$$\tfrac{1}{6} m b y^2 = \tfrac{1}{2} q (a^2 - x^2) \text{ woraus } y^2 = \frac{3q}{mb}(a^2 - x^2)$$

oder wegen (für den mittlern Querschnitt CD) $\frac{1}{2} a q = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{a}$,

woraus $\frac{3q}{mb} = \frac{h^2}{a^2}$ folgt, auch $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

als Gleichung der Begrenzungscurve AMB, welche sofort eine (halbe) Ellipse von den Achsen $2a = l$ und $2h = 2a\sqrt{\frac{3q}{mb}}$ st, deren grofse Achse $2a$ in AB liegt.

Biegungswiderstand prismatischer Körper.

(§. 264.)

114. Ist wieder, mit Beibehaltung der Bezeichnung in Nr. **94**, GD (Fig. 48) der an dem einen Ende unbeweglich befestigte oder eingemauerte und an dem andern Ende mit dem Gewichte Q belastete prismatische Körper und dadurch in demselben eine Biegung entstanden, welche noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt; so sey um einen Ausdruck für den Widerstand der Biegung zu finden AOB (Fig. 49) die neutrale Schichte, darauf $AO = z$, $OO' = \mathrm{d}z$ und $AB = l$, ferner wieder $BC = h$ und die Spannung der obersten Faser in $d = p'$ und in $C = p$. Zieht man in den Puncten O und O' die Normalen Oc', $O'f$ der Curve AOB und verlängert diese bis zu ihrem Durchschnittspunct J, so bildet dieser den Mittelpunct des Krümmungskreises für das Curvenelement OO', wofür $JO = JO' = \rho$ der Krümmungshalbmesser ist.

Die ursprüngliche, vor der Biegung bestandene Länge der obersten Faser in dem Körperelement fd ist $ed = \mathrm{d}z$, dagegen nach der Biegung $ec = \mathrm{d}z + \Delta\mathrm{d}z$, wobei die bewirkte, nach unserer Annahme innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Ausdehnung $cd = \Delta\mathrm{d}z$, durch die in §. 252 Gleich. (1) ausgedrückte Relation $\Delta\mathrm{d}z = \frac{p'\mathrm{d}z}{M}$ oder wegen $p' : p = z : l$ woraus $p' = \frac{p}{l} z$ folgt, durch $\Delta\mathrm{d}z = \frac{p}{lM} z\,\mathrm{d}z \,..\, (a)$ ausgedrückt wird, wobei M den Elasticitätsmodul des Balkens bezeichnet.

Da die Bogenelemente OO' und cd als gerade Linie zu nehmen sind, so geben die beiden ähnlichen Dreiecke OJO' und cOd die Proportion $dO : dc = O'J : OO'$ d. i. $h : \Delta\mathrm{d}z = \rho : \mathrm{d}z$, so, dafs also, wenn man für $\Delta \mathrm{d}z$ den Werth aus der vorigen Gleichung (a) setzt,

$h\,\mathrm{d}z = \frac{p}{Ml}\rho\, z\,\mathrm{d}z$ oder $\rho = \frac{Mhl}{pz} \ldots$ (b) wird.

Bei der gemachten Voraussetzung ist aber, wenn man Kürze halber den doppelten Integralausdruck in (A) Nr. **97**, d. i.

$2\int_0^h y\,x^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{h'} y'\,x^2\,\mathrm{d}x = X$ setzt, sofort $Q = \frac{pX}{hl}$, also

$p = \frac{Qhl}{X}$, und wenn man diesen Werth für p in der vorigen Gleichung

(b) substituirt, auch: $\rho = \frac{MX}{Qz} \ldots$ (c)

woraus man für das statische Moment der Kraft oder des Gewichtes Q in Beziehung auf den Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) oder dd' (Fig. 49) erhält:

$$Qz = \frac{MX}{\rho} \ldots (1)$$

wenn man nämlich dabei das Gewicht des Körpers aufser Acht läfst.

