

# Zweiter Abschnitt.

## D y n a m i k.

### Von der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung.

(§. 134.)

**51.** Beschreibt ein Punct bei irgend einer veränderlichen Bewegung während der Zeit  $t$  den Bogen  $MN = s$  (Fig. 22), so stellt der Quotient  $\frac{s}{t}$  die mittlere Geschwindigkeit vor, mit welcher dieser Bogen zurückgelegt würde; auch bezeichnet derselbe Quotient den Weg in der Zeiteinheit für den Fall, in welchem der Bogen  $s$  während der Zeit  $t$  mit gleichförmiger Bewegung beschrieben würde.

Läßt man nun  $t$  ohne Ende abnehmen, so nimmt auch  $s$  eben so ab und es nähert sich dabei dieser Quotient einer Grenze, welche nichts anders ist als die Geschwindigkeit des Beweglichen im Puncte  $M$ , so dafs wenn man diese Geschwindigkeit mit  $v$  bezeichnet, sofort

$$(\alpha) \quad v = \frac{ds}{dt} \text{ ist.}$$

**Anmerkung 1.** Diese Geschwindigkeit ist zugleich diejenige, mit welcher das Bewegliche von dem Puncte  $M$  aus gleichförmig (und nach der Tangente) fortgehen würde, wenn von diesem Puncte an jede Einwirkung auf das Bewegliche aufhörte. Zugleich folgt aus dieser Relation wegen  $ds = v dt$  (vergleiche §. 129. Gleich. 1), dafs man jede wie immer geartete Bewegung während eines Zeitelementes als eine gleichförmige ansehen kann.

**Anmerkung 2.** Von der Richtigkeit der Relation ( $\alpha$ ) kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen.

Hat der bewegliche Punct nach Verlauf der Zeit  $t$  den Weg  $s$  zurückgelegt und dabei die Geschwindigkeit  $v$  erlangt, so würde er, wenn von nun an jede Einwirkung auf ihn aufhörte, mit der Geschwindigkeit  $v$  gleichförmig fortgehen und also im nächstfolgenden Zeitelement  $dt$  den Weg  $ds = v dt$  zurücklegen; da jedoch diese Einwirkung nicht aufhört, so wird

streng genommen dieser Weg seyn ( $m$ )  $ds = v dt + z$ , wobei  $z$  jenen Antheil bezeichnet, welcher durch diese fortwährende Einwirkung der vorhandenen Kraft während der Zeit  $dt$  entsteht. Da aber keine wie immer geartete Kraft die Geschwindigkeit des Beweglichen in einer unendlich kleinen Zeit um eine endliche GröÙe verändern kann (indem dazu immer auch eine gewisse endliche Zeit erforderlich ist), so ist diese Änderung von  $v$  am Ende der Zeit  $dt$  sofort  $dv$ , und es ist offenbar  $z < dv dt$ , weil selbst wenn diese Änderung  $dv$  schon am Anfange des Zeitintervalles  $dt$  und nicht erst am Ende desselben eingetreten und durch diese Zeit  $dt$  constant geblieben wäre  $z = dv dt$  seyn würde. Da nun aber auf diese Weise  $z$  in jedem Falle unendlich klein der 2ten Ordnung ist und daher gegen  $v dt$  verschwindet, so ist in der That  $ds = v dt$ . \*)

**52.** Die in §. 134 aufgestellte Gleichung  $v = ct$  bezieht sich auf den Fall, in welchem eine constante Kraft auf den ruhenden Körper einwirkt; nimmt man dagegen den allgemeineren Fall an, in welchem sich der Körper oder materielle Punct bereits mit der Geschwindigkeit  $k$  gleichförmig und geradlinig fortbewegt, bevor die constante Kraft auf denselben einwirkt, so ist diese Geschwindigkeit am Ende der Zeit  $t$  (diese von dem Augenblicke der Einwirkung der Kraft an gezählt), je nachdem die Kraft in der selben oder entgegengesetzten Richtung der ursprünglichen Bewegung wirkt, beziehungsweise:

$$v = k + ct \dots (1)$$

$$\text{oder } v = k - ct \dots (1')$$

wobei der letztere Fall, in welchem auch  $v$  negativ werden kann (sobald nämlich  $ct > k$  wird) in dem erstern begriffen ist, wenn man dafür  $c$  negativ nimmt. Die Bewegung ist nämlich im erstern Fall gleichförmig beschleunigt, im letztern gleichförmig verzögert.

**53.** Um nun aber auch den zurückgelegten Weg oder die Position zu bestimmen, welche ein mit gleichförmig veränderter Bewegung fortgehender materieller Punct in einem gewissen Augenblicke besitzt,

\*) Um den Werth von  $z$  genauer kennen zu lernen, hat man wegen  $s = f(t)$  sofort  $s + ds = f(t + dt)$  oder nach dem Taylor'schen Theorem (Comp. §. 646)  $s + ds = s + \frac{ds}{dt} dt + \frac{d^2s}{dt^2} \frac{dt^2}{1 \cdot 2} + \dots$  oder mit Rücksicht auf die obige Gleich.  $ds = v dt$  auch  $ds = v dt + \frac{1}{2} \frac{dv}{dt} dt^2 +$  und mit Auslassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung:  $ds = v dt + \frac{1}{2} dv dt$ , so dafs also, diese Gleich. mit der obigen ( $m$ ) verglichen,  $z = \frac{1}{2} dv dt$  gibt.

zähle man seinen Abstand auf der geraden Linie seines Weges von einem bestimmten Punkte  $A$  aus und bezeichne diesen am Ende der Zeit  $t$  mit  $x$ ; so ist seine Geschwindigkeit in diesem Augenblicke (Gleich.  $\alpha$  in § 1.)

$= \frac{dx}{dt}$ , folglich nach den beiden Gleichungen (1) (1') der vorigen Nummer

mer  $\frac{dx}{dt} = k \pm ct$  oder  $dx = k dt \pm ct dt$ , woraus man durch die Integration erhält:

$$(2) \dots x = C + kt \pm \frac{1}{2} ct^2$$

dabei gilt von den doppelten Zeichen das obere für die gleichförmig beschleunigte, das untere für die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Wird die Zeit von dem Augenblicke an gezählt, in welchem sich das Bewegliche im Punkte  $A$  befindet, so wird für  $t = 0$  auch  $x = 0$ , folglich die Constante  $C$  der Integration ebenfalls Null, und daher

$$x = kt \pm \frac{1}{2} ct^2 \text{ (vergleiche §. 135).}$$

Beginnt die Bewegung von dem festen Punkte  $A$  ohne alle Geschwindigkeit, d. i. von der Ruhe aus, so ist  $k = 0$  und da für  $t = 0$  auch  $x = 0$  seyn muß, so ist auch die Constante  $C = 0$  und sofort:

$$(3) \dots x = \frac{1}{2} ct^2,$$

welches sofort die Gleichung (2) in §. 134 ist.

Anmerkung. Man nennt hier die Endgeschwindigkeit  $c$  nach der ersten Secunde, oder allgemeiner diese Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit die constante Beschleunigung, welche (wie aus den Gleichungen (1), (1') und (2) zu ersehen) sowohl positiv als negativ seyn kann (beschleunigte und verzögerte Bewegung) und die wir in der Regel durch den Buchstaben  $G$  bezeichnen werden.

Setzt man ferner, da die Anfangsgeschwindigkeit häufig mit  $v_0$  bezeichnet wird  $v_0$  statt  $k$ ,  $x_0$  für die Entfernung des materiellen Punktes im Anfangsaugeblicke (in welchem also seine Geschwindigkeit  $= v_0$  ist) von einem festen Punkte seines geradlinigen Weges und sind  $v$  und  $x$  die analogen Größen am Ende der Zeit  $t$ ; so nehmen die obigen Gleichungen (1) und (2) auch die Form an:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + Gt \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} Gt^2 \end{aligned} \right\} (4)$$

woraus noch folgt:  $\frac{dv}{dt} = G.$

## Mafs der constanten Kräfte.

(§. 136.)

54. Wirkt die constante Kraft  $P$  auf einen Körper von der Masse  $M$ , so kommt auf die Einheit der Masse die wirkende Kraft  $\frac{P}{M}$ . Ist