$E' = {}^{\cdot}110\, M r^4$, dabei ist es gleichgiltig, ob der Punct D des Kreisbogens unterhalb AB (wie in der Zeichnung) oder oberhalb AB liegt.

3) Um das Biegungsmoment des in Fig. 68 dargestellten, gegen die neutrale Achse mn symmetrischen Querschnittes zu finden, darf man nur von dem Momente des ganzen als voll gedachten Rechteckes $b'h$, jenes der vier hohlen Rechtecke $\frac{1}{4}(b'-b)(h-h')$, deren neutrale Achsen von jener mn um die Gröſse $\frac{1}{4}(h+h')$ abstehen, abziehen; dadurch erhält man: $E' = \frac{1}{12} b' h^3 - \frac{1}{48}(b'-b)(h-h')^3 - \frac{1}{16}(b'-b)(h-h')(h+h')^2$, oder nach gehöriger Entwicklung und Reduction:

$$E' = \tfrac{1}{12} M [b h^3 + (b'-b) h'^3].$$

4) Um endlich noch das Biegungsmoment E' des $\top$ förmigen Querschnittes in Fig. 68′ zu finden, wobei auſser der in der Figur ersichtlichen Bezeichnung $ab + a'b' = b'$ seyn soll, hat man zuerst Alles auf die Achse AB bezogen, das Moment des ganzen, voll genommenen Rechteckes bh d. i. (Relat. α) $\quad \mu' = \frac{1}{12} M b h^3 + M . b h \, \frac{1}{4} h^2 = \frac{1}{3} M b h^3$;
eben so ist das Moment der beiden hierzu fehlenden Rechtecke $= \frac{1}{3} M b' h'^3$, also das Moment des $\top$ förmigen Querschnittes in Beziehung auf die Achse AB: $\quad \mu' = \frac{1}{3} M (b h^3 - b' h'^3)$.

Um nun auf die neutrale, durch den Schwerpunct O gehende Achse überzugehen, hat man $F = bh - b'h'$ und $Fe = b(h-h')\dfrac{(h+h')}{2} + (b-b')h'\dfrac{h'}{2} = \dfrac{b h^2 - b' h'^2}{2}$, folglich $e = \dfrac{b h^2 - b' h'^2}{2(bh - b'h')}$, demnach nach der obigen Formel (β):

$$\mu' = E' = \tfrac{1}{3} M (b h^3 - b' h'^3) - \tfrac{1}{4} M \frac{(b h^2 - b' h'^2)^2}{bh - b'h'}$$

$$= \tfrac{1}{12} M \frac{(b h^2 - b' h'^2)^2 - 4 b b' h h' (h - h')^2}{bh - b'h'}.$$

Anmerkung 2. Ist das Biegungsmoment eines Körpers $E' = MX$ bekannt, so läſst sich auch daraus leicht die relative Festigkeit und das Tragvermögen bestimmen. Es ist nämlich, wie man leicht sieht, die Festigkeit $Ql = \dfrac{m}{Mh} E'$ und das Tragvermögen $Ql = \dfrac{m'}{Mh} E'$, wenn m die Spannung der äuſsersten, von der neutralen Schichte um h abstehenden Fasern im Augenblicke des Zerreiſsens (die absolute Festigkeit) und m' die Spannung dieser Fasern in dem Augenblicke, als ihre Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht hat, bezeichnet. Ist diese Ausdehnung $= \lambda$ und die Spannkraft in diesem Augenblicke $= m'$; so ist (§. 252) $\lambda = \dfrac{l m'}{M}$ also $m' = \dfrac{M\lambda}{l}$.

Bestimmung des Moduls der Elasticität M.

118. Um zu zeigen wie man den Modul der Elasticität für die verschiedenen biegsamen Körper durch Versuche findet, setzen wir wieder den Fall, dafs der Balken $C'N$ (Fig. 48 und Fig. 49) an dem einen Ende eingemauert und an dem andern belastet sey, wodurch er eine Biegung annehmen soll, welche jedenfalls noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt. Es sey nun AMB (Fig. 69) die Curve, welche die neutrale Faserschichte dabei annimmt, und für einen beliebigem Punct M derselben die horizontale Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, der Krümmungshalbmesser $= \rho$ und der Winkel, welchen die an M gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet $= \alpha$; so ist unter der Voraussetzung einer nur geringen Biegung, wie sie auch wirklich in der Praxis vorkommt, die Länge der Horizontalprojection $AP = AM$ und $AC = AMB = l$, so wie (Nr. **115**, Gleich. 2) $\rho\, Q\, x = E'$ . . (n) (wenn man nämlich das eigene Gewicht des Körpers vernachlässigt).

