Schief aufwärts geworfene Körper.

(§. 144.)

57. Wird ein schwerer Punct in der Richtung AT (Fig. 23) mit der Geschwindigkeit c aufwärts geworfen, so bleibt er, durch die Einwirkung der Schwere abwärts getrieben, fortwährend in der durch AT gelegten verticalen Ebene. Nimmt man daher eine in dieser Ebene durch den Punct A horizontale Gerade AX zur Abscissen- und die darauf perpendikuläre der Schwere entgegengesetzte Gerade AY zur Ordinatenachse, so wird die Lage des beweglichen Punctes durch die Coordinaten x, y bestimmt.

Die allgemeinen Gleichungen dieser Bewegung sind (vergleiche das Beispiel in der vorigen Nummer)

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

woraus sofort folgt $\quad \frac{dx}{dt}=C$ und $\frac{dy}{dt}=-gt+C'$.

Um die beiden Constanten C und C' zu bestimmen, setze man den Winkel $TAX=\alpha$, so sind die Seitengeschwindigkeiten von c für $t=0$ (§. 138) $c'=c\,Cos\,\alpha$ nach AX und $c''=c\,Sin\,\alpha$ nach AY und da die vorigen Quotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nichts anderes als eben diese Seitengeschwindigkeiten nach einer beliebigen Zeit t sind (**51**. Gleich. a), so folgt $C=c'=c\,Cos\,\alpha$ und $C'=c''=c\,Sin\,\alpha$, also ist

$$(h) \quad \frac{dx}{dt}=c\,Cos\,\alpha \text{ und } \frac{dy}{dt}=-gt+c\,Sin\,\alpha$$

oder auch $\quad dx=c\,Cos\,\alpha\,dt$ und $dy=-gt\,dt+c\,Sin\,\alpha\,dt$

und wenn man neuerdings integrirt:

$$(i) \quad x=ct\,Cos\,\alpha \text{ und } y=ct\,Sin\,\alpha-\tfrac{1}{2}gt^2$$

wozu keine Constanten beizufügen oder diese gleich Null sind, weil für $t=0$ sowohl $x=0$ als auch $y=0$ seyn mufs.

Eliminirt man endlich aus diesen beiden Gleichungen die Gröfse t, so erhält man als gesuchte Gleichung der Wurflinie oder Trajectorie:

$$y=x\,tang\,\alpha-\frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}\,x^2 \quad (1)$$

und zwar ist diefs die Gleichung einer gemeinen Parabel, bei welcher die Achse mit AY parallel, also vertical ist, die Gerade AT im Anfangspuncte A eine Tangente bildet (wegen $DE=2DC$), der Parameter den Werth $\frac{2c^2}{g}\,Cos\,\alpha^2$, und der Scheitel C die Coordinaten:

(w) . . $AD = x' = \frac{c^2}{2g} Sin\, 2\alpha$ und $DC = y' = \frac{c^2}{2g} Sin\, \alpha^2$ besitzt; dabei ist noch $AB = 2x' = \frac{c^2}{g} Sin\, 2\alpha$ die Wurfweite, welchen Werth man auch aus der obigen Gleichung (1) als zweite Wurzel von x für $y = 0$ erhält.

Der Abstand der Directrix von der Abscissenachse AX ist $= DC + \frac{1}{4}$ Parameter $= \frac{c^2}{2g} Sin\, \alpha^2 + \frac{c^2}{2g} Cos\, \alpha^2 = \frac{c^2}{2g}$ folglich ist die Gleichung dieser Geraden:

$$y = \frac{c^2}{2g} \quad . \; (m)$$

und zwar ist diefs (§. 143) zugleich die Höhe, welche der schwere Punct erreichen würde, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit c vertical aufwärts geworfen würde.

Die Geschwindigkeit des Beweglichen ist am Ende der Zeit t sofort $v = \frac{ds}{dt}$, woraus $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ oder wenn man für dx und dy die durch Differenziation der Gleichungen (i) folgenden Werthe setzt und reducirt, auch

$$(k) \quad v^2 = c^2 - 2cgt\, Sin\, \alpha + g^2 t^2 .$$

Für die Zeit, welche der bewegliche Punct braucht um in seiner Bahn bis zu einem Puncte M zu gelangen, dessen Abscisse $AP = x$ ist, folgt aus der ersten der Gleichungen (i) $t = \frac{x}{c\, Cos\, \alpha}$, folglich ist die Zeit nach welcher er im Puncte B anlangt, wegen $x = AB = \frac{c^2}{g} Sin\, 2\alpha = \frac{2c^2}{g} Sin\, \alpha\, Cos\, \alpha$, sofort:

$$t = \frac{2c}{g} Sin\, \alpha ;$$

daraus folgt $gt = 2c\, Sin\, \alpha$ und wenn man diese Gleichung mit der vorigen (k) verbindet, auch $v^2 = c^2$, zum Beweis, dafs die Geschwindigkeit des Mobilen im Puncte B wieder eben so grofs ist, als sie in dem Puncte A war.

Hat man es anstatt mit einem beweglichen Punct, mit einem Körper zu thun, so mufs man die Gleichungen der Bewegung auf dessen Schwerpunct beziehen.

Anmerkung. Das hier behandelte Problem eines im luftleeren Raume schief aufwärts geworfenen schweren Punctes oder Körpers gibt noch zu einigen anderen interessanten Untersuchungen Anlafs, welche wir hier kurz andeuten wollen.

1. Wird der Körper mit derselben Geschwindigkeit c jedoch nach und nach unter verschiedenen Neigungswinkeln α aufwärts geworfen, so entstehen als Wurflinien eben so viele verschiedene Parabeln, welche die nämliche Directrix besitzen (weil ihre Gleich. m vom Winkel α unabhängig ist). Die Scheitelpuncte dieser Parabeln werden durch die vorigen Gleichungen x', y' bestimmt, wenn man darin für α nach und nach die entsprechenden Werthe setzt. Eliminirt man daher aus diesen beiden genannten Gleichungen den Winkel α, so erhält man den geometrischen Ort (Lehrb Bd. II. S. 69, Comp. §. 403) aller dieser Scheitelpuncte. Durch diese Elimination entsteht aber die Gleichung

$$4y'^2 + x'^2 - \frac{2c^2}{g}y' = 0$$

welche sofort (Compend. §. 478) einer Ellipse angehört, deren kleine Achse in die Achse der y (d. i. in AY) und unterer Endpunct dieser Achse in den Ursprung A fällt. Die kleine Achse ist $= \frac{c^2}{2g}$ und die grofse ist doppelt so grofs d. i. $= \frac{c^2}{g}$.

2. Um die Curve zu finden, welche die vorhin genannten sämmtlichen Parabeln einhüllt, darf man nur aus der obigen Gleichung (1) $U = 0$ und ihrer nach α abgeleiteten oder derivirten $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ den Winkel α eliminiren. Man erhält zuerst aus der nach α differenziirten Gleich. (1) d. i. aus $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = 0$ sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{gx}$ und damit aus (1) oder $U = 0$ selbst

$$y = \frac{c^2}{2g} - \frac{gx^2}{2c^2} \quad (n)$$

welches sofort die Gleichung der einhüllenden Curve ist. Bezeichnet man die zu c gehörige Geschwindigkeitshöhe durch h, so nimmt diese Gleichung wegen $h = \frac{c^2}{2g}$ auch die Form an:

$$x^2 = 4h(h - y)$$

und in dieser Form erkennt man sogleich die Gleichung einer Parabel deren Achse in jener AY und Scheitel nach der positiven Seite von y in den Abstand h vom Ursprung fällt. Der Parameter dieser Parabel hat den Werth $4h$ und die Abscissenachse wird in zwei Puncten geschnitten, wofür $x = -x = 2h$ ist, woraus noch folgt, dafs der Brennpunct dieser Curve mit dem Ursprung A zusammenfällt.

