zähle man seinen Abstand auf der geraden Linie seines Weges von einem bestimmten Puncte A aus und bezeichne diesen am Ende der Zeit t mit x; so ist seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke (Gleich. α in **51.**) $= \frac{dx}{dt}$, folglich nach den beiden Gleichungen (1) (1′) der vorigen Nummer $\frac{dx}{dt} = k \pm c\,t$ oder $dx = k\,dt \pm c\,t\,dt$, woraus man durch die Integration erhält:

$$(2) \ldots x = C + k\,t \pm \tfrac{1}{2}c\,t^2$$

dabei gilt von den doppelten Zeichen das obere für die gleichförmig **beschleunigte**, das untere für die gleichförmig **verzögerte** Bewegung.

Wird die Zeit von dem Augenblicke an gezählt, in welchem sich das Bewegliche im Puncte A befindet, so wird für $t = 0$ auch $x = 0$, folglich die Constante C der Integration ebenfalls Null, und daher

$$x = k\,t \pm \tfrac{1}{2}c\,t^2 \text{ (vergleiche §. 135).}$$

Beginnt die Bewegung von dem festen Puncte A ohne alle Geschwindigkeit, d. i. von der **Ruhe** aus, so ist $k = 0$ und da für $t = 0$ auch $x = 0$ seyn mufs, so ist auch die Constante $C = 0$ und sofort:

$$(3) \ldots \quad x = \tfrac{1}{2}c\,t^2,$$

welches sofort die Gleichung (2) in §. 134 ist.

Anmerkung. Man nennt hier die Endgeschwindigkeit c nach der ersten Secunde, oder allgemeiner diese Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit die **constante Beschleunigung**, welche (wie aus den Gleichungen (1), (1′) und (2) zu ersehen) sowohl positiv als negativ seyn kann (beschleunigte und verzögerte Bewegung) und die wir in der Regel durch den Buchstaben G bezeichnen werden.

Setzt man ferner, da die Anfangsgeschwindigkeit häufig mit v_0 bezeichnet wird v_0 statt k, x_0 für die Entfernung des materiellen Punctes im Anfangsaugenblicke (in welchem also seine Geschwindigkeit $= v_0$ ist) von einem festen Puncte seines geradlinigen Weges und sind v und x die analogen Gröfsen am Ende der Zeit t; so nehmen die obigen Gleichungen (1) und (2) auch die Form an:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + G\,t \\ x &= x_0 + v_0\,t + \tfrac{1}{2}G\,t^2 \\ \text{woraus noch folgt: } \frac{dv}{dt} &= G. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mafs der constanten Kräfte.

(§. 136.)

54. Wirkt die constante Kraft P auf einen Körper von der Masse M, so kommt auf die Einheit der Masse die wirkende Kraft $\frac{P}{M}$. Ist eben so P' eine in die Masse M' wirkende constante Kraft, so entfällt davon auf die Einheit der Masse die Kraft $\frac{P'}{M'}$. Da sich nun diese beiden Körper oder Massen genau so, wie jeder ihrer einzelnen Theile bewegen, und die Geschwindigkeiten, welche gleiche Massen am Ende einer bestimmten Zeit erlangen, den Kräften proportional sind, welche sie erzeugen; so hat man, wenn diese Geschwindigkeiten mit v und v' bezeichnet werden, sofort:

$$v : v' = \frac{P}{M} : \frac{P'}{M'} \quad \text{oder} \quad P : P' = Mv : M'v'$$

d. h. zwei constante Kräfte verhalten sich wie die Grössen der Bewegungen, welche sie in einerlei Zeit hervorbringen. Nimmt man P' zur Einheit der constanten Kräfte, M' als Einheit der Massen und v' zur Einheit der Geschwindigkeit; so ist auch $P : 1 = Mv : 1$ oder $P = Mv$ (was auch aus $\frac{P}{P'} = \frac{M}{M'} \cdot \frac{v}{v'}$ folgt), d. h. jede constante Kraft wird gemessen durch die Gröfse der Bewegung, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

Anmerkung 1. Setzt man, wie es im §. 136 stillschweigend geschehen, gleiche Massen oder die Masse $= 1$ voraus, so wird die Kraft P blofs durch die Endgeschwindigkeit v gemessen, welche in der Masse während der Zeiteinheit erzeugt wird.

Anmerkung 2. Wie aus der Vergleichung mit §. 132 hervorgeht, so wird eine constante Kraft durch dieselbe Gröfse wie eine momentan wirkende Kraft gemessen. Es mufs übrigens hier bemerkt werden, dafs momentan wirkende oder sogenannte Stofs-Kräfte mehr in der Idee als in der Wirklichkeit bestehen, weil keine auch noch so grofse Kraft in einem untheilbaren Augenblick oder einer unendlich kleinen Zeit eine endliche Geschwindigkeit zu erzeugen im Stande ist; aus diesem Grunde werden auch in der neuern Zeit von den meisten Gelehrten mit Recht (da in der Natur alle Wirkungen stetig sind) keine Momentankräfte mehr angenommen, sondern nur beschleunigende Kräfte vorausgesetzt.

Da wir unter Kraft (als nothwendige aber auch hinreichende Ursache zur Abänderung der Geschwindigkeit eines materiellen Punctes der Gröfse oder Richtung nach) immer etwas dem Drucke Analoges verstehen, den wir auf einen Körper ausüben, um seine Bewegung zu veranlassen oder zu modificiren; so hat diese, wenn sie auf einen Körper einwirkt, nothwendiger Weise eine gewisse Dauer, während welcher sie jedoch ihre Intensität auch ändern kann.

Belanger nennt, wenn eine Kraft F von constanter Intensität während einer gewissen Zeit t wirkt, das Product Ft aus der Intensität der Kraft in ihre Wirkungsdauer die Impulsion dieser Kraft F in der Zeit t.

Hat die Kraft eine veränderliche Intensität, so ist ihre Impulsion während eines bestimmten Zeitraumes das Integral $\int F\,dt$ des Products aus der Kraft in das Differenzial der Zeit, zwischen den Grenzen jenes Zeitraumes genommen.

Diese Gröſse ist übrigens unabhängig von der Geschwindigkeit des Angriffspunctes der Kraft.

Um den Nutzen von der Einführung dieser Gröſse, welche man kurz den Impuls der Kraft F nennen kann, zu zeigen, so wirke eine constante Kraft F in eine dem Gewichte nach ausgedrückte Masse M; dann ist (§. 146) die constante Beschleunigung $G = \frac{F}{M}\,g$, wobei $g = 31$ Fuſs die Beschleunigung der Schwere ist. Wird dieser Werth in der ersten der Gleichungen (4) in Nr. **53.** Anmerk. substituirt, so erhält man:

$$v = v_0 + \frac{F}{M}\,g\,t,\ \text{woraus}\ \frac{M}{g}\,v - \frac{M}{g}\,v_0 = F\,t\ \text{folgt.}$$

Da nun nach der neuern Art die Massen auszudrücken (§. 35 und die folgende Anmerk.) der Quotient $\frac{M}{g} = m$ nichts anderes als die träge Masse (vom Gewichte dabei abstrahirt) bezeichnet, so kann man sagen, daſs wenn sich ein materieller Punct von der Masse m durch die Einwirkung einer constanten Kraft geradlinig fortbewegt und man berechnet für zwei beliebige Augenblicke das Product aus seiner Masse in seine Geschwindigkeit (d. i. die Gröſse der Bewegung), so hat die Gröſse, um welche sich dieses Product während dieser Zeit ändert, erstlich dasselbe Zeichen wie die Kraft, und dann denselben numerischen Werth wie das Product aus der Kraft in die zwischen diesen beiden Augenblicken liegende Zeit, d. i. wie der vorhin sogenannte Impuls oder die Einwirkung der Kraft.

Hat z. B. eine 2pfündige Kanonenkugel durch die Einwirkung einer constanten Kraft während einer unbestimmten (allenfalls auſserordentlich kleinen) Zeit eine Geschwindigkeit von 1200 Fuss erlangt, so hat man nach der vorigen Gleichung, wegen $v_0 = 0$ (indem die Kraft F auf die ruhende Kugel wirken soll), $v = 1200$ und $\frac{M}{g} = \frac{2}{31}$ sofort $F\,t = 77{\cdot}42$.

Je nachdem also die Wirkung oder der Impuls der Kraft 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ oder nur $\frac{1}{1000}$ Secunde gedauert hat, muſste die Intensität derselben

77·42, 774·2, 7742 oder 77420 Pfund gewesen seyn u. s. w.

Trifft diese Kugel mit der erlangten Geschwindigkeit auf einen andern Körper, welcher diese Geschwindigkeit vernichtet, indem er ihr eine constante Kraft entgegensezt, so gibt dieselbe Gleichung die Widerstands-Wirkung, wenn man $v = 0$, $v_0 = 1200$ und $\frac{M}{g} = \frac{2}{31}$ setzt, und zwar erhält man $F\,t = -77{\cdot}42$. Dieses Product ist negativ, weil die Richtung der Kraft im entgegengesetzten Sinn der zu vernichtenden Geschwindigkeit v_0 ist.

Anmerkung 3. Es ist hier der Ort um noch einmal auf den Begriff der Masse eines Körpers und die Art sie in die Rechnung einzuführen zurückzukommen, und wir bemerken hierüber Folgendes:

Zwei materielle Puncte haben dieselbe Masse, wenn sie durch die Einwirkung von zwei ganz gleichen constanten Kräften eine und dieselbe Bewegung annehmen; erfordern sie aber zu dieser selben Bewegung verschiedene Kräfte, so sagt man, ihre Massen seyen diesen Kräften proportional.

Da die Masse eines Körpers nichts Anderes als die Summe der Massen aller materiellen Puncte ist, woraus der Körper besteht, so folgt, dafs die Worte Trägheit und Masse nicht dasselbe ausdrücken. In Folge der Trägheit ist eine Kraft erforderlich um einen Körper überhaupt in Bewegung zu setzen oder diese zu modificiren; zufolge der gröfseren oder geringeren Masse, die ein Körper besitzt, ist auch eine gröfsere oder geringere Kraft nöthig, um dem Körper eine bestimmte Bewegung mitzutheilen oder diese auf eine gewisse Weise zu modificiren; die Trägheit ist nämlich eine allen Körpern eigene oder gemeinschaftliche Eigenschaft, während die Masse eine jedem Körper eigenthümliche Gröfse ist.

Um die Massen als Gröfsen in die Rechnung bringen zu können mufs man irgend eine Masse zur Einheit wählen. Man ist jetzt so ziemlich allgemein mit den französischen Gelehrten darin übereingekommen, als Einheit jene Masse eines Körpers zu nehmen, welche auf einen einzigen Punct concentrirt die Einwirkung der Krafteinheit erfordern würde um während der Zeiteinheit, die Geschwindigkeitseinheit, d. i. die durch das Längenmafs ausgedrückte Geschwindigkeit zu erlangen.

Da nun das Gewicht eines Körpers für einen bestimmten Ort eine constante Kraft ist, und diese, wenn sie allein auf den Körper wirkt (dieser sich also im leeren Raume befindet) in demselben unter der Breite von Wien nach Verlauf einer Secunde die Geschwindigkeit von nahe $g = 31$ Fuss erzeugt; so bedarf es, wenn ein Körper nach Verlauf einer Secunde eine Geschwindigkeit von nur einen Fuss annehmen soll, einer constanten Kraft, welche gleich ist dem Gewichte dieses Körpers dividirt durch $g = 31$. (Es folgt nämlich aus der Formel (2) in §. 146, wenn man $G = 1$ setzt: $F = \frac{M}{g}$, wobei M das Gewicht des Körpers oder der Masse M bezeichnet.)

Hat also ein Körper im leeren Raume das Gewicht p und ist m dessen Masse, so ist nach dieser Übereinkunft $m = \frac{p}{g}$, d. h. die Masse eines Körpers ist numerisch ausgedrückt nichts anderes, als das Gewicht des Körpers dividirt durch die absolute Zahl g oder Beschleunigung der Schwere an dem betreffenden Ort der Erde. Für Wien ist $g = 31$ Fuss, für Paris 9·8088 Meter; im erstern Falle wird das Gewicht p in W. Pfunden, im letztern in Kilogrammen ausgedrückt.

Auf dasselbe Resultat kommt man auch, wenn man in der Proportion

(§. 146, G, G' statt v, v' gesetzt) $M : M' = \frac{F}{G} : \frac{F'}{G'}$ für $F' = 1$ $G' = 1$ sofort $M' = 1$ setzt; denn man hat dann: $M = \frac{F}{G}$ und da, wenn p das Gewicht des Körpers dessen Masse $= M$ ist bezeichnet, für $F = p$ sofort $G = g$ wird, auch $M = \frac{p}{g}$, wie vorhin.

Ausdruck für die veränderliche Kraft bei irgend einer geradlinigen Bewegung.

(§. 137.)

55. Wie aus der vorigen Nummer folgt, so kann eine constante Kraft durch die Gröfse der Bewegung gemessen werden, welche sie in der Zeiteinheit hervorbringt, wenn man dabei jene Kraft zur Einheit nimmt, welche in der Masseneinheit während der Zeiteinheit die Geschwindigkeit gleich Eins erzeugt. Um nun auch das Mafs einer variablen Kraft auf diesen Fall zurückzuführen, kommt es darauf an die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche sie in der Masse gleich Eins in der Zeiteinheit erzeugen würde, wenn sie jene Intensität constant beibehielte, welche sie in dem Augenblicke, den man eben betrachtet, besitzt.

Es sey nun bei irgend einer geradlinigen Bewegung eines mit der Masse gleich Eins behafteten Punctes, am Ende der von irgend einer Periode aus gezählten Zeit t der Abstand dieses Punctes vom Ursprung $= x$, die Geschwindigkeit $= v$ und die Intensität der variablen Kraft $= p$. Wäre p constant, so würde der Quotient $\frac{v}{t}$ die von p in der Zeiteinheit erzeugte Geschwindigkeit, folglich auch (**54.** Anmerk. 1) das Mafs der Kraft p seyn. Im gegenwärtigen Falle nimmt jedoch die Kraft p während der Zeit Δt um Δp und die Geschwindigkeit um Δv zu (oder ab, was hier ganz gleichgiltig ist) und diese Zunahme der Geschwindigkeit kann so angesehen werden, als wäre sie durch eine zwischen p und $p + \Delta p$ liegende Kraft hervorgebracht worden, welche während der Zeit Δt mit constanter Stärke gewirkt hat. Bezeichnet man diese Kraft durch p', so ist sofort $p' = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ und zwar für jeden auch noch so kleinen Werth der Zeit Δt.

Da sich aber p' ohne Ende der Kraft p nähert, wenn Δt ohne Ende abnimmt, indem sich dabei auch eben so Δp der Nulle nähert, so hat man, auf die Grenzen übergehend: