an lebendiger Kraft, welchen das ganze System durch den Stofs erlitten hat, gleich $\Sigma\, m\,(V-v)^2$ . . (1)

Ändert aber irgend ein Massentheilchen m nicht blofs wie es hier vorausgesetzt wurde seine Geschwindigkeit, sondern überdiefs noch nach dem Stofse seine Richtung, so seyen X, Y, Z die durch Zerlegung der Geschwindigkeit V nach den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen entstehenden Seitengeschwindigkeiten dieses Theilchens m vor, so wie x, y, z jene nach dem Stofse; so ist der durch den Stofs herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft gleich

$$\Sigma m[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \;.\,. \quad (2)$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit V vor dem Stofse, und α', β', γ' jene, welche die Richtung der Geschwindigkeit v nach dem Stofse mit den Achsen der x, y, z bilden, so wie φ der Winkel dieser beiden Richtungen gegeneinander; so ist wegen $X = V \operatorname{Cos}\alpha$, $Y = V\operatorname{Cos}\beta$, $Z = V\operatorname{Cos}\gamma$, $x = v\operatorname{Cos}\alpha'$, $y = v\operatorname{Cos}\beta'$, $z = v\operatorname{Cos}\gamma'$, sofort $(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2 = V^2+v^2-2Vv(\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\alpha'+\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Cos}\beta'+\operatorname{Cos}\gamma\operatorname{Cos}\gamma') = V^2+v^2-2Vv\operatorname{Cos}\varphi$.

Ändert sich die Richtung nach dem Stofse nicht, so wird $\varphi = 0$ und der vorige Verlust ist $= V^2+v^2-2Vv = (V-v)^2$, wie es seyn soll.

Reibung an den Zähnen der Räder.

(§. 234.)

90. Die in §. 234 aufgestellte Formel (1) für die Reibung der Zähne läfst sich auch auf folgende Weise ableiten.

Es seyen $CA = R$ und $cA = r$ (Fig 45) die Halbmesser der primitiven Kreise der beiden ineinander greifenden Räder und die Berührung der beiden Zähne NB und nB, welche im Puncte A begonnen, sey bereits bis zu einem Punct B fortgerückt, wofür $ACB = \alpha$ und $AcB = \alpha'$ die Mittelpunctswinkel seyn sollen. Bei dem weitern unendlich wenigen Fortrücken der Räder nimmt α um $d\alpha$ und α' um $d\alpha'$ zu, wobei der Berührungspunct B des Zahnes BN den Kreisbogen $BB' = CB\,d\alpha$ und des Zahnes Bn den Kreisbogen $BB'' = cB\,d\alpha'$ beschreibt.

Da man während dieser unendlich kleinen Bewegung die Lage der gemeinschaftlichen Tangente DE als unverändert ansehen kann, so gleitet der Punct B des Zahnes BN auf dieser Tangente von B nach b, und des Zahnes Bn von B nach b', so dafs der ganze Weg des Gleitens $s = Bb + Bb' = BB'\operatorname{Cos} B'Bb + BB''\operatorname{Cos}.B''Bb' = CB.d\alpha.\operatorname{Cos}B'Bb + cB.d\alpha'.\operatorname{Cos}B''Bb'$ ist.

Sind aber CD und cd perpendikulär auf dieser Tangente DE, so ist W. $B'Bb =$ W. BCD und W. $B''Bb' =$ W. Bcd, folglich:

$$CB \,.\, Cos\, B'Bb = CB \,.\, Cos.\, BCD = CD$$

und $$cB \,.\, Cos\, B''Bb' = cB \,.\, Cos\, Bcd = cd;$$

es ist daher auch, wenn man diese Perpendikel $CD = a$ und $cd = a'$ setzt:

$$s = a\, \mathrm{d}\alpha + a'\, \mathrm{d}\alpha'.$$

Ist ferner die vom Puncte A aus gezählte gemeinschaftliche Normale $AB = N$, so ist auch, wenn man W. $CED = \beta$ setzt:

$$a = CD = N + R\, Sin\, \beta \text{ und } a' = cd = N - r\, Sin\, \beta, \text{ folglich}$$

auch $$s = N\mathrm{d}\alpha + R\, Sin\, \beta\, \mathrm{d}\alpha + N\mathrm{d}\alpha' - r\, Sin\, \beta\, \mathrm{d}\alpha' \quad \text{d. i.}$$

$$s = N(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha') + (R\mathrm{d}\alpha - r\mathrm{d}\alpha')\, Sin\, \beta.$$

Nun sind aber $R\mathrm{d}\alpha$ und $r\mathrm{d}\alpha'$ die Bögen oder Wege, welche der Punct A auf den primitiven Kreisen in derselben Zeit ($\mathrm{d}t$) zurücklegt, und da diese bei einer richtigen Verzahnung (§. 207) gleich seyn müssen, so ist $R\mathrm{d}\alpha = r\mathrm{d}\alpha'$ und daher $s = N(\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\alpha')$ oder wegen $\mathrm{d}\alpha = \frac{r}{R}\mathrm{d}\alpha'$ auch $s = N\frac{(R+r)}{R}\mathrm{d}\alpha'$.

Ist nun Q der zwischen den Zähnen Statt findende Normaldruck und f der Reibungscoefficient, so ist die auf Reibung verwendete Arbeit oder unendlich kleine Wirkung:

$$\mathrm{d}W = fQs = fQN\frac{(R+r)}{R}\mathrm{d}\alpha', \text{ also } W = f\frac{(R+r)}{R}\int QN\mathrm{d}\alpha'.$$

Ist ferner P die nöthige Tangentialkraft (am Umfang der primitiven Kreise) um den Widerstand der Reibung zu überwinden und S ihr Weg während der Drehung des Rades c um den Winkel α', so ist auch

$$W = PS, \text{ folglich } PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} QN\mathrm{d}\alpha' \ldots \quad (1)$$

als allgemeine Gleichung.

91. Geht nun die gemeinschaftliche Tangente, wie es z. B. bei der Epicycloiden-Verzahnung der Fall ist, durch den Mittelpunct c (Fig. 46), so wird $\beta = \alpha'$, $AB = N = r\, Sin\, \alpha'$, und da, wenn P' die nöthige Tangentialkraft am Umfang der primitiven Kreise bezeichnet, um die Räder ohne Rücksicht auf die Reibung umzudrehen, $P' = Q\, Cos\, \alpha'$ ist, sofort $Q = \frac{P'}{Cos\, \alpha'}$ (wenn man nämlich den in der Richtung BA wirksamen Normaldruck Q in die zwei aufeinander senkrechten Seitenkräfte nach AR, welcher Kraft jene P' gleich seyn muſs, und AS zerlegt denkt). Diese Werthe in die vorige Gleichung (1) substituirt geben:

$$PS = f\frac{R+r}{R}\int_0^{\alpha'} P'r\,\frac{Sin\,\alpha'}{Cos\,\alpha'}\,d\alpha' = ..P'r\int_0^{\alpha'} \alpha'\,d\alpha' = fP'r\,\frac{(R+r)}{R}\cdot\frac{\alpha'^2}{2},$$

wenn man nämlich, was bei den hier vorkommenden kleinen Werthen von α' immer erlaubt ist, α' statt $tang\,\alpha'$ setzt.

Ist endlich b die Theilung oder Schrift der Räder, so findet der Angriff des Zahnes des treibenden Rades nach der Regel während des Bogens $b = r\alpha'$ Statt, woraus $\alpha' = \frac{b}{r}$, folglich die ganze Wirkung, wofür auch $S = b$ zu setzen ist:

$$Pb = fP'\,\frac{(R+r)}{Rr}\,\frac{b^2}{2} \quad \text{d. i.} \quad P = \tfrac{1}{2}fP'b\,\frac{(R+r)}{Rr}.$$

Sind aber m und m' die Anzahl der Zähne in den beiden Rädern C und c so ist (§. 216) $b = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$, folglich:

$\frac{R+r}{Rr}\,b = 2\pi\left(\frac{m+m'}{mm'}\right)$ und daher endlich:

$$P = f\pi P'\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Reibung eines Cylinders auf seiner Grundfläche.

(§. 235.)

92. Ist $CA = r$ (Fig. 37) der Halbmesser der Grundfläche des Cylinders, auf welche der Normaldruck Q Statt findet und welche zugleich die reibende Fläche seyn soll; so ziehe man aus ihrem Mittelpuncte C mit den Halbmessern $CP = x$ und $Cp = x + dx$ die beiden concentrischen Kreise, welche sofort die Fläche $2x\pi\,dx$ einschliefsen. Da der Druck Q über die ganze Kreisfläche gleichförmig vertheilt ist, so kommt davon auf dieses unendlich schmale Kreisband der Theil dQ, welcher sich aus der Proportion $dQ : Q = 2x\pi\,dx : r^2\pi$ bestimmen läfst, und zwar folgt daraus $dQ = \frac{2Q}{r^2}\,x\,dx$. Der Betrag der Reibung ist daher, wenn f den Reibungscoeffizienten bezeichnet, $f dQ$, so wie das statische Moment der Reibung in Beziehung auf die Umdrehungsachse

$dS = x\,.\,f\,dQ = \frac{2Q}{r^2}\,f\,x^2\,dx$, woraus $S = \frac{2Q}{r^2}\,f\int_0^r x^2\,dx = \frac{2}{3}rfQ$

für das Moment der ganzen Reibung folgt, gerade so, als fände der Widerstand der Reibung fQ lediglich auf der Peripherie des Kreises vom Halbmesser $\frac{2}{3}r$ Statt.