3. Soll der Neigungswinkel α so bestimmt werden, dafs der mit der Geschwindigkeit c geworfene Körper durch einen bestimmten Punct x', y' geht, so mufs man die Gleichung $y' = x'\,tang\,\alpha - \frac{g}{2c^2\,Cos\,\alpha^2}x'^2$ nach α auflösen, wodurch man erhält:

$$tang\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{(c^4 - 2c^2gy' - g^2x'^2)}}{gx'};$$

ist nun $c^4 > 2c^2 g y' + g^2 x'^2$
so gibt es zwei Werthe von α, welche die Bedingung erfüllen;
ist $c^4 = 2c^2 g y' + g^2 x'^2$, so gibt es für α nur einen solchen Werth;
ist endlich $c^4 < 2c^2 g y' + g^2 x'^2$, so existirt für α gar kein solcher Werth.
Aus der vorletzten dieser Bedingungen folgt

$$y' = \frac{c^2}{2g} - \frac{g}{2c^2} x'^2$$

welche Gleichung mit der obigen (n) verglichen, sofort zeigt, dafs der gegebene Punct in der alle oben erwähnten Parabeln einhüllenden Curve oder Parabel liegen mufs, wenn die Aufgabe möglich seyn soll. Liegt der Punct innerhalb dieser Curve, so gibt es zwei, liegt er aufserhalb, so gibt es gar keine Auflösung dieses Problems.

Da für den ersten Fall, in welchem nämlich $c^4 = 2c^2 g y' + g^2 x'^2$ also nur eine Auflösung Statt findet, sofort $tang\,\alpha = \frac{c^2}{g x'}$ wird, so folgt, wenn man diesen Werth in der obigen Gleichung (1) und zugleich auch x', y' statt x, y setzt, für die entsprechende Parabel oder Wurflinie dieselbe Gleichung, welche man auch aus der Gleichung (n) erhält, wenn man darin x', y' statt x, y setzt; diefs beweist, was sich auch von selbst versteht, dafs der Körper in diesem Falle so geworfen werden müsse, dafs er eine Parabel beschreibt, welche die oben gefundene einhüllende Curve in dem betreffenden Puncte x', y' berührt.

Bestimmung der Geschwindigkeit, welche ein in einer krummen Linie herabgehender schwerer Punct oder Körper erlangt.

(§. 149.)

58. Ist AMB (Fig. 24) eine in einer verticalen Ebene liegende Curve, über welche ein blofs von der Schwere getriebener materieller Punct herabfällt, und nimmt man A als Ursprung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes, in welchem die Verticale AC die Abscissenachse seyn soll, setzt für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$, Bog. $AM = s$, so wie $Pp = dx$, $mn = dy$, $Mm = ds$ und zieht endlich in diesem Puncte an die Curve die Tangente MT, wofür der Neigungswinkel mit der Ordinatenachse durch α bezeichnet werden soll; so hat man, wenn der schwere Punct, indem er von A bis M gekommen, die Geschwindigkeit v erlangt, und dazu die Zeit t gebraucht hat (**51.** Gleich. a) sofort $v = \frac{ds}{dt}$.

Da aber diese Geschwindigkeit bei dem weitern Fallen des Körpers durch den Bogen $Mm = ds$, wozu er die Zeit dt braucht um dv

zunimmt, und diese Zunahme durch das Herabgleiten des schweren Punctes über die schiefe Ebene MT während der Zeit dt entstanden ist; so hat man $dv = G\,dt$ oder wegen (§. 147, Gleich. 3′):

$$G = g \, Sin\,\alpha = g\,\frac{Mn}{Mm} = g\,\frac{dx}{ds} \text{ auch } dv = g\,\frac{dx}{ds}\,dt, \text{ oder } \frac{ds}{dt}\,dv = g\,dx,$$

d. i. $v\,dv = g\,dx$.

Wird diese letztere Gleichung integrirt, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gx \text{ oder } v^2 = 2gx \text{ d. i. } v = \sqrt{2gx} \;\ldots\; (s)$$

wozu keine Constante kommt, weil (indem die Bewegung von A ausgeht) für $x = 0$ auch $v = 0$ seyn soll.

Aus dieser Gleichung folgt (vergl. §. 142, Form. 3), dafs der über die Curve AMB herabfallende schwere Punct oder Körper in was immer für einen Punct M der Curve dieselbe Geschwindigkeit erlangt, als wenn er durch die entsprechende Höhe AP (als Höhenunterschied zwischen den beiden Puncten A und M) frei gefallen wäre. Ist $AC = h$ und v' die Geschwindigkeit in B, so ist $v' = \sqrt{2gh}$.

Anmerkung. Einfacher gelangt man zu diesem Resultate nach dem in den Nrn. **55.** und **56.** Gesagten. Denn die beschleunigende Kraft nach Mm ist $g\,Sin\,\alpha = g\,\frac{dx}{ds}$, folglich (**55**, Gleich. 1) $g\,\frac{dx}{ds} = \frac{dv}{dt}$ oder $\frac{ds}{dt}\,dv = g\,dx$, d. i. $v\,dv = g\,dx$, woraus wieder $v^2 = 2gx$ folgt.

Schwingungsdauer des einfachen Pendels.

(§. 151.)

59. Um die Schwingungszeit eines einfachen Pendels, welches nur kleine Schwingungsbögen beschreibt, zu bestimmen, sey die Länge des Pendels $CA = r$ (Fig. 25), ABA' der dem Halbmesser r entsprechende, in einer verticalen Ebene liegende Kreisbogen, in welchem der schwere Punct A schwingt, C der Aufhängpunct des Pendels als Mittelpunct des Kreisbogens und $BD = a$ der dem Schwingungsbogen ABA' entsprechende Sinusversus. Nimmt man nun an, dafs der schwere Punct, welcher seine Bewegung in A beginnt, während der Zeit t bis M gekommen sey und hier die Geschwindigkeit v erlangt habe, so ist (**58.** Gleich. s) $v = \sqrt{(2g.DP)}$, oder wenn man die Abscissen auf dem verticalen Durchmesser CB von B aus zählt und für diesen Punct M die Abscisse $BP = x$ setzt, sofort $v = \sqrt{[2g(a-x)]}$.

Da aber auch (**51.** Gleich. α) $v = \frac{ds}{dt}$ oder $dt = \frac{ds}{v}$ und für den Kreis $ds = dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$ ist (wozu man $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung des Kreises $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$ zu bestimmen hat); so hat man mit Rücksicht darauf, dafs wenn t zunimmt sofort x abnimmt, folglich dt und dx entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen, auch

$$dt = \frac{-r\,dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}\,.\,\sqrt{[2g(a-x)]}} = \frac{-r}{2\sqrt{rg}}\,.\,\frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}\;\sqrt{(1-\frac{x}{2r})}}$$

diese Gleichung von $x=BD=a$ bis $x=0$ integrirt, gibt die halbe, d. i. die Schwingungszeit für den Bogen AMB und es ist, wenn man die Grenzen der Integration umkehrt, dagegen (Comp. § 834, Relat. 5.) das Zeichen ändert:

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}\,.\,\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}}\,.$$

oder wenn man, da sich die Integration nur durch eine unendliche Reihe ausführen läfst, den letzten Bruch in eine Reihe auflöst und

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2r}\right)}} = \left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3+$$

setzt, auch

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2r}\right)+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2r}\right)^3+\right]$$

durch Ausführung dieser Integration erhält man (Comp. S. 523)

$$t = \frac{r}{2\sqrt{rg}}\,\pi\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\left(\frac{a}{2r}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^2+\left(\frac{1.3\,5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{a}{2r}\right)^3+\right]$$

wobei diese unendliche Reihe leicht fortzusetzen ist. Diese nach steigenden Potenzen von $\frac{a}{2r}$ fortlaufende Reihe convergirt aber um so mehr, je kleiner dieser Bruch, d. h. je kleiner bei einer bestimmten Länge des Pendels der Schwingungsbogen ABA' ist. Beträgt der diesen Bogen messende Winkel ACA' (die Amplitude der Oscillationen) nur einige Grade, so kann man sich für gewöhnlich schon mit dem ersten Gliede dieser Reihe begnügen, so, dafs wenn man die gesuchte Schwingungsdauer mit T bezeichnet, wegen $T=2\,t$ sofort

$T = \frac{r\pi}{\sqrt{rg}}$ oder wenn man l statt r setzt

und reducirt auch: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wird, welche Schwingungsdauer sofort von der Höhe BD oder a unabhängig ist. Behält man dagegen von der unendlichen Reihe auch noch das zweite Glied bei, so wird diese Dauer von der Höhe a abhängig und man erhält

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{a}{8l}\right).$$

Da der Quotient $\frac{a}{l}$ nichts anderes als der Sinusversus des Elongationswinkels $ACB = \alpha$ für den Halbmesser $= 1$ nämlich $\frac{a}{l} = 1 - Cos\,\alpha = 2\,Sin^2 \frac{1}{2}\alpha$ ist, so läfst sich der Fehler, welchen man begeht, wenn man bei irgend einem Gliede der obigen Reihe stehen bleibt, sehr leicht berechnen.

Bestimmung der Centrifugalkraft eines materiellen Punctes.

(§. 155.)

60. Ist ein materieller Punct, dessen Masse gleich 1 seyn soll, bei seiner Bewegung gezwungen den Kreis AMB vom Halbmesser $CA = r$ (Fig. 26) zu beschreiben, so läfst sich der Druck, welchen derselbe durch diese Bewegung auf die Curve ausübt (gleich der Centrifugalkraft) auf folgende Weise bestimmen.

Zerlegt man die auf den Punct A wirkende beschleunigende Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine nach der Tangente AT, die andere nach der Normale AC des Kreises, so rührt die Bewegung der Projection des materiellen Punctes auf diese Normale lediglich von dieser letztgenannten Seitenkraft her. Sieht man aber diese Seitenkraft während einer unendlich kleinen Zeit dt (wie diefs immer erlaubt ist) sowohl in ihrer Gröfse als Richtung als constant an und ist während dieser Zeit $AM = ds$ der Weg des beweglichen Punctes und $AP = dx$ der Weg der Projection dieses Punctes auf die Normale; so ist nach der Theorie der gleichförmig beschleunigten Bewegung diese nach der Normale wirkende Kraft (**56.** Beispiel, Relation n) $f = \frac{2\,dx}{dt^2}$ oder da der Bogen $AM = ds$ mit dessen Sehne verwechselt werden darf und nach einem bekannten geometrischen Satze dann $dx = \frac{ds^2}{2r}$ ist, auch $f = \frac{1}{r}\frac{ds^2}{dt^2}$ oder wegen $\frac{ds}{dt} = v$, wo v die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte A bezeichnet $f = \frac{v^2}{r} \ldots (n)$ welche Kraft (Centripedalkraft genannt) sofort der Centrifugalkraft oder dem Drucke gegen die Curve gleich und entgegengesetzt ist. Besitzt der bewegliche Punct die Masse m, so ist (**56.**) diese Kraft

$$F = mf = \frac{mv^2}{r}.$$

Bezeichnet M das Gewicht der Masse m, so kann man (§. 35, Anmerk.) $M = mg$ oder $m = \frac{M}{g}$ setzen, und dadurch wird auch

$$F = \frac{Mv^2}{rg} \text{ (vergl. §. 155. Gleich. I).}$$

Anmerkung. Ist w die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Punctes, folglich $v = rw$, so erhält die Gleichung (n) auch die Form $f = rw^2 \ldots (m)$.

61. Beschreibt der materielle Punct überhaupt eine gegebene Curve im Raume, so seyen, um die Centrifugalkraft für diesen allgemeinen Fall zu bestimmen, $M_1 M$ und MM' (Fig. 27) zwei aufeinander folgende Elemente dieser Curve, D und D' ihre Halbirungspuncte und MT und $M'T'$ ihre Verlängerungen; so ist bekanntlich (Lehrbuch III. §. 97) TMT' die Krümmungsebene, so wie der Winkel TMT' der Winkel der Contingenz der Curve im Puncte M, und eine in dieser Ebene gezogene Gerade MO, welche den Winkel $M_1 MM'$ halbirt, fällt sofort mit dem entsprechenden Krümmungshalbmesser zusammen, so, dafs der Punct O den Mittelpunct der Krümmung dieser Curve im Puncte M darstellen kann. Setzt man das Curvenelement $M_1 M = DD' = ds$, den unendlich kleinen Winkel $TMT' = \delta$, so wie den Krümmungshalbmesser $OM = \varsigma$; so ist wie bekannt $ds = \varsigma\delta$ (weil nämlich das Curvenelement DMD' als ein Kreisbogen vom Halbmesser OM angesehen werden kann, welchem der Mittelpunctswinkel $DOD' = TMT'$ entspricht) oder $\delta = \frac{ds}{\varsigma}$ (a)

Diefs vorausgesetzt, komme der materielle Punct nach Verlauf der Zeit t im Puncte M mit der Geschwindigkeit v an, so, dafs er also, wenn er ganz frei wäre in der Richtung MT mit derselben Geschwindigkeit fortginge (indem wir vor der Hand von allen Kräften, die auf diesen Punct einwirken können, abstrahiren); da dieser Punct jedoch nach der gemachten Voraussetzung die Curve $M_1 MM'E$ zu beschreiben gezwungen ist, so ändert er im Puncte M seine Richtung von MT in MT'. Errichtet man in der genannten Krümmungsebene auf MT' das Perpendikel MN', so kann man die nach MT gerichtete Geschwindigkeit v in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten nach MT' und MN'

zerlegen, wovon die erstere also $= v \, Cos\, \delta$ und die letztere $= v \, Sin\, \delta$ seyn wird, und die Wirkung der Centripedalkraft f oder wenn man will der Curve, wird darin bestehen, diese letztere Geschwindigkeit aufzuheben, damit nur die erstere allein bestehen bleibt, oder mit andern Worten, die genannte der Centrifugalkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft f mufs in dem materiellen Punct oder dem Beweglichen eine gleiche Geschwindigkeit $v \, Sin\, \delta$ und zwar nach entgegengesetzter Richtung von MN' erzeugen. Nimmt man nun an, dafs diese Kraft f diese Geschwindigkeit $v \, Sin\, \delta$ während der Zeit dt, als das Bewegliche das Bogenelement DMD' zurücklegt, in dem materiellen Puncte, dessen Masse $= 1$ seyn soll, hervorbringt; so wird diese beschleunigende Kraft (**56.**) durch diese während der unendlich kleinen Zeit dt erzeugten Geschwindigkeit $v \, Sin\, \delta$, dividirt durch die Zeit dt gemessen oder ausgedrückt, so, dafs man hat $f = \frac{v \, Sin\, \delta}{dt}$. Setzt man δ statt $Sin\, \delta$ (weil δ unendlich klein) und für δ den obigen Werth aus (a), so erhält man mit Rücksicht darauf, dafs (**51.**) $ds = v\, dt$ ist, auch $f = \frac{v^2}{\varsigma}$, oder wenn der bewegliche Punct die Masse m besitzt, für die Centrifugalkraft im Puncte M, welche sofort nach der Richtung MN wirksam ist:

$$F = \frac{mv^2}{\varsigma} = m \varsigma w^2 \;.\;.\; (i)$$

wenn nämlich w die Winkelgeschwindigkeit des Beweglichen im Puncte M ist.

Was die Geschwindigkeit $v \, Cos\, \delta$ betrifft, mit welcher das Bewegliche von M aus nach MM' in der Curve weiter geht, so bleibt diese wegen $Cos\, \delta = 1$, ungeändert $= v$.

Anmerkung 1. Wirken auf das Bewegliche eine oder mehrere Kräfte, so ändert sich die Geschwindigkeit v je nach der Gröfse der nach der Tangente der Curve zerlegten Seitenkraft; eben so bringt die in der Richtung der Normale wirksame Seitenkraft einen weitern Druck auf die Curve (welcher auch Statt fände, wenn der bewegliche Punct ruhte) hervor, den man zur Centrifugalkraft noch hinzufügen mufs.

Anmerkung 2. Zur Übung und um dem Anfänger überhaupt mehr Übersicht und Gewandtheit in der Bewegungslehre zu verschaffen, geben wir hier nach einigen vorausgeschickten allgemeinen Betrachtungen und Sätzen, noch eine weitere Entwicklungsart der Centrifugalkraft.

1. Bei der gleichförmigen Bewegung sind die Geschwindigkeiten den in gleichen Zeittheilchen zurückgelegten Räumen, diese letztern aber den bewegenden Kräften, folglich auch die Geschwindigkeiten diesen Kräften und umgekehrt proportional, so, dafs also bei dieser Bewegung

Kraft und Geschwindigkeit eines für das andere als Maſs dienen kann. Aus diesem Grunde lassen sich auch alle für die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte aufgestellten Regeln zugleich für die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten anwenden.

2. Um die Gesetze der ungleichförmigen Bewegung auf jene der gleichförmigen zurückzuführen, kann man sich vorstellen, daſs bei der Bewegung eines Punctes, welcher von einer continuirlich fortwirkenden Kraft, wie es z. B. bei der Schwerkraft der Fall, getrieben wird, diese Kraft nicht ohne Unterbrechung oder continuirlich wirkt, sondern ihre Wirkungen durch unmerklich kleine Zeiten von einander getrennt sind. Diese Vorstellungsart, welche mit den Principien der Differenzialrechnung besser übereinstimmt, führt zu demselben Resultate wie die Annahme von dem Wirken ohne Unterbrechung; denn stellt man die Geschwindigkeiten eines von einer continuirlich wirkenden Kraft getriebenen Körpers durch die Ordinaten einer Curve vor, so verwandelt sich diese Curve im erstern Falle in ein Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, welches sofort als mit der Curve zusammenfallend angesehen werden kann. Bezeichnet man daher mit dt die Dauer des unendlich kleinen Zeittheilchens, welche die successiven Wirkungen einer beliebigen bewegenden Kraft von einander trennt, so kann die Bewegung während dieser unendlich kleinen Zeit als gleichförmig angesehen werden, so, daſs wenn ds den in dieser Zeit zurückgelegten unendlich kleinen Raum bezeichnet, sofort $\frac{ds}{dt}$ die entsprechende Geschwindigkeit ist. Denkt man sich also die Zeit t, während welcher die bewegende Kraft bei der ungleichförmigen Bewegung auf den beweglichen Körper wirkt, in unendlich viele, unendlich kleine Theile getheilt, so zerfällt diese Bewegung in unendlich viele gleichförmige Bewegungen, deren Geschwindigkeiten in den einzelnen Intervallen constant sind und nur von einem Intervalle zum andern variiren.

3. Was die sogenannte beschleunigende Kraft betrifft, welche diese eben betrachtete Bewegung erzeugt, so müssen, da ihre Wirkung die Bewegung continuirlich zu ändern strebt, ihr auch diese augenblicklichen Änderungen zum Maſse dienen.

Da man nun während des Zeitelementes dt die Wirkung der beschleunigenden Kraft P als constant ansehen kann, so wird, wenn dv die Zunahme der Geschwindigkeit am Ende der Zeit dt bezeichnet, sofort $dv = P\,dt$, also $P = \frac{dv}{dt}$ und wegen $v = \frac{ds}{dt}$ auch $P = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Bei der ungleichförmigen Bewegung wird daher die beschleunigende Kraft durch den Quotienten aus dem Quadrate des als constant angenommenen Zeitelementes in das zweite Differenziale des Raumes gemessen. Zugleich läſst sich auf diese Kraft auch alles das anwenden, was bei der gleichförmigen Bewegung über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten gesagt wurde.

4. Wirken nun auf einen freien Punct M beliebig viele Kräfte, so kann man ihre Resultirende in drei aufeinander senkrechte Seitenkräfte X, Y, Z zerlegen, welche zu den drei rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z dieses Punctes beziehungsweise parallel sind. Da aber die Richtungen dieser drei Seitenkräfte X, Y, Z aufeinander senkrecht sind, so ist jede von ihnen von der Wirkung der beiden übrigen unabhängig und sie lassen sich daher nach der vorigen Relation auf folgende Weise ausdrücken:

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\ Y = \frac{d^2y}{dt^2},\ Z = \frac{d^2z}{dt^2} \ldots \quad (\alpha)$$

und diese Relationen bilden sofort die allgemeinen Gleichungen der Bewegung des Punctes M im Raume.

Ist der Punct frei, so geben die ersten Integrale dieser Gleichungen in jedem Augenblicke die Geschwindigkeiten, welche er nach den Coordinatenachsen besitzt, so wie die zweiten oder endlichen Integrale die Coordinaten x, y, z in Functionen der Zeit t. Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so bleiben zwischen diesen drei Variablen x, y, z zwei Gleichungen als Gleichungen der Curve, welche der Punct M im Raume beschreibt; sie ist im Allgemeinen von doppelter Krümmung und heifst Trajectorie des beweglichen Punctes oder Körpers.

Ist der Punct M nicht frei, sondern mufs er z. B. beständig auf einer gegebenen Fläche oder Curve bleiben, so eliminirt man mit Hilfe der Gleichungen dieser Fläche oder Curve aus den Gleichungen von x, y, z, welche aus der Integration der vorigen Gleichungen (α) entstehen, so viele Veränderliche als Gleichungen gegeben sind und erhält so für X, Y, Z die Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, wenn der bewegliche Punct den gegebenen Forderungen entsprechen soll.

5. Wir betrachten nun als erstes Beispiel der Anwendung dieser Sätze, die Bewegung eines materiellen Punctes, welcher blos von der Schwerkraft afficirt wird, und zwar in einem widerstehenden Mittel.

Es sey g die Intensität der Schwere und p der Widerstand des Mittels, welchen man als eine bewegende oder beschleunigende Kraft ansehen kann, die nach der Tangente MT (Fig. 28) der vom beweglichen Punct beschriebenen Curve gerichtet ist und im entgegengesetzten Sinne seiner Bewegung wirkt. Hat der bewegliche Punct durch irgend eine Kraft, die nicht mehr weiter in Betracht kommt, nach der Richtung AS die Geschwindigkeit c erhalten und legt man durch den Punct A als Ursprung der Coordinaten drei rechtwinkelige Achsen AX, AY, AZ so, dafs die Ebene der xy eine horizontale, folglich die Achse der z eine verticale und zwar der Schwere entgegengesetzte Lage erhält; so sind, wenn ds das Curvenelement bezeichnet, $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente MT beziehungsweise mit den Coordinatenachsen bildet, und die Kraft p gibt dann parallel zu diesen Achsen die Seitenkräfte $p\frac{dx}{ds}$, $p\frac{dy}{ds}$, $p\frac{dz}{ds}$. Diese Kräfte streben ihrer Natur nach die Veränderlichen x, y, z zu vermindern, was bei z, da die Schwerkraft lediglich nach der Achse der z und zwar nach ZA wirkt, auch aufserdem noch durch die Kraft g geschieht. Bezeichnen daher X, Y, Z die beschleunigenden (hier eigentlich verzögernden) Kräfte parallel zu den Coordinatenachsen x, y, z; so ist $X = -p\,\frac{dx}{ds}$, $Y = -p\,\frac{dy}{ds}$, $Z = -p\,\frac{dz}{ds} - g$ und die drei Gleichungen der Bewegung sind daher im vorliegenden Falle (4. Relat. α)

$$(\beta)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -p\,\frac{dx}{ds},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -p\,\frac{dy}{ds},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -p\,\frac{dz}{dt} - g.$$

Multiplicirt man von diesen drei Gleichungen die erste mit dy, die zweite mit dx und zieht dann eine von der andern ab, so erhält man $\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt} = 0$ oder d. $\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus durch Integration $\frac{dy}{dx} = m$ oder $dy = m\,dx$ und daraus durch abermaliges Integriren: $y = mx + n$, wo m und n zwei willkürliche Constanten sind, wovon jedoch, da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, $n = 0$ und daher $y = mx$ wird.

Dieser einer durch den Ursprung gehenden geraden Linie angehörenden Gleichung entspricht der Projection der Trajectorie auf die Ebene der xy, woraus sofort folgt, dafs diese Curve durchaus in einer verticalen Ebene liegt. Nimmt man zur Vereinfachung diese Ebene für die Ebene der xz, so wird $y = 0$ und die vorigen drei Gleichungen der Bewegung reduciren sich auf zwei und zwar sind diese, wenn man nach der üblichen Weise, den Widerstand des Mittels dem Quadrate der Geschwindigkeit des Beweglichen proportional annimmt und daher $p = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ setzt, wobei k ein von der Dichte des Mittels abhängiger Erfahrungscoeffizient ist, sofort:

$$(m)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} \quad\text{und}\quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k\,\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} - g.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen läfst sich unmittelbar integriren und gibt, wie leicht zu sehen:

$$(n)\quad \frac{dx}{dt} = C\,.\,e^{-ks}$$

wobei die Constante C durch die Geschwindigkeit c, mit welcher der bewegliche Körper geworfen wird und den Winkel $SAB = \alpha$ der Richtung mit dem Horizont ausgedrückt werden kann; es ist nämlich für $s = 0$ (wie in 57. Gleich. h) $\frac{dx}{dt} = C = c\,Cos\,\alpha$.

Um auch die zweite dieser genannten Gleichungen zu integriren, setze man $dz = u\,dx$, wo u eine neue Unbekannte und zwar eine Function von x seyn soll. Diese Gleichung nach t differenziirt gibt: $\frac{d^2z}{dt^2} = u\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{du}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$ und wenn man diesen Werth in die genannte zweite Gleichung substituirt und dabei die erste Gleichung (m) so wie jene $dz = u\,dx$ berücksichtiget und abkürzt, erhält man:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{du}{dt} = -g.$$

Eliminirt man nun aus dieser und der obigen Gleichung (n) das Element dt, so erhält man, Kürze halber $-\frac{g}{2\,C^2} = a$ gesetzt:

$$\frac{du}{dx} = 2\,a\,.\,e^{2ks} \;\ldots\; (r)$$

Wird nun diese Gleichung integrirt, so erhält man den Werth von u als Function von x und wenn man diesen gefundenen Werth von u in die obige Gleichung $dz = u\,dx$ substituirt, so erhält man eine Gleichung des ersten Grades zwischen z und x ohne t, als Differenzialgleichung der gesuchten Trajectorie.

Setzt man als den einfachsten Fall den Widerstand des Mittels, also auch $k = 0$, so gibt die vorige Gleichung: $\frac{du}{dx} = 2\,a$, oder wenn man integrirt $u = 2\,a\,x + b$, wo b eine neue Constante bezeichnet.

Setzt man in diese Gleichung für u den aus der obigen Gleichung $dz = u\,dx$ folgenden Werth $\frac{dz}{dx}$ und integrirt abermals, so erhält man:

$$(1) \quad z = a\,x^2 + b\,x$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $z = 0$ seyn muſs. Diese Gleichung gehört aber einer gemeinen Parabel an, deren Achse mit der Achse der z parallel, also vertical ist, welche Curve auch in der That (wie wir bereits in **57.** gesehen) die Trajectorie des beweglichen Punctes bildet.

Was die beiden Constanten a, b betrifft, so ist nach Obigem $a = -\frac{g}{2\,C^2} = -\frac{g}{2\,c^2\,Cos\,\alpha^2}$ bereits bestimmt; um b zu bestimmen, hat man, wegen $u = \frac{dz}{dx} = tang\,.\,MTX$ für $x = 0$ sofort $u = tang\,\alpha$ und wenn man diese Werthe für x und u in der vorigen Gleichung $u = 2\,a\,x + b$ substituirt: $b = tang\,\alpha$. Mit diesen Werthen von a und b wird aber die Gleichung (1) mit jener (1) in **57.**, wie es seyn soll, vollkommen identisch.

Die Gleichung (n) gibt unter dieser Voraussetzung von $k = 0$ integrirt, $x = Ct$ (wozu keine Constante kommt, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ seyn soll) d. i. wegen $C = c\;Cos\,\alpha$,

$$x = c\,t\;Cos\,\alpha$$

und wenn man aus dieser und der Gleichung (1) x eliminirt und für a und b die Werthe setzt:

$$z = c\,t\;Sin\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, daſs die Bewegung nach horizontaler Richtung gleichförmig ist, während aus der letztern folgt, daſs sich in verticaler Richtung der schwere Körper gerade so verhält, als wenn er mit der entsprechenden Seitengeschwindigkeit $c\, Sin\, \alpha$ vertical aufwärts geworfen würde.

6. Betrachten wir jetzt die Bewegung eines materiellen Punctes, welcher der Bedingung unterworfen ist, auf einer gegebenen Fläche oder Curve bleiben zu müssen, und bezeichnen wir den Widerstand, welchen er von Seiten der Fläche oder Curve in der Richtung der Normale erleidet, durch N, so kann man diesen Widerstand als eine Kraft ansehen und zu den übrigen beschleunigenden Kräften, welche auf den beweglichen Punct wirken, hinzufügen, um dadurch diesen Punct wie einen freien Punct behandeln zu können. Sind daher α, β, γ die Winkel, welche die erwähnte Normale mit den drei rechtwinkeligen Achsen bildet, so sind die Gleichungen der Bewegungen:

$$(a)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = X + N\, Cos\, \alpha, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\, Cos\, \beta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\, Cos\, \gamma.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen beziehungsweise mit $2\,dx$, $2\,dy$, $2\,dz$, summirt sie dann und integrirt, so erhält man, wenn v die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte x, y, z daher $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2} = v^2$ ist:

$$(b)\quad v^2 = C + 2\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + 2\int N (Cos\, \alpha\, dx + Cos\, \beta\, dy + Cos\, \gamma\, dz).$$

Ist aber $Z = 0$ die Gleichung der Fläche, auf welcher der bewegliche Punct zu bleiben gezwungen ist, so ist bekanntlich

$$Cos\, \alpha = V\left(\frac{dZ}{dx}\right), \quad Cos\, \beta = V\left(\frac{dZ}{dy}\right) \text{ und } Cos\, \gamma = V\left(\frac{dZ}{dz}\right)$$

wobei $V = \dfrac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{dZ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2\right]}}$ ist. Aus diesen Gleichungen folgt, wegen $dZ = \left(\frac{dZ}{dx}\right)dx + \left(\frac{dZ}{dy}\right)dy + \left(\frac{dZ}{dz}\right)dz$ sofort

$$Cos\, \alpha\, dx + Cos\, \beta\, dy + Cos\, \gamma\, dz = V dZ = 0$$

womit sich die vorige Gleichung auf die folgende einfachere

$$v^2 = C + 2\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

reducirt, in welcher also die Unbekannte N nicht mehr erscheint. Aus dieser Gleichung folgt nun, daſs wenn die beschleunigenden Kräfte nicht Null sind, die Geschwindigkeit v variabel sey und von der Fläche oder Curve abhängt, auf welcher der bewegliche Punct bleiben muſs.

Bestimmt man nun den Druck N, welchen der bewegliche Punct auf die Fläche oder Curve ausübt und zwar als einfachsten Fall unter der Voraussetzung, daſs keine beschleunigenden Kräfte auf ihn einwirken, so wird nach der vorigen Gleichung (wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$) die Geschwindigkeit v, und wegen $ds = v\,dt$ auch das Curvenelement ds constant.

Die obigen drei Gleichungen der Bewegung (a) gehen dadurch, wenn man zugleich für dt sienen Werth $\frac{ds}{v}$ setzt, über in die folgenden:

$$v^2 \frac{d^2x}{ds^2} = N \, Cos \, \alpha, \quad v^2 \frac{d^2y}{ds^2} = N \, Cos \, \beta, \quad v^2 \frac{d^2z}{ds^2} = N \, Cos \, \gamma$$

und daraus folgt, wenn man diese Gleichungen quadrirt und addirt (wegen $Cos \, \alpha^2 + Cos \, \beta^2 + Cos \, \gamma^2 = 1$):

$$N = \frac{v^2 \sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}}{ds^2}$$

Ist aber ς der Krümmungshalbmesser der betreffenden Curve, welche der bewegliche Punct beschreibt, oder auf welcher er bleiben mufs, so ist bekanntlich unter der Voraussetzung, dafs ds constant:

$$\varsigma = \frac{ds^2}{\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2]}}$$

folglich auch $\quad N = \frac{v^2}{\varsigma}$

welcher Werth aber zugleich der Centrifugalkraft des materiellen Punctes von der Masse $= 1$ angehört, wie wir diefs bereits oben auf einem andern Weg gefunden haben.

Mufs der Punct anstatt auf einer gegebenen Curve auf einer krummen Fläche bleiben, so ist die Centrifugalkraft, wie aus der vorigen Gleichung hervorgeht, gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit des materiellen Punctes dividirt durch den Krümmungshalbmesser der Trajectorie; da aber die Ebene, in welcher der Krümmungskreis liegt, d. h. die Krümmungsebene beständig oder überall auf der gegebenen Fläche perpendikulär steht, welche Eigenschaft im Allgemeinen der zwischen zwei Puncten der Oberfläche möglichen kürzesten Linie zukömmt; so beschreibt dieser Punct oder das Mobile zugleich diese kürzeste Linie, eine Eigenschaft, welche dem sogenannten Principe der kleinsten Wirkung entspricht.

Um die Centrifugalkraft mit der Schwerkraft zu vergleichen, so sey h die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe, also $h = \frac{v^2}{2g}$; so ist die Centrifugalkraft eines an einem Faden von der Länge r befestigten materiellen Punctes von der Masse $= 1$, welcher im Kreise mit der Geschwindigkeit v herum geschwungen wird:

$$f = \frac{v^2}{r} = g \frac{2h}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{f}{g} = \frac{2h}{r}.$$

Für $h = \frac{1}{2} r$ wird $f = g$ also die Centrifugalkraft gleich der Schwere, d. h. wenn die Geschwindigkeit des am Faden befestigten und in einem horizontalen Kreise herumgeschwungenen Körpers so grofs ist, als wenn er durch den halben Halbmesser des Kreises frei herabgefallen wäre, so erleidet der Faden durch die Centrifugalkraft dieselbe Spannung als wenn der Körper am Faden vertical aufgehängt würde.

Dasselbe folgt auch nach unserer gewöhnlichen Bezeichnung der Centrifugalkraft, d. i. aus (§. 155, Gl.1) $F = \frac{Mv^2}{rg} = \frac{2\,Mhg}{rg} = M\frac{2h}{r}$ woraus für $h = \frac{1}{2}r$ ebenfalls wieder $F = M$ folgt, wobei M das Gewicht der Masse bezeichnet.

7. Betrachtet man endlich die Körper, deren Bewegung untersucht wird, als materielle Puncte, so bildet ganz einfach der Quotient aus der in einer gegebenen Zeit erzeugten Geschwindigkeit dividirt durch diese Zeit das Maſs der bewegenden Kraft. Um aber Kräfte mit einander zu vergleichen, die auf verschiedene Körper wirken, muſs man auch auf die Massen dieser Körper Rücksicht nehmen, und in diesem Falle dient bei der gleichförmigen Bewegung (§. 132) das Product aus der Masse des Körpers in seine Geschwindigkeit, d. i. die Gröſse der Bewegung, dagegen bei der ungleichförmigen Bewegung das Product aus der Masse in den Quotienten, welcher entsteht, wenn man die in dem Elemente der Zeit erlangte unendlich kleine Geschwindigkeit durch dieses Zeitelement dividirt, als Maſs der bewegenden Kraft (Nr. 55).

Betrachtet man ein System von Körpern oder materiellen Puncten, welche auf irgend eine Weise mit einander verbunden sind, im Zustande der Bewegung, so ist klar, daſs die Bewegung jedes einzelnen Körpers das Resultat seyn muſs aus der auf ihn einwirkenden Kraft und der Reaction der übrigen Körper des Systems, welche auf ihn Statt findet. Daraus folgt aber, daſs keiner dieser Körper im Allgemeinen jene Bewegung annehmen wird, die er vermöge des ursprünglich erhaltenen Impulses und der ihn treibenden beschleunigenden Kräfte angenommen hätte, wenn er frei wäre. Um nun diese von dem Systeme, wovon er einen Theil ausmacht herrührende Veränderung in der Bewegung zu bestimmen, und die wirklich Statt findende Bewegung zu erhalten, hat *D'Alembert* ein allgemeines Bewegungsprincip aufgestellt, mittelst welchem man im Stande seyn sollte alle auf die Bewegung sich beziehenden Aufgaben in Gleichungen zu bringen oder auf Aufgaben der Statik zurückzuführen. Dieses Princip ist folgendes:

„Theilt man den Körpern eines Systemes Bewegungen mit, welche durch „ihre gegenseitigen Verbindungen modificirt werden, so kann man diese „Bewegungen so ansehen als beständen sie aus denjenigen, welche die „Körper wirklich annehmen und aus andern Bewegungen, welche vernichtet »werden; diese letztern Bewegungen müssen daher so beschaffen seyn, „daſs wenn die Körper des Systemes von diesen allein afficirt würden, „diese sofort im Gleichgewichte wären."

Dieses *D'Alembert*'sche Princip gilt sowohl für momentan, als continuirlich wirkende Kräfte; da jedoch die Bestimmung der Kräfte, welche vernichtet werden und für sich im Gleichgewicht stehen müssen, oft sehr weitläufig und schwierig wird; so wurde dieses Princip später modificirt und in folgender Weise ausgesprochen:

„Gibt man jedem Körper eines Systemes eine Bewegung, die derjenigen, „welche er annehmen muſs, gleich, aber direct entgegengesetzt ist, so wird „das ganze System ruhen; diese Bewegungen vernichten daher diejenigen,

„welche die Körper angenommen hätten, wenn sie frei gewesen wären, „folglich mufs zwischen diesen verschiedenen Bewegungen oder den sie „erzeugenden Kräften Gleichgewicht vorhanden seyn.“

Es seyen nun m, m', m'' . . die Massen der verschiedenen Körper eines solchen Systemes, x, y, z, x', y', z' . . die rechtwinkeligen Coordinaten ihrer Schwerpuncte nach Verlauf der Zeit t, und X, Y, Z, X', Y', Z' . . die auf die Masseneinheit der Körper m, m' . . nach den Richtungen der Coordinatenachsen (d. i. mit diesen parallel) wirkenden beschleunigenden Kräfte, folglich $mX, mY, mZ, m'X', m'Y', m'Z'$ u. s. w. die bewegenden Kräfte, welche beziehungsweise die Körper m, m' u. s. w. nach den genannten Richtungen treiben; endlich soll das Element der Zeit dt als constant angesehen werden. Diefs vorausgesetzt sind die den Körper m am Ende des folgenden Zeitelementes nach den Richtungen der Coordinatenachsen afficirenden Geschwindigkeiten $= \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, folglich (Nr. 56) die ihn nach diesen Richtungen treibenden bewegenden Kräfte $= m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy}{dt}, m\frac{dz}{dt}$. Diese Kräfte gehen im nächstfolgenden Zeitelemente wegen der Wirkung der beschleunigenden Kräfte über in $m\frac{dx}{dt} + mX\,dt$, $m\frac{dy}{dt} + mY\,dt$, $m\frac{dz}{dt} + mZ\,dt$ (weil wenn $X = \frac{dv}{dt}$ gesetzt wird, $X\,dt = dv$ die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit dt bezeichnet, daher die beschleunigende Kraft $\frac{dx}{dt}$ in $\frac{dx}{dt} + X\,dt$ übergeht). Die wirklichen Zunahmen aber, welche die Geschwindigkeiten des Körpers m parallel zu den Coordinatenachsen zufolge seiner Verbindung mit den übrigen Körpern des Systemes erhalten und auf deren Bestimmung es hier eigentlich ankommt, sind $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt}, \frac{d^2z}{dt}$, folglich die wirklichen bewegenden Kräfte, welche den Körper m am Ende der Zeit dt nach den genannten Richtungen treiben:

$$m\frac{dx}{dt} + m\frac{d^2x}{dt},\quad m\frac{dy}{dt} + m\frac{d^2y}{dt},\quad m\frac{dz}{dt} + m\frac{d^2z}{dt}.$$

Bringt man also diese mit den drei vorigen Kräften auf den Körper m in direct entgegengesetzter Richtung an, so bleiben für die auf diesen Körper wirkenden bewegenden Kräfte:

$$m\left(X\,dt - \frac{d^2x}{dt}\right),\quad m\left(Y\,dt - \frac{d^2y}{dt}\right),\quad m\left(Z\,dt - \frac{d^2z}{dt}\right) \qquad (a)$$

Um die ähnlichen Ausdrücke für die übrigen Körper m', m'' . . des Systemes zu erhalten, darf man die Buchstaben m, x, y, z, X, Y, Z dieses Ausdruckes (a) nur mit einem, zwei u. s. w. Accente versehen.

Da nun aber dem *D'Alembert*'schen Principe zufolge das System unter der vereinten Wirkung dieser Kräfte im Gleichgewichte seyn mufs, so braucht man in den allgemeinen Gleichungen (s) von Nr. 21, (Anmerk. 2) nur statt der Seitenkräfte $P \, Cos \, \alpha$, $P \, Cos \, \beta$, $P \, Cos \, \gamma$ beziehungsweise die vorigen Kräfte (a) zu substituiren. Man erhält dadurch:

$$\Sigma m \left(X \mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t} \right) = 0 \text{, oder}$$

$$(t) \left\{ \begin{aligned} \Sigma (m X) &= \Sigma \left(m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right) \text{ und eben so} \\ \Sigma (m Y) &= \Sigma \left(m \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right) \\ \Sigma (m Z) &= \Sigma \left(m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \right) \text{, ferner} \\ \Sigma (m [Xy - Yx]) &= \Sigma \left(m \left[\frac{y \, \mathrm{d}^2 x - x \, \mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right] \right) \\ \Sigma (m [Xz - Zx]) &= \Sigma \left(m \left[\frac{x \, \mathrm{d}^2 z - z \, \mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right] \right) \\ \Sigma (m [Yz - Zy]) &= \Sigma \left(m \left[\frac{y \, \mathrm{d}^2 z - z \, \mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right] \right) \end{aligned} \right.$$

diefs sind sonach die Gleichungen der Bewegung für ein beliebiges freies System von Körpern m, m', m'' . . Wäre einer dieser Körper gezwungen auf einer gegebenen Fläche oder Curve zu bleiben, so müfste man den auf ihn wirkenden Kräften noch den Widerstand (als neue Kraft) hinzufügen, welchen der Körper von der Fläche oder Curve erleidet, um dann auch diesen Körper wieder als völlig frei betrachten zu können. (Eine specielle Anwendung des *D'Alembert*'schen Principes oder Lehrsatzes
170 kommt in Nr. 169 mit weiteren Erläuterungen vor.)

Diese 6 Gleichungen enthalten mehrere allgemeine Bewegungsgesetze oder Lehrsätze, wovon wir hier jedoch nur einen der wichtigsten anführen wollen.

8. Sind nämlich nach Verlauf der Zeit t, diese vom Augenblicke an gezählt als die Bewegung beginnt, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunctes des Systems der Körper oder materiellen Puncte m, m' . . so ist (Nr. 33.)

$$x_1 \, \Sigma (m) = \Sigma (m x), \quad y_1 \, \Sigma (m) = \Sigma (m y), \quad z_1 \, \Sigma (m) = \Sigma (m z)$$

und wenn man diese Gleichungen zweimal nach t differenziirt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} \, \Sigma (m) = \Sigma \left(m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right), \quad \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} \, \Sigma (m) = \Sigma \left(m \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} \, \Sigma (m) = \Sigma \left(m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \right).$$

Setzt man diese Werthe in die drei ersten der vorigen Gleichungen (t), so erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} \, \Sigma (m) = \Sigma (m X), \quad \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} \, \Sigma (m) = \Sigma (m Y),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} \, \Sigma (m) = \Sigma (m Z),$$

diese Gleichungen zeigen, dafs die Bewegung des Schwerpunctes eines freien Systemes von materiellen Puncten oder Körpern im Raume genau so Statt findet, als wenn die sämmtlichen Massen m, m'.. in diesem Puncte vereinigt und alle ihre bewegenden Kräfte durch parallele Verschiebungen ihrer Richtungen auf diesen Punct angebracht wären.

Da nun auf diese Weise alle jene Kräfte, deren Componenten oder Seitenkräfte (parallel mit den Achsen) einander gleich und entgegengesetzt sind, aus den Differenzialgleichungen dieser Bewegung hinausfallen, dieser Fall aber dann eintritt, wenn die bewegenden Kräfte keine äufseren sind, sondern aus den wechselseitigen Wirkungen entstehen, welche die materiellen Puncte des Systemes aufeinander ausüben, indem sich diese nach dem allgemeinen Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, wenn diese Kräfte auf den Schwerpunct des Systems übertragen werden, zu zwei und zwei aufheben; so bewegt sich, sobald auf die materiellen Puncte des gänzlich freien Systemes aufser ihrer eigenen gegenseitigen Einwirkung (durch Anziehung oder Abstofsung) keine anderen Kräfte wirken, der Schwerpunct desselben gleichförmig und geradlinig und behält beständig die anfängliche Richtung und Geschwindigkeit bei, wefshalb man diesen Lehrsatz das Princip von der Erhaltung der Schwerpuncts-Bewegung genannt hat.

9. Um von diesem wichtigen Satze ein einfaches Beispiel zu geben, wollen wir die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunctes zweier Kugeln betrachten, welche aufeinander stofsen.

Es seyen am Ende der Zeit t x und x' die Abstände ihrer Mittelpuncte von einem festen Punct der Geraden, auf welcher sich die Kugeln m und m' bewegen, so wie x_1 (in demselben Augenblicke) der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes dieser Körper von demselben Puncte; so hat man (Nr. 33):

$$(m + m')\, x_1 = m\, x + m'\, x'$$

oder wenn man nach t differenziirt:

$$(m + m')\frac{dx_1}{dt} = m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} \ldots \quad (\alpha)$$

wodurch die den Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt}$ der beiden Kugeln entsprechende Geschwindigkeit $\frac{dx_1}{dt}$ des Schwerpunctes gegeben ist.

Nun hat man aber vor dem Stofs (§. 199) $\frac{dx}{dt} = v$, $\frac{dx'}{dt} = v'$, und nach dem Stofs, wenn die Kugeln unelastisch sind $\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = V$, und wenn sie vollkommen elastisch sind: $\frac{dx}{dt} = 2V - v$, $\frac{dx'}{dt} = 2V - v'$ (§. 202). Es ist also die Geschwindigkeit des Schwerpunctes vor dem Stofs, wenn man in die Gleichung (α) substituirt:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

und nach dem Stoſs, mit Rücksicht auf die Relation von $V = \dfrac{mv + m'v'}{m + m'}$

für beide Fälle (wenn man wieder in (α) gehörig substituirt):

$$\frac{dx}{dt} = V = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

welches genau derselbe Werth wie vor dem Stoſse ist; der Stoſs dieser beiden Körper ändert also durchaus nichts in der Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes (da er sich überdieſs auch auf der ursprünglichen Geraden fortbewegt).

10. Sind die mit den Massen m, m', m'' . . behafteten materiellen Puncte in Bewegung, so seyen für einen bestimmten Augenblick x, x', x'' . . ihre Abscissen auf eine beliebige Achse bezogen und X die Abscisse des Schwerpunctes dieses System für denselben Augenblick; so ist (Nr. 33) $(m + m' + . .)\, X = mx + m'x' + . .$ d. h. $X\Sigma(m) = \Sigma(mx)$. Während des folgenden Zeitelementes dt nehmen die Abscissen um dx dx' . . . dX zu und man hat $\dfrac{dX}{dt}\,\Sigma(m) = \Sigma\left(m\dfrac{dx}{dt}\right)$, ($u$), d. h. die auf eine Achse projicirte Gröſse der Bewegung der Gesammtmasse des Systems, diese im Schwerpunct desselben vereinigt gedacht, ist gleich der Summe der Bewegungsgröſsen sämmtlicher einzelner Massen projicirt auf die nämliche Achse. Zwei ähnliche Gleichungen mit (u) erhält man auch für die beiden übrigen Coordinatenachsen. Ist V die Geschwindigkeit des Schwerpunctes und v, v' . . jene der Puncte m, m' . . so kann man, wenn V_x die Projection der Geschwindigkeit auf die Achse der x bezeichnet und damit analog auch die übrigen Projectionen bezeichnet werden, diese Gleichungen so schreiben:

$$V_x\,\Sigma(m) = \Sigma(mv_x),\quad V_y\,\Sigma(m) = \Sigma(mv_y),\quad V_z\,\Sigma(m) = \Sigma(mv_z).$$

Bestimmung der Centrifugalkraft eines Körpers.

(§. 156.)

62. Handelt es sich nicht bloſs um einen materiellen Punct, sondern um einen Körper von endlicher Ausdehnung, so sey zuerst ***NS*** (Fig. 29) irgend eine ebene Fläche von der Gröſse ***F***, über welche die Masse ***M*** gleichförmig vertheilt ist und welche sich um einen in ihrer Ebene liegenden Punct ***A*** oder um eine auf dieser Ebene in ***A*** perpendikuläre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ***w*** umdreht.