Anmerkung 2. Soll also ein als gewichtlos gedachter, an beiden Enden horizontal frei aufliegender Balken durch das Aufhängen eines Gewichtes $Q$ in seiner halben Länge um eben so viel, als durch das Auflegen einer über die ganze Länge gleich vertheilten Last $Q'$ gebogen werden, so mufs $Q : Q' = 5 : 8$ Statt finden.

Anmerkung 3. Nimmt, wenn man zu dem Gewichte $Q$ noch jenes $q$ hinzulegt, die Senkung oder der Pfeil $\delta$ um $\delta'$ zu, so hat man nach der vorigen Formel $(k)$ $\delta = \frac{l^3}{4Mbh^3}(Q + \frac{5}{8}G)$ und

$\delta + \delta' = \frac{l^3}{4Mbh^3}(Q + q + \frac{5}{8}G)$, folglich ist, wenn man subtrahirt

$\delta' = \frac{ql^3}{4Mbh^3}$ und daraus:

$$M = \frac{ql^3}{4\delta' bh^3}$$

ein Ausdruck, welcher oft bei practischen Versuchen bequemer als der vorige $(k)$ ist.

## Rückwirkende Festigkeit.

(§. 269.)

**121.** Es sey $AE$ (Fig. 72) ein mit seinem untern Ende $BE$ auf einer festen horizontalen Ebene sich frei stützender Stab oder Balken, dessen oberes, in derselben Verticalen $AB$ liegendes Ende mit dem Gewichte $Q$ belastet ist und dadurch die Ausbiegung $ACB$ der neutralen Schichte hervorbringt; übrigens soll diese Belastung wieder innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen, d. h. nur so grofs seyn, dafs bei ihrer Wegnahme die im Stabe entstandene Biegung wieder gänzlich verschwindet. Diefs vorausgesetzt, seyen für irgend einen Punct $M$ der Curve $ACB$, $AP = x$ und $PM = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten, so wie für den Halbirungspunct $C$, $AD = \frac{1}{2}l$ und $DC = \delta$, so dafs also $\delta$ die gröfste Ordinate oder die Biegung bezeichnet.

Da nun dieser Fall mit jenem in Nr. **118** behandelten, in welchem der Stab horizontal an dem einen Ende befestigt und am andern vertical belastet, ganz analog ist, mit dem einzigen Unterschiede, dafs dort das statische Moment der Last in Beziehung auf den Querschnitt in $M = Qx$ ist, während es hier durch $Qy$ ausgedrückt wird, hat man, ohne dieselbe Entwicklung von vorne zu wiederholen, wenn man in der Gleichung $(a)$, Nr. **118**, $Qy$ statt $Qx$ setzt, sofort:

$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Qy}{E'}$ oder wenn man mit $dy$ multiplicirt:

$dy\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{E'}\,y\,dy$, und da d$x$ constant ist: $\frac{1}{2}\,d.\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right) = -\frac{Q}{E'}.\frac{1}{2}\,d.y^2$

folglich ist, wenn man integrirt: $\frac{dy^2}{dx^2} = C - \frac{Q}{E'}\,y^2$.

Da für $y = \delta$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so hat man zur Bestimmung der Constanten $C$ die Bedingungsgleichungen $o = C - \frac{Q}{E'}\,\delta^2$, woraus $C = \frac{Q}{E'}\,\delta^2$ folgt, so daſs

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{Q}{E'}\,(\delta^2 - y^2) \text{ wird.}$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner $dy = dx\sqrt{\frac{Q}{E'}}.\sqrt{(\delta^2 - y^2)}$

oder $\frac{dy}{\sqrt{(\delta^2 - y^2)}} = dx\sqrt{\frac{Q}{E'}}$, so daſs man durch Integration derselben erhält:

$$(1)\quad arc\,Sin\left(\frac{y}{\delta}\right) = x\sqrt{\frac{Q}{E'}},$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn muſs.

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

$$(2)\quad y = \delta\,Sin\left(x\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right)$$

und da für $x = l$ abermals $y = 0$ ist, auch $0 = \delta\,Sin\left(l\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right)$, woraus, da $\delta$ von Null verschieden, $Sin\left(l\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right) = 0$ oder $l\sqrt{\frac{Q}{E'}} = n\,\pi$ ist, wobei $n = 1, 2$ . . d. i. jede ganze Zahl bezeichnet.

Aus dieser letzten Gleichung folgt endlich:

$$Q = \frac{n^2\,\pi^2\,E'}{l^2} \quad . . \quad (3)$$

als diejenige Last, welche in dem Stabe oder Prisma die Biegung hervorbringt.

Endlich nimmt die Gleichung (2) der Curve, wenn man für $Q$ den eben gefundenen Werth aus (3) substituirt, auch die Form an:

$$y = \delta\,Sin.\frac{n\,\pi}{l}\,x \quad . . \quad (4)$$

Anmerkung. Da in der vorigen Gleichung (3) der Pfeil $\delta$ gar nicht vorkömmt, so ist dieſs ein Beweis, daſs die Last $Q$ mit jeder Biegung (wobei $\delta$ gröſser oder kleiner seyn kann) des Stabes im Gleichgewichte steht, was sich daraus erklärt, daſs das statische Moment von $Q$ eben so wie der Pfeil $\delta$ zunimmt. Dieselbe Last $Q$ ist daher auch hinreichend um den Stab selbst abzubrechen.

**122.** Setzt man als einfachsten Fall in den obigen Formeln (3) und (4) $n = 1$, welchem Falle die Curve in Fig. 73 entspricht; so wird dafür: (5) $Q = \frac{\pi^2}{l^2} E'$ und $y = \delta \, Sin \frac{\pi}{l} x$ . . . (6)

Für $n = 2$, welchem Falle die Curve in Fig. 74 entspricht, wobei diese nämlich in der Mitte $C$ der Verticalen $AB$ festgehalten wird, hat man: $Q = \frac{4\pi^2}{l^2} E'$ und $y = \delta \, Sin. \frac{2\pi}{l} x$ u. s. w.

Ist nun der Querschnitt des Stabes oder Prisma ein Rechteck von den Seiten $b$ und $h$, wobei die letztere die kleinere seyn soll, nach welcher also (Fig. 72) die Ausbiegung (wie bei einem Bret von der Breite $b$ und Dicke $h$) Statt findet; so ist (Nr. **116**) $E' = \frac{1}{12} M b h^3$ und daher, wenn man diesen Werth in der vorigen Gleichung (5) substituirt:

$$Q = \pi^2 M \frac{b h^3}{12 l^2} \quad \text{(Vergl. §. 270, Gleich. 1)}$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser $r$, also $E' = \frac{1}{4} \pi M r^4$; so ist $Q = \pi^3 M \frac{r^4}{4 l^2}$.

Eben so ist für einen hohlen Cylinder von den Halbmessern $R$ und $r$, wegen $E' = \frac{1}{4} \pi M (R^4 - r^4)$ sofort $Q = \pi^3 M \left(\frac{R^4 - r^4}{4 l^2}\right)$ (Vergl. §. 270.)

Anmerkung 1. Läfst man die Entfernung der beiden Puncte $AB$ der Verticalen $ADB$ (Fig. 72) nicht auch zugleich (wie es für geringe Biegungen immer zulässig ist) für die Länge der Curve $ACB$ gelten; so sey diese Länge $= l$, während $AB = a$ seyn soll. Dann folgt aus der vorigen Gleichung (6) $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{a} \delta \, Cos \frac{\pi}{a} x$, und es ist $ds = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} =$

$$dx \left(1 + \frac{\pi^2}{a^2} \delta^2 Coz^2 \frac{\pi}{a} x\right)^{\frac{1}{2}} = dx \left(1 + \tfrac{1}{2} \pi^2 \frac{\delta^2}{a^2} Cos^2 \frac{\pi}{a} x\right) = dx \left(1 + \tfrac{1}{2} \pi^2 \frac{\delta^2}{a^2}\right)$$

wenn man nämlich die 4ten und höhern Potenzen des sehr kleinen Bruches $\frac{\delta}{a}$ ausläfst und für den Cosinus das 1ste Glied der entsprechenden Reihe nimmt.

Es ist also $l = \int_0^a ds = \int_0^a dx \left(1 + \frac{1}{2} \pi^2 \frac{\delta^2}{a^2}\right)$

d. i. $l = a \left(1 + \frac{1}{2} \pi^2 \frac{\delta^2}{a^2}\right)$ und daraus $\delta = \frac{1}{\pi} \sqrt{[2a(l-a)]}$ (*Poisson* und *Navier* haben hier, wohl nur in Folge eines Rechnungsfehlers, in beiden Formeln statt der Ziffer 2 jene 4.)

Anmerkung 2. Ist der Stab $AB$ (Fig. 75) an seinem untern Ende $B$ befestigt, so geht sein oberer Endpunct $A$ durch die Belastung $Q$ aus der

Verticalen $BE$ heraus und man findet für die entsprechende Curve $AMB$, wenn wieder ihre Länge $AMB = l$, $AP = x$, $PM = y$ und $BD = \delta$ ist, da sich im Gange der Entwicklung in Nr. **121** bis zur Gleichung (2), die auch hier noch gilt, dadurch nichts ändert, ebenfalls wieder:

$$y = \delta \operatorname{Sin}\left(x\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right).$$

Da aber für $x = l$ (wenn man nämlich wieder für geringe Biegungen $AMB = AD$ se zt) $y = \delta$ seyn muſs, so folgt aus dieser Gleichung $\operatorname{Sin}\left(x\sqrt{\frac{Q}{E'}}\right) = 1$ also, wenn man für $n$ die kleinste Zahl nimmt, welche dieser Bedingung Genüge leistet, $l\sqrt{\frac{Q}{E'}} = \frac{\pi}{2}$, woraus sofort

$$Q = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 E'$$

folgt. Wird $\frac{1}{2}l$ statt $l$ gesetzt, so geht dieser Ausdruck, wie es seyn soll, in den obigen (5) über.

## Torsionsfestigkeit.

(§. 272.)

**123.** Es sey $CO = l$ die Länge des an dem Ende $DE$ (Fig. 76) unveränderlich befestigten prismatischen Körpers und $CF = R$ die Länge des am andern, freien Ende senkrecht auf der Achse $CO$ stehenden Hebelarmes, an welchen die Kraft $P$ normal wirkt und dadurch in Folge der entstehenden Verdrehung der Fasern, den Durchmesser $AB$ in die Lage $A'B'$, jenen $ab$ in die Lage $a'b'$ u. s. w. bringt, jenen $DE$ des letzten, am befestigten Ende befindlichen Querschnitte aber unverrückt läſst, wodurch also die an der Oberfläche liegende Faser $DaA$ die Lage $Da'A'$ annimmt.

Setzt man den Drehungswinkel im ersten Querschnitt (vom freien Ende aus gezählt) $ACA' = i$, jenen im Querschnitt $adbd'$ dessen Abstand $Oc = x$ seyn mag $aca' = i'$, so ist der Natur der Sache nach $i' < i$, so zwar, daſs der Winkel $i'$ dem Abstande $x$ proportional oder $i' : i = x : l$, also $i' = \frac{x}{l}\,i$ ist. Läſst man $x$ in $x + n$ übergehen, wobei $n$ jede beliebige auch noch so kleine Gröſse bezeichnen kann, und denkt sich in dieser Entfernung von $O$ ebenfalls einen Querschnitt (immer normal auf die Achse $OC$), in welchem der entsprechende Drehungswinkel $= i''$ seyn soll; so hat man eben so $i'' = \frac{x+n}{l}\,i$, folglich ist die Differenz $i'' - i' = \frac{n}{l}\,i$.