Anmerkung 1. Da nach der obigen Proportion $p' : p = z : l$, $pz = p'l$ ist, so folgt aus der vorigen Gleichung (b), wenn man diesen Werth substituirt: $p' = \frac{Mh}{\rho}$, woraus sofort folgt, dafs die Spannung der Fasern im Querschnitte dd' dem entsprechenden Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional ist.

Anmerkung 2. Übereinstimmend mit der Bemerkung in Nr. **107**, wo das Product $mE = Ql$ das Brechungsmoment genannt wurde, wenn m den Brechungscoeffizienten, oder die im Augenblicke des Bruches Statt findende gröfste Spannung auf 1 Quadratzoll Querschnitt bezeichnet, eben so nennt man auch mE das Elasticitätsmoment eines Querschnitts, d. h. die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, welche in einem Querschnitt eines Stabes in Folge einer Biegung desselben entstehen, wenn man unter m die auf 1 Quadratzoll bezogene gröfste Spannung, welche bei der Biegung in dem betreffenden Querschnitt vorkommt, versteht (so, dafs also hier für m nur ein gewisser Bruchtheil, für Maschinenconstructionen in der Regel der 10te Theil von dem Werthe m in der erstern Bedeutung, d. i. vom Brechungscoeffizienten zu nehmen ist).

Bezeichnet man nämlich das Elasticitätsmoment irgend eines Querschnittes durch M, so ist:

$$(\gamma) \;.\;.\; M = mE$$

wobei auch $mE = Pl$ ist und E die den verschiedenen Querschnitten entsprechenden (in Nr. **107** angegebenen) Werthe besitzt.

115. Da der Zähler MX des vorigen Bruches, welcher lediglich von der physischen Beschaffenheit (wegen M) und der Form des Querschnittes des prismatischen Körpers (wegen X) abhängt, für einen gegebenen prismatischen Körper constant ist, so folgt, daſs der auf den Querschnitt dd' (Fig. 49) sich beziehende Krümmnngshalbmesser ρ genau in demselben Verhältniſs abnimmt, in welchem die Entfernung z des betreffenden Querschnittes vom freien Ende A zunimmt, so daſs also ρ im Querschnitte CC', nämlich für $z = l$ seinen kleinsten Werth erreicht hat, also die Krümmung und Spannung der Fasern an dieser Stelle am gröſsten ist. (Siehe Anmerk. 1. zu Nr. **114.**)

Das genannte Product MX, welches sofort für alle Querschnitte des Körpers oder Balkens constant ist, wird nach Einigen das Biegungsmoment, nach Andern die relative Elasticität des Balkens genannt; wir wollen die erstere Benennung beibehalten und dieses Moment durchaus mit E' bezeichnen. Dieſs vorausgesetzt, geht die vorige Gleichung (1) über in folgende:

