläche in unendlich schmale gleichschenkliche Dreiecke zerlegt, wovon jedes die Fläche $\frac{1}{2}l\,ds$ besitzt, wenn man die Seite oder Kante des Kegels mit l bezeichnet. Ist ferner $OC = h$ die Höhe des Kegels, so liegt der Schwerpunct o eines solchen Flächenelementes OMm um $\frac{2}{3}h$ unterm Wasserspiegel, d. i. unter dem Punct O, und es ist daher nach der vorigen Nr. der Druck des Wassers auf dieses Element $dN = \frac{1}{2}l\,ds.\frac{2}{3}h\gamma = \frac{1}{3}\gamma l h\,ds$, folglich der Normaldruck auf die gesammte Mantelfläche:

$$N = \frac{1}{3}\gamma l h \int ds = \frac{1}{3}\gamma l h \int_0^{2\pi} r\,d\alpha = \frac{2}{3} r \pi \gamma l h$$

oder wenn man die Mantelfläche $= O$ setzt, auch $N = O.\frac{2}{3}h.\gamma$.

Zerlegt man nun, um den Seitendruck parallel zur Achse zu erhalten, den auf das Flächenelement OMm Statt findenden Normaldruck dN in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte dP, dP', wovon die erstere parallel zur Achse OC, die andere also darauf senkrecht ist; so hat man, die Projection des Flächenelementes OMm auf die Grundfläche des Kegels, d. i. $MCm = dF$ gesetzt, nach dem erwähnten Satz in Nr. **141**:

$$dP = dF\,\tfrac{2}{3}h\gamma, \text{ folglich } P = \tfrac{2}{3}Fh\gamma = \tfrac{2}{3}r^2\pi h\gamma$$

als Resultirende aller zu OC parallelen Kräfte, während sich die darauf senkrechten, in der verlängerten Kreisebene aob liegenden Kräfte ringsherum aufheben.

Der Druck auf den Boden des Kegels ist gleich $r^2\pi.h\gamma$, und da der vorige Druck P diesem entgegengesetzt ist, so bleibt noch ein Druck nach abwärts (normal auf die horizontale Ebene worauf das Gefäfs steht) $= r^2\pi h\gamma - \frac{2}{3}r^2\pi h\gamma = \frac{1}{3}r^2\pi h\gamma$ also gleich dem Gewichte des im Gefäfse enthaltenen Wassers, wie es seyn mufs.

Würde man die Mantelfläche von dem Boden lostrennen, so würde der Boden mit der Kraft $r^2\pi h\gamma$ abwärts gedrückt und die Mantelfläche mit der Kraft $\frac{2}{3}r^2\pi h\gamma$ vertical aufwärts gehoben.

Anmerkung. Hat der Kolben z. B. einer Wassersäulenmaschine die Trichterform $ABCD$ (Fig. 89) wobei $AB = 2R$ der gröfsere, und $ab = 2r$ der kleinere Durchmesser ist und bezeichnet p den von der Wassersäule auf die Flächeneinheit ausgeübten Druck; so ist der Druck auf die Fläche AB aufwärts $= R^2\pi.p$ und der Seitendruck nach abwärts, welcher von dem auf die Mantelfläche $ABab$ ausgeübten Normaldruck herrührt $= (R^2 - r^2)\pi.p$, so, dafs also noch nach aufwärts der wirksame Druck $P = R^2\pi.p - (R^2 - r^2)\pi p = r^2\pi.p$ übrig bleibt, welcher sofort blofs dem Querschnitt des Cylinders $abCD$ entspricht.

Mittelpunct des Druckes.

(§. 312.)

147. Um den Mittelpunct des Druckes O (Fig. 90) für die von der Curve $aMbma$ umschlossene ebene Fläche zu bestimmen, wenn das Gefäſs CDG mit einer schweren Flüssigkeit gefüllt ist, nehme man die horizontale Kante EF des Gefäſses zur Achse der statischen Momente und setze, wie in Nr. **144** $AP = x$, $PM = Pm = y$, $Pp = dx$, $Aa = x'$ und $Ab = x''$; so ist der Normaldruck der Flüssigkeit auf das Flächenelement Mn, welches um die Tiefe $x\,Sin\,\alpha$ unter dem Spiegel EG liegt, $dp = 2\,y\,dx\,.\,x\,Sin\,\alpha\,.\,\gamma$ und dessen statisches Moment gegen EF, $x\,dp = 2\,\gamma\,Sin\,\alpha\,.\,y\,x^2\,dx$, folglich die Summe der statischen Momente aller Flächenelemente:

$$M = 2\,\gamma\,Sin\,\alpha \int_{x'}^{x''} y\,x^2\,dx$$

wobei die Gleichung $y = f(x)$ der Umfangscurve gegeben seyn muſs. Ist nun P die Resultirende aus allen den (zu einander parallelen) Normalpressungen, d. i. aus dem Gesammt-Normaldruck auf die betreffende Fläche $aMbma$, nämlich $P = 2\gamma\,Sin\,\alpha \int_{x'}^{x''} y\,x\,dx$, und $AO = X$ die Abscisse ihres Angriffspunctes, d. i. der Mittelpunct des Druckes; so ist auch $M = PX$, oder, wenn man für M und P die vorigen Werthe substituirt, und abkürzt:

$$X = \frac{\int_{x'}^{x''} y\,x^2\,dx}{\int_{x'}^{x''} y\,x\,dx} \qquad (1)$$

wodurch dieser Punct O, da er bei der gemachten Voraussetzung, daſs die betreffende Fläche durch die Abscissenachse AB in zwei symmetrische Theile getheilt wird, in der Geraden AB liegt, vollkommen bestimmt ist.

Anmerkung. Läſst sich die Fläche durch die Gerade AB nicht in zwei symmetrische Theile theilen, so muſs man noch eine zweite, am einfachsten mit der AB parallele Momentenachse annehmen und auf dieselbe Weise den Abstand Y des Punctes O von dieser Achse bestimmen.

148. Ist, als einfachster Fall, die Fläche ein Rechteck, dessen beide horizontal liegende Seiten $= b$ und die beiden andern (parallel mit AB) $= a$ sind und wofür $Aa = d$, folglich $Ab = a + d$ ist; so hat man nach der vorigen Gleichung (1), wegen $y = \frac{1}{2}b$ sofort:

$$X = \frac{\frac{1}{2} b \int_d^{a+d} x^2 \, dx}{\frac{1}{2} b \int_d^{a+d} x \, dx} = \frac{2}{3} \frac{(a+d)^3 - d^3}{(a+d)^2 - d^2}$$

$$\text{d. i. } X = \frac{2}{3} \frac{a^2 + 3ad + 3d^2}{a + 2d} \text{ . } \quad (m)$$

(Vergleiche Gleich. 1 in §. 312.)

Liegt die obere Kante im Wasserspiegel, so ist wegen $d = 0$, $X = \frac{2}{3} a$.

149. Ist die Fläche ein gleichschenkliches Dreieck, dessen Spitze im Wasserspiegel und Höhe h in der Geraden AB liegt, so hat man, wenn die Basis des Dreieckes $= 2b$ ist, wegen $x : y = h : b$, also $y = \frac{b}{h} x$ sofort:

$$X = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h x^3 \, dx}{\frac{b}{h} \int_0^h x^2 \, dx} = \frac{3}{4} h$$

Für die umgekehrte Lage, wenn nämlich die Basis im Wasserspiegel liegt, ist

$$X = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h x^2 \, dx \, (h - x)}{\frac{b}{h} \int_0^h x \, dx \, (h - x)} = \frac{1}{2} h \text{ .}$$

Anmerkung. Dieselben Ausdrücke gelten auch für ein rechtwinkeliges Dreieck CAB (Fig. 91 u. 91′), dessen Cathete $AC = h$ parallel mit der Geraden AB (Fig. 90) liegt. Es ist nämlich im erstern Falle, wenn die Spitze C (Fig. 91) im Wasserspiegel liegt, $CP = \frac{3}{4} CA$ und im letztern (Fig. 91′) $AP = \frac{1}{2} AC$.

Da ferner in beiden Fällen der gesuchte Punct O in der Halbirungslinie AB liegen muſs, so ist in diesen beiden Fällen beziehungsweise $PO = \frac{3}{8} AB$ und $PO = \frac{1}{4} AB$.

150. Ist endlich die betreffende Fläche ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunct von der Achse EF um a absteht, und verwechselt man für dieses Beispiel zur Vereinfachung der Rechnung die beiden Coordinatenachsen, setzt nämlich (Fig. 92) $AP = Cp = x$ und $pM = pm = y$; so ist $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und der Druck auf das Flächenelement Mn, da dessen Schwerpunct um die Gröſse $a \, Sin \alpha$ lothrecht unterm Wasserspiegel liegt, $dp = 2y \, dx \; a \, Sin \alpha \, . \, \gamma = 2 a \gamma \, Sin \alpha \, dx \sqrt{(r^2 - x^2)}$, folglich der Gesammtdruck auf die Kreisfläche:

$$P = 2\int_0^r dp = 4\,a\,\gamma\,Sin\,\alpha \int_0^r dx\sqrt{(r^2 - x^2)},$$

oder wegen $\int dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{r^2}{2}\,arc\,Sin\,\frac{x}{r}$,

folglich $\int_0^r dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}$ auch $P = r^2\pi\gamma\,a\,Sin\,\alpha$ (analog mit dem Satze in §. 310).

Um ferner das statische Moment M dieses Druckes zu finden, hat man für den Abstand Po des Mittelpuncts des Druckes des unendlich schmalen Rechteckes Mn nach Nr. **148** Gleichung (m), in welcher $d = a - y$ und $a = 2\,y$ zu setzen ist, $Po = a + \frac{1}{3a}y^2$ folglich das statische Moment des auf dieses Element ausgeübten Druckes:

$$Po\ dp = \left(a + \frac{1}{3a}y^2\right)2\,a\,\gamma\,Sin\,\alpha\,y\,dx$$
$$= 2\,\gamma\,a^2\,Sin\,\alpha\,y\,dx + \tfrac{2}{3}\gamma\,Sin\,\alpha\,y^3\,dx.$$

Das gesuchte Moment ist daher:

$$M = 2\,\gamma\,a^2\,Sin\,\alpha\,.\,2\int_0^r dx\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{2}{3}\gamma\,Sin\,\alpha\,.\,2\int_0^r dx\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder wegen $\int_0^r dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}$ und $\int_0^r dx\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8}r^4\frac{\pi}{2}$ *)

auch: $$M = \gamma\,r^2\,\pi\,Sin\,\alpha\,(a^2 + \tfrac{1}{4}r^2).$$

Da nun für's Gleichgewicht $PX = M$, also $X = \frac{M}{P}$ ist, so erhält man, wenn für M und P die Werthe gesetzt werden, sofort:

$$X = \frac{\gamma\,r^2\,\pi\,Sin\,\alpha\,(a^2 + \frac{1}{4}r^2)}{\gamma\,r^2\,\pi\,a\,Sin\,\alpha} = a + \frac{r^2}{4a} = \frac{4a^2 + r^2}{4a}.$$

Liegt der Scheitel des Kreises im Wasserspiegel, so ist wegen $a = r$:

$$X = \tfrac{5}{4}r$$

während der Schwerpunct des Kreises nur um $\frac{4}{4}r$ unterm Wasserspiegel liegt. (Vergleiche §. 314.)

---

*) Es ist nämlich (Comp. §. 799 und §. 801, 2.):

$$\int dx\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{4}\left(\tfrac{5}{2}r^2 - x^2\right)\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{3}{8}r^4\,arc\,Sin\,\frac{x}{r}$$