Da man nun für Gufseisen $m = 30000$ Pf. als Mittelwerth setzen kann, so erhält man, da die Zapfen nur mit dem 10ten Theil ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen werden sollen, folglich $m = 3000$ gesetzt wird, $d = \cdot 05 \sqrt{P}$, oder wenn man P in W. Centner ausdrückt, für gufseiserne Zapfen:

$$(\alpha) \quad d = \cdot 5 \sqrt{P}.$$

Da man übrigens in der Praxis dünne Zapfen im Verhältnifs zum Durchmesser länger als dicke macht, so kann man sich zur Bestimmung der Länge der Zapfen auch der Formel bedienen:

$$(\beta) \quad l = \cdot 33 + 1 \cdot 21\, d.$$

Für schmiedeiserne Zapfen kann man setzen:

$$(\alpha') \quad d = \cdot 33 \sqrt{P} \text{ und ebenfalls}$$

$$(\beta') \quad l = \cdot 33 + 1 \cdot 21\, d.$$

Für die im Beispiele des §. 262 angeführten gufseisernen Zapfen der Wasserradswelle, würde wegen $P = 25$ Centner nach den beiden erstern Formeln (α) und (β) der Durchmesser $d = 2 \cdot 5$, und die Länge $l = 3 \cdot 4$ Zoll.

Körper von gleichem Widerstande.

(§. 259.)

108. Soll der, an dem einen Ende horizontal eingemauerte, an dem andern Ende belastete Balken, Querschnitte von durchaus gleicher Breite $CD = AB = b$ (Fig. 60) erhalten, so sey $CE = h$ die verticale Höhe des in der Ebene der Mauer liegenden Querschnittes, wofür wieder $AC = l$ seyn soll, und $PM = y$ jene des Querschnittes PM', wofür $AP = x$ ist; so ist die Festigkeit des Balkens in Beziehung auf den Querschnitt ED (Nr. **99**) (α) . . $Q = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l}$ und in Bezug auf den Querschnitt $MP' : Q' = \frac{1}{6} m \frac{b y^2}{x}$. Da nun aber beide Festigkeiten gleich grofs seyn sollen, so hat man $Q' = Q$ oder $\frac{y^2}{x} = \frac{h^2}{l}$ und daraus $y^2 = \frac{h^2}{l} x$ als Gleichung der Begrenzungscurve AME oder $BM'F$, welche sofort eine gemeine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{l}$ ist, deren Scheitel in A und Achse in AC liegt.

Anmerkung. Der Parameter $\frac{h^2}{l}$ läfst sich, wenn m, Q und b gegeben sind, aus der vorigen Gleichung (α), aus welcher $\frac{h^2}{l} = \frac{6\,Q}{m\,b}$ folgt, bestimmen.

Da die Seitenfläche $ACEM = \frac{2}{3} AC.CE$, dagegen wenn die Querschnitte alle gleich sind und dieselbe Höhe CE haben, $= AC.CE$ ist; so erspart man durch diese, gegen das freie Ende zu abnehmenden Höhen, wobei die gekrümmte Fläche sowohl (wie in der Zeichnung) unten, als auch oben liegen kann, bei derselben Festigkeit des Balkens $\frac{1}{3}$ am Materiale.

109. Sollen dagegen die nach dem freien Ende zu abnehmenden Querschnitte, Rechtecke von durchaus gleicher Höhe $MN = CE = h$ (Fig. 61) bilden; so sey wieder $CD = b$ und $AG = l$, so wie für $AP = x$ die Breite des Rechteckes $MM' = y$, so ist wie vorhin $\frac{1}{6} m \frac{bh^2}{l} = \frac{1}{6} m \frac{yh^2}{x}$ oder $\frac{b}{l} = \frac{y}{x}$ d. i. $y = \frac{b}{l} x$ oder auch $\frac{1}{2} y = \frac{\frac{1}{2} b}{l} x$, woraus sofort folgt, daſs die horizontalen Flächen gleichschenkelige Dreiecke ACD von der Basis $CD = b$ und Höhe $AG = l$ seyn müssen.

Anmerkung. Da die Fläche eines solchen Dreieckes $= \frac{1}{2} bl$ nur halb so groſs als die des Rechteckes bl ist; so erspart man bei dieser Form des Körpers bei gleicher Festigkeit das halbe Material, also noch mehr als im vorigen Falle.