$$Qz = \frac{E'}{\rho} \quad . \; . \quad (2)$$

116. Eine Vergleichung des Biegungsmomentes $E' = MX$ mit dem Momente der relativen Festigkeit (A) in Nr. **97.**, d. i. mit Qz oder $Ql = \frac{p}{h} X$ zeigt, daſs man in diesem Festigkeitsmoment nur M statt p setzen und mit dem Abstand h der obersten oder am stärksten gespannten Fasern multipliciren darf, um für alle Querschnitte des Balkens das Biegungsmoment E' zu erhalten; es ist nämlich durchaus: $E' = MhE$ (γ). Da wir in Nr. **107** das Festigkeitsmoment durch pE oder mE ausgedrückt und dort auch für verschiedene Querschnitte die Werthe von E angegeben haben, so erhält man am einfachsten die Werthe E' aus diesen letztern mE durch das eben angegebene Verfahren. Man findet so ganz einfach für einen rechteckigen Querschnitt, wobei b die Breite und h die Höhe ist, $E' = \frac{1}{6} Mbh^2 \times \frac{1}{2} h = \frac{1}{12} Mbh^3$; für einen quadratförmigen Querschnitt von der Seite a, $E' = \frac{1}{12} Ma^4$; für einen kreisförmigen Querschnitt vom Halbmesser r oder Durchmesser d, $E' = \frac{1}{4} \pi Mr^4 = \frac{1}{64} \pi Md^4$; für einen hohlen Cylinder von den Halbmessern r und r', oder Durchmessern d und d', $E' = \frac{1}{4} \pi M (r^4 - r'^4) = \frac{1}{64} \pi M (d^4 - d'^4)$; für einen dreieckigen Querschnitt in der Lage Fig. 58, wo $AB = b$, $CF = h$ ist, $E' = \frac{1}{12} Mbh^2 \times \frac{1}{3} h = \frac{1}{36} Mbh^3$ und in der umgekehrten Lage (Fig. 59) $E' = \frac{1}{24} Mbh^2 \times \frac{2}{3} h = \frac{1}{36} Mbh^3$, also in beiden Lagen gleich groſs; endlich ist für einen elliptischen Querschnitt von den Hauptachsen $2a$ und $2b$, wenn die erstere oder gröfsere vertical steht, $E' = \frac{1}{4}\pi M a^3 b$, und wenn diese Achse horizontal liegt, $E = \frac{1}{4}\pi M a b^3$.

Anmerkung. Da nach Gleichung (2) (in der vorigen Nr.) das Biegungsmoment E' den Widerstand darstellt, welchen der Körper einer durch die Last Q bewirkten Biegung entgegensetzt, also zugleich auch einen Begriff von der Steifigkeit des Körpers gibt; so kann man durch Vergleichung dieser Werthe von E' bestimmen, welche Querschnittsformen, bei demselben Aufwande an Materiale vortheilhafter sind. So verhält sich, um nur ein Beispiel anzuführen, die Steifigkeit des Balkens von rechteckigem Querschnitt, in der hochkantigen Lage, zu jener des Balkens mit dreieckigem Querschnitte, die Spitze auf- oder abwärts gekehrt $E : e = \frac{1}{12} M b h^3 : \frac{1}{36} M b h^3 = 3:1$, während sich bei einerlei Länge ihre kubischen Inhalte wie $bh = \frac{1}{2} bh = 2:1$ verhalten; obschon also der parallelopipedische Balken doppelt so viel Materiale als der dreikantige besitzt, so ist er dafür nicht blofs 2, sondern 3 Mal so steif als der dreikantige Balken, so, dafs die Anwendung dieses letzteren in dieser Hinsicht nichts weniger als vortheilhaft wäre.

Ferner folgt aus diesen Werthen von E', dafs die Steifheit parallelopipedischer Balken wie die Breite und der Cubus der Höhe zunimmt; dafs diese bei Cylindern wie die vierte Potenz der Halb- oder Durchmesser wächst u. s. w.

Interessant ist die Vergleichung zwischen Röhren und massiven Cylindern von einerlei Materiale, welche dem Studirenden selbst überlassen bleibt. *Buchanan* gibt für hohle gufseiserne Wellen als das zweckmäfsigste Verhältnifs zwischen dem innern und äufsern Halbmesser jenes von $3:4$, *Tredgold* nimmt die Wandstärke zu $\frac{3}{10}$ des äufsern Halbmessers an; im erstern Falle findet man bei gleichem Materialeaufwand, dafs die hohle Welle beinahe $3\frac{3}{5}$ Mal so viele Steifigkeit als die volle Welle besitzt; im letztern Falle beinahe 3 Mal so viel u. s. w.

