Reibung eines Seiles über einen ruhenden Cylinder.

(§. 240.)

93. Ist das Seil, woran die Last Q hängt, um den Bogen $AM = r\alpha$ (Fig. 47) geschlagen, und steht die Kraft P mit dieser Last und der zwischen dem Seil und dem genannten Bogenstück des Cylinders C vom Halbmesser r im Gleichgewichte, d. h. kann die Kraft P, wenn die Bewegung eingeleitet ist, die Last Q heraufziehen; so muſs durch Vergröſserung des Winkels α um $d\alpha$, wegen der vermehrten, auf dem Bogenstück $Mm = r\,d\alpha$ Statt findenden Reibung, auch die Kraft P um dP vermehrt werden, um das Gleichgewicht zwischen der Last Q und der Reibung über dem Bogen AMm wieder herzustellen, so, daſs also dP die Reibung über den unendlich kleinen Bogen Mm überwindet.

Um diese Reibung zu finden, muſs man zuerst den Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm bestimmen. Dazu denke man sich die im Puncte M in der Richtung MA Statt findende Spannung durch eine nach der Tangente MT wirkende Kraft $= P$ ersetzt, so, daſs der Stand des Gleichgewichtes nicht gestört wird, wenn an dem über dem Bogen Mm gelegten Seil nach den Richtungen der Tangenten MT und mt die Kräfte P und $P + dP$ wirkend gedacht werden. Da aber $P + dP = P$ ist, so wirken auf den Punct N nach den genannten Richtungen zwei gleiche Kräfte P und erzeugen daher eine nach dem Mittelpuncte C gerichtete, d. i. den Winkel $MCm = d\alpha$ halbirende Resultirende R, welche sich einfach nach Nr. **10.**, d. i. wenn man Kürze halber $W. MNC = W. mNC = \varphi$ setzt, aus der Proportion $R : P = Sin\, 2\varphi : Sin\, \varphi = 2\, Cos\, \varphi : 1$ oder wegen $\varphi = 90^0 - \frac{1}{2} d\alpha$ aus $R : P = 2\, Sin \frac{1}{2} d\alpha : 1$ bestimmen läſst; es ist nämlich, wegen $Sin \frac{1}{2} d\alpha = \frac{1}{2} d\alpha$, sofort $R = P\, d\alpha$.

Da nun diese Kraft R den gesuchten Normaldruck des Seiles gegen den Bogen Mm vorstellt, so ist, wenn f den betreffenden Reibungscoeffizienten bezeichnet, $fR = fP\, d\alpha$ der Betrag der Reibung, folglich $dP = fP\, d\alpha$.

Aus dieser Differentialgleichung folgt durch Absonderung:

$$\frac{dP}{P} = f\, d\alpha \text{ und durch Integration: } logn.\, P = f\alpha + C.$$

Um die willkürliche Constante C zu bestimmen, bemerke man, daſs für $\alpha = 0$ sofort $P = Q$ seyn muſs; dieſs gibt $logn.\, Q = C$, folglich wenn dieser Werth für C substituirt wird:

$$logn. P - logn. Q = f\alpha \text{ oder } logn. \frac{P}{Q} = f\alpha$$

und wenn man von den Logarithmen auf die Zahlen selbst übergeht, auch: $\frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$ oder $P = Q e^{f\alpha}$,

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.
(Vergl. §. 240, Gleich. I).

Relative Festigkeit.

(§. 255.)

94. Es sey $C'N$ (Fig. 48) ein an dem einen Ende B eingemauerter, und am andern Ende A mit dem Gewichte Q belasteter horizontaler Balken von der Länge $AB = l$ und dem beliebigen, jedoch durchaus gleichen Querschnitt $acbc'$; dabei sey $DEFG$ die neutrale, d. h. jene horizontale Schichte, in welcher die Fasern weder ausgedehnt, noch zusammengedrückt werden, in welcher also die Gleichgewichtsachse ab eines jeden Querschnittes $acbc'$ liegt und welche den Balken in zwei, obschon nicht immer gleiche Hälften theilt, in deren obern die Fasern ausgedehnt, in der untern aber zusammengedrückt werden.

In einem beliebigen, auf der Achse AB senkrechten Querschnitt $acbc'$, welcher vom Aufhängpunct A den Abstand $AO = z$ haben mag, nehme man die durch den Punct O auf der Gleichgewichtsachse ab perpendikuläre Gerade cOc' zur Abscissenachse und O zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten der Umfangscurve $acbc'a$, setze also für einen beliebigen Punct M derselben $OP = x$ und $PM = y$. Nimmt man $Pn = dx$ und zieht durch n die Ordinate nm, so ist die Fläche des unendlich schmalen Rechteckes $Mn = y\,dx$ und man kann annehmen, dafs die Fasern dieses Rechteckes in diesem Querschnitte, oder in einer unendlich dünnen Scheibe fd (Fig. 49) von der Dicke $OO' = dz$, alle gleich viel, nämlich um Pr ausgedehnt werden, so dafs die Fasern in dieser Schichte Mn von der Länge $P'r$ in jene $P'P$ übergehen, während diese Ausdehnung in derselben Schichte in den weiter gegen B zu liegenden Querschnitten allmählig zunimmt, also nur für eine unendlich kleine Distanz $OO' = dz$ als gleichbleibend angesehen werden kann.

Ist nun der Widerstand, welchen die in dieser von der Gleichgewichtsachse ab um x abstehende Schichte liegenden Fasern, der durch die Biegung des Balkens bewirkten Ausdehnung Pr entgegen setzen, auf die Flächeneinheit bezogen $= p''$, für die oberste Faser bei c des-