83. Schwingt eine cylindrische Pendelstange vom Halbmesser r und der Länge l um ihr oberes Ende, so ist ihr Moment der Trägheit (§. 161, Gleich. 1):

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2 + l^2) + M.\tfrac{1}{4}l^2 = \frac{M}{12}(3r^2 + 4l^2)$$

oder auch $$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Anmerkung. Das in Nr. **81** bemerkte Moment der Trägheit der Bohrung der Pendellinse, welches von dem dortigen Ausdrucke (e) abzuziehen kommt, wäre also nach der vorigen Formel (f) wegen $l = NN' = 2\rho$ (Fig. 42) sofort $\mathfrak{M}' = \frac{M'}{12}(3r^2 + 4\rho^2) = M'\left(\frac{r^2}{4} + \frac{\rho^2}{3}\right)$ so, dafs also das eigentliche Moment der Trägheit der in **81.** betrachteten Pendellinse auf ihre geometrische Achse bezogen $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ wäre, wobei $\mathfrak{M}$ den genannten Werth in (f) besitzt. Steht endlich der Mittelpunct oder die geometrische Achse der Linse von der mit ihr parallelen Schwingungsachse um die Gröfse δ ab, so mufs man statt $\mathfrak{M}''$ setzen:

$$\mathfrak{M}'' + (M - M')\delta^2 = \mathfrak{M}'' + M''\delta^2$$

wobei M die Masse der massiven, nicht durchbohrten Linse und M' die durch das Ausbohren wegfallende Masse, also M'' die wirkliche Masse der Linse bezeichnet.

Theorie der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

(§. 188 — §. 192.)

84. Ist $CA = r$ (Fig. 44) die Höhe des Kurbelkniees, also $ABA'B'$ jener Kreis, welchen die Kurbelwarze beschreibt, d. i. der Kurbelkreis, M die nach dem Moment der Trägheit (§. 159, Gl. 3) auf den Kurbelkreis reducirte Masse, Q jene Last, welche auf den Kurbelkreis aufgewunden, den Widerstand vorstellt, welcher durch die Umdrehung der Kurbel überwunden werden soll, so wie endlich P die constante Kraft, welche, indem sie dabei beständig mit dem Durchmesser AA' parallel wirkt, die Kurbelwarze M hin und her schiebt um die Kurbel umzudrehen; so ist, wenn die Kurbelwarze nach M gekommen, und dafür der Winkel $ACM = \alpha$ ist, die aus der Zerlegung der Kraft P in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte abgeleitete Tangentialkraft $p = P \, Sin\, \alpha$. Da aber diese veränderliche Kraft p während die Warze um einen unendlich kleinen Bogen fortschreitet, d. i. α um $d\alpha$ zunimmt, als constant angesehen werden kann, so ist ihre Wirkung dw oder Arbeit während ihres Fortschreitens um $r\,d\alpha$, nach §. 174:

$$d w = p\, r\, d\alpha = P\, r\, Sin\, \alpha\, d\alpha\,.$$

Da aber während dieser Zeit die Last Q um den Weg $r\, d\alpha$ gehoben wird, so ist gleichzeitig ihre Wirkung, oder wenn man will die geleistete Arbeit: $d w' = Q\, r\, d\alpha$ und da der Überschufs dieser beiden Wirkungen $d w - d w'$ auf Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M verwendet wird, je nachdem $d w \gtrless d w'$, der letztere Fall aber immer in dem erstern begriffen ist (und durch das Zeichen dieser Differenz ausgedrückt wird); so ist also, während die Kurbelwarze von dem Puncte M um einen unendlich kleinen Bogen fortgeht, die auf Beschleunigung der Masse M verwendete Arbeit:

$$d W = d w - d w' = P\, r\, Sin\, \alpha\, d\alpha - Q\, r\, d\alpha.$$

Aus dieser Differenzialgleichung folgt durch Integration ganz einfach: $W = r(P\, Sinv.\, \alpha - Q\, \alpha) + C\,.\,.\quad (a)$ wo C die willkürliche Constante bezeichnet, die wir weiter unten bestimmen werden.

85. Soll die Kurbel bei ihrer Bewegung in den Beharrungsstand kommen, d. h. eine gewisse Gleichförmigkeit erlangen, wodurch ihre mittlere Geschwindigkeit endlich constant wird; so mufs zwischen der Kraft P und der Last Q ein bestimmtes Verhältniss Statt finden, welches wir ganz einfach aus der Betrachtung finden, dafs die Warze im Beharrungsstand an den beiden Endpuncten irgend eines, z. B. des Durchmessers AA', einerlei Geschwindigkeit besitzen müsse, weil, wenn diese durch die Bewegung im obern Halbkreis ABA' hervorgebracht, in $A' \gtrless A$ wäre, aus gleichem Grunde diese Geschwindigkeit durch die Bewegung im untern Halbkreis $A'B'A$ erzeugt, in $A \gtrless A'$, dann wieder in $A' \gtrless A$ u. s. w., die Kurbelwarze also entweder fortwährend beschleunigt oder verzögert würde, was gegen die Voraussetzung des Beharrungsstandes ist. Da also, während die Kurbelwarze den Halbkreis ABA' zurücklegt, wobei der Weg der Kraft $= AA' = 2r$ und jener der Last $=$ Bog. $ABA' = r\pi$ ist, die Wirkung oder Arbeit von Seite der Kraft P jener der Last Q gleich seyn mufs (weil jeder Überschufs Beschleunigung oder Verzögerung der Masse M, also auch der Kurbelwarze hervorbringt); so hat man:

$$P\,.\,2r = Q\,.\,r\pi \quad \text{und daraus} \quad P : Q = \pi : 2 \quad \text{oder} \quad Q = \frac{2}{\pi} P\,.\,\quad (m)$$