110. Sollen die Querschnitte für den Fall bestimmt werden, daſs die Last P über die ganze Länge gleich vertheilt ist, so sey, wenn der Balken durchaus einerlei Breite $CD = PP' = b$ (Fig. 62) haben soll, $AC = l$, $CE = h$, $AP = x$ und $PM = y$, so wie das Gewicht, womit bei der Breite b die Längeneinheit belastet ist $= q$; so kommt auf die Länge AC die Last $Q = lq$ und auf jene AP die Last xq, folglich ist mit Rücksicht auf den durch die Gleichung (2) in §. 255 ausgedrückten Satz, die Festigkeit des rechteckigen Querschnittes PM' sofort $\frac{1}{2} qx = \frac{1}{6} m \frac{by^2}{x}$, so wie jenes CF, $\frac{1}{2} ql = \frac{1}{6} m \frac{bh^2}{l}$, welcher Ausdruck von selbst aus dem vorigen folgt, wenn man $x = l$ und $y = h$ setzt. Der letztere Ausdruck gibt $h = l \sqrt{\frac{3q}{mb}}$ und der erstere $y^2 = \frac{3q}{mb} x^2$ oder $y = \frac{h}{l} x$, so daſs also AME eine gerade Linie oder die untere Fläche BE des Prisma eine Ebene bildet.

111. Ist der Balken in diesem Falle bloſs durch sein eigenes Gewicht belastet, so sey wieder (Fig. 63) $CD = PQ = b$, $CE = DF = h$, $AC = l$ und für den verticalen Querschnitt PN, $AP = x$ und $PM = y$, so wie für jenen $P' N'$, welcher zwischen dem vorigen und AB liegen soll, $AP' = x'$ und $P' M' = y'$, aufserdem sey für einen diesem unendlich nahe liegenden Schnitt $P' p = \mathrm{d}x'$, so wie γ das Gewicht der cubischen Einheit des Balkens. Diefs vorausgesetzt ist das Gewicht des Elementes $p N' = \gamma\, b\, y'\, \mathrm{d}x'$ und dessen statisches Moment gegen den Querschnitt $PN = \gamma\, b\, y'\, \mathrm{d}x' (x - x')$, folglich die Summe der stat. Momente aller dieser in dem Körper APN vorhandenen Elemente, d. i. des Gewichtes dieses Körpers $= \gamma\, b \int_0^x y'\, \mathrm{d}x' (x - x')$.

Soll aber ein in A oder AB aufgehängtes Gewicht P gegen diesen Querschnitt PN' dieselbe Wirkung hervorbringen, so mufs

$$P x = \gamma\, b \int_0^x y'\, \mathrm{d}x' (x - x') \text{ oder wegen (Nr. 99) } P x = \tfrac{1}{6} m\, b\, y^2$$

und wenn man Kürze halber $\frac{1}{6} \frac{m}{\gamma} = A$ setzt, auch:

$$\int_0^x y'\, \mathrm{d}x' (x - x') = A y^2 \quad . \; . \; . \quad (n) \quad \text{seyn.}$$

Um nun aus dieser Bedingung die Gleichung $y = f(x)$ oder $y' = f(x')$ der Curve AME zu finden, wollen wir diese Gleichung (n) zwei Mal nach x differenziiren; dadurch entsteht zuerst $y'\, \mathrm{d}x' (x - x') = A\, \mathrm{d}.y^2$ und dann $y'\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}x = A\, \mathrm{d}^2.y^2$, oder wenn man x' in x, also auch y' in y übergehen läfst: $y\, \mathrm{d}x^2 = A\, \mathrm{d}^2 y^2$, woraus $\frac{\mathrm{d}^2.y^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{y}{A}$ und wenn man diese Differenzialgleichung zweimal integrirt: $y = \frac{x^2}{12 A}$ folgt. Diese Gleichung, welche, wenn für A der Werth hergestellt wird, die Form $x^2 = \frac{2m}{\gamma} y$ annimmt, gehört aber einer gemeinen Parabel AME vom Parameter $\frac{2m}{\gamma}$ an, deren Achse in der durch A gehenden lothrechten Linie, und Scheitel in A liegt.

112. Um ferner auch noch den Fall zu behandeln, in welchem der Körper horizontal an beiden Enden A, B (Fig. 64) frei aufliegt und in irgend einem Puncte D mit dem Gewichte Q belastet ist, sey, um wieder die Querschnitte von gleicher Festigkeit unter der Voraussetzung zu finden, dafs sie Rechtecke von einerlei Breite b bilden, $AB = l$, $AD = a$, $BD = l - a = a'$, $DC = h$, so wie für einen zwischen A und C liegenden Punct M der gesuchten Curve, $AP = x$ und $PM = y$; so ist der vom Gewichte Q auf den Punct P

ausgeübte Druck q, wegen $q(l-x) = Q\,a'$ sofort $q = \frac{Q\,a'}{l-x}$, und da die Festigkeit des Querschnittes PM nach Gleich. (5) §. 257 $q = \frac{1}{6}\,m\,b\,y^2\,\frac{l}{x\,(l-x)}$ ist, so folgt, wenn man diese beiden Werthe einander gleich setzt, $y^2 = \frac{6\,Q\,a'}{m\,b\,l}\,x$, oder da $Q = \frac{1}{6}\,m\,b\,h^2\,\frac{l}{a\,a'}$, also $\frac{6\,Q}{m\,b}\,' = \frac{h^2}{a}$ ist, auch: $y^2 = \frac{h^2}{a}\,x$,
als Gleichung der Begrenzungscurve AMC und zwar einer Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a}$, deren Scheitel in A und Achse in AB liegt.