117. Geht in besondern Fällen, wie z. B. wenn der Querschnitt eines Körpers aus mehreren einzelnen getrennten Theilen besteht, die neutrale Achse ab (Fig. 48) nicht durch den Schwerpunct O des Querschnittes $acbc'$ (obschon sie immer noch durch den Schwerpunct des Gesammtquerschnittes geht), sondern liegt diese in AB (Fig. 66), wobei der Normalabstand von ab, d. i. $OC = e$ seyn soll, und bezeichnet man das Biegungsmoment des Querschnittes $acbc'$ in Beziehung auf die Achse ab mit μ, dagegen auf die Achse AB mit μ'; so mufs man, um aus $\mu = MX$, μ' zu finden, in dem Integralausdruck $X = 2\left[\int_0^h y x^2 \,dx + \int_0^{h'} y' x^2 \,dx\right]$ in dem ersten Integrale statt x setzen $x - e$ und in dem zweiten statt x setzen $e - (-x) = e + x$; dadurch erhält man:

$$\mu' = M.2\left[\int_0^h y(x-e)^2 \mathrm{d}x + \int_0^{h'} y'(x+e)^2 \mathrm{d}x\right]$$

$$= M\left\{2\left[\int_0^h y\,x^2 \mathrm{d}x + \int_0^{h'} y'\,x^2 \mathrm{d}x\right] - 4\,e\int_0^h y\,x\,\mathrm{d}x\right.$$

$$\left. + 4\,e\int_0^{h'} y'\,x\,\mathrm{d}x + e^2\left[2\int_0^h y\,\mathrm{d}x + 2\int_0^{h'} y'\,\mathrm{d}x\right]\right\}$$

e²

oder wegen der Bedingungsgleichung (a) in Nr. **97**, Anmerk. 2, und wenn man die Fläche des Querschnittes $acbc' = F$ setzt, auch $\mu' = MX + Me^2 F$, oder:

$$\mu' = \mu + MFe^2 \quad (\alpha) \quad \text{oder} \quad \mu = \mu' - MFe^2 \;.\;. \quad (\beta)$$

Hieraus folgt zugleich, daſs das Biegungsmoment eines Körpers in Beziehung auf dessen neutrale Achse (wegen $e = o$) am kleinsten sey.

Anmerkung 1. Der durch die Gleichung (β) ausgedrückte Satz kann dazu benützt werden, das Biegungsmoment eines Körpers in Beziehung auf seine neutrale Achse (deren Bestimmung oft sehr schwierig ist) zu bestimmen, wenn dasselbe bezüglich einer andern Achse bekannt oder leichter zu finden ist.

1) Nehmen wir z. B. das Biegungsmoment des dreiseitigen Prisma in der Lage Fig. 59 in Beziehung auf die durch C gehende Achse, wobei also $CF = h$, $CO = \frac{2}{3}h$ und $AB = b$ ist; so hat man $X = \int_0^h Y\mathrm{d}x \,.\, x^2$ oder wegen $Y : b = x : h$, woraus $Y = \frac{b}{h}x$ folgt, auch $X = \frac{b}{h}\int_0^h x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}bh^3$; es ist daher $\mu' = MX = \frac{1}{4}Mbh^3$ und zufolge der obigen Relation (β):

$$E' = \mu = \tfrac{1}{4}Mbh^3 - M.\tfrac{1}{2}bh.\tfrac{4}{9}h^2 = Mbh^3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9}\right) = \tfrac{1}{36}Mbh^3,$$

wie früher.

2) So findet man ferner z. B. das Biegungsmoment eines Halbkreises $ACDB$ (Fig. 67) als Querschnitt eines halben Cylinders, indem man dasselbe zuerst in Beziehung auf den Durchmesser AB als Achse bestimmt und dieses dann nach der Formel (β) in Bezug auf die neutrale, mit AB parallele Achse ab ausdrückt.

Es ist aber das erstere Moment die Hälfte von jenem des ganzen Kreises oder (Nr. **116**) $\mu' = \frac{1}{8}\pi M r^4$, ferner $F = \frac{1}{2}r^2\pi$ und wenn O der Schwerpunct der halben Kreisfläche ist, (§. 50) $e = \frac{4r}{3\pi}$, folglich nach (β): $E' = \mu = \frac{1}{8}\pi M r^4 - M.\frac{1}{2}r^2\pi.\frac{16r^2}{9\pi^2} = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi}Mr^4$ oder nahe

$E' = \cdot 110\,Mr^4$, dabei ist es gleichgiltig, ob der Punct D des Kreisbogens unterhalb AB (wie in der Zeichnung) oder oberhalb AB liegt.

3) Um das Biegungsmoment des in Fig. 68 dargestellten, gegen die neutrale Achse mn symmetrischen Querschnittes zu finden, darf man nur von dem Momente des ganzen als voll gedachten Rechteckes $b'h$, jenes der vier hohlen Rechtecke $\frac{1}{4}(b'-b)(h-h')$, deren neutrale Achsen von jener mn um die Gröfse $\frac{1}{4}(h+h')$ abstehen, abziehen; dadurch erhält man: $E' = \frac{1}{12} b' h^3 - \frac{1}{48}(b'-b)(h-h')^3 - \frac{1}{16}(b'-b)(h-h')(h+h')^2$, oder nach gehöriger Entwicklung und Reduction:

$$E' = \tfrac{1}{12} M [b h^3 + (b'-b) h'^3].$$

4) Um endlich noch das Biegungsmoment E' des $\top$ förmigen Querschnittes in Fig. 68′ zu finden, wobei aufser der in der Figur ersichtlichen Bezeichnung $ab + a'b' = b'$ seyn soll, hat man zuerst Alles auf die Achse AB bezogen, das Moment des ganzen, voll genommenen Rechteckes bh d. i. (Relat. α) $\mu' = \frac{1}{12} M b h^3 + M.b h\, \frac{1}{4} h^2 = \frac{1}{3} M b h^3$; eben so ist das Moment der beiden hierzu fehlenden Rechtecke $= \frac{1}{3} M b' h'^3$, also das Moment des $\top$ förmigen Querschnittes in Beziehung auf die Achse AB:

$$\mu' = \tfrac{1}{3} M (b h^3 - b' h'^3).$$

Um nun auf die neutrale, durch den Schwerpunct O gehende Achse überzugehen, hat man $F = bh - b'h'$ und $Fe = b(h-h')\dfrac{(h+h')}{2} + (b-b')h'\dfrac{h'}{2} = \dfrac{b h^2 - b' h'^2}{2}$, folglich $e = \dfrac{b h^2 - b' h'^2}{2(bh - b'h')}$, demnach nach der obigen Formel (β):

$$\mu' = E' = \tfrac{1}{3} M (b h^3 - b' h'^3) - \tfrac{1}{4} M \frac{(b h^2 - b' h'^2)^2}{bh - b'h'}$$

$$= \tfrac{1}{12} M \frac{(b h^2 - b' h'^2)^2 - 4 b b' h h' (h-h')^2}{bh - b'h'}.$$

Anmerkung 2. Ist das Biegungsmoment eines Körpers $E' = MX$ bekannt, so läfst sich auch daraus leicht die relative Festigkeit und das Tragvermögen bestimmen. Es ist nämlich, wie man leicht sieht, die Festigkeit $Ql = \dfrac{m}{Mh} E'$ und das Tragvermögen $Ql = \dfrac{m'}{Mh} E'$, wenn m die Spannung der äufsersten, von der neutralen Schichte um h abstehenden Fasern im Augenblicke des Zerreifsens (die absolute Festigkeit) und m' die Spannung dieser Fasern in dem Augenblicke, als ihre Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht hat, bezeichnet. Ist diese Ausdehnung $= \lambda$ und die Spannkraft in diesem Augenblicke $= m'$; so ist (§. 252) $\lambda = \dfrac{l m'}{M}$ also $m' = \dfrac{M\lambda}{l}$.

Bestimmung des Moduls der Elasticität M.

118. Um zu zeigen wie man den Modul der Elasticität für die verschiedenen biegsamen Körper durch Versuche findet, setzen wir