

Verticalen BE heraus und man findet für die entsprechende Curve AMB , wenn wieder ihre Länge $AMB = l$, $AP = x$, $PM = y$ und $BD = \delta$ ist, da sich im Gange der Entwicklung in Nr. 121 bis zur Gleichung (2), die auch hier noch gilt, dadurch nichts ändert, ebenfalls wieder:

$$y = \delta \sin \left(x \sqrt{\frac{Q}{E'}} \right).$$

Da aber für $x = l$ (wenn man nämlich wieder für geringe Biegungen $AMB = AD$ sezt) $y = \delta$ seyn muß, so folgt aus dieser Gleichung

$\sin \left(l \sqrt{\frac{Q}{E'}} \right) = 1$ also, wenn man für n die kleinste Zahl nimmt, welche dieser Bedingung Genüge leistet, $l \sqrt{\frac{Q}{E'}} = \frac{\pi}{2}$, woraus sofort

$$Q = \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 E'$$

folgt. Wird $\frac{1}{2}l$ statt l gesetzt, so geht dieser Ausdruck, wie es seyn soll, in den obigen (5) über.

Torsionsfestigkeit.

(§. 272.)

123. Es sey $CO = l$ die Länge des an dem Ende DE (Fig. 76) unveränderlich befestigten prismatischen Körpers und $CF = R$ die Länge des am andern, freien Ende senkrecht auf der Achse CO stehenden Hebelarmes, an welchen die Kraft P normal wirkt und dadurch in Folge der entstehenden Verdrehung der Fasern, den Durchmesser AB in die Lage $A'B'$, jenen ab in die Lage $a'b'$ u. s. w. bringt, jenen DE des letzten, am befestigten Ende befindlichen Querschnitte aber unverrückt läßt, wodurch also die an der Oberfläche liegende Faser DaA die Lage $Da'A'$ annimmt.

Setzt man den Drehungswinkel im ersten Querschnitt (vom freien Ende aus gezählt) $ACA' = i$, jenen im Querschnitt $adb'd'$ dessen Abstand $Oc = x$ seyn mag $aca' = i'$, so ist der Natur der Sache nach $i' < i$, so zwar, daß der Winkel i' dem Abstände x proportional oder $i' : i = x : l$, also $i' = \frac{x}{l} i$ ist. Läßt man x in $x + n$ übergehen, wobei n jede beliebige auch noch so kleine Größe bezeichnen kann, und denkt sich in dieser Entfernung von O ebenfalls einen Querschnitt (immer normal auf die Achse OC), in welchem der entsprechende Drehungswinkel $= i''$ seyn soll; so hat man eben so $i'' = \frac{x+n}{l} i$, folglich ist die Differenz $i'' - i' = \frac{n}{l} i$.

Bezeichnet man nun in irgend einem Querschnitt $a d b d$ (Fig. 77), welcher von dem befestigten Ende um x absteht, den Winkel $a c M$ des an irgend einen Punkt M der Umfangscurve gezogenen Radiusvector $c M$ durch α , nimmt auf $c M$ in der Entfernung $c m = u$ einen Punkt m und läßt sowohl α um $d\alpha$ als auch u um du zunehmen; so erhält man ein Flächenelement dieses Querschnittes $m n' = u d\alpha \cdot du$, dessen Torsionswiderstand sich nunmehr leicht ausdrücken läßt. Bezeichnet nämlich p den Torsionswiderstand auf die Flächeneinheit bezogen und zwar in den Abstand $= 1$ von der Achse $O C$, und berücksichtigt man, daß zwei Elemente, welche in zwei aufeinander folgenden Querschnitten des Prisma vor der Torsion einander gegenüber standen, sich dann um eine Größe verschoben haben, welche 1stens dem Abstand dieser Elemente von der Achse, und 2stens der Differenz der betreffenden Drehungswinkel i' und i'' proportional ist; so läßt sich der Torsionswiderstand des genannten Elementes durch $p \cdot u d\alpha du \cdot u \cdot \frac{n}{l} i = \frac{p n}{l} u^2 i d\alpha du$, oder wenn man den unbestimmten constanten Factor $p n = N$ setzt, wo N ein von der Natur und Beschaffenheit des Körpers abhängiger Erfahrungscoeffizient ist, durch $\frac{N}{l} i u^2 d\alpha du$ ausdrücken, dessen statisches Moment sofort $= \frac{N}{l} u^3 i d\alpha du$ ist.

Da endlich das statische Moment des Widerstandes in irgend einem Querschnitte, dem statischen Momente der Kraft P gleich seyn muß, so hat man, wenn noch $u = f(\alpha)$ die Polargleichung der Umfangscurve $a M d'$ (Fig. 77) ist, sofort:

$$(1) \quad P R = \frac{N i}{l} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3 du = \frac{N i}{4 l} \int_0^{2\pi} f(\alpha)^4 d\alpha$$

124. Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r , so ist $f(\alpha) = u = r$, folglich $P R = \frac{N i}{4 l} \int_0^{2\pi} r^4 d\alpha = \frac{N i}{4 l} 2 \pi r^4$ d. i.

$$P R = \frac{1}{2} N \pi \frac{i}{l} r^4 \quad (\text{Vergl. §. 272, Gl. 1.})$$

Will man den Torsionswinkel i in Gradmaß ausgedrückt in diese Formel bringen, so muß man $i = \frac{\pi}{180^\circ} i^0$ setzen, dadurch erhält man auch, wenn man zugleich das statische Moment $P R = M$ setzt:

$$(2) \quad M = \frac{N \pi^2 r^4}{360^\circ l} i^0$$

bezeichnet man das statische Moment der Kraft, welches einen cylindrischen Stab vom Querschnitt = 1 Quadratzoll und der Länge = 1 Zoll um 360 Grad zu drehen vermag, durch M' , so ist nach dieser letzten Formel wegen $r^2 \pi = 1$, also $r^4 = \frac{1}{\pi^2}$, $l = 1$ und $i^0 = 360^0$ sofort $M' = N$, wodurch also die Bedeutung der unbestimmten Gröfse N gegeben ist.

Aus der vorigen Gleichung (2) erhält man für den Torsionswinkel den Ausdruck:

$$(a) \quad i^0 = \frac{M}{N} \cdot l \cdot \frac{360^0}{r^4 \pi^2}.$$

Anmerkung. Man nennt die obige Gröfse N , deren Bedeutung wir eben kennen gelernt haben, auch den Modul der Elasticität der Materialien zur Berechnung der Torsion von prismatischen oder cylindrischen Stäben und ist mit dem in §. 272 sogenannten Torsionscoefficienten w gleichbedeutend. Nach der Theorie und der Voraussetzung von vollkommen homogenen Körpern, steht dieser Modul mit jenem M der Elasticität (§. 252) in einem solchen Zusammenhange, dafs $N = \frac{2}{3} M$ ist.

Auch ist, wie man sieht, N das statische Moment der Kraft, welche den cylindrischen Schaft von 1 Quadratzoll Querschnitt und 1 Zoll Länge, um 360^0 zu drehen vermag.

125. Ist der Querschnitt ein Quadrat von der Seite $DE = a$ (Fig. 78), so setze man für den Radiusvector $CM = u$, $W.FCM = \alpha$ und $AM = x$; dann ist $u = \frac{x}{\cos \alpha} = f(\alpha)$ und man muß für das Dreieck ACD das obige Integral (1) von $\alpha = \frac{\pi}{4}$ bis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nehmen; da man jedoch dadurch auf den Bruch $\frac{0}{0}$ kommt, so kann man, da die beiden Dreiecke ACD und FCD einander vollkommen gleich sind, dieses Integral auch von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{\pi}{4}$ nehmen, für welche Werthe nämlich beziehungsweise $x = 0$ und $x = \frac{a}{2}$ wird. Diefs vorausgesetzt, hat man für den ganzen Querschnitt des Quadrates, da er aus 8 solchen Dreiecken wie ACD besteht, nach der obigen Formel (1):

$$PR = \frac{Ni}{4l} 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^4 \frac{dx}{\cos^4 \alpha}$$

oder da $\int \frac{dx}{\cos^4 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{3 \cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{3 \cos \alpha}$ (Comp. §. 820), folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

und innerhalb dieser Grenzen $x = \frac{a}{2}$ ist, auch:

$$PR = \frac{2Ni}{l} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^4 \quad \text{d. i.} \quad PR = \frac{1}{6} N \frac{i}{l} a^4$$

(Vergleiche §. 272, Gleich. 3.)

Nach dem Vorgange in der vorigen Nr. wird auch:

$$M = \frac{1}{6} N \frac{\pi}{180^\circ} \frac{a^4}{l} i^0 \quad \text{und daraus der Torsionswinkel}$$

$$i^0 = 6 \frac{M}{N} l \frac{180^\circ}{\pi a^4}.$$

126. Ist der Querschnitt ein Rechteck von den Seiten a und b , so findet *Cauchy* nach einer weitläufigen Entwicklung (*Exercices de mathématiques 4^e année. pag. 59*):

$$PR = \frac{1}{3} N \frac{i}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad \text{oder nach dem vorigen Vorgange}$$

$$M = \frac{1}{3} N \frac{\pi}{180^\circ} \frac{i^0}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad \text{woraus der Torsionswinkel}$$

$$i^0 = 3 \frac{M}{N} l \frac{180^\circ}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \quad \text{folgt.}$$

Anmerkung. Da man den Modul N nur wieder durch eigene Versuche unabhängig von jenen für den Modul der Elasticität in Nr. 118 u. s. w. bestimmen muß, so hat man, wenn hier $M = PR$ fortwährend das stat. Moment der Kraft P bezeichnet und die Torsion nicht über die Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird, aus den vorigen Formeln:

Bei einem kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r :

$$N = M \cdot \frac{l}{\pi^2 r^4} \cdot \frac{360^\circ}{i^0}.$$

Bei einem quadratischen Querschnitt von der Seite a :

$$N = 6 M \cdot \frac{l}{\pi a^4} \cdot \frac{180^\circ}{i^0}.$$

Bei einem rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b :

$$N = 3 M \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{180^\circ}{i^0}.$$

127. Um endlich auch noch den durch Torsion erzeugten Bruch zu behandeln, sey T der Torsionswiderstand der Flächeneinheit im Augenblicke des Bruches oder als die Fasern zerreißen, so wie v der größte Werth des Radiusvectors u in der Querschnittsfläche des Prisma; so ist $\frac{u}{v} T$ der Torsionswiderstand im Augenblicke des Bruches

für die Flächeneinheit jener Punkte des Querschnittes, welche von der Achse des Prisma um die Gröfse u abstehen, und daher mit Beibehaltung der Bezeichnung in Nr. **123**, auch $T \frac{u^2}{v} d\alpha du$ der Widerstand eines Elementes des Querschnittes, so wie für das Gleichgewicht

$$PR = \frac{T}{v} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{f(\alpha)} u^3 du = \frac{T}{4v} \int_0^{2\pi} f(\alpha)^4 d\alpha$$

so, daß man also, wie die Vergleichung mit der Formel (1) in Nr. **123** zeigt, in den in Nr. **124** weiter gefundenen Ausdrücken nur (3) . . $\frac{T}{v}$ statt $\frac{Ni}{l}$ setzen darf, um für das betreffende Prisma das Moment des Torsionswiderstandes im Augenblicke des Bruches zu erhalten.

So ist also, wenn der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r oder Durchmesser d ist, dieses Widerstandsmoment gegen den Bruch, wegen $v = r$:

$$PR = \frac{1}{2} \frac{T}{r} \pi r^4 = \frac{1}{2} \pi T r^3 = \frac{\pi}{16} T d^3$$

Für einen quadratischen Querschnitt von der Seite a , wegen $v = \frac{a}{2} \sqrt{2}$:

$$PR = \frac{1}{3} T \frac{a^3}{\sqrt{2}}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten a und b findet Navier:

$$PR = \frac{1}{3} T \frac{a^2 b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Anmerkung. Wie man sieht, hat die Länge des Prisma auf den Widerstand gegen den Bruch durch Torsion keinen Einfluß und diese influirt nur in so ferne, als je größer diese ist, auch der Torsionswinkel, welcher dem Bruche entspricht, um so größer seyn muß.

128. Da die Transmissionswellen und Drehungsachsen häufig nur auf Torsion in Anspruch genommen werden, so wollen wir ihre Stärke hier noch näher untersuchen.

Ist P die Kraft in Pfunden, welche auf die Welle drehend einwirkt, R der Hebelarm in Zollen, an welchem die Kraft P angebracht ist, d der Durchmesser der Welle ebenfalls in Zollen, und i der Torsionswinkel in Gradmaß; so ist nach der vorigen Nr.

$$PR = \frac{1}{16} \pi T d^3 \quad \text{und daraus} \quad d^3 = \frac{16}{\pi T} PR$$

wobei der Werth des Coefficienten T aus der Tabelle des Comp. auf S. 610 zu nehmen ist. Für gußeiserne Wellen ist aber nach dieser

Tabelle $T = 37170$ und für Schmiedeisen 55750 . Sollen nun diese Wellen, wenn sie bloß durch Menschenkräfte in Bewegung gesetzt, nur etwa mit $\frac{1}{20}$ in Anspruch genommen werden, wenn das Materiale Gufseisen ist; so hat man aus der vorigen Gleichung, wegen $T = 1860$ sofort:

$$(a) \quad d = \cdot 14 \sqrt[3]{PR}.$$

Läßt man dieselbe Formel zugleich auch für schmiedeiserne Wellen gelten, so würden diese beiläufig nur mit $\frac{1}{30}$ ihrer Torsionsfestigkeit in Anspruch genommen.

Es ist ferner nach der Relation (a) in Nr. 124 der Torsionswinkel in Graden, d. i.

$$i^0 = 16 \frac{PR}{N} l \cdot \frac{360}{\pi^2 d^4}$$

oder wegen $PR = \frac{d^3}{(\cdot 14)^3} = \frac{d^3}{\cdot 002744}$ (aus der vorigen Gleich.)

und $N = 4956000$ für Gufs- und $N = 7434000$ für Schmiedeisen (Compend. S. 610).

$$\text{für Gufseisen} \quad i^0 = \frac{1}{23} \frac{l}{d}$$

$$\text{„ Schmiedeisen} \quad i^0 = \frac{1}{35} \frac{l}{d}$$

wobei l die Länge der Welle, ebenfalls in Zollen ausgedrückt, bezeichnet.

Da man ferner bei Wellen, welche nicht durch Menschenkräfte, sondern durch andere Motoren bewegt werden, von der Torsionsfestigkeit einen noch kleineren Bruchtheil in Anspruch nimmt; so construirt man bei solider Ausführung die eisernen Wellen nach der Formel (wobei wieder R in Zollen zu nehmen ist):

$$(b) \quad d = \cdot 166 \sqrt[3]{PR}$$

oder wenn die Welle N Pferdekkräfte zu übertragen hat und per Minute n Umdrehungen macht, wegen

$$2 \frac{R}{12} \pi \cdot \frac{n}{60} \cdot P = 430 N, \text{ woraus } PR = \frac{360 \times 430}{\pi} \frac{N}{n} \text{ folgt,}$$

auch nahe genug:

$$(c) \quad d = 6 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} *$$

dabei sind diese Wellen mit $\frac{1}{33.6}$ oder mit $\frac{1}{50}$ in Anspruch genommen, je nachdem das Materiale Gufs- oder Schmiedeisen ist.

*) Nach der Regel von *Buchanan* wird (vergl. §. 274) $d = 5.4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$.

Der Torsionswinkel ist in diesen beiden Fällen beziehungsweise:

$$i^0 = \frac{1}{39} \frac{l}{d} \quad \text{und} \quad i^0 = \frac{1}{58} \frac{l}{d}.$$

Anmerkung Wird eine Welle nicht blofs auf Torsion, sondern zugleich auf Biegung in Anspruch genommen, so berechnet man wohl auch den Wellendurchmesser zuerst nach der vorigen Formel (c) blofs für die Torsion, und bringt dann eine ringförmige oder eine Verstärkung durch 4 Längennerven an, welche für sich allein im Stande ist, der Biegung gehörigen Widerstand zu leisten.

Ist nämlich M das Elasticitätsmoment, welchem der betreffende Querschnitt der Welle (indem z. B. an dieser Stelle ein Rad aufgekeilt wird) ausgesetzt ist, m die auf 1 Quadratzoll bezogene grösste Spannung, welche bei der Biegung in diesem Querschnitte vorkommt, und E der den Dimensionen desselben entsprechende Ausdruck; so ist (Nr. 114, Anmerk. 2) $M = Pl = mE$, folglich, wenn die Verstärkung ringförmig seyn soll, in welchem Falle daher ein hohler Cylinder zu bestimmen, dessen innerer Durchmesser d ist, und äufserer $= D$ seyn soll, wegen (Nr. 107)

$$E = \frac{\pi}{32} \frac{1}{D} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} (D^3 - d^3) \quad \text{wenn man nämlich, was dabei erlaubt ist, } d^3 \text{ statt } \frac{d^4}{D} \text{ setzt, sofort:}$$

$$M = \frac{m\pi}{32} (D^3 - d^3), \quad \text{daraus folgt aber}$$

$$D = \sqrt[3]{\left[d^3 + \frac{32M}{m\pi} \right]}$$

wobei man d früher aus der obigen Relation (c) bestimmt hat.

Eben so erhält man für eine Verstärkung durch 4 Längennerven, wegen (Nr. 107) $E = \frac{b}{h} (h^3 - d^3)$ auch

$$M = \frac{mb}{6h} (h^3 - d^3) \quad \text{und daraus}$$

entweder
$$h = \sqrt[3]{\left[d^3 + \frac{6Mh}{mb} \right]}$$

oder
$$b = \frac{6Mh}{m(h^3 - d^3)}$$

je nachdem man, wenn $\frac{h}{b}$ angenommen wird, h sucht, oder wenn h angenommen wird, b bestimmen will.

Was endlich die Stärke der Wellen-Kupplungen betrifft, so ist, wenn d den Durchmesser des Zapfens oder Halses der getriebenen Welle und d' jenen des Kopfes bezeichnet, nach Nr. 127 das Widerstandsmoment eines Cylinders gegen das Abwinden vom Durchmesser d sofort $\frac{1}{16} \pi T d^3$ und vom Durchmesser d' : $\frac{1}{16} \pi T d'^3$. Nun mufs theoretisch genommen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \pi T d'^3 = \frac{1}{16} \pi T d^3 \quad \text{seyn,}$$

aus welcher Relation sofort:

$$d' = d \sqrt[3]{2} = 1.26 d$$

folgt, welcher Werth auch mit der Erfahrung gut übereinstimmt, wenn man d aus der obigen Formel (c) bestimmt, d. i.

$$d = 6 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

setzt.

Die über den Kopf der Welle zu schiebende Hülse, welche in zweifacher Weise, einmal durch den Kopf der Welle selbst, und dann noch durch den eingetriebenen Keil in Anspruch genommen wird, erhält, wenn man die best ausgeführten Kupplungen (wobei das Materiale Gufseisen ist) dabei zum Muster nimmt, nach *Redtenbacher's* Angaben folgende Dimensionen:

Metalldicke	der Kupplungshülse	$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} d$
Äußerer Durchmesser	„ „	$D = 1 + 1.92 d$
Länge	„ „	$l = 2.7 + 1.9 d$
Breite des Keils	„ „	$b = .9 \delta$
Dicke „ „	„ „	$= \frac{1}{2} b.$

Die zur Ausdehnung, Zusammendrückung, Biegung und Drehung prismatischer Körper nöthige Arbeit oder Wirkungsgröße der hierzu nöthigen Kraft.

129. Ist l die Länge, a der Querschnitt und V das Volumen eines prismatischen Stabes, welcher durch die von Null an allmählig zunehmende Kraft P der Länge nach ausgedehnt wird; so hat man, wenn M den Modul der Elasticität und e die jedem Werthe von P entsprechende Ausdehnung bezeichnet, nach §. 252 $e = \frac{Pl}{Ma}$.

Trägt man die Werthe von P auf AB (Fig. 79) als Abscissen, und die entsprechenden Werthe von e als rechtwinkelige Ordinaten auf, so liegen ihre Endpunkte M in einer geraden Linie, so, daß wenn $BC = e'$ die größte Ordinate, d. h. die Ausdehnung des Prisma im Augenblick des Zerreißens bezeichnet, AB sofort die Kraft P vorstellt, welche das Abreißen bewirkt; dann ist aber $\frac{P}{a} = m$ die absolute Festigkeit dieses Stabes und $e' = \frac{ml}{M}$.

Da nun die Wirkung W oder Arbeit dieser Kraft durch die Fläche des Dreieckes ABC ausgedrückt wird, so hat man:

$$W = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} P e' = \frac{1}{2} P \frac{m}{M} l = \frac{1}{2} \frac{P}{a} \cdot \frac{m}{M} a l$$

$$\text{d. i. } W = \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} V \text{ Pfundzoll,}$$