$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

und nach dem Stoſs, mit Rücksicht auf die Relation von $V = \dfrac{mv + m'v'}{m + m'}$ für beide Fälle (wenn man wieder in (α) gehörig substituirt):

$$\frac{dx_1}{dt} = V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

welches genau derselbe Werth wie vor dem Stoſse ist; der Stoſs dieser beiden Körper ändert also durchaus nichts in der Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes (da er sich überdieſs auch auf der ursprünglichen Geraden fortbewegt).

10. Sind die mit den Massen m, m', m'' . . behafteten materiellen Puncte in Bewegung, so seyen für einen bestimmten Augenblick x, x', x'' . . ihre Abscissen auf eine beliebige Achse bezogen und X die Abscisse des Schwerpunctes dieses System für denselben Augenblick; so ist (Nr. 33) $(m + m' + \ldots)\, X = mx + m'x' + \ldots$ d. h. $X \Sigma (m) = \Sigma (mx)$. Während des folgenden Zeitelementes dt nehmen die Abscissen um dx dx' . . . dX zu und man hat $\dfrac{dX}{dt}\, \Sigma (m) = \Sigma \left(m \dfrac{dx}{dt} \right)$, ($u$), d. h. die auf eine Achse projicirte Gröſse der Bewegung der Gesammtmasse des Systems, diese im Schwerpunct desselben vereinigt gedacht, ist gleich der Summe der Bewegungsgröſsen sämmtlicher einzelner Massen projicirt auf die nämliche Achse. Zwei ähnliche Gleichungen mit (u) erhält man auch für die beiden übrigen Coordinatenachsen. Ist V die Geschwindigkeit des Schwerpunctes und v, v' . . jene der Puncte m, m' . . so kann man, wenn V_x die Projection der Geschwindigkeit auf die Achse der x bezeichnet und damit analog auch die übrigen Projectionen bezeichnet werden, diese Gleichungen so schreiben:

$$V_x\, \Sigma (m) = \Sigma (m v_x),\quad V_y\, \Sigma (m) = \Sigma (m v_y),\quad V_z\, \Sigma (m) = \Sigma (m v_z).$$

Bestimmung der Centrifugalkraft eines Körpers.

(§. 156.)

62. Handelt es sich nicht bloſs um einen materiellen Punct, sondern um einen Körper von endlicher Ausdehnung, so sey zuerst NS (Fig. 29) irgend eine ebene Fläche von der Gröſse F, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist und welche sich um einen in ihrer Ebene liegenden Punct A oder um eine auf dieser Ebene in A perpendikuläre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit w umdreht.

Betrachtet man bei dieser Umdrehung einen Punct M dieser Fläche, wofür die in derselben Ebene angenommenen rechtwinkeligen Coordinaten $AP = x$, $AQ = y$ sind und die entsprechende Fläche dF für die Masse dM und umgekehrt gesetzt werden kann; so erhält man für die Centrifugalkraft dR des materiellen Punctes dM (wenn man nämlich diese Kraft für die ganze Fläche oder Masse mit R bezeichnet) nach §. 155:
$dR = \frac{dF.z^2 w^2}{z} = z w^2 dF$, wenn man nämlich den Abstand $AM = z$ setzt.

Zerlegt man diese, nach AM wirksame Kraft, in zwei nach den rechtwinkeligen Achsen AX, AY wirkende Seitenkräfte dP und dQ, so wird $dP = dR.\frac{x}{z}$ und $dQ = dR.\frac{y}{z}$ oder:

$$dP = w^2 x\, dF \text{ und } dQ = w^2 y\, dF;$$

diese Gleichungen integrirt geben:

$$P = w^2 \int x\, dF \text{ und } Q = w^2 \int y\, dF,$$

oder wenn X und Y die Coordinaten des Schwerpunctes dieser Fläche F sind (man sehe die Relationen I in Nr. **22.**):

$$P = w^2 X F \text{ und } Q = w^2 Y F.$$

Da nun R die Mittelkraft aus diesen beiden Seitenkräften seyn soll, so folgt, wenn man auch gleich die Masse M statt der Fläche F setzt:

$$R = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = w^2 M \sqrt{(X^2 + Y^2)} = w^2 M r, \ldots (\alpha)$$

wenn man nämlich den Abstand des Schwerpunctes O dieser Fläche oder Masse von A d. i. $AO = r$ setzt; es ist also die gesuchte Centrifugalkraft für diese Fläche, über welche die Masse M gleichförmig vertheilt ist:

$$R = \frac{M(rw)^2}{r} = \frac{Mv^2}{r},$$

wenn man nämlich die Geschwindigkeit des Schwerpunctes $rw = v$ setzt. Diese nach AO wirksame Centrifugalkraft ist also eben so grofs, als ob die gesammte Masse M im Schwerpuncte dieser Fläche NS vereinigt und die Kraft selbst in diesem Puncte O angebracht wäre.

63. Dreht sich ein Körper MN (Fig. 30) um die Gerade AB als Achse, so theile man denselben in unendlich dünne parallele Schichten, welche auf der Achse AB perpendikulär stehen; so erhält man nach der vorigen Nr. eben so viele, in den Schwerpuncten o, o', o''.. dieser Schichten perpendikulär auf die Umdrehungsachse AB wirksame Centrifugalkräfte, wovon jede (Gleich. α) dem Producte aus der Masse der betreffenden Schichte in den Abstand $a\,o$ ihres Schwerpunctes o von AB und das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit gleich ist. Da aber diese Kräfte im Allgemeinen nicht zu einander parallel seyn (d. i. nicht in einer einzigen durch AB gehenden Ebene liegen) werden, so können diese nach Umständen eine einzige Resultirende haben, oder sich auf zwei Kräfte (§. 21) oder auf eine Resultirende gleich Null reduciren, in welch letzterem Falle diese Kräfte auf die Umdrehungsachse AB keinerlei Druck oder Zug ausüben.

64. Liegen dagegen die sämmtlichen Schwerpuncte o, o' .. dieser dünnen Schichten in einer einzigen Geraden DE, welche mit der Umdrehungsachse AB parallel läuft, und von ihr den Abstand r besitzt; so haben auch alle die einzelnen Schwerpuncte einerlei Abstände von dieser Achse und zwar ebenfalls $= r$. Die einzelnen Centrifugalkräfte werden untereinander parallel und liegen sämmtlich in der durch DE und AB gedachten Ebene, so dafs demnach ihre Resultirende, indem die einzelnen Kräfte den Massen, also auch den Gewichten der betreffenden Schichten proportional sind, durch den Schwerpunct des ganzen Körpers MN geht und ihre Gröfse gleich der Summe dieser parallelen Kräfte, d. i. $R = m\,r\,w^2 + m'\,r\,w^2 + .. = (m + m' + ...)\,r\,w^2$ ist, wenn nämlich m, m', m'' . die Massen der einzelnen Schichten und w die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Achse AB bezeichnen; setzt man daher $m + m' + m'' + .. = M$ als Masse des ganzen Körpers, so ist dessen Centrifugalkraft:

$$R = M\,r\,w^2 = \frac{M\,v^2}{r} \quad (\text{für } v = r\,w)$$

genau eben so grofs und wirkt auf dieselbe Weise, als ob die gesammte Masse des Körpers in dessen Schwerpunct vereinigt wäre.

Anmerkung. Dieser hier erwähnte einfache Fall findet namentlich bei der Kugel, dem Cylinder, geraden Prisma, Kegel und überhaupt allen Rotationskörpern Statt, bei welchen die Achse mit der Umdrehungsachse parallel ist. Da für $r = 0$ auch $R = 0$ wird, so folgt, dafs wenn in diesen genannten Fällen die Achse des Körpers zugleich die Rotationsachse ist, diese letztere keinen Druck oder Zug durch die Centrifugalkraft erleide.

Ist bei einer Kugel, welche sich während der Zeit t einmal um ihre Achse dreht, r der Abstand irgend eines Punctes von dieser Achse, so ist dessen Geschwindigkeit $= \frac{2\,r\,\pi}{t}$ und Centrifugalkraft $= \frac{4\,r^2\,\pi^2}{r\,t^2} = \frac{4\,r\,\pi^2}{t^2}$ nämlich seinem Abstande von der Achse proportional.

Da unterm Aequator unserer Erde die Schwere und Centrifugalkraft einander gerade entgegen wirken, so hat dort die Schwere einen Werth. welcher jenem gleich wäre, wenn die Rotation der Erde nicht bestünde, vermindert um die Centrifugalkraft. Abstrahirt man von den geringen Veränderungen der Schwere in den verschiedenen Breiten, so kann man diese unterm Aequator $= g$ setzen, und wenn man ihre Intensität, in der Voraussetzung dafs keine Achsendrehung der Erde Statt fände, durch G bezeichnet, so ist nach dem Vorigen:

$$g = G - \frac{4 r \pi^2}{t^2}.$$

Da nun aber für den Aequator in runder Zahl $2 r \pi = 40000000$ Meter und $t = 86164$ Secunden beträgt, so ist wegen $g = 9{\cdot}808$ M. sehr nahe $\frac{4 r \pi^2}{g t^2} = \frac{1}{289}$, folglich

$$g = G - \frac{g}{289} \quad \text{oder auch nahe } g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right)$$

so, dafs also die Schwerkraft dort um den 289sten Theil ihres Werthes vermindert wird. Da aber 289 das Quadrat von 17 und die Centrifugalkraft dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so folgt, dafs wenn die Rotationsgeschwindigkeit unserer Erde beiläufig 17 Mal gröfser wäre, die Schwere unterm Aequator gleich Null seyn würde.

Von dem Momente der Trägheit.

(§. 159.)

65. Wir haben bereits in der Einleitung (§. 2, 6.) bemerkt, dafs man das Streben der Materie, in dem Zustande der Ruhe oder Bewegung zu verharren, Trägheit nennt, und diese mufs sofort als ein Naturgesetz oder als erstes Gesetz der Bewegung der Körper betrachtet werden. Diese Trägheit ist auch die Ursache, dafs man, um einen auf einer horizontalen Ebene liegenden Körper, selbst wenn er weder von der Reibung, noch einem sonstigen Widerstand zurückgehalten würde, auf dieser Ebene fort zu bewegen, einer gewissen Anstrengung bedarf, eine Anstrengung oder Kraft, welche bei einerlei Geschwindigkeit in dem Mafse gröfser wird, als die Masse des Körpers zunimmt.

Bringt man zwischen dem Körper M (Fig. 31) und der ziehenden Kraft P, welche wir zuerst als eine constante ansehen wollen und etwa in einem Gewichte bestehen kann, eine Spiralfeder ab an, so wird sich diese während der Bewegung der Masse M, welche unter den gemachten Voraussetzuugen eine gleichförmig beschleunigende seyn wird, bis zu einem gewissen Grade ausdehnen und in diesem Zustande des Gleich-