Um jedoch den Krümmungshalbmesser ρ durch eine leichter mefsbare Gröfse, und zwar durch die im Anfangspuncte A Statt findende Senkung, Biegung oder den Pfeil $A'A = BC$, den wir durch δ bezeichnen wollen, zu ersetzen, hat man (Comp. §. 710)

$\rho = -\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$ oder da für kleine Biegungen:

$\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$ so klein ist, dafs man die zweite Potenz davon gegen die Einheit auslassen darf, auch $\rho = -\frac{dx^2}{d^2y}$, folglich ist, wenn man diesen Werth für ρ in der vorigen Gleichung substituirt: $Q\,x\,\frac{dx^2}{d^2y} = -E'$,

oder $$(a)\ .\ .\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Q}{E'}\,x,$$

d. i. $d.\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{Q}{E'}\,x\,dx$, weil dx constant ist.

Diese Gleichung integrirt, gibt $\frac{dy}{dx} = C - \frac{Q}{E'}\frac{x^2}{2}$.

Um die Constante C zu bestimmen, bemerke man, dafs für $x = l$ die Ordinate y am gröfsten wird, oder was zu demselben Schlusse führt, die Tangente in B mit der Abscissenachse parallel läuft, so, dafs für diesen Werth von x der Quotient $\frac{dy}{dx} = 0$ wird; diefs gibt:

$0 = C - \frac{Q}{E'}\frac{l^2}{2}$ woraus $C = \frac{Q}{E'}\frac{l^2}{2}$ und mit diesem Werthe:

$$(r)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2E'}(l^2 - x^2) \text{ oder } dy = \frac{Q}{2E'}(l^2 - x^2)\,dx \text{ folgt.}$$

Wird diese letztere Gleichung abermals integrirt, so erhält man:

$$(s) \quad y = \frac{Q}{2E'}\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x=0$ auch $y=0$ seyn mufs. Setzt man in dieser letzten Gleichung $x=l$, so geht dafür y in δ über und man hat:

$$(t) \quad \delta = \tfrac{1}{3}\frac{Q\,l^3}{E'}\,.$$

Setzt man endlich für E' den Werth MX (Nr. **116**) und bestimmt M, so hat man für den Modul der Elasticität:

$$(u) \quad M = \tfrac{1}{3}\frac{Q\,l^3}{\delta\,X}$$

wobei die lediglich von der Form und Gröfse des Querschnittes abhängige Gröfse $X = \frac{E'}{M}$ in Nr. **116** für die wichtigsten Fälle angegeben ist.

Ist z. B. der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und Höhe h, so ist $X = \frac{1}{12}\,b\,h^3$, folglich nach (u):

$$M = \tfrac{1}{3}\frac{Q\,l^3}{\delta}\cdot\frac{12}{b\,h^3} = 4\,Q\,\frac{l^3}{\delta\,b\,h^3}$$

(Vergl. §. 264 Gleich. 3.)

Wäre dabei umgekehrt M bekannt und die Biegung δ zu bestimmen, so wäre aus dieser letztern Gleichung $\delta = \frac{4\,Q\,l^3}{M\,b\,h^3}$ (Gleich. 2) so wie endlich bei diesem Querschnitte, die am freien Ende A aufzuhängende Last Q, welche die Biegung δ hervorbringt, aus der Gleichung

$$Q = \frac{\delta\,M\,b\,h^3}{4\,l^3} \quad \text{(Gleich. 1)}$$

zu bestimmen wäre.

Auf dieselbe Weise erhält man die, jedem andern bisher behandelten Querschnitte, entsprechenden Gleichungen für M, δ und Q.

119. Soll das eigene Gewicht G des Balkens oder Prisma mit berücksichtigt werden, so mufs man, da das Stück $AP=x$ das Gewicht $G\frac{x}{l}$ hat und auf den Querschnitt in M das statische Moment $\frac{1}{2}G\frac{x}{l}.x = \frac{1}{2}G\frac{x^2}{l}$ ausübt, in der obigen Gleichung (n) (vorige Nr.) statt $Q\,x$ setzen $Q\,x + P\,x^2$, wenn man nämlich indefs $\frac{G}{2l} = P$ setzt. Dadurch erhält man bei dem nämlichen Verfahren wie vorhin, ohne Schwie-

rigkeit: $$y = \frac{l^2}{E'}\left(\tfrac{1}{2}Q + \tfrac{1}{3}Pl\right)x - \frac{1}{12\,E'}\left(2\,Q\,x^3 + P\,x^4\right)$$
und daraus, wenn man gleichzeitig $x = l$ und $y = \delta$ setzt und den Werth von P wieder herstellt:

$$\delta = \frac{l^3}{E'}\left(\tfrac{1}{3}Q + \tfrac{1}{8}G\right) \;.\;. \quad (f)$$

Ist $G = 0$, so geht dieser Werth von δ in den obigen (t) über. Ist aber $Q = 0$, so erhält man für die Biegung, welche das eigene Gewicht des Stabes oder eine über die ganze Länge desselben gleich vertheilte Last G hervorbringt: $\delta' = \frac{1}{8}\,\frac{G\,l^3}{E'}$.

Ist also die Last Q einmal am freien Ende angebracht, und das zweite Mal über die ganze Länge gleichförmig vertheilt, so verhalten sich die entstehenden Biegungen $\delta : \delta' = \frac{1}{3} : \frac{1}{8} = 8 : 3 = 1 : \frac{3}{8}$.

Anmerkung 1. Die vorige Formel (f) d. i. $\delta = \frac{l^3}{3\,E'}\left(Q + \frac{3}{8}\,G\right)$ mit der obigen (t) d. i. mit $\delta = \frac{Q\,l^3}{3\,E'}$ verglichen, zeigt, dafs das eigene Gewicht des Stabes so wirkt, als ob $\frac{3}{8}$ davon am freien Ende aufgehangen wäre.

Anmerkung 2. Die obige Gleichung (r) gibt $tang\,\alpha = \frac{Q}{2\,E'}\left(l^2 - x^2\right)$ und für den Anfangspunct A, wegen $x = 0$ sofort $tang\,\alpha = \frac{Q\,l^2}{2\,E'} = \frac{3\,\delta}{2\,l}$ (wegen Gleich. t). Endlich stellt die Relation (s) die Gleichung der Curve AMB vor, welche man die elastische Linie nennt, ihre stärkste Krümmung findet in B statt, wofür der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{E'}{Q\,l}$ ist.

120. Wirkt die am freien Ende des biegsamen oder elastischen Stabes angebrachte Kraft Q wie in Fig. 70 aufwärts, so ändert sich in der Gleichung (s) der Curve gar nichts, dagegen mufs in jener (f), in welcher das Gewicht des Stabes berücksichtigt ist, dieses negativ genommen werden, so dafs man für die Biegung den Ausdruck erhält:

$$\delta = \frac{l^3}{24\,E'}\left(8\,Q - 3\,G\right) \;.\;. \quad (f').$$

Liegt nun ein Balken oder ein Stab horizontal auf beiden Enden frei auf, wie in Fig. 71, und wird dieser in der Mitte mit dem Gewichte Q belastet, so bringt dieses im Verein mit dem eigenen Gewichte eine Biegung δ hervor, die sich (stets unter der Voraussetzung, das die

Belastung innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt) auf folgende Weise bestimmen läfst.

Ist q der Druck, welchen jede der beiden Stützen erleidet und G' das Gewicht von der halben Länge l' des Stabes, so befindet sich jede solche Hälfte, wie z. B. jene ACD, in derselben Lage, als wenn diese in CD eingemauert und am freien Ende A durch eine Kraft q vertical aufwärts gezogen würde; es ist daher nach der vorigen Formel (f') die Biegung:

$$\delta = \frac{l'}{24\,E'}(8\,q - 3\,G')$$

oder wegen $l' = \frac{1}{2}l$ (wenn $AB = l$), $q = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}G$ und $G' = \frac{1}{2}G$, wenn nämlich wieder G das Gewicht des ganzen Balkens bezeichnet, nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$\delta = \frac{l^3}{48\,E'}(Q + \tfrac{5}{8}G) \quad . \quad (i)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dafs eine über die ganze Länge gleichförmig vertheilte Last G gerade so wirkt, als ob an dem gewichtslosen Stabe in der Mitte ein Gewicht von $\frac{5}{8}G$ angehängt würde.

Da diese Formel für die practische Bestimmung des Elasticitätsmoduls am bequemsten ist, wobei gewöhnlich Prismen von rechteckigen Querschnitten benützt werden, wofür also (Nr. **116**) $E' = \frac{1}{12}M\,b\,h^3$ ist; so hat man ganz einfach daraus, wenn h vertical, also b horizontal ist:

$$M = \frac{l^3}{4\,\delta\,b\,h^3}(Q + \tfrac{5}{8}G) \quad . \quad . \quad (k)$$

Anmerkung 1. Liegt das Prisma, wie vorhin, auf den beiden um $AB = l$ voneinander entfernten Stützen, frei auf, und wird dieses nicht in der Mitte, sondern in dem Puncte F (Fig. 71′) mit dem Gewichte Q belastet und setzt man $AD = BD = a$, $DE = z$, $EF = \delta$, so wie für die Curve AMF, $AP = x$, $PM = y$ und für jene $BM'F$, $BP' = x$, $P'M' = y$; so ist der Druck auf die Stütze A, $p = \frac{1}{2}Q\frac{(a+z)}{a}$ und jener auf die Stütze B, $p' = \frac{1}{2}Q\frac{(a-z)}{a}$ und die beiden Theile AF und BF des Prisma befinden sich in derselben Lage, als ob sie in F eingemauert und beziehungsweise durch die Kräfte p und p' senkrecht aufwärts gezogen würden.

Mit Vernachlässigung des eigenen Gewichtes hat man daher nach der Relation (a) in Nr. **118** für den Theil AMF:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p}{E'}x \text{ oder durch Integration } \frac{dy}{dx} = C - \frac{p}{E'}\frac{x^2}{2}\,.$$

Setzt man zur Bestimmung der Constanten C den Winkel, welchen die im Puncte F an die Curve gezogene Tangente mit der Horizontalen AB bildet $= \alpha$, so wird für $x = AE = a - z$ der Quotient $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha$, daher ist

$$tang\,\alpha = C - \frac{p}{E'}\,\frac{(a-z)^2}{2} \quad \text{oder} \quad C = \frac{p}{2E'}(a-z)^2 + tang\,\alpha\ , \text{ folglich}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2E'}\left[(a-z)^2 - x^2\right] + tang\,\alpha.$$

Durch weitere Integration erhält man aus dieser Gleichung:

$$y = \frac{p}{2E'}\left[(a-z)^2 x - \frac{x^3}{3}\right] + x\, tang\,\alpha.$$

Da nun für $x = AE = (a-z)$ die Ordinate $y = \delta$ werden mufs, so hat man:

$$\delta = \tfrac{1}{3}\,\frac{p}{E'}(a-z)^3 + (a-z)\,tang\,\alpha,$$

Genau auf dieselbe Weise erhält man für die Curve $BM'F$ die Gleichung

$$y = \frac{p'}{2E'}\left[(a+z)^2 x - \frac{x^3}{3}\right] - x\,tang\,\alpha \quad \text{und}$$

$$\delta' = \tfrac{1}{3}\,\frac{p'}{E'}(a+z)^3 - (a+z)\,tang\,\alpha.$$

Da nun $\delta' = \delta$ ist, so erhält man durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke und wenn man zugleich für p und p' die Werthe setzt:

$$\tfrac{1}{6}Q\,\frac{(a+z)}{aE'}(a-z)^3 + (a-z)\,tang\,\alpha = \tfrac{1}{6}Q\,\frac{(a-z)}{aE'}(a+z)^3 - (a+z)\,tang\,\alpha.$$

Aus dieser Gleichung folgt $tang\,\alpha = \tfrac{1}{3}\,\frac{Q}{aE'}\,z\,(a^2 - z^2)$ und damit aus einer der beiden vorigen Gleichungen:

$$\delta = \frac{Q}{6aE'}(a^2 - z^2)^2 \quad \text{oder wegen } a = \tfrac{1}{2}l \text{ auch}$$

$$\delta = \frac{Q}{3lE'}(\tfrac{1}{4}l^2 - z^2)^2\ .\ .\ (m)$$

Für $z = 0$ erhält man $\delta = \frac{Ql^3}{48E'}$, übereinstimmend mit dem Ausdrucke in (i), wie es seyn soll.

Bezeichnet man die in F aufgehängte Last durch $2Q$ und setzt die Entfernung $AB = 2l$, so wird

$$EF = \delta = \tfrac{1}{3}\,\frac{Q}{lE'}(l^2 - z^2)^2$$

oder für $AE = a$ und $BE = a'$ auch $\delta = \tfrac{2}{3}\,\frac{Q}{E'}\,\frac{a^2 a'^2}{a + a'}$.

So wäre z. B. für ein hochkantig gelegtes Prisma von rechteckigem Querschnitt, dessen Dimensionen b und h sind und wobei $h > b$, wegen (Nr. **116**) $E' = \tfrac{1}{12}Mbh^3$, sofort $\delta = 8\,\frac{Q}{Mbh^3}\,\frac{a^2 a'^2}{a + a'}$ oder wenn man die ganze aufgehängte Last mit Q bezeichnet; $\delta = \frac{4Q}{Mbh^3}\,\frac{a^2 a'^2}{a + a'}$.

Für $a = a' = \tfrac{1}{2}l$ erhält man, übereinstimmend mit der Relation (k):

$$\delta = \frac{Ql^3}{4Mbh^3}.$$

Anmerkung 2. Soll also ein als gewichtlos gedachter, an beiden Enden horizontal frei aufliegender Balken durch das Aufhängen eines Gewichtes Q in seiner halben Länge um eben so viel, als durch das Auflegen einer über die ganze Länge gleich vertheilten Last Q' gebogen werden, so mufs $Q : Q' = 5 : 8$ Statt finden.

Anmerkung 3. Nimmt, wenn man zu dem Gewichte Q noch jenes q hinzulegt, die Senkung oder der Pfeil δ um δ' zu, so hat man nach der vorigen Formel (k) $\delta = \frac{l^3}{4 M b h^3}(Q + \frac{5}{8} G)$ und

$\delta + \delta' = \frac{l^3}{4 M b h^3}(Q + q + \frac{5}{8} G)$, folglich ist, wenn man subtrahirt

$\delta' = \frac{q l^3}{4 M b h^3}$ und daraus:

$$M = \frac{q l^3}{4 \delta' b h^3}$$

ein Ausdruck, welcher oft bei practischen Versuchen bequemer als der vorige $(k$ ist.

Rückwirkende Festigkeit.

(§. 269.)

121. Es sey AE (Fig. 72) ein mit seinem untern Ende BE auf einer festen horizontalen Ebene sich frei stützender Stab oder Balken, dessen oberes, in derselben Verticalen AB liegendes Ende mit dem Gewichte Q belastet ist und dadurch die Ausbiegung ACB der neutralen Schichte hervorbringt; übrigens soll diese Belastung wieder innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen, d. h. nur so grofs seyn, dafs bei ihrer Wegnahme die im Stabe entstandene Biegung wieder gänzlich verschwindet. Diefs vorausgesetzt, seyen für irgend einen Punct M der Curve ACB, $AP = x$ und $PM = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten, so wie für den Halbirungspunct C, $AD = \frac{1}{2} l$ und $DC = \delta$, so dafs also δ die gröfste Ordinate oder die Biegung bezeichnet.

Da nun dieser Fall mit jenem in Nr. **118** behandelten, in welchem der Stab horizontal an dem einen Ende befestigt und am andern vertical belastet, ganz analog ist, mit dem einzigen Unterschiede, dafs dort das statische Moment der Last in Beziehung auf den Querschnitt in $M = Qx$ ist, während es hier durch Qy ausgedrückt wird, hat man, ohne dieselbe Entwicklung von vorne zu wiederholen, wenn man in der Gleichung (a), Nr. **118**, Qy statt Qx setzt, sofort:

$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Qy}{E'}$ oder wenn man mit dy multiplicirt: