Von dem Stofse *unelastischer* Körper.

(§. 199.)

89. Sind m und m' die Massen zweier homogener unelastischer Kugeln, deren Mittelpuncte sich auf einer geraden Linie nach einerlei Richtung mit den Geschwindigkeiten c und c' bewegen und wobei, wenn m' die vorausgehende Kugel, $c > c'$ ist, folglich durch das Einholen ein gerader centraler Stofs entsteht; so stelle man sich vor, dafs durch das Auf- oder Gegeneinanderwirken dieser beiden Massen (Action und Reaction) während des Stofses, in Folge welcher die vorausgehende Kugel beschleunigt und die nachfolgende verzögert wird, diefs durch eine zwischen beide wirkende beschleunigende Kraft geschieht, die also beim Beginn des Stofses ihren gröfsten Werth und in dem Augenblicke als der Stofs vollendet ist, beide Massen also einerlei Geschwindigkeit haben, Null ist. Hat nun diese variable Kraft nach Verlauf der Zeit t, diese von dem Augenblicke an gezählt als der Stofs beginnt, den Werth p, so kann man diesen wie bekannt, während des darauf folgenden Zeitelementes dt als constant ansehen und da, wenn die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln m, m' nach Verlauf dieser genannten Zeit t, v und v' sind, während dieser Zeit dt die Geschwindigkeit v' um dv' zu-, dagegen jene v um dv abnimmt; so hat man nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten oder verzögernden Beweguug (§. 134, Gleich. 1 und §. 146, Gleich. 2) $dv' = \frac{p}{m'} g\, dt$ und $dv = -\frac{p}{m} g\, dt$, oder da p eine gewisse, wenn uns auch unbekannte Function der von 0 bis t' wachsenden Zeit t ist, wenn man nämlich annimmt, dafs der Stofs in der Zeit t' (welche, wenn auch noch so klein, doch kein untheilbarer Augenblick ist) vollendet sey, also $p = \varphi(t)$ gesetzt werden kann, auch:

$$dv' = \frac{g}{m'} \varphi(t)\, dt \text{ und } dv = -\frac{g}{m} \varphi(t).dt$$

Durch Integration dieser beiden Gleichungen folgt, wenn man $\int \varphi(t)\, dt = \varphi'(t)$ setzt, wo $\varphi'(t)$ eine neue, ebenfalls unbekannte Function von t ist:

$$v' = \frac{g}{m'} \varphi'(t) + C \text{ und } v = C' - \frac{g}{m} \varphi'(t).$$

Um die Constanten C und C' der Integrationen zu bestimmen bemerke man, dafs für $t=0$, was wir durch t_0 anzeigen wollen, sofort $v'=c'$ und $v=c$ seyn mufs; hieraus folgt daher:

$$C=c'-\frac{g}{m'}\varphi'(t_0) \text{ und } C'=c+\frac{g}{m}\varphi'(t_0),$$

so, dafs also, wenn man diese Werthe substituirt, die vorigen Ausdrücke übergehen in:

$$v'=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t)-\varphi'(t_0)] \quad \text{und}$$

$$v=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t)].$$

Ist nun C die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stofs, welche also nach unserer Voraussetzung nach Verlauf der Zeit t' eintritt, so darf man in den vorigen Relationen nur $t=t'$ und $v=v'=C$ setzen und man erhält:

$$C=c'+\frac{g}{m'}[\varphi'(t')-\varphi'(t_0)]$$

$$C=c+\frac{g}{m}[\varphi'(t_0)-\varphi'(t')]$$

oder auch $$m'C=m'c'+g\varphi'(t')-g\varphi'(t_0)$$

und $$mC=mc+g\varphi'(t_0)-g\varphi'(t').$$

Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man endlich:

$$(m+m')C=mc+m'c'$$

und daraus $$C=\frac{mc+m'c'}{m+m'}.$$

(Vergleiche §. 199, Gleich. 1.)

Anmerkung. Der in §. 201 gefundene Verlust an lebendiger Kraft, welcher durch den Stofs unelastischer Körper entsteht und mit Beibehaltung der hier gewählten Bezeichnung durch $m(c-C)^2+m'(C-c')^2$, nämlich so ausgedrückt werden kann, dafs man sagt, dieser Verlust sey der Summe der lebendigen Kräfte gleich, welche den Geschwindigkeitsänderungen beider Massen m und m' entspricht, bildet in der Wesenheit den *Carnot*'schen Lehrsatz. Bezieht man diesen auf ein ganzes System von unelastischen Körpern, in welchem sich ein plötzlicher Stofs ereignet und setzt man die Geschwindigkeit eines Theilchens von der Masse m vor dem Stofs $=V$ und nach dem Stofs in derselben Richtung $=v$; so ist $V-v$ die durch den Stofs verlorne Geschwindigkeit oder überhaupt (da diese Differenz auch negativ seyn kann) die dadurch herbeigeführte Geschwindigkeitsänderung, und $m(V-v)^2$ die dieser Geschwindigkeitsänderung entsprechende lebendige Kraft. Nimmt man nun diese lebendige Kraft für alle Theilchen des Systemes, so ist nach diesem Lehrsatze, der Verlust an lebendiger Kraft, welchen das ganze System durch den Stofs erlitten hat, gleich $\Sigma\, m\,(V-v)^2$ .. (1)

Ändert aber irgend ein Massentheilchen m nicht blofs wie es hier vorausgesetzt wurde seine Geschwindigkeit, sondern überdiefs noch nach dem Stofse seine Richtung, so seyen X, Y, Z die durch Zerlegung der Geschwindigkeit V nach den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen entstehenden Seitengeschwindigkeiten dieses Theilchens m vor, so wie x, y, z jene nach dem Stofse; so ist der durch den Stofs herbeigeführte Verlust an lebendiger Kraft gleich

$$\Sigma m[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2] \;.. \quad (2)$$

Sind α, β, γ die Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit V vor dem Stofse, und α', β', γ' jene, welche die Richtung der Geschwindigkeit v nach dem Stofse mit den Achsen der x, y, z bilden, so wie φ der Winkel dieser beiden Richtungen gegeneinander; so ist wegen $X = V \, Cos\, \alpha$, $Y = V\, Cos\, \beta$, $Z = V\, Cos\, \gamma$, $x = v\, Cos\, \alpha'$, $y = v\, Cos\, \beta'$, $z = v\, Cos\, \gamma'$, sofort $(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2 = V^2+v^2-2\,Vv\,(Cos\,\alpha\, Cos\,\alpha' + Cos\,\beta\, Cos\,\beta' + Cos\,\gamma\, Cos\,\gamma') = V^2+v^2-2\,Vv\, Cos\,\varphi$.

Ändert sich die Richtung nach dem Stofse nicht, so wird $\varphi = 0$ und der vorige Verlust ist $= V^2+v^2-2\,Vv = (V-v)^2$, wie es seyn soll.

Reibung an den Zähnen der Räder.

(§. 234.)

90. Die in §. 234 aufgestellte Formel (1) für die Reibung der Zähne läfst sich auch auf folgende Weise ableiten.

Es seyen $CA = R$ und $cA = r$ (Fig 45) die Halbmesser der primitiven Kreise der beiden ineinander greifenden Räder und die Berührung der beiden Zähne NB und nB, welche im Puncte A begonnen, sey bereits bis zu einem Punct B fortgerückt, wofür $ACB = \alpha$ und $AcB = \alpha'$ die Mittelpunctswinkel seyn sollen. Bei dem weitern unendlich wenigen Fortrücken der Räder nimmt α um $d\alpha$ und α' um $d\alpha'$ zu, wobei der Berührungspunct B des Zahnes BN den Kreisbogen $BB' = CB\, d\alpha$ und des Zahnes Bn den Kreisbogen $BB'' = cB\, d\alpha'$ beschreibt.

Da man während dieser unendlich kleinen Bewegung die Lage der gemeinschaftlichen Tangente DE als unverändert ansehen kann, so gleitet der Punct B des Zahnes BN auf dieser Tangente von B nach b, und des Zahnes Bn von B nach b', so dafs der ganze Weg des Gleitens $s = Bb + Bb' = BB'\, Cos\; B'Bb + BB''\, Cos.\, B''Bb' = CB.\, d\alpha.\, Cos\, B'Bb + cB.\, d\alpha'.\, Cos\, B''Bb'$ ist.

Sind aber CD und cd perpendikulär auf dieser Tangente DE,