Auf ganz gleiche Weise findet man auch für die Begrenzungscurve $BM'C$ eine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{a'}$, deren Scheitel in B und Achse wieder in AB liegt.

Ist die Last in der halben Länge von AB angebracht, so erhalten beide Parabeln denselben Parameter $\frac{2\,h^2}{l}$ und dabei gegen h eine symmetrische Lage.

113. Ist endlich in diesem letztern Falle die Last Q nicht an einem einzigen Punct angebracht, sondern über die Länge gleichförmig vertheilt; so sey wieder b die Breite der Rechtecke, $l = AB$ die Entfernung der beiden Stützen, $\frac{1}{2}\,l = a$ und die bei dieser Breite b auf die Längeneinheit kommende Belastung $= q$; dann wird jede der beiden Stützen A, B mit dem Gewichte $a\,q$ gedrückt und jede Hälfte des Körpers von gleichem Widerstande, wie jene ACD (Fig. 65), befindet sich in derselben Lage, als wenn sie im Querschnitt CD befestigt, im Puncte A mit der Kraft $a\,q$ vertical aufwärts gezogen und mit dem über AC gleich vertheilten Gewichte $a\,q$ belastet wäre.

Ist aber $CD = h$ die Höhe des Körpers in der Mitte, dagegen für $CP = x$ jene $PM = y$; so ist in Beziehung auf den durch PM gehenden Querschnitt das statische Moment der in A aufwärts wirkenden Kraft $a\,q$ gleich $a\,q\,(a-x)$ und das statische Moment der über AP gleich vertheilten Last $(a-x)\,q$ gleich $\frac{1}{2}\,(a-x)\,q \times (a-x) = \frac{1}{2}\,q\,(a-x)^2$, also die Differenz beider Momente $a\,q\,(a-x) - \frac{1}{2}\,q\,(a-x)^2 = \frac{1}{2}\,q\,(a^2 - x^2)$, mit welchem der Bruch in PM bewirkt werden muss. Nun ist dieses Moment aber auch $\frac{1}{6}\,m\,b\,y^2$, folglich

$$\tfrac{1}{6} m b y^2 = \tfrac{1}{2} q (a^2 - x^2) \text{ woraus } y^2 = \frac{3q}{mb}(a^2 - x^2)$$

oder wegen (für den mittlern Querschnitt CD) $\frac{1}{2} a q = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{a}$,

woraus $\frac{3q}{mb} = \frac{h^2}{a^2}$ folgt, auch $y^2 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

als Gleichung der Begrenzungscurve AMB, welche sofort eine (halbe) Ellipse von den Achsen $2a = l$ und $2h = 2a\sqrt{\frac{3q}{mb}}$ st, deren grofse Achse $2a$ in AB liegt.

Biegungswiderstand prismatischer Körper.

(§. 264.)

114. Ist wieder, mit Beibehaltung der Bezeichnung in Nr. **94**, GD (Fig. 48) der an dem einen Ende unbeweglich befestigte oder eingemauerte und an dem andern Ende mit dem Gewichte Q belastete prismatische Körper und dadurch in demselben eine Biegung entstanden, welche noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt; so sey um einen Ausdruck für den Widerstand der Biegung zu finden AOB (Fig. 49) die neutrale Schichte, darauf $AO = z$, $OO' = dz$ und $AB = l$, ferner wieder $BC = h$ und die Spannung der obersten Faser in $d = p'$ und in $C = p$. Zieht man in den Puncten O und O' die Normalen Oc', $O'f$ der Curve AOB und verlängert diese bis zu ihrem Durchschnittspunct J, so bildet dieser den Mittelpunct des Krümmungskreises für das Curvenelement OO', wofür $JO = JO' = \rho$ der Krümmungshalbmesser ist.

Die ursprüngliche, vor der Biegung bestandene Länge der obersten Faser in dem Körperelement fd ist $ed = dz$, dagegen nach der Biegung $ec = dz + \Delta dz$, wobei die bewirkte, nach unserer Annahme innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Ausdehnung $cd = \Delta dz$, durch die in §. 252 Gleich. (1) ausgedrückte Relation $\Delta dz = \frac{p' dz}{M}$ oder wegen $p' : p = z : l$ woraus $p' = \frac{p}{l} z$ folgt, durch $\Delta dz = \frac{p}{lM} z dz \,..\, (a)$ ausgedrückt wird, wobei M den Elasticitätsmodul des Balkens bezeichnet.

Da die Bogenelemente OO' und cd als gerade Linie zu nehmen sind, so geben die beiden ähnlichen Dreiecke OJO' und cOd die Proportion $dO : dc = O'J : OO'$ d. i. $h : \Delta dz = \rho : dz$, so, dafs also,