Da unterm Aequator unserer Erde die Schwere und Centrifugalkraft einander gerade entgegen wirken, so hat dort die Schwere einen Werth. welcher jenem gleich wäre, wenn die Rotation der Erde nicht bestünde, vermindert um die Centrifugalkraft. Abstrahirt man von den geringen Veränderungen der Schwere in den verschiedenen Breiten, so kann man diese unterm Aequator $= g$ setzen, und wenn man ihre Intensität, in der Voraussetzung dafs keine Achsendrehung der Erde Statt fände, durch G bezeichnet, so ist nach dem Vorigen:

$$g = G - \frac{4 r \pi^2}{t^2}.$$

Da nun aber für den Aequator in runder Zahl $2 r \pi = 40000000$ Meter und $t = 86164$ Secunden beträgt, so ist wegen $g = 9{\cdot}808$ M. sehr nahe $\frac{4 r \pi^2}{g t^2} = \frac{1}{289}$, folglich

$$g = G - \frac{g}{289} \quad \text{oder auch nahe } g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right)$$

so, dafs also die Schwerkraft dort um den 289sten Theil ihres Werthes vermindert wird. Da aber 289 das Quadrat von 17 und die Centrifugalkraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so folgt, dafs wenn die Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde beiläufig 17 Mal gröfser wäre, die Schwere unterm Aequator gleich Null seyn würde.

Von dem Momente der Trägheit.

(§. 159.)

65. Wir haben bereits in der Einleitung (§. 2, 6.) bemerkt, dafs man das Streben der Materie, in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung zu verharren, Trägheit nennt, und diese mufs sofort als ein Naturgesetz oder als erstes Gesetz der Bewegung der Körper betrachtet werden. Diese Trägheit ist auch die Ursache, dafs man, um einen auf einer horizontalen Ebene liegenden Körper, selbst wenn er weder von der Reibung, noch einem sonstigen Widerstand zurückgehalten würde, auf dieser Ebene fort zu bewegen, einer gewissen Anstrengung bedarf, eine Anstrengung oder Kraft, welche bei einerlei Geschwindigkeit in dem Mafse gröfser wird, als die Masse des Körpers zunimmt.

Bringt man zwischen dem Körper M (Fig. 31) und der ziehenden Kraft P, welche wir zuerst als eine constante ansehen wollen und etwa in einem Gewichte bestehen kann, eine Spiralfeder $a b$ an, so wird sich diese während der Bewegung der Masse M, welche unter den gemachten Voraussetzuugen eine gleichförmig beschleunigende seyn wird, bis zu einem gewissen Grade ausdehnen und in diesem Zustande des Gleichgewichtes, so lange die Bewegung dauert, permanent verharren; hieraus folgt also, dafs die Feder durch die blofse Trägheit der Masse des Körpers M in der Richtung von a gegen c mit derselben Stärke zurückgehalten, als durch die Kraft P von b gegen d gezogen wird. Die Wirkung oder Action, welche an dem einen Ende b der Feder ausgeübt wird und die Beschleunigung der Masse M hervorbringt, ist daher immer von einer gleichen und entgegengesetzten Gegenwirkung oder Reaction an dem andern, mit dem Körper verbundenen Ende a derselben begleitet, und da die Feder in diesem Zustande des Gleichgewichtes wie von zwei gleichen entgegengesetzt wirkenden Kräften gezogen wird, so hat man wohl auch diese von a nach c Statt findende Reaction, obwohl nicht ganz richtig, Kraft der Trägheit genannt.

Alle Erfahrungen und Versuche beweisen, dafs bei allen durch constante Kräfte erzeugten Bewegungen, Action und Reaction beständig einander gleich sind, und da man auch eine veränderliche Kraft während einer unendlich kleinen Zeit als constant ansehen kann, so gilt diese Eigenschaft in der Mechanik als ein allgemeines Gesetz, so, dafs so oft ein materieller Punct auf einen andern eine Wirkung oder Action ausübt und erzeugt, dieser letztere immer auch auf den erstern eine gleiche und entgegengesetzte Wirkung oder Reaction hervorbringt, dergestalt, dafs wenn diese Puncte auf eine unveränderliche Weise miteinander verbunden wären, sich diese beiden Wirkungen vollkommen aufheben oder zerstören würden.

Drückt man z. B. mit dem Finger einen Körper, zieht man einen Körper mittelst eines Fadens, oder stöfst diesen mittelst einer Stange; so empfindet man einen Druck, Zug oder Stofs nach entgegensetzter Richtung von ganz gleicher Gröfse oder Stärke.

Durch diese Reaction oder den Widerstand, welchen ein freier Körper jener Kraft entgegensetzt, welche in ihm Bewegung erzeugen oder zerstören will und welche sofort dieser Kraft oder ihrer Wirkung selbst gleich ist, wird zugleich die Trägheit der Masse oder Materie dieses Körpers gemessen. Man weifs, dafs dieser Widerstand mit der Masse und der Geschwindigkeit zunimmt, welche in der Masse erzeugt oder zerstört werden soll. Hängt man z. B. einen Körper vertical an eine Federwage, so wird diese im Stande der Ruhe das Gewicht des Körpers anzeigen; hebt man dagegen die Wage sammt dem daran hängenden Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Höhe, so wird sich die Feder, in Folge des Widerstandes, welchen die Trägheit der Masse oder Materie des Körpers dieser Bewegung entgegensetzt, noch weiter biegen, oder der Zeiger gleichsam ein noch gröfseres Gewicht anzeigen. Bleibt bei dieser Bewegung die einmal erlangte Geschwindigkeit constant, so nimmt die Feder oder der Zeiger wieder genau jenen Stand ein, welcher anfangs im

Stande der Ruhe Statt fand und dem Gewichte des Körpers entspricht; nimmt dagegen die Geschwindigkeit ab, so geht der Zeiger noch weiter zurück und zeigt dabei sogar ein kleineres Gewicht als im Stande der Ruhe an.

Befestigt man an einen undehnbaren Faden, dessen Masse man vernachlässigen kann und wovon der eine Endpunct fest gemacht ist, einen materiellen Punct m, setzt diesen in Bewegung und überläfst ihn blofs der Kraft, welche der gespannte Faden von der Länge r auf ihn ausübt (so, dafs also auch von der Schwere abgesehen wird), so bewegt sich dieser Punct gleichförmig im Kreise mit der Geschwindigkeit v und es ist (Nr. 61, Gl. *i*) $\frac{mv^2}{r}$ die Intensität der Kraft, mit welcher der Faden auf ihn wirkt.

In Folge nun dieses Principes oder allgemeinen Naturgesetzes (dafs jede Wirkung von einer gleichen Gegenwirkung begleitet ist), übt dieser Körper oder materielle Punct auch seinerseits auf den Faden und also auch auf den festen Mittelpunct des Kreises eine Kraft von derselben Intensität $\frac{mv^2}{r}$ aus, deren Richtung aber entgegengesetzt (d. i. vom Mittelpuncte gegen die Peripherie) ist.

Man kann überhaupt alle Körper als Aggregate von materiellen Puncten ansehen, auf welche fortwährend zwei Arten von Kräften in Thätigkeit sind, und zwar sind diese entweder äufsere (wie z. B. die Schwere), oder innere, und diese letztern bestehen in den wechselseitigen Wirkungen, welche die materiellen Puncte des Körpers oder Systemes selbst aufeinander ausüben. Empfängt nämlich eines dieser Elemente, dessen Masse wir mit m bezeichnen wollen, eine Kraftäufserung von Seite eines andern Elementes von der Masse m' und bezeichnen wir diese Kraft durch p, so empfängt eben so das Element m' von jenem m eine Kraft p' und das Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung besteht nun in Folgendem:

1) Die Richtungen dieser beiden Kräfte liegen in der Geraden, welche die beiden Elemente verbindet.
2) Beide Kräfte haben die nämliche Intensität, und
3) sie sind dem Sinne nach einander entgegengesetzt, wirken also beide anziehend oder beide abstofsend.

Obschon von den Gesetzen dieser innern Kräfte nichts weiter bekannt ist als die erwähnte Gleichheit der wechselseitigen Wirkungen, so kann man sich über die Art, wie die Elemente der Körper aufeinander wirken, gleichwohl eine ziemlich klare Vorstellung machen, wenn man die von mehreren Gelehrten aufgestellte Hypothese zu Hilfe nimmt. Nach dieser erstreckt sich das Gesetz der allgemeinen Gravitation auch auf die kleinsten Theile der Materie, so, dafs sich diese um so stärker anziehen, je näher sie sich kommen; aufserdem aber besteht (nach dieser Hypothese) zwischen zwei benachbarten Massentheilchen eine abstofsende Kraft, welche von der Wärme oder von ähnlichen Ursachen abhängt und welche sich mit der Entfernung ändert, jedoch nach einem andern Gesetze als die Gravitation.

Demnach wäre jede von den beiden genannten Kräften p und p' die Differenz oder Resultante zweier Kräfte, nämlich 1) der wechselseitigen Gravitation zwischen den beiden Elementen m und m', dann 2) der wechselseitigen Abstofsung in Folge von Ursachen, welche der Wärme analog sind.

Diese Resultante würde anziehend, abstofsend oder null seyn, je nachdem die Intensität der erstern Kraft gröfser, kleiner, oder gleich der Intensität der letztern wäre.

66. Dehnt man die in §. 159 in Beziehung auf einen materiellen Punct gegebene Definition auf einen Körper von was immer für Dimensionen aus, so versteht man unter dem Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf irgend eine Gerade als Umdrehungsachse, die Summe der Producte der Massen aller einzelnen Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von dieser Geraden. Bezieht man die Lage des Körpers, dessen Masse $= M$ seyn soll, auf drei rechtwinkelige Achsen und nimmt die Umdrehungsachse für die Achse der z, so ist das Moment der Trägheit in Bezug auf diese Achse:

$$\mu = \int (x^2 + y^2)\, dM$$

wobei dM die Masse des Elementes oder materiellen Punctes bezeichnet, dessen Coordinaten x, y, z sind, und wobei sich das Integrale auf die gesammte Masse M erstreckt. Auf gleiche Weise bezeichnen die Ausdrücke:

$$\int (x^2 + z^2)\, dM \text{ und } \int (y^2 + z^2)\, dM$$

die Trägheitsmomente dieses Körpers in Beziehung auf die Achsen der y und x.

67. Kennt man das Moment der Trägheit eines Körpers in Bezug auf irgend eine Achse, so kann man dasselbe leicht auch für jede andere, mit der erstern parallele Achse finden.

Denn nimmt man die erstere Achse oder Gerade zur Achse der z und legt durch diese und die mit ihr parallele Gerade oder neue Achse die Ebene der xz, setzt den Abstand dieser beiden Geraden $= a$, die Masse des Körpers $= M$ und bezeichnet das Moment der Trägheit desselben in Bezug auf die Achse der z durch $\mathfrak{M}$, so wie in Beziehung auf die neue, mit dieser parallelen Achse durch $\mathfrak{M}'$; so ist, wie leicht zu sehen (da man in dem Ausdrucke von $\mathfrak{M} = \int (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}M$, $x - a$ statt x setzen mufs):

$$\mathfrak{M}' = \int [(x-a)^2 + y^2]\, \mathrm{d}M = \int (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}M + a^2 \int \mathrm{d}M - 2a \int x\, \mathrm{d}M$$

d. i. $$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 - 2a \int x\, \mathrm{d}M,$$

oder wenn X die Abscisse des Schwerpunctes des Körpers bezeichnet, also (Nr. **33.**) $XM = \int x\, \mathrm{d}M$ ist, auch

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2 - 2aXM.$$

Liegt der Schwerpunct in der Achse der z selbst, so ist $X = 0$ und (1) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Ma^2$, oder, wenn man, da das Moment der Trägheit immer diese Form annimmt, $\mathfrak{M} = Mk^2$ setzt, auch $\mathfrak{M}' = M(k^2 + a^2)$ . . (2) (Vergleiche §. 161, Gleich. 1).

Anmerkung. Hieraus folgt, dafs das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct gehende Achse kleiner, als in Beziehung auf jede andere mit ihr parallele Achse ist.

68. Um das Moment der Trägheit einer materiellen geraden Linie AB (Fig. 32) zu finden, welche sich um ihren Endpunct A dreht, sey ihre Länge $AB = l$ und die gleich vertheilte Masse, welche also dieser Länge proportional ist (so dafs in der Rechnung, wie bei der Bestimmung des Schwerpunctes, eines für das andere genommen werden kann) $= M$; nimmt man ferner in dieser Geraden in dem Abstande $AM = x$ ein Element derselben $Mm = \mathrm{d}x$, so kann man dieses für das Element der Masse $\mathrm{d}M$ setzen und man hat für das Moment der Trägheit $\mathrm{d}M$ dieses materiellen Punctes nach §. 159, Relat. 2:

$$\mathrm{d}\mathfrak{M} = x^2\, \mathrm{d}x, \quad \text{folglich} \quad \mathfrak{M} = \int_0^l x^2\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3} l^3 = \tfrac{1}{3} l \,.\, l^2 = \tfrac{1}{3} M l^2$$

(§. 162, Gleich. 1).

Anmerkung. Will man nicht unmittelbar statt der Länge der Linie ihre Masse setzen, so sey m die auf die Längeneinheit kommende Masse, also $M = ml$ und $\mathrm{d}M = m\, \mathrm{d}x$; dann ist:

$$\mathrm{d}\mathfrak{M} = x^2\, \mathrm{d}M = m x^2\, \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = m \int_0^l x^2\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3} m l \,.\, l^2$$

d. i. $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M l^2$, wie zuvor.

Auf dieselbe Weise könnte man auch bei allen folgenden Ableitungen verfahren, wo wir uns des einfacheren Vorganges bedienen und die auf die Längen- oder Flächeneinheit kommende Masse m, welche am Ende der Rechnung ohnehin wieder hinausfällt, überall auslassen werden.

69. Um das Moment der Trägheit eines Rechteckes AD (Fig. 33) zu finden, welches sich um ihren Mittel- oder Schwerpunct O oder eine durch O gehende auf der Ebene des Rechteckes perpendikuläre Achse dreht und dessen Masse $= M$ seyn soll, setze man die beiden Seiten $AB = a$, $BD = b$ und ziehe damit parallel durch den Punct O die Coordinatenachsen der x und y. Zieht man mit dieser letztern parallel in den Abständen $OP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ die beiden Geraden von der Länge BD, so schliefsen diese ein Rechteck $b\,\mathrm{d}x$ ein, welches ein Element des Rechteckes, also auch dessen Masse M bildet, so, dafs man (mit der in der vorigen Anmerkung erwähnten Abkürzung) $\mathrm{d}M = b\,\mathrm{d}x$ setzen kann. Schneidet man aber auf diesem unendlich schmalen Streifen, indem man in den Abständen $PM = y$ und $Mm = \mathrm{d}y$ mit der Achse der x zwei Parallele zieht, selbst wieder ein Element ab, so bildet dieses neue Rechteck $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ das Differenzial von der vorigen Masse $\mathrm{d}M$, oder es ist $\mathrm{d}^2M = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Da nun aber dieses Element als ein materieller Punct zu betrachten ist, welcher vom Drehungspuncte den Abstand OM hat, wofür $OM^2 = x^2 + y^2$ ist; so hat man nach dem ersten Satze (§. 159, Gl. 2) für dessen Moment der Trägheit, welches, wenn man jenes des Rechteckes AD mit $\mathfrak{M}$, folglich jenes des Rechteckes EF mit $\mathrm{d}\mathfrak{M}$ bezeichnet, durch $\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathfrak{M}) = \mathrm{d}^2\mathfrak{M}$ ausgedrückt werden mufs, sofort $\mathrm{d}^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Wird dieser Ausdruck zwei Mal und zwar, da x und y von einander unabhängig sind, einmal nach y (wobei x als constant) und einmal nach x (wobei y als constant zu nehmen ist) beziehungsweise innerhalb der Grenzen von $-\frac{1}{2}b$ bis $+\frac{1}{2}b$ und $-\frac{1}{2}a$ bis $+\frac{1}{2}a$ oder einfacher von 0 bis $\frac{1}{2}b$ und 0 bis $\frac{1}{2}a$ integrirt und im letztern Falle jedes Integrale 2 Mal genommen, so erhält man, da die Ordnung der Integration (Comp. §. 838) willkürlich ist:

$$\mathfrak{M} = 4\int_0^{\frac{1}{2}a} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y$$

durch die Ausführung dieser Integration erhält man zuerst

$$\mathfrak{M} = 4\int_0^{\frac{1}{2}a} \mathrm{d}x\,(\tfrac{1}{2}b\,x^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}b^3) = 2\,b\int_0^{\frac{1}{2}a} \mathrm{d}x\,(x^2 + \tfrac{1}{12}b^2), \text{ ferner}$$

$$\mathfrak{M} = 2\,b\,(\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}a^3 + \tfrac{1}{2}a\cdot\tfrac{1}{12}b^2) = a\,b\,(\tfrac{1}{12}a^2 + \tfrac{1}{12}b^2)$$

oder wenn man wieder für die Fläche $a\,b$ die Masse M setzt, auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

(vergl. §. 163, Gleich. 1).

Anmerkung 1. Dafs dieselbe Formel zugleich auch für das Moment der Trägheit eines senkrechten Parallelopipedes gilt, das sich um seine geometrische Achse dreht und für welches das vorige Rechteck AD einen auf dieser durch O gehenden Achse senkrechten Querschnitt bezeichnet, wenn man dabei nur unter dem Factor M die Masse des Parallelopipedes versteht, ist bereits in der Anmerkung zu §. 163 erwähnt. Ist nämlich l die Länge oder Höhe des Parallelopipedes und nimmt man die Umdrehungsachse zur Achse der z, so ist, wenn man aufser den vorigen mit den Achsen der x und y parallel geführten Schnitten (hier Ebenen, welche mit jenen der xz und yz parallel sind), auch noch mit der Ebene der xy (wofür man die untere Grundfläche AD des Körpers nehmen kann) in den Abständen z und $z + dz$ parallele Schnitte führt und dadurch das Körperelement $d^3M = dx\,dy\,dz$, ferner damit

$$d^3\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz, \text{ also nach Obigem}$$

$$\mathfrak{M} = \int_0^l dz \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} dx \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} (x^2 + y^2)\,dy = \frac{ab}{12}\int_0^l (a^2 + b^2)\,dz = \frac{1}{12}\,abl\,(a^2 + b^2)$$

oder wegen $abl = M$ sofort wieder $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$.

Beinahe noch einfacher ist die Ableitung für den Fall, dafs sich das rechtwinkelige Parallelopiped, dessen drei zusammenstofsende Seiten a, b, c und Dichte oder Masse der cubischen Einheit $= m$ seyn soll, um die eine Seite oder Kante z. B. um jene c dreht.

Nimmt man nämlich diese drei genannten Seiten für die Achsen der x, y, z, theilt jede dieser Seiten in unendlich viele unendlich kleine Theile und legt durch alle Theilungspuncte Ebenen, welche mit den Seitenflächen des Parallelopipedes parallel laufen (jene durch die in der Kante c liegenden Puncte gelegten Ebenen nämlich parallel mit der Seitenfläche ab oder Ebene der xy u. s. w.), so theilen diese drei Reihen von Ebenen das Parallelopiped in lauter unendlich kleine Theile, wovon jener, welcher den Coordinaten x, y, z entspricht, das Volumen $dx\,dy\,dz$, also die Masse $m\,dx\,dy\,dz$ hat, so, dafs wenn M die Masse des Parallelopipedes bezeichnet, sofort $d^3M = m\,dx\,dy\,dz$ ist. Das Moment der Trägheit dieses Körpers ist daher in Beziehung auf jene Kante, welche man zur Achse der z genommen hat:

$$\mathfrak{M} = m\iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = m\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2)\,dz$$
$$= \tfrac{1}{3} m\,abc\,(a^2 + b^2)$$

oder, wegen $m\,abc = M$, auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2)$.

Anmerkung 2. Nimmt man den Umdrehungspunct A für das Rechteck BE (Fig. 34) oder Umdrehungsachse für das rechtwinkelige Parallelopiped von den Grundflächen BE aufserhalb an, und setzt auf zwei mit BC und BD parallele Achsen AX, AY bezogen, die Abscissen $AP = a$, $AP' = a'$ und Ordinaten $AQ = b$, $AQ' = b'$, wodurch die beiden Seiten

$BC = a' - a$ und $BD = b' - b$ werden; so erhält man nach dem Satze in §. 161 (Gleich. 1) für das Moment der Trägheit auf diesen Punct A oder einer mit der vorigen durch den Schwerpunct O gehenden parallele Achse bezogen, wegen $AO^2 = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+b'}{2}\right)^2$:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M [(a'-a)^2 + (b'-b)^2] + \tfrac{1}{4} M [(a+a')^2 + (b+b')^2]$$

oder wenn man entwickelt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M (a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + aa' + bb').$$

70. Um das Moment der Trägheit eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC (Fig. 35) zu finden, welches sich um eine durch den Winkelpunct A (des rechten Winkels) auf der Ebene ABC perpendikulären Achse umdreht, seyen die beiden Catheten $AB = a$ und $AC = b$. Zieht man in dem Abstande $AP = x$ mit AC parallel die Ordinate $PN = y'$ und nimmt darauf in den Abstand $PM = y$ den Punct M, läſst x um dx und y um dy zunehmen, um das Flächenelement $dx\,dy$ zu erhalten, welches vom Punct A den Abstand AM besitzt, wofür $AM^2 = x^2 + y^2$; so hat man wieder wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M} = \int_0^a dx \int_0^{y'} (x^2 + y^2)\,dy$$

wobei jedoch y' von x abhängig und zwar wegen $a : b = (a - x) : y'$ sofort $y' = \frac{b}{a}(a - x)$ ist. Führt man die Integration aus, so erhält man

zuerst
$$\mathfrak{M} = \int_0^a dx\,(x^2 y' + \tfrac{1}{3} y'^3)$$

und wenn man für y' den Werth setzt, integrirt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2) \quad \text{oder wegen} \quad M = \tfrac{1}{2} ab \quad \text{auch:}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M (a^2 + b^2)$$

(vergl. §. 161, Gl. 1).

71. Zur Bestimmung des Momentes der Trägheit eines gleichschenkeligen Dreieckes ABC (Fig. 36), welches sich um eine durch den der Basis gegenüberliegenden Winkelpunct C gehende, auf der Dreieckebene perpendikuläre Achse dreht (oder eines senkrechten Prismas, welches dieses Dreieck zur Grundfläche hat), sey die Basis $AB = 2a$ und das auf dieselbe aus C gefällte Perpendikel $CD = h$. Nimmt man auf diesem $CP = x$ und zieht durch den Punct P mit AB die Parallele $NN' = 2y'$, ferner auf dieser $PM = y$ und läſst wieder x um dx und y um dy zunehmen, um durch die diesen Puncten entsprechenden, mit AB und CD Parallelen, das Flächenelement $dx\,dy$ zu erhalten, welches dem d^2M entspricht; so hat man wieder genau wie vorhin:

$$d^2\mathfrak{M} = (x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M} = \int_0^h dx \int_{-y'}^{y'} (x^2 + y^2)\,dy$$

$$= 2\int_0^h dx \int_0^{y'} (x^2 + y^2)\,dy = 2\int_0^h dx\,(x^2 y' + \tfrac{1}{3} y'^3)$$

oder wegen $y' = \frac{a}{h}\,x$ (aus $x : y' = h : a$) auch:

$$\mathfrak{M} = 2\int_0^h \frac{a}{h}\,dx\,(x^3 + \tfrac{1}{3}\frac{a^2}{h^2}\,x^3) = \frac{2a}{h}\left(\frac{h^4}{4} + \frac{a^2 h^2}{12}\right) = \tfrac{1}{6}\,ah\,(a^2 + 3h^2)$$

oder endlich wegen $ah = M$, auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}\,M\,(a^2 + 3h^2).$$

Will man die Seite $AC = BC = d$ hineinbringen, so ist wegen $a^2 = d^2 - h^2$ auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{6}M\,(d^2 + 2h^2) = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$ (vergleiche §. 165).

72. Um das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders von kreisförmiger Basis zu bestimmen, welcher sich um seine geometrische Achse umdreht, sey AB (Fig. 37) eine unendlich dünne, auf der Achse senkrechte Schichte des Cylinders, dabei dessen Halbmesser $CA = r$, Länge $= l$ und Masse $= M$. Zieht man in dieser Kreisfläche (oder eigentlich unendlich dünnen Kreisscheibe) von der Masse $m = dM$ mit den Halbmessern $CP = x$ und $Cp = x + dx$ aus dem Mittelpuncte C die concentrischen Kreise, so schliefsen diese ein unendlich schmales Kreisband ein, dessen Fläche $= (x + dx)^2\,\pi - x^2\,\pi = 2\,x\,\pi\,dx + \pi\,dx^2 = 2\,x\,\pi\,dx$ (also eben so grofs wie das Rechteck von der Basis des Umfanges $2\,x\,\pi$ und der Höhe dx) ist und welche sofort das Element der Masse dm darstellt. Ist μ das Moment der Trägheit dieser Schichte AB, also $d\mu$ jenes des schmalen Kreisbandes, so ist nach der Grundformel: $d\mu = 2\,\pi\,x\,dx \,.\, x^2 = 2\,\pi\,x^3\,dx$

folglich: $\mu = 2\,\pi \int_0^r x^3\,dx = 2\,\pi \,.\, \frac{r^4}{4} = \frac{1}{2}\,r^2\,\pi \,.\, r^2 = \frac{1}{2}\,m\,r^2$, weil die Masse m der Kreisfläche $r^2\,\pi$ proportional ist. Besteht nun aber der Cylinder aus n solchen Schichten (wobei n unendlich grofs) so ist auch wegen $n\,\mu = \frac{1}{2}\,n\,m\,r^2$, und $n\,\mu = \mathfrak{M}$, so wie $n\,m = M$ sofort das Moment der Trägheit des Cylinders: $\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\,M\,r^2$ (welcher Ausdruck sich nämlich wieder in nichts von jenem $\mu = \frac{1}{2}\,m\,r^2$ der Kreisfläche, als in der Bedeutung der Factoren M und m unterscheidet).

Oder es ist, wenn dz die Dicke dieser Schichte oder Cylinderelementes bezeichnet, auf den Cylinder bezogen $\mu = d\mathfrak{M}$ und $m = r^2 \pi \, dz = dM$, folglich $d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r^4 \pi \, dz$ und daraus:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} r^4 \pi \int_0^l dz = \tfrac{1}{2} r^2 \pi \, l \, . \, r^2 = \tfrac{1}{2} M r^2.$$

Oder noch einfacher für $m = dM$ sofort $d\mathfrak{M} = \frac{1}{2} r^2 \, dM$ also $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M r^2$. (Vergl. §. 167, Gleich. 1).

73. Ist der Cylinder hohl und sind R und r der äufsere und innere Halbmesser desselben, so darf man das obige Integral nur anstatt von o bis r hier von r bis R nehmen; dadurch erhält man:

$$\mu = 2 \pi \int_r^R x^3 \, dx = \frac{2 \pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{2} (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$$

oder da man $(R^2 - r^2)\pi$ für die Masse m der unendlich dünnen Schichte nehmen kann, auch $\mu = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$. Ist wieder $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, so wie M dessen Masse, so ist nach dem vorigen eben so:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2).$$

(§. 168, Gleich. 2).

Anmerkung. Setzt man für einen Radkranz die Breite des Kranzes (in der Richtung des Radhalbmessers) $= a$ und dessen Dicke (in der Richtung der Achse) $= b$, so wie den mittlern Radhalbmesser $= R'$; so ist wegen $R' = \dfrac{R + r}{2}$ und $R - r = a$, also $R^2 - r^2 = 2 R' a$ und $R^2 + r^2 = a^2 + 2 R r = a^2 + 2 R'^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2} + 2 R'^2$, wenn man diese Werthe in die obige Formel $\mathfrak{M} = \dfrac{b \pi}{2} (R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$ substituirt und reducirt, sofort das Moment der Trägheit dieses Radkranzes:

$$\mathfrak{M} = 2 R' a b \pi \left(\frac{a^2}{4} + R'^2 \right)$$

oder wenn, wie es z. B. bei allen Schwungrädern der Fall, $a < \frac{1}{5} R'$ also $\dfrac{a^2}{4} < \frac{1}{100} R'^2$ ist, für die Anwendung immer genau genug:

$$\mathfrak{M} = 2 \pi R'^3 a b.$$

74. Um sogleich allgemein das Moment der Trägheit für alle durch Rotation erzeugten Körper zu bestimmen, drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 38) und den beiden rechtwinkeligen Ordinaten QN, $Q'N'$ begrenzte Ebene QN' um die Abscissenachse

AX; so entsteht ein Körper, dessen Masse wir mit M bezeichnen, und für welchen wir das Moment der Trägheit $\mathfrak{M}$ in Beziehung auf diese Achse AX bestimmen wollen.

Setzt man $AQ = a$, $AQ' = a'$ und zieht zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + dx$ die Ordinaten PM und pm, nimmt auf diesen $Pn = y$, $nn' = dy$ und zieht durch n und n' mit der Abscissenachse die Parallelen; so erhält man das Flächenelement $nr = dx\,dy$, welches bei seiner Umdrehung um AX einen Körper, d. i. einen Kreisring erzeugt, welcher $= 2\,y\,\pi\,dy\,dx$ ist und sofort das zweite Differenzial des Volumens, also auch (nach unserer Annahme) der Masse des Körpers bildet, so, dafs also $d^2M = 2\,\pi\,y\,dx\,dy$ ist. Für dieses Massenelement ist aber das Moment der Trägheit $d^2\mathfrak{M} = y^2\,d^2M = 2\,\pi\,y^3\,dx\,dy$ und wenn man zweimal integrirt und die von x abhängige Ordinate $PM = y'$ setzt:

$$\mathfrak{M} = 2\,\pi \int_a^{a'} dx \int_0^{y'} y^3\,dy = 2\,\pi \int_a^{a'} \tfrac{1}{4}\,y'^4\,dx \quad \text{d. i.}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\pi \int_a^{a'} y'^4\,dx \;\ldots \quad (\alpha)$$

wobei diese zweite Integration erst dann ausgeführt werden kann, wenn die Natur der Curve NN' d. i. ihre Gleichung $y' = f(x)$ bekannt ist.

Beispiele.

75. Dreht sich anstatt der Curve eine mit AX parallele Gerade, welche von AX den Abstand r hat, um diese Achse, und setzt man $a = 0$, $a' = l$ gleich der Länge des dadurch erzeugten Cylinders; so wird wegen $y' = r$ sofort:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\pi \int_0^l r^4\,dx = \tfrac{1}{2}\,r^2\,\pi\,l\,.\,r^2 = \tfrac{1}{2}\,M\,r^2$$

indem man für das Volumen des Cylinders dessen Masse setzt. (Vergl. Nr. **72.**)

76. Geht die Gerade AB (Fig. 39) durch den Ursprung und ist $CB = r$ der Halbmesser und $AC = h$ die Höhe des erzeugten geraden Kegels, so ist wegen $x : y' = h : r$ sofort $y' = \frac{r}{h}\,x$, folglich:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,\pi \int_0^h \frac{r^4}{h^4}\,x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\,\pi\,\frac{r^4}{h^4}\,.\,\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\,r^4\,\pi\,h$$

oder wegen $M = \frac{1}{3}\,r^2\,\pi\,h$ auch $\mathfrak{M} = \frac{3}{10}\,M\,r^2$.

77. Ist die Curve eine Ellipse von den Halbachsen a und b, welche sich um die grofse Achse $2a$ umdreht, so erhält man wegen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ (die Abscissen vom Mittelpunct aus gezählt, Comp. §. 457.) für das Moment der Trägheit des elliptischen Sphäroides (nach der obigen Formel (α) in **74.**):

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi \int_{-a}^{a} \frac{b^4}{a^4} dx\,(a^2 - x^2)^2 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi \frac{b^4}{a^4}\int_0^a dx\,(a^4 - 2a^2x^2 + x^4)$$

$$= \pi \frac{b^4}{a^4}\left(a^5 - \frac{2a^5}{3} + \frac{a^5}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi a b^4.$$

Nun ist aber das Volumen dieses Körpers, wofür wir wieder die Masse setzen, oder (Comp. §. 866) $M = \frac{4}{3} a b^2 \pi$, folglich auch:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M b^2.$$

78. Bei der Umdrehung der Ellipse um die kleine Achse wird eben so, wenn wieder M die Masse des dadurch entstehenden Ellipsoides bezeichnet:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M a^2.$$

79. Geht die Ellipse in einen Kreis vom Halbmesser $a = b = r$ über, so hat man für die Kugel, welche sich um einen Durchmesser dreht, aus beiden vorigen Formeln:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} M r^2.$$

(Vergl. §. 169, Gleich. 2).

Ist die Curve eine Parabel und dreht sich diese um ihre geometrische Achse AC (Fig. 40), so wird wenn man $AC = h$ und $CB = r$ setzt, wegen $y'^2 = px$ und (Comp. §. 866) $M = \frac{1}{2} r^2 \pi h = \frac{1}{2}\pi p h^2$ (wegen $r^2 = ph$) wenn h die Höhe des entstehenden Paraboloides ist:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^h p^2 x^2 dx = \tfrac{1}{2}\pi p^2 \frac{h^3}{3}$$

oder auch $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M p h = \frac{1}{3} M r^2.$

80. Dreht sich die von dem Kreisbogen AN (Fig. 41) begrenzte Fläche ANB um die (in der Richtung des Durchmessers liegende) Achse AB, so entsteht ein Kugelsegment mit einer Grundfläche $NAN'B$ von der Höhe AB. Setzt man den Halbmesser des Kreises (gleich dem Kugelhalbmesser) $= r$, und $AB = a$ (gleich der Höhe des Kugelsegmentes) so folgt aus der Formel (α) in **74.** wegen $y'^2 = 2rx - x^2$:

$$\mathfrak{M}=\tfrac{1}{2}\pi\int_0^a dx\,(2\,r\,x-x^2)^2=\tfrac{1}{2}\,a^3\,\pi\,(\tfrac{4}{3}\,r^2-a\,r+\tfrac{1}{5}\,a^2)$$
$$=\tfrac{1}{30}\,a^3\,\pi\,(20\,r^2-15\,a\,r+3\,a^2)$$

oder wenn man die Masse M des Segmentes dem Volumen gleich setzt, also:

$$M=\tfrac{1}{2}\,B\,N^2\,\pi\,.\,a+\tfrac{1}{6}\,a^3\,\pi=\tfrac{1}{2}\,a\,\pi\,(2\,r\,a-a^2)+\tfrac{1}{6}\,a^3\,\pi=\frac{a^2\pi}{3}(3\,r-a)$$

setzt und diese in den vorigen Ausdruck einführt, auch:

$$\mathfrak{M}=\frac{a\,M}{10\,(3\,r-a)}(20\,r^2-15\,a\,r+3\,a^2)\;.\;.\quad(c)$$

Ist dagegen m die Masse der cubischen Einheit, also $M=\frac{a^2\pi}{3}(3\,r-a)\,m$, so ist endlich auch:

$$\mathfrak{M}=\frac{\pi}{30}\,a^3\,m\,(20\,r^2-15\,a\,r+3\,a^2)\;.\;.\quad(d)$$

(vergl. §. 169, Gleich. 1).

81. Besteht eine Pendellinse aus zwei solchen Kugelsegmenten, deren Grundflächen aufeinander liegen und sich decken, so ist ihr Moment der Trägheit in Bezug auf ihre geometrische Achse AB (Fig. 42) genau durch die vorige Formel (c) ausgedrückt, wenn M die Masse der Linse bedeutet. Bringt man statt dem Kugelhalbmesser r den Halbmesser $CN=\rho$ der Grundflächen der beiden Segmente in diese Formel (c); so erhält man wegen $\rho^2=2\,r\,a-a^2$ sofort $r=\frac{a^2+\rho^2}{2\,a}$ und damit nach gehöriger Substitution und Reduction:

$$\mathfrak{M}=\frac{M}{10}\left(\frac{a^4+5\,a^2\rho^2+10\,\rho^4}{a^2+3\,\rho^2}\right)\;.\;.\quad(e)$$

Anmerkung. Ist die Linse, wie gewöhnlich nach der Richtung NN' durchbohrt, um die cylindrische Pendelstange, welche in der Regel aus einem andern Materiale als die Linse besteht, durchschieben zu können; so muſs man von dem vorigen Werthe noch das Moment der Trägheit dieser Bohrung (den hohlen Cylinder als massiv gedacht) abziehen. (Man sehe Nr. 83. Anmerk.)

82. Um endlich noch das Moment der Trägheit eines gewöhnlichen Cylinders zu finden, welcher sich um eine Achse dreht, die durch den Schwerpunct des Cylinders geht und auf dessen geometrischer Achse perpendikulär steht, nehme man die geometrische Achse des Cylinders für die Achse der z, den Ursprung A der drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen im Schwerpunct des Cylinders, so wie die Umdrehungsachse für die Achse der y; so ist, wenn man den Cylinder in den Entfernungen von $AC = z$ (Fig. 43) und $z + dz$ durch zwei Ebenen parallel mit der Ebene der xy durchschneidet, die unendlich dünne Kreisscheibe, welche man dadurch erhält, ein Element des Cylinders und $= dM$, wenn M wieder die Masse des Cylinders, dessen Halbmesser $= r$ und Länge $= l$ seyn soll, bezeichnet. Sind BB' und DD' die Durchschnitte der Ebenen der xz und yz mit dieser Kreisscheibe von der Dicke dz und legt man in den Entfernungen $CP = x$ und $x + dx$ wieder zwei Ebenen und zwar parallel mit der Ebene der yz; so erhält man aus dieser Kreisscheibe als Element derselben das Parallelopiped von der Grundfläche $dx\,dz$ und Länge $mm' = 2y$, wenn man nämlich die der Abscisse $CP = x$ entsprechende Ordinate des Kreises $Pm' = Pm = y$ setzt. Da nun dieses Körperelement (gleichsam eine materielle gerade Linie) $d^2M = 2y\,dx\,dz$ von der Umdrehungsachse YY' den Abstand u hat, wofür $u^2 = x^2 + z^2$ ist, so hat man, wenn $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Cylinders, folglich $d\mathfrak{M}$ jenes der Kreisscheibe und endlich $d^2\mathfrak{M}$ jenes des unendlich dünnen Prismas bezeichnet, nach der Grundformel sofort: $d^2\mathfrak{M} = 2y\,dx\,dz\,(x^2 + z^2)$, folglich wenn man zweimal innerhalb der gehörigen Grenzen integrirt:

$$\mathfrak{M} = 2\int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} dz \int_{-r}^{+r} y\,(x^2 + z^2)\,dx = 8\int_0^{\frac{1}{2}l} dz \int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,dx.$$

Wegen $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ wird

$$\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,dx = \int_0^r x^2\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)} + z^2\int_0^r dx\sqrt{(r^2 - x^2)}$$

und da (Lehrb. Bd. III S. 336, Beispiel 4)

$$\int x^2\,dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \tfrac{1}{4}\left(x^3 - \tfrac{1}{2}r^2x\right)\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{1}{8}r^4\,arc\,Sin\,\frac{x}{r}$$

ferner (S. 339) $\int dx\sqrt{(r^2 - x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(r^2 - x^2)} + \frac{1}{2}r^2\,arc\,Sin\,\frac{x}{r}$, so ist innerhalb der angezeigten Grenzen

$$\int_0^r y\,(x^2 + z^2)\,dx = \tfrac{1}{8}r^4 . \frac{\pi}{2} + z^2 . \tfrac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} = \frac{r^4\pi}{16} + \frac{r^2\pi}{4}z^2,$$

folglich wenn man diesen Werth für das zweite Integral substituirt:

$$\mathfrak{M} = 8\int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{r^2\pi}{4}\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz = 2r^2\pi\int_0^{\frac{1}{2}l}\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz$$

$$= 2r^2\pi\left(\frac{r^2 l}{8} + \frac{l^3}{24}\right)$$

oder wegen $M = r^2\pi l$ endlich:

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2 + l^2) \ldots \quad (f)$$

6*

83. Schwingt eine cylindrische Pendelstange vom Halbmesser r und der Länge l um ihr oberes Ende, so ist ihr Moment der Trägheit (§. 161, Gleich. 1):

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{12}(3r^2 + l^2) + M.\tfrac{1}{4}l^2 = \frac{M}{12}(3r^2 + 4l^2)$$

oder auch $$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Anmerkung. Das in Nr. **81** bemerkte Moment der Trägheit der Bohrung der Pendellinse, welches von dem dortigen Ausdrucke (e) abzuziehen kommt, wäre also nach der vorigen Formel (f) wegen $l = NN' = 2\rho$ (Fig. 42) sofort $\mathfrak{M}' = \frac{M'}{12}(3r^2 + 4\rho^2) = M'\left(\frac{r^2}{4} + \frac{\rho^2}{3}\right)$ so, dafs also das eigentliche Moment der Trägheit der in **81.** betrachteten Pendellinse auf ihre geometrische Achse bezogen $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$ wäre, wobei $\mathfrak{M}$ den genannten Werth in (f) besitzt. Steht endlich der Mittelpunct oder die geometrische Achse der Linse von der mit ihr parallelen Schwingungsachse um die Gröfse δ ab, so mufs man statt $\mathfrak{M}''$ setzen:

$$\mathfrak{M}'' + (M - M')\delta^2 = \mathfrak{M}'' + M''\delta^2$$

wobei M die Masse der massiven, nicht durchbohrten Linse und M' die durch das Ausbohren wegfallende Masse, also M'' die wirkliche Masse der Linse bezeichnet.

Theorie der Kurbel in Verbindung mit dem Schwungrade.

(§. 188 — §. 192.)

84. Ist $CA = r$ (Fig. 44) die Höhe des Kurbelkniees, also $ABA'B'$ jener Kreis, welchen die Kurbelwarze beschreibt, d. i. der Kurbelkreis, M die nach dem Moment der Trägheit (§. 159, Gl. 3) auf den Kurbelkreis reducirte Masse, Q jene Last, welche auf den Kurbelkreis aufgewunden, den Widerstand vorstellt, welcher durch die Umdrehung der Kurbel überwunden werden soll, so wie endlich P die constante Kraft, welche, indem sie dabei beständig mit dem Durchmesser AA' parallel wirkt, die Kurbelwarze M hin und her schiebt um die Kurbel umzudrehen; so ist, wenn die Kurbelwarze nach M gekommen, und dafür der Winkel $ACM = \alpha$ ist, die aus der Zerlegung der Kraft P in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte abgeleitete Tangentialkraft $p = P \sin \alpha$. Da aber diese veränderliche Kraft p während die Warze um einen unendlich kleinen Bogen fortschreitet, d. i. α um $d\alpha$ zunimmt, als constant angesehen werden kann, so ist ihre Wirkung dw oder Arbeit während ihres Fortschreitens um $r\,d\alpha$, nach §. 174: