

$$\log n. P - \log n. Q = f\alpha \quad \text{oder} \quad \log n. \frac{P}{Q} = f\alpha$$

und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen selbst übergeht,

$$\text{auch:} \quad \frac{P}{Q} = e^{f\alpha} \quad \text{oder} \quad P = Q e^{f\alpha},$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

(Vergl. §. 240, Gleich. 1).

Relative Festigkeit.

(§. 255.)

94. Es sey $C'N$ (Fig. 48) ein an dem einen Ende B eingemauertes, und am andern Ende A mit dem Gewichte Q belasteter horizontaler Balken von der Länge $AB = l$ und dem beliebigen, jedoch durchaus gleichen Querschnitt $acbc'$; dabei sey $DEFG$ die neutrale, d. h. jene horizontale Schichte, in welcher die Fasern weder ausgedehnt, noch zusammengedrückt werden, in welcher also die Gleichgewichtsachse ab eines jeden Querschnittes $acbc'$ liegt und welche den Balken in zwei, obschon nicht immer gleiche Hälften theilt, in deren obern die Fasern ausgedehnt, in der untern aber zusammengedrückt werden.

In einem beliebigen, auf der Achse AB senkrechten Querschnitt $acbc'$, welcher vom Aufhängepunkt A den Abstand $AO = x$ haben mag, nehme man die durch den Punkt O auf der Gleichgewichtsachse ab perpendikuläre Gerade COc' zur Abscissenachse und O zum Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten der Umfangscurve $acbc'a$, setze also für einen beliebigen Punkt M derselben $OP = x$ und $PM = y$. Nimmt man $Pn = dx$ und zieht durch n die Ordinate nm , so ist die Fläche des unendlich schmalen Rechteckes $Mn = ydx$ und man kann annehmen, daß die Fasern dieses Rechteckes in diesem Querschnitte, oder in einer unendlich dünnen Scheibe fd (Fig. 49) von der Dicke $OO' = dx$, alle gleich viel, nämlich um Pr ausgedehnt werden, so daß die Fasern in dieser Schichte Mn von der Länge $P'r$ in jene $P'P$ übergehen, während diese Ausdehnung in derselben Schichte in den weiter gegen B zu liegenden Querschnitten allmählig zunimmt, also nur für eine unendlich kleine Distanz $OO' = dx$ als gleichbleibend angesehen werden kann.

Ist nun der Widerstand, welchen die in dieser von der Gleichgewichtsachse ab um x abstehende Schichte liegenden Fasern, der durch die Biegung des Balkens bewirkten Ausdehnung Pr entgegen setzen, auf die Flächeneinheit bezogen $= p''$, für die oberste Faser bei c des-

selben Querschnittes $acbc' = p'$, so wie endlich dieser obersten Faser, jedoch am letzten, d. i. von A am weitesten abstehenden Querschnitte $DCEC'$, nämlich bei $C = p$; so hat man, da sich diese Widerstände innerhalb der Elasticitätsgrenze wie die Stärke der Spannungen, und diese wieder wie die bewirkten Ausdehnungen verhalten, sofort (Fig. 49) $p'' : p' = Pr : cd = OP : Oc$, oder wenn man die Höhe $Oc = h$ setzt. $p'' : p' = x : h$; ferner ist $p' : p = z : l$ (weil das stat. Moment der Spannkraft, also auch die Ausdehnung bei derselben Faser von A gegen B wie AO zunimmt, und bei nur geringen Biegungen l ohne Fehler für den senkrechten Abstand des Punctes A von der Ebene MN genommen werden kann), folglich, wenn man beide Proportionen zusammensetzt, $p'' : p = zx : hl$, woraus $p'' = p \frac{zx}{hl}$ folgt.

Die vorhin genannte, im Querschnitte $acbc'$ liegende unendlich dünne Schichte Mn vom Querschnitt $y dx$, widersteht also der Ausdehnung mit der Gröfse $p'' \cdot y dx = p \frac{zx}{hl} y dx \dots (r)$ und es ist das statische Moment dieses Widerstandes in Beziehung auf die Achse ab sofort $x \cdot p \frac{zx}{hl} y dx = p \frac{z}{hl} y x^2 dx$, folglich die Summe dieser Momente für alle im Querschnitt Oca liegenden Fasern $= \int_0^h \frac{p z}{hl} y x^2 dx$, wobei z von x unabhängig, dagegen y irgend eine von der Natur der krummen Linie aMc abhängige Function von x , z. B. $y = f(x)$ ist

95. Auf ganz gleiche Weise würde man für die Summe der Momente der Widerstände der Fasern im Querschnitte Ocb den Ausdruck $\int_0^h \frac{p z}{hl} y' x^2 dx$ erhalten, wobei $y' = f'(x)$ die Gleichung der Curve $bM'c$ wäre. Die Summe dieser beiden Integralausdrücke gäbe dann das Gesamtmoment für die obere Fläche $acbc$, in welcher nämlich die Fasern ausgedehnt werden. Da aber für die gewöhnlich vorkommenden und hier zu betrachtenden Fälle die beiden Curvenäste aMc und $bM'c$ gegen Oc symmetrisch sind, folglich die obere Umfangscurve $aMcM'b$ in derselben Gleichung $y = f(x)$ enthalten ist; so werden diese beiden Integrale einander gleich und man hat sonach für das Gesamt-Moment M des Widerstandes der ausgedehnten Fasern:

$$M = \frac{2pz}{hl} \int_0^h y x^2 dx \dots (a)$$

96. Da man, was auch durch Versuche bestätigt wird, annehmen kann, daß innerhalb der Elasticitätsgrenze für das Zusammendrücken der Fasern dieselben Gesetze, wie für ihre Ausdehnung gelten; so erhält man genau eben so für das Gesamt-Moment M' des durch das Zusammendrücken der Fasern in der untern Hälfte des Querschnittes $a'c'b$ erzeugten Widerstandes:

$$M' = \frac{2p'z}{hl} \int_0^{h'} y' x^2 dx \dots (5)$$

wenn $Oc' = h'$, ferner $y' = f'(x)$ die Gleichung der Curve $a'c'b$, und p' den auf die Flächeneinheit bezogenen Widerstand der zusammengedrückten Fasern an der Stelle C' , d. i. in der Entfernung $BC' = h'$ von der neutralen Achse bezeichnet.

97. Da nun sowohl die Ausdehnung der Fasern in der obern Hälfte des Querschnittes $acbc'$ (d. i. der unendlich dünnen Scheibe ad , Fig. 49) als auch die Zusammendrückung derselben in der untern Hälfte $a'c'b$ durch die Last Q bewirkt wird, so muß auch für den Stand des Gleichgewichtes dessen statisches Moment Qz der Summe der beiden Momente $M + M'$ gleich seyn, so, daß also, wenn man gleich mit z abkürzt, sofort:

$$Q = \frac{2p}{hl} \int_0^h y x^2 dx + \frac{2p'}{h'l} \int_0^{h'} y' x^2 dx$$

oder, wenn man, was für geringe Biegungen den Versuchen zu Folge der Fall ist, für einerlei Ausdehnung und Zusammendrückung die Repulsionskraft der Cohäsionskraft, also $\frac{p'}{h'} = \frac{p}{h}$ setzt, auch:

$$Q = \frac{2p}{hl} \left[\int_0^h y x^2 dx + \int_0^{h'} y' x^2 dx \right] \dots (A)$$

Wird, wie bei den meisten vorkommenden Fällen, die Umfangscurve $acbc'a$ durch die Achsen cc' und ab in vier symmetrische Theile getheilt, so ist $y' = y$ und $h' = h$ zu setzen, wodurch sich die vorige Gleichung auf die einfachere

$$Q = \frac{4p}{hl} \int_0^h y x^2 dx \dots (1)$$

reducirt.

Anmerkung 1. Wäre zwar nicht, wie angenommen wurde, der Curvenast $bM'c$ mit jenem aMc symmetrisch, also nicht $MM' = 2y$, liefse sich aber dennoch diese Doppelordinate $MM' = Y$ durch eine einzige Gleichung $Y = f(x)$ ausdrücken; so ginge diese Gleichung (1) über in:

$$Q = \frac{2p}{hl} \int_0^h Y x^2 dx \quad (2)$$

Anmerkung 2. Aus dem obigen Differentialausdruck (r) folgt, daß die Summe der Widerstände, welche durch die Ausdehnung aller der in dem obern Querschnitt DCE auslaufenden Fasern erzeugt werden,

$$= \frac{p}{h} \int_0^h x y dx \text{ ist. Eben so wird der durch die Zusammendrückung der}$$

unterhalb der neutralen Schichte DG liegenden Fasern erzeugte Widerstand

$$\text{durch } \frac{p'}{h'} \int_0^{h'} x y' dx \text{ ausgedrückt. Da nun aber, wenn die Fasern in der}$$

neutralen Schichte AB (Fig. 49) wirklich weder ausgedehnt noch verkürzt werden sollen, der Punct B (gleichsam als Stützpunkt des Winkelhebels $ABCC'$), welcher von den zuerst genannten Widerständen $s, s' \dots$ nach einer und von den letztern $t, t' \dots$ nach der entgegengesetzten Richtung verschoben werden will, also unbeweglich bleiben muß, damit auf die neutrale Schichte weder ein Zug noch ein Druck entsteht; so müssen die erstern Widerstände den letztern gleich seyn, d. i. es muß die Gleichung

Statt finden (wenn man mit $\frac{p}{h} = \frac{p'}{h'}$ abkürzt):

$$\int_0^h x y dx = \int_0^{h'} x y' dx \dots (a)$$

welche Bedingungsgleichung die Lage der neutralen Achse DE (Fig. 48) festsetzt und mit Rücksicht auf die erste Gleichung II, in Nr. 26. sofort zeigt, daß diese Achse durch den Schwerpunkt des Querschnittes $DCEC'$ geht.

Zu diesem Ergebnifs gelangt man auch durch folgende Betrachtung. Der Widerstand, welchen jede Faser oder Fiber durch ihre Ausdehnung oder Zusammendrückung erzeugt, ist sowohl ihrem Querschnitt, als auch der entsprechenden Ausdehnung und Verkürzung, folglich zusammengenommen dem Producte aus dem unendlich kleinen Querschnitt der Faser in ihrem Abstand von der neutralen Achse proportional. Alle diese Widerstände wirken aber, bei einer nur geringen Biegung des Balkens, nach horizontalen, folglich parallelen Richtungen, daher ist ihre Resultirende der Summe der Producte jedes Elementes der Fläche des Querschnittes der Bruchebene in dessen betreffendem Abstände von der neutralen Achse, d. h. dem Producte aus der ganzen Querschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von dieser Achse, proportional. Da nun aber die aus der Biegung hervorgehende Bewegung nur nach der Richtung der Kraft Q und keinesweges nach einer darauf senkrechten, d. i. horizontalen Richtung Statt finden kann, so muß diese Resultirende von selbst Null werden, diese also durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche gehen*).

*) Wir hielten es für nöthig, diese Thatsache, daß die neutrale Achse durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen müsse, vollkommen klar

98. Setzt man nun in dieser Formel (1) für p diejenige Zahl m , welche das kleinste Gewicht, bei welchem ein Prisma des betreffenden Körpers vom Querschnitt $= 1$ zerrissen wird, ausdrückt, d. i. die absolute Festigkeit des betreffenden Körpers; so bezeichnet Q die kleinste Last, welche den Balken an der Wurzel, d. i. am Querschnitt $DCEC'$ abzurechen im Stande ist, d. i. dessen relative Festigkeit, weil, sobald die oberste Faser an der Stelle C abgerissen ist, auch alle folgenden tiefer liegenden Fasern abreißen und der Balken an dieser Stelle brechen muß.

Setzt man dagegen für p jene Zahl, welche das größte Gewicht ausdrückt, bei welchem die nach ihrer Länge gespannten Fasern noch keine bleibende Ausdehnung erhalten; so bezeichnet auch Q diejenige Last, welche der Balken unter diesen Umständen noch mit Sicherheit tragen kann, d. i. dessen Tragvermögen.

99. Ist nun, um auf einige specielle Fälle überzugehen, der Querschnitt des Balkens (Fig. 50) ein Rechteck von der Breite $ab = b$ und Höhe $cc' = h$, wo von diesen beiden Dimensionen die erstere die horizontale, also die letztere die verticale Lage haben soll; so muß man in der allgemeinen Gleichung (1) $y = \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}h$ statt h setzen; dadurch erhält man für die relative Festigkeit dieses Balkens, $p = m$ gesetzt:

$$Q = \frac{4mb}{hl} \int_0^{\frac{1}{2}h} x^2 dx = \frac{4mb}{hl} \cdot \frac{1}{3} \frac{h^3}{8}$$

d. i. $Q = \frac{1}{3} m \frac{bh^2}{l}$.

(Vergleiche §. 255, Gleich. 1)

Anmerkung. Hätte der vorige Balken eine solche Lage, dafs in dessen Querschnitt die eine Diagonale AB (Fig. 51) horizontal zu liegen kommt, so sey $AB = a$ und das darauf gefällte Perpendikel $CD = c$, so wie $Dr = x$ und die zugehörige, mit AB parallele Doppelordinate $mn = Y$. Dieß vorausgesetzt hat man nach der Gleichung (2) in Nr. 97. (Anmerk. 1)

$$Q = \frac{2p}{cl} \int_0^c Yx^2 dx$$

zu machen, weil wir uns selbst hierüber in einer im J. 1839 herausgegebenen Abhandlung über die relative Festigkeit im Irrthume befanden und eine andere Hypothese aufstellten, welche mit Recht von dem Herrn k. preuss. Commissionsrath und Professor A. *Brix*, in seiner gediegenen Abhandlung über den Widerstand prismatischer Körper gegen Biegung im J. 1844 angefochten werden konnte.

oder wegen $(c-x):c = Y:a$, woraus $Y = f(x) = \frac{a}{c}(c-x)$ folgt,

$$\text{auch: } Q = \frac{2p}{cl} \cdot \frac{a}{c} \int_0^c x^2 dx (c-x) = \frac{1}{6} p \frac{ac^2}{l}.$$

100. Ist der Querschnitt eine Ellipse von den Hauptachsen $2a$ und $2b$, wovon die erstere als größere AA' (Fig. 52) horizontal liegen soll; so ist in der Formel (1), weil die Abscissen x auf der kleinen Achse BB' gezählt werden (Comp. §. 457) $y = \frac{a}{b} \sqrt{(b^2 - x^2)}$ und $h = b$ zu setzen. Dadurch erhält man für die relative Festigkeit eines solchen Balkens, $p = m$ gesetzt:

$$Q = \frac{4ma}{b^2 l} \int_0^b x^2 dx \sqrt{(b^2 - x^2)}$$

oder wegen (Comp. §. 796, Lehrb. III. S. 336, Beisp. 4.):

$$\int x^2 dx \sqrt{(b^2 - x^2)} = \frac{1}{4} (x^3 - \frac{1}{2} b^2 x) \sqrt{(b^2 - x^2)} + \frac{1}{8} b^4 \text{arc Sin } \frac{x}{b}$$

also $\int_0^b x^2 dx \sqrt{(b^2 - x^2)} = \frac{1}{8} b^4 \text{arc Sin } 1 = \frac{1}{8} b^4 \cdot \frac{\pi}{2}$ sofort:

$$Q = \frac{1}{4} m \pi \frac{ab^2}{l}.$$

Wechseln die Achsen ihre Lage, so wird $Q = \frac{1}{4} m \pi \frac{a^2 b}{l}$.

101. Geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser r über, so erhält man für die Festigkeit des vollen oder massiven Cylinders, wenn man in den beiden vorigen Formeln $a = b = r$ setzt:

$$Q = \frac{1}{4} m \pi \frac{r^3}{l}.$$

(Vergleiche §. 256, Gleich. 3.)

102. Sind für einen hohlen Cylinder R und r der äußere und innere Halbmesser und m, m' die absoluten Festigkeiten der Fasern oder Fibern in den Punkten A und a (Fig. 53); so ist nach der vorigen Formel die Festigkeit des äußern Cylinders $Q' = \frac{1}{4} m \pi \frac{R^3}{l}$ und des innern, diesen als massiv gedacht $Q'' = \frac{1}{4} m' \pi \frac{r^3}{l}$, oder wegen:

$m':m = r:R$, woraus $m' = \frac{r}{R} m$ folgt, auch $Q'' = \frac{1}{4} m \pi \frac{r^4}{lR}$, folglich ist die Festigkeit des hohlen Cylinders:

$$Q = Q' - Q'' = \frac{1}{2} m \pi \frac{(R^4 - r^4)}{Rl}$$

(Vergleiche §. 256, Gleich. 4.)

103. Um aus einem runden Baum den stärksten vierkantigen Balken zu hauen, sey, um hierzu den Querschnitt des Balkens zu finden, der Kreis C vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 54) der Querschnitt des gegebenen Baumes und $ADBE$ der gesuchte rechteckige Querschnitt des Balkens, in welchem $AD = x$ die Breite und $BD = y$ die Höhe seyn soll. In der hochkantigen, als der stärkern Lage, ist die relative Festigkeit des Balkens (Nr. 99.):

$$z = \frac{1}{6} m \frac{xy^2}{l} = A x y^2,$$

wenn man den constanten Factor $\frac{1}{6} \frac{m}{l} = A$ setzt.

Da aber der $W. ADB$ ein Rechter, also $x^2 + y^2 = 4r^2$, folglich $y^2 = 4r^2 - x^2$ ist, so hat man auch $z = A x (4r^2 - x^2)$, und daraus nach der bekannten Regel:

$$\frac{dz}{dx} = 4 A r^2 - 3 A x^2 = 0$$

d. i. $x = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$, wofür z in der That ein Maximum wird, weil mit diesem Werthe der zweite Differentialquotient negativ ausfällt.

Wird dieser Werth von x in dem Ausdrücke $y^2 = 4r^2 - x^2$ substituirt und dann reducirt, so wird $y = \frac{2}{3} r \sqrt{6}$, folglich ist:

$$x : y = \frac{2}{3} r \sqrt{3} : \frac{2}{3} r \sqrt{6} = 1 : \sqrt{2}.$$

Theilt man den Durchmesser AB in drei gleiche Theile und errichtet darauf in den Theilungspuncten F und G die Perpendikel FD und GE , so darf man nur die Verbindungslinien AD , DB , BE , AE ziehen, um das gesuchte Rechteck zu erhalten; denn es ist:

$$AD^2 = AF \cdot AB = \frac{2}{3} r \cdot 2r = \frac{4}{3} r^2 = x^2 \text{ und}$$

$$BD^2 = BF \cdot BA = \frac{4r}{3} \cdot 2r = \frac{8}{3} r^2 = y^2.$$

Anmerkung. Diese größte Festigkeit des vierkantigen Balkens ist

$$z = \frac{1}{6} m \frac{xy^2}{l} = \frac{8}{9} \frac{m r^3}{l \sqrt{3}}, \text{ so wie jene des Balkens, dessen Querschnitt das}$$

in den Kreis C eingeschriebene Quadrat is', $z' = \frac{1}{6} m \cdot \frac{2r^3 \sqrt{2}}{l} = \frac{1}{3} \frac{m}{l} r^3 \sqrt{2}$;

da man endlich für die Festigkeit des runden Baumes selbst:

$$Q = \frac{1}{2} m \pi \frac{r^3}{l} = \frac{3 \cdot 1416}{4} \frac{m}{l} r^3 \text{ hat, so erhält man durch Vergleichung die}$$

ser drei Ausdrücke die genäherten Werthe $z' : z : Q = .4714 : .5132 : .7854$.

104. Um von den vielerlei Querschnitten, welche im Bau- und Maschinenwesen noch angewendet werden, wenigstens einen zu behandeln, wollen wir die Festigkeit eines Tragbalken bestimmen, dessen Querschnitt die in Fig. 55 dargestellte, d. i. die sogenannte doppelte Γ Form hat und bei welchem also die neutrale Achse mn wieder in der halben Höhe liegt. Ist Q' die relative Festigkeit für den vollen rechteckigen Querschnitt $ABCD$, und q jene für das Rechteck $abcd$, dieses als voll gedacht; so ist die Festigkeit für den gesuchten Querschnitt:

$$Q = Q' - 2q \dots (m)$$

Nun ist aber, bei den cotirten Bezeichnungen in Fig. 55, wenn man Kürze halber $\frac{1}{6} \frac{m}{l} = A$ setzt, $Q' = A b h^2$ und $q = \frac{1}{6} \frac{m'}{l} \frac{(b-b')}{2} h'^2$

oder wegen $m' : m = \frac{h'}{2} : \frac{h}{2}$, woraus $m' = \frac{h'}{h} m$ folgt, auch:

$q = \frac{A h'}{2 h} (b - b') h'^2$; werden diese Werthe in der Gleichung (m) substituirt, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$Q = \frac{A}{h} [b' h'^3 + b (h^3 - h'^3)] = \frac{A}{h} [b h^3 - b' h'^3],$$

wenn man nämlich $ab + a'b' = b - b' = b'$ setzt.

Anmerkung. Dieselbe Formel drückt auch, wie leicht zu sehen, die Festigkeit für die in Fig. 56 und Fig. 57 angegebenen und cotirten Querschnitte aus.

105. Um endlich auch noch einen Querschnitt zu betrachten, welcher durch die neutrale Achse in zwei unsymmetrische Theile getheilt wird, nehmen wir ein dreiseitiges Prisma von den Grundflächen ABC (Fig. 58), wobei die Basis des Dreieckes $AB = b$ horizontal, und die Höhe desselben $CF = a$ vertical seyn soll.

Liegt, wie in Fig. 58, die Spitze C des Dreieckes nach abwärts, und ist O der Schwerpunkt desselben, also (Nr. 97., Anmerk 2) DE die neutrale Achse, und setzt man $OP = x$, $PM = y$; so ist wegen

$OF = \frac{1}{3} a = h$ und $OC = \frac{2}{3} a = h'$, sofort $\frac{b}{2} : y = a : \frac{2}{3} a + x$ und

$\frac{b}{2} : y' = a : \frac{2}{3} a - x$, folglich $y = \frac{b}{2a} (\frac{2}{3} a + x)$ und $y' = \frac{b}{2a} (\frac{2}{3} a - x)$

also

$$\int_0^h y x^2 dx = \frac{b}{2a} \int_0^{\frac{1}{3} a} x^2 dx (\frac{2}{3} a + x) =$$

$$\frac{b}{2a} \left(\frac{2a^4}{3 \times 81} + \frac{a^4}{4 \times 81} \right) = \frac{11 b a^3}{1944}$$

und

$$\int_0^{h'} y' x^2 dx = \frac{b}{2a} \int_0^{\frac{2}{3}a} x^2 dx \left(\frac{2}{3}a - x \right) =$$

$$\frac{b}{2a} \left(\frac{16a^4}{3 \times 81} - \frac{16a^4}{4 \times 81} \right) = \frac{16ba^3}{1944};$$

werden endlich diese Werthe in der Gleichung (A) von Nr. 97 substituirt, so erhält man:

$$Q = \frac{6p}{al} \left(\frac{11ba^3}{1944} + \frac{16ba^3}{1944} \right)$$

oder reducirt:
$$Q = \frac{81}{972} p \frac{ba^2}{l} = \frac{1}{12} m \frac{ba^2}{l},$$

wenn man nämlich wieder m statt p setzt.

106. Hat die Grund- oder Bruchfläche dieses Prisma die in Fig. 59 angezeigte, nämlich die umgekehrte Lage, oder die Spitze C nach aufwärts gekehrt; so findet man eben so, wegen $h = \frac{2}{3}a$ und $h' = \frac{1}{3}a$:

$$Q' = \frac{3p}{al} \left(\frac{16ba^3}{1944} + \frac{11ba^3}{1944} \right) \text{ d. i.}$$

$$Q' = \frac{81}{1944} p \frac{ba^2}{l} = \frac{1}{24} m \frac{ba^2}{l}$$

so, daß also $Q' = \frac{1}{2}Q$ oder $Q':Q = 1:2$ Statt findet, d. h. das Prisma hat in der erstern Lage (Fig. 58) noch ein Mal so viel Festigkeit als in der letztern (Fig. 59), weil dabei die neutrale Achse im erstern Falle in demselben Verhältniß höher gegen die oberste Schichte zu liegen kommt, als in der letztern.

Anmerkung. Die Festigkeit eines gleichen Prisma vom rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe a ist (Nr. 99):

$$Q'' = \frac{1}{6} p \frac{ba^2}{l}, \text{ folglich } Q:Q'' = \frac{1}{12}:\frac{1}{6} = \frac{1}{2}:1;$$

in demselben Verhältniß stehen aber auch die beiden Querschnitte dieser Balken oder Prismen.

Übrigens ist auch leicht zu sehen (wenn man die Gleich. 2 in Nr. 96, Anmerk. 1 anwendet), daß die vorigen Ausdrücke dieselben bleiben, wenn auch das Dreieck ABC nicht gleichschenkelig, sondern nur $AB = b$ und $CF = a$ ist.

107. Schlufsbemerkung. Versteht man unter dem Brechungsmoment die Summe der statischen Momente aller Spannungen und Pressungen, die in einem Querschnitte des Balkens oder Stabes im Augenblicke des Bruches Statt finden, und bezeichnet man dieses Moment durch mE , wo m die auf 1 Quadratzoll bezogene größte

Spannkraft, welche dabei vorkommt (theoretisch die absolute Festigkeit), oder (§. 260) der sogenannte Brechungscoeffizient, folglich E das Brechungsmoment für $m=1$ ist; so hat man, wenn das Gewicht des Balkens dabei vernachlässigt werden darf: $mE = Ql$ (sonst, §. 255, Gleich. 1', $mE = Ql + \frac{1}{2}Gl$). Diefs vorausgesetzt ist E der in den vorhergehenden Nrn. von den Querschnittsdimensionen des Balkens abhängige Ausdruck, und zwar ist für den rechteckigen Querschnitt in Fig. 50, $E = \frac{1}{6}bh^2$; für ein Quadrat von der Seite a (als Querschnitt) $E = \frac{1}{6}a^3$; für einen Kreis vom Halbmesser r , oder Durchmesser d : $E = \frac{1}{4}\pi r^3 = \frac{1}{32}\pi d^3$; für eine Ellipse, deren große Achse $= h$ vertical und kleine Achse $= b$ horizontal ist: $E = \frac{1}{32}\pi bh^2$; für ein Dreieck, dessen Basis $= b$ horizontal nach oben gekehrt, und Höhe $= h$ vertical ist: $E = \frac{1}{12}bh^2$; für dasselbe Dreieck in der umgekehrten Lage: $E = \frac{1}{24}bh^2$; für einen Kreisring (immer als Querschnitt des Körpers zu verstehen) dessen äusserer und innerer Durchmesser d und d' sind: $E = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1}{d} (d^4 - d'^4)$; für einen elliptischen Ring (als Querschnitt eines hohlen elliptischen Cylinders) wobei h, h' die beiden großen, und b, b' die kleinen Achsen bezeichnen und wobei h vertical ist: $E = \frac{1}{32}\pi \cdot \frac{1}{h} (bh^3 - b'h'^3)$ u. s. w. (Man s. *S. Redtenbacher's* Resultate für den Maschinenbau Taf. V.).

Auch beziehen sich diese Werthe nicht blofs auf den entferntesten $DCEC'$, sondern auf jeden Querschnitt $acbc'$ (Fig. 48) des prismatischen Körpers, wenn man nur in dem Festigkeitsmomente Pl statt $l=AB$, den betreffenden Abstand $x=AO$ setzt.

Hat endlich der Balken keine horizontale Lage, sondern bildet er mit dem Horizonte den Winkel α , so muß man, wenn die Last Q fortwährend nach lothrechter Richtung wirkt, in allen vorhergehenden Ausdrücken $Q \cos \alpha$ statt Q setzen.

Anmerkung. Die in §. 262 angegebenen Regeln zur Berechnung der Stärke der Wellzapfen, lassen sich noch dadurch vereinfachen, dafs man die Länge der Zapfen als eine durch die Erfahrung gegebene Function des Durchmessers desselben annimmt und in Rechnung bringt.

Ist nämlich d der Durchmesser und l die Länge eines solchen Zapfens in W. Zollen ausgedrückt, so wie P der in Pfunden dargestellte Druck auf denselben, so wie m der Brechungscoeffizient; so hat man (§. 262) $\frac{1}{16}\pi m d^3 = Pl$ und da man im Durchschnitt $l = 1.5d$ setzen kann, auch $\frac{1}{16}\pi m d^3 = 1.5Pd$, woraus

$$d^2 = \frac{24P}{\pi m} \text{ folgt.}$$

Da man nun für Gufseisen $m = 30000$ Pf. als Mittelwerth setzen kann, so erhält man, da die Zapfen nur mit dem 10ten Theil ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen werden sollen, folglich $m = 3000$ gesetzt wird, $d = \cdot 05 \sqrt{P}$, oder wenn man P in W. Centner ausdrückt, für gufseiserne Zapfen:

$$(\alpha) \quad d = \cdot 5 \sqrt{P}.$$

Da man übrigens in der Praxis dünne Zapfen im Verhältniß zum Durchmesser länger als dicke macht, so kann man sich zur Bestimmung der Länge der Zapfen auch der Formel bedienen:

$$(\beta) \quad l = \cdot 33 + 1 \cdot 21 d.$$

Für schmiedeiserne Zapfen kann man setzen:

$$(\alpha') \quad d = \cdot 33 \sqrt{P} \text{ und ebenfalls}$$

$$(\beta') \quad l = \cdot 33 + 1 \cdot 21 d.$$

Für die im Beispiele des §. 262 angeführten gufseisernen Zapfen der Wasserradswelle, würde wegen $P = 25$ Centner nach den beiden erstern Formeln (α) und (β) der Durchmesser $d = 2 \cdot 5$, und die Länge $l = 3 \cdot 4$ Zoll.

Körper von gleichem Widerstande.

(§. 259.)

108. Soll der, an dem einen Ende horizontal eingemauerte, an dem andern Ende belastete Balken, Querschnitte von durchaus gleicher Breite $CD = AB = b$ (Fig. 60) erhalten, so sey $CE = h$ die verticale Höhe des in der Ebene der Mauer liegenden Querschnittes, wofür wieder $AC = l$ seyn soll, und $PM = y$ jene des Querschnittes PM' , wofür $AP = x$ ist; so ist die Festigkeit des Balkens in Beziehung auf den Querschnitt ED (Nr. 99) $(\alpha) \dots Q = \frac{1}{8} m \frac{b h^2}{l}$ und in Bezug auf den Querschnitt MP' : $Q' = \frac{1}{8} m \frac{b y^2}{x}$. Da nun aber beide Festigkeiten gleich groß seyn sollen, so hat man $Q' = Q$ oder $\frac{y^2}{x} = \frac{h^2}{l}$ und daraus $y^2 = \frac{h^2}{l} x$ als Gleichung der Begrenzungscurve AME oder $BM'F$, welche sofort eine gemeine Parabel vom Parameter $\frac{h^2}{l}$ ist, deren Scheitel in A und Achse in AC liegt.

Anmerkung. Der Parameter $\frac{h^2}{l}$ läßt sich, wenn m , Q und b gegeben sind, aus der vorigen Gleichung (α) , aus welcher $\frac{h^2}{l} = \frac{6 Q}{m b}$ folgt, bestimmen.