Diese für den Beharrungsstand der Kurbelbewegung nothwendige Relation zwischen P und Q erhält man auch, wie es seyn soll, aus der obigen Gleichung (a), wenn man in dieser gleichzeitig $\alpha = 180^0$

und $W=0$ setzt (wobei, da für diesen Fall die Wirkung W von A aus zählt, auch $C=0$ ist).

Setzt man daher diesen Werth von Q aus der Gleichung (m) in die obige Gleichung (a), so erhält man für die Wirkung auf Beschleunigung der Masse M:

$$W = r\,P\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\,\alpha}{\pi}\right) + C\,.\,.\quad (b)$$

86. Diese zur Beschleunigung, oder überhaupt zur Geschwindigkeitsänderung der Masse M nöthige Arbeit oder Wirkung W läſst sich aber auch nach §. 186 durch die sogenannte lebendige Kraft ausdrücken. Nimmt man nämlich an, daſs die Kurbelwarze, sobald der Beharrungsstand eingetreten ist, im Puncte A (also auch in A') die constante Geschwindigkeit c, dagegen im Puncte M die veränderliche Geschwindigkeit v besitze; so ist, wenn h und z die Geschwindigkeitshöhen zu c und v bezeichnen (also $h=\frac{c^2}{2g}$, $z=\frac{v^2}{2g}$ ist) die nöthige Wirkung, um in der Masse M die Geschwindigkeit v zu erzeugen:

$$W = M z,$$

folglich ist, wenn man diesen Werth dem obigen in (b) gleich setzt:

$$M z = r\,P\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\,\alpha}{\pi}\right) + C$$

wobei jetzt auch die noch unbestimmte Constante C bestimmt werden kann, indem man nur berücksichtigen darf, daſs für $\alpha=0$ die Variable z in h übergehen muſs; dadurch erhält man $C=Mh$ und daher die vollständige Gleichung:

$$M z = M h + r\,P\left(Sinv.\,\alpha - \frac{2\,\alpha}{\pi}\right)\,.\,.\,.\quad (c)$$

Anmerkung Diese Gleichung erhält man auch, wenn man in den obigen Relationen (a) oder (b) die Constante ausläſst d. i. gleich Null setzt, indem für $\alpha=0$ auch $W=0$ ist, und berücksichtiget, daſs die Masse M, während die Kurbelwarze den Weg AM zurücklegt, von der Geschwindigkeit c auf jene v gebracht werden muſs, wozu (§. 186, Gleich. 1) die Arbeit $M(z-h)$ nothwendig, also $M(z-h) = r\,P\left(Sinv\;\alpha - \frac{2\,\alpha}{\pi}\right)$ ist.

87. Da die Tangentialkraft $p = P\,Sin\,\alpha$ von Null (im Puncte A) bis P (im Puncte B) allmählig oder continuirlich zunimmt und vermöge der Relation (m) (in **85.**) $P > Q$ ist, so muſs es zwischen $\alpha=0$ und $\alpha=90^0$ (welche Werthe den genannten beiden Puncten A und B entsprechen) einen Werth α' geben, wofür $p = P\,Sin\,\alpha' = Q$, d. h. wenn

$ACD = \alpha'$ ist, so muſs im Puncte D die Tangentialkraft p eben so groſs als die Last Q seyn, und da es im obern Halbkreis ABA' noch einen zweiten Punct D' von gleicher Beschaffenheit gibt (wofür nämlich W. $A'CD' = 180^0 - \alpha'$ ist), ferner im untern Halbkreis $A'B'A$ zwei ähnliche Puncte E und E' vorkommen (wofür man nur $D'C$ und DC verlängern darf); so folgt, daſs während die Kurbelwarze den Kurbelkreis einmal durchläuft, die auf Umdrehung wirklich verwendete Kraft, d. i. die Tangentialkraft p viermal und zwar in den Puncten D, D', E', E, der gerade entgegenwirkenden Last Q gleich, dagegen von E bis D und von D' bis E' kleiner, dann von D bis D' und von E' bis E gröſser als diese Last Q ist; hieraus folgt aber ferner, daſs die Bewegung der Kurbelwarze durch die Bögen ED und $D'E'$ gar nicht Statt finden könnte, wenn dieſs nicht auf Kosten der mit ihr oder dem Kurbelkreis verbundenen Masse M, welche durch den Überschuſs der Kraft p über Q, durch die Bögen DD' und $E'E$ beschleunigt wird, geschähe, wodurch jedoch die Masse verzögert wird. Betrachtet man daher, da sich im untern Halbkreis dasselbe wiederholt, nur die Bewegung im obern Halbkreis, so folgt, daſs die Masse, also auch die Kurbelwarze, von A bis D verzögert, und von D bis D' beschleunigt wird, so daſs in D die kleinste, und in D' die gröſste Geschwindigkeit eintritt. Diese bemerkenswerthen Puncte D und D' bestimmen sich aber aus der Gleichung $P\,Sin\,\alpha' = Q$, woraus: $Sin\,\alpha' = \frac{Q}{P} = \frac{2}{\pi}$ (wegen Relation m) folgt, und wobei der spitze Winkel $\alpha' = ACD$ und der stumpfe $\alpha'' = 180^0 - \alpha' = ACD'$ ist.

Bestimmt man aber aus dieser Gleichung $Sin\,\alpha' = \frac{2}{\pi}$ den Winkel α', so findet man $\alpha' = 39^0\,32'\,25'' =$ W. ACD, folglich $\alpha'' =$ W. $ACD' = 180^0 - 39^0\,32'\,25'' = 140^0\,27'\,35''$.

Anmerkung 1. Diese beiden Winkel α' und α'', welche beziehungsweise der kleinsten und gröſsten Geschwindigkeit v der Kurbelwarze, folglich auch der kleinsten und gröſsten Geschwindigkeitshöhe z entsprechen, findet man auch ganz einfach aus der Gleichung (c) in 86. nach den bekannten Regeln für das Maximum und Minimum. Denn es folgt daraus:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{rP}{M}\left(Sin\,\alpha - \frac{2}{\pi}\right) = 0 \text{ oder } Sin\,\alpha = \frac{2}{\pi},$$

und zwar erhält man für α zwei Werthe, den einen $\alpha' < 90^0$ und den zweiten $\alpha'' = 180 - \alpha' > 90^0$.

Da der zweite Differentialquotient $\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{rP}{M}\,Cos\,\alpha$, für den erstern

Werth oder $\alpha = \alpha'$ positiv, dagegen für $\alpha = \alpha''$ negativ wird, so folgt in der That wie vorhin, dafs im 1ten Quadranten, und zwar für $\alpha' = 39^0\ 32'\ 25''$ das Minimum, und im 2ten Quadranten, für $\alpha'' = 180^0 - \alpha'$ das Maximum der Geschwindigkeit der Kurbel Statt findet.

Anmerkung 2. Schwieriger, und von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades abhängig, wird die Bestimmung dieser beiden Winkel, wenn man aufser der auf den Kurbelkreis reducirten Masse M auch noch annimmt, dafs mit der Schubstange MP ebenfalls eine Masse verbunden ist; bezeichnet man diese nämlich mit M', so mufs man, da die Geschwindigkeit der Kurbelwarze im Puncte M parallel mit dem Durchmesser AA' (welches auch die Geschwindigkeit der Masse M') $v_1 = v\, Sin\, \alpha$, also die auf den Kurbelkreis reducirte Masse m wegen $m v^2 = M' v_1^2$ (§. 159, Anm.) $= M' \frac{v_1^2}{v^2} = M' Sin\, \alpha^2$ ist, im ersten Theil der Gleichung (c) in 86. statt Mz setzen $(M + M' Sin\, \alpha^2)\, z$.

Übrigens kann man in der Anwendung überall diese Masse M' (welche dahin wirkt den Winkel α' zu vergröfsern) unberücksichtigt und die bisherige einfachere Voraussetzung gelten lassen.

88. Bezeichnet man die in den Puncten D und D' Statt findende kleinste und gröfste Geschwindigkeit der Kurbelwarze mit c' und c'', so wie die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen mit h' und h''; so erhält man aus der Gleichung (c) in **86.**:

$$M h'' = M h + r P \left(Sinv.\, \alpha'' - \frac{2\alpha''}{\pi} \right)$$

und $$M h' = M h + r P \left(Sinv.\, \alpha' - \frac{2\alpha'}{\pi} \right)$$

folglich wenn man subtrahirt und statt $Sinv.$, $1 - Cos.$ setzt:

$$M(h'' - h') = r P \left[Cos\, \alpha' - Cos\, \alpha'' - \frac{2}{\pi}(\alpha'' - \alpha') \right]$$

oder wegen $Cos\, \alpha'' = Cos(180^0 - \alpha') = - Cos\, \alpha'$ und $\alpha'' = \pi - \alpha'$

auch $$M(h'' - h') = 2 r P \left(Cos\, \alpha' + \frac{2\alpha'}{\pi} - 1 \right)$$

und wenn man für α' den oben gefundenen Werth von $39^0\ 32'\ 25''$ setzt und reducirt, auch $M(h'' - h') = \cdot 42103\, r P$, woraus sofort

$$M = \frac{\cdot 42103\, r P}{h'' - h'} = \frac{\cdot 84206\, r g P}{c''^2 - c'^2}$$

folgt (vergl. §. 192, Gleich. 1).