Ppr^2 und das Ähnliche auch für die r'^2, $r''^2 \ldots$ enthaltenden Glieder Statt findet, eben so $P^2 R^2 = P\,\Sigma(pr^2) - \Sigma(pp'a^2)$ oder endlich:

$$P\,\Sigma(p\,r^2) = P^2 R^2 + \Sigma\,(pp'\,a^2)$$

aus welcher Relation sofort der Satz folgt, dafs wenn der Abstand R des Schwerpunctes eines Systemes von schweren Puncten oder Körpern von irgend einem festen Puncte (A) constant bleibt, dagegen sich die Lage des in seiner Form unveränderlichen Systemes wie immer ändert (wodurch sich sofort die Winkel α, β, γ u. s. w. ändern) die Summe der Producte aus den einzelnen Gewichten in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem festen Puncte ebenfalls eine constante Gröfse ist.

Da ferner, wie dieselbe Relation zeigt, $\Sigma\,(pr^2)$ für $R = 0$ am kleinsten ist, so folgt noch, dafs die Summe der Producte der Gewichte in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunct ein Minimum ist.

Einige weitere wichtige Eigenschaften des Schwerpunctes werden noch in Nr. **61**, Anmerk. 2 unter 8., 9. und 10. angeführt werden.

Die Kettenlinie.

(§. 69.)

42. Um eine Gleichung der in den Puncten A und B (Fig. 19) aufgehängten vollkommen biegsamen Schnur oder Kette (von sehr feinen Gliedern) $AMCB$, wovon gleiche Längen auch ein gleiches Gewicht haben sollen, abzuleiten, nehme man den einen Aufhängpunct A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die durch diesen Punct gezogene Horizontale AA' zur Abscissenachse, setze also für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ und Bog. $AM = s$; setzt man ferner die Länge der Kette $ACB = l$, die Coordinaten des zweiten Aufhängpunctes B d. i. $AE = c$, $EB = d$ und ersetzt (wodurch nichts geändert wird) diesen festen Punct B durch eine nach der Tangente wirkenden Kraft S, welche der in diesem Puncte Statt findenden Spannung gleich ist, so kann man diese Kraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte P und Q zerlegen, wovon die erstere vertical, die letztere daher horizontal wirkt. Die im Puncte M nach der Richtung der Tangente MT Statt findende Spannung T, welche sofort dem Gewichte, also auch der Länge des Bogens MCB proportional ist, kann eben so in zwei Seitenkräfte P', Q' nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt werden, und zwar ist, wenn man W. $TMP = \varphi$ setzt, dafür:

$P' = T\,Cos\,\varphi$ und $Q' = T\,Sin\,\varphi$ oder wegen $Sin\,\varphi = \frac{mn}{Mm} = \frac{dx}{ds}$ und $Cos\,\varphi = \frac{Mn}{Mm} = \frac{dy}{ds}$ (wenn nämlich Mmn das sogenannte Differenzial-dreieck vorstellt) auch $P' = T\frac{dy}{ds}$ und $Q' = T\frac{dx}{ds}$.

Ist nun R die Resultirende aus dem Gewichte des Bogenstückes MCB, so müssen für das Gleichgewicht die beiden Gleichungen bestehen: $Q' = Q$ und $P + P' = R$, oder wenn man für Q' und P' die obigen Werthe setzt und berücksichtigt, dafs wenn p das Gewicht der Längen-einheit des Bogens s bezeichnet, sofort $R = \int_x^c p\,ds = -\int_c^x p\,ds$ ist, auch (1) $T\frac{dx}{ds} = Q$ und $T\frac{dy}{ds} = -P - \int_c^x p\,ds$ oder (mit Rücksicht auf diese Gleich. 1) $Q\frac{dy}{dx} = -P - \int_c^x p\,ds$ (2).

Differenziirt man diese letztere Gleichung, in welcher P, Q und dx constant sind, so erhält man $Q\frac{d^2y}{dx} = -p\,ds = -p\,dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$

oder $\frac{Q\,dy\,\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = -p\,dy$ und daraus durch Integration:

$$Q\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = C - py \quad (m)$$

Um die Constante C zu bestimmen berücksichtige man, dafs der Quotient $\frac{dy}{dx}$, welcher bekanntlich die trigon. Tangente des Winkels darstellt, welchen die in irgend einem Puncte (x, y) der Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet, für $y = 0$ in $tang\,\alpha$ übergeht, wenn man den Winkel der Tangente der Curve im Anfangspuncte A mit α bezeichnet, so, dafs also $C = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = Q\,Sec\,\alpha$ und damit in (m) $Q\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Q\,Sec\,\alpha - py$ wird. Aus dieser Gleichung folgt aber $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(Q\,Sec\,\alpha - py)^2 - Q^2}{Q^2}$, oder wenn man den constanten Quotient $\frac{Q}{p} = b$ . . . (n) und $b\,Sec\,\alpha = \frac{b}{Cos\,\alpha} = a$ . . . (r) setzt, auch $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\sqrt{[(b\,Sec\,\alpha - y)^2 - b^2]}$ . . (g) und

$$dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}} \;.\;.\; (3)$$

durch die Integration dieser Differenzialgleichung erhält man (Compend. §. 777, wo $\alpha = a^2 - b^2$, $\beta = -2a$ und $\gamma = 1$ zu setzen ist):

$$x = b\,l\left\{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}\right\} + C$$

um die Constante C zu bestimmen, darf man nur berücksichtigen, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn mufs (und dafs für diesen Punct A von den doppelten Zeichen blofs das obere gilt), wodurch man erhält $C = -b\,l\,[(a - \sqrt{(a^2 - b^2)})]$ und womit endlich, wenn man diesen Werth substituirt und reducirt,

$$x = b\,l\left\{\frac{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right\} \;(\mathrm{I})$$

wird, welches sofort die gesuchte **Gleichung der Kettenlinie** ist.

Zur Bestimmung des Bogens s hat man $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ oder wenn man für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung (g) substituirt, auch $ds = \frac{(a-y)}{b}\,dx$ . . (h) oder wegen Gleich. (3):

$$ds = \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}$$ und daraus durch Integration:

$$s = C - \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

Da nun für $y = 0$ auch $s = 0$ seyn mufs, so wird die Constante $C = \sqrt{(a^2 - b^2)} = b\sqrt{(Sec\,\alpha^2 - 1)} = b\,tang\,\alpha = a\,Sin\,\alpha$, folglich

$$s = a\,Sin\,\alpha \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \;.\;.\; (\mathrm{II}).$$

Sind $AD = x'$ und $DC = y'$ die Coordinaten des **tiefsten** Punctes C der Curve, so ist für diesen Punct, wie bekannt $\frac{dy}{dx} = 0$, also aus Gleich (3) $a - y' = b$, oder $y' = a - b$; ferner folgt damit aus Gleich. (I): (i) $x' = b\,l\left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right]$ und aus jener (II): $s = AMC = l' = b\,tang\,\alpha = a\,Sin\,\alpha$ und damit auch allgemein:

$$s = l' \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

43. Wie man aus der Gleichung (I) ersieht, so ist die Form der Curve von dem zweiten Aufhängpunct B oder $x = c$, $y = d$ ganz unabhängig. Nimmt man nun diesen ebenfalls in der Horizontalen oder in der Achse AA' in A' an, so ist dafür $c = AA'$ und $d = 0$, folglich aus (I) für $y = 0$:

$$c = b\,l\left[\frac{a + \sqrt{(a^2-b^2)}}{a - \sqrt{(a^2-b^2)}}\right] = b\,l\left[\frac{b^2}{[a-\sqrt{(a^2-b^2)}]^2}\right]$$

$$= 2\,b\,l\left[\frac{b}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}\right] = 2\,x'$$

(wegen Gleich. i), so dafs also die Ordinate des tiefsten Punctes C die Abscissenachse im Halbirungspuncte D von AA' schneidet

Anmerkung 1. Zur Bestimmung der beiden constanten Gröfsen a und b wodurch auch (Gleich. r) der Winkel α gegeben ist, kann man, da c, d, l als bekannt anzusehen sind, in der Gleichung (I) $x = c$, $y = d$ und in jener (II) $s = l$ und $y = d$ setzen, durch welche beide Gleichungen (in deren letztern auch noch $Sec\,\alpha = \frac{a}{b}$ zu berücksichtigen kommt) dann, wenigstens im Principe, a und b gegeben sind.

Anmerkung 2. Die obige Gleichung (I) der Kettenlinie läfst sich durch folgende successive Transformirungen auf eine einfachere Form bringen. Zählt man nämlich zuerst die Abscissen auf der Ordinatenachse AY (Fig. 20), setzt nämlich $Ap = x$, wofür sowohl pM als auch $pM' = y$ ist; so mufs man in der Gleich. (I) x mit y verwechseln, wodurch man erhält

$$y = b\,l\left[\frac{a - x \mp \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}\right].$$

Nimmt man CD zur Abscissenachse, setzt also $DP_1 = x$, $P_1M = P_1M' = y$, so mufs man in dieser letzten Gleichung statt y setzen $AD - y$, mit dem obern und $AD + y$ mit dem untern Zeichen; dadurch erhält man, wegen

$$AD = b\,l\left[\frac{b}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}\right]$$ (Gleich. i) für beide Fälle denselben

Werth: $$\pm\, y = b\,l\left[\frac{a-x+\sqrt{[(a-x)^2-b^2]}}{b}\right]$$

oder es ist $$e^{+\frac{y}{b}} = \frac{1}{b}\left[a-x+\sqrt{[(a-x)^2-b^2]}\right]$$

und $$e^{-\frac{y}{b}} = \frac{1}{b}\left[a-x-\sqrt{[(a-x)^2-b^2]}\right]$$ (wo e die Basis der nat. Logarithmen bezeichnet)

folglich $$e^{+\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} = \frac{2}{b}\,(a-x)$$

Zählt man die Abscissen vom Puncte C aus, setzt also $CP_1 = x$ und $P_1M = P_1M' = y$, so mufs man in dieser letzten Gleichung statt x schreiben $CD - x = y' - x = a - b - x$, wodurch das vorige Binom $a - x$ in $b + x$ und die Gleichung der Curve in jene $b + x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$ übergeht. Zieht man ferner in der Entfernung $CA'' = b$ mit AA' eine Parallele, nimmt diese zur Abscissenachse und den Punct A'' zum Ursprung

der Coordinaten, setzt nämlich $A'' P_1 = x$ und $A'' Q = A' Q' = y$; so erhält man aus dieser letzten Gleichung, da man darin $x - b$ statt x setzen muſs,
$x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$, man erhält endlich durch Verwechslung der beiden Achsen, wodurch $A'' Q = A'' Q' = x$ und $QM = Q' M' = y$ wird, als einfachste Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

44. Aus der obigen Gleichung (1) folgt für die Spannung der Kette in irgend einem Puncte M (Fig. 19) $T = Q \frac{ds}{dx} = Q \frac{a-y}{b}$ (Gleich. h). Da nun im Aufhängpuncte A die Ordinate $y = o$, so folgt, daſs diese Spannung in A am gröſsten und zwar $T = \frac{a}{b} Q$ ist. Für den tiefsten Punct C ist die Ordinate $y = y'$ am gröſsten, folglich die Spannung an diesem Puncte $T = \frac{a - y'}{b} Q = Q$ (wegen $y' = a - b$) am kleinsten.

45. Anstatt der Voraussetzung, daſs gleiche Bogenlängen der Curve ACB (Fig. 19) gleiche Gewichte haben, kann man auch, wie es bei Kettenbrücken der Fall ist, bei welchen das Gewicht der Ketten gegen die Belastung der horizontalen Fahrbahn vernachlässigt werden darf, annehmen, daſs gleiche Längen der Projectionen der Curve auf die horizontal gezogene Abscissenachse AA' gleiches Gewicht haben sollen, so, daſs also nicht mehr die Curve, sondern die Abscissenachse gleichförmig belastet erscheint.

Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich, wenn jetzt p das Gewicht der Längeneinheit der Abscisse x bezeichnet, dagegen alle übrigen Bezeichnungen die nämlichen bleiben, die Gleichung (2) in Nr. **42.** in die folgende $T \frac{dy}{ds} = -P - \int_c^x p\, dx$, während jene (1), nämlich (α) . . $T \frac{dx}{ds} = Q$ ungeändert bleibt.

Die erstere dieser beiden Gleichungen integrirt, gibt $T \frac{dy}{ds} = -P + p\,(c - x)$ und wenn man diese so erhaltene Gleichung durch die vorige (α) dividirt:

$$(\beta)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-P + p(c-x)}{Q}.$$

Da für $x = 0$ der Quotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = tang\,\alpha$, also $tang\,\alpha = \frac{-P+pc}{Q}$ wird, so hat man auch, diesen Werth in (β) substituirt:

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = tang\,\alpha - \frac{px}{Q} \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y = tang\,\alpha\,\mathrm{d}x - \frac{p}{Q}x\,\mathrm{d}x.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$(2)\quad y = x\,tang\,\alpha - \frac{p}{2Q}x^2,$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn muſs. Da ferner für $x = c$, $y = d$ seyn soll, so folgt aus dieser letzten Gleichung $d = c\,tang\,\alpha - \frac{pc^2}{2Q}$

oder $$(3)\quad tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2Q}.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (2) substituirt, so erhält man als Gleichung der gesuchten Curve:

$$(4)\quad y = \frac{d}{c}x + \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$$

und zwar ist dieses (Compend. §. 493, wo nur x mit y verwechselt werden darf) die Gleichung der gemeinen Parabel.

Anmerkung 1. Um in dieser letztern Gleichung die Constante Q zu bestimmen, kann man für irgend einen Punct M die Abscisse $AP = x'$ und Ordinate $PM = y'$ messen und für x und y in dieser Gleichung substituiren. Am einfachsten ist es jedoch in der Curve einen Punct N anzunehmen, wofür die Abscisse $AF = \frac{c}{2}$ ist. Setzt man dann die gemessene Ordinate $FN = FO + ON = \frac{d}{2} + h$, wobei also auch h als bekannt anzusehen ist; so erhält man durch Substitution dieser Werthe für x und y in der Gleichung (4):

$$\frac{d}{2} + h = \frac{d}{c}\cdot\frac{c}{2} + \frac{p}{2Q}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \text{ d. i. } h = \frac{pc^2}{8Q} \text{ oder } Q = \frac{pc^2}{8h}.$$

Mit diesem letztern Werthe läſst sich nun auch leicht die zweite Constante $tang\,\alpha$ finden; denn es folgt aus Gleich. (3):

$$tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2}\cdot\frac{8h}{pc^2} = \frac{d}{c} + \frac{4h}{c} = \frac{d+4h}{c}.$$

Auch lassen sich diese beiden Constanten Q und $tang\,\alpha$ durch die Coordinaten des tiefsten Punctes C ausdrücken.

Anmerkung 2. Liegt der zweite Befestigungspunct B mit dem erstern A in derselben horizontalen Linie AA' in A', so ist $d = 0$ und (aus Gleich 4)

$y = \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$, wobei $Q = \frac{pc^2}{8h}$, $tang\,\alpha = \frac{4h}{c}$ und $h =$

$FN = ON = DC$ (wegen $AF = \frac{c}{2} = AD$) die größte Ordinate ist.

Setzt man in dieser Gleichung der Curve für Q den vorigen Werth, so wird auch $y = \frac{4h}{c^2}(cx - x^2)$, oder wenn man die Abscissen von D aus zählt, also $DP = x$ setzt, wodurch man in dieser letzten Gleichung $\frac{c}{2} - x$ statt x setzen muſs, nach gehöriger Reduction: $y = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - x^2\right)$.

Verwechselt man ferner x mit y, setzt nämlich (Fig. 20) $DP_1 = x$ und $P_1M = y$, so erhält man $x = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)$, und wenn man endlich die Abscissen auf der Geraden CD vom Puncte C aus zählt, also $CP_1 = x$ setzt, wodurch in dieser letzten Gleichung $h - x$ statt x zu setzen ist auch:
$$x = \frac{4h}{c^2}y^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{c^2}{4h}x,$$
als Gleichung der Curve ACA' und zwar als Gleichung einer gemeinen Parabel vom Parameter $\frac{c^2}{4h}$, deren Scheitel C und Achse CD ist.

46. Zur Bestimmung des Bogens s substituire man in der Gleichung $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung (1), so erhält man

$$(\gamma) \quad ds = dx\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)}$$
oder wenn man Kürze halber $tang\,\alpha = m$ und $\frac{p}{Q} = n$ setzt, auch:
$$ds = dx\sqrt{(1 + m^2 - 2mnx + n^2x^2)} = dx\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)},$$
wenn man nämlich noch $1 + m^2 = \alpha$, $-2mn = \beta$ und $n^2 = \gamma$ setzt.

Aus dieser letztern Gleichung erhält man durch Integration (Compend. §. 809, Beisp.), Substitution und Reduction, wenn man noch Kürze halber $1 + \left(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x\right)^2 = A$ setzt:
$$s = C - \frac{Q}{2p}\left[(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)\sqrt{A} + logn.\,(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x + \sqrt{A})\right]$$
wobei die Constante, da für $x = 0$ auch $s = 0$ seyn soll, den Werth hat $C = \frac{Q}{2p}\left[tang\,\alpha\sqrt{A} + logn.\,(tang\,\alpha + \sqrt{A})\right]$.

47. Aus der obigen Gleichung (α) in **45.** folgt für die Spannung der Kette im Puncte M (Fig. 19) nach der Tangente:

$$T = Q\,\frac{ds}{dx} = Q\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Q\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha-\frac{p}{Q}x)^2\right)} \;.\;. (\delta).$$

Da im tiefsten Puncte C der Curve $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so ist die Spannung an diesem Puncte $T = Q$ am kleinsten.

Im Aufhängpunct A ist die Spannung, wegen $x = 0$ sofort

$T = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = \frac{Q}{Cos\,\alpha}$ am gröfsten.

Im zweiten Aufhängpunct B ist diese Tangentialspannung

$$T = Q\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha-\frac{pc}{Q})^2\right)}.$$

48. Was die Spannung der Kette nach lothrechter oder verticaler Richtung betrifft, so ist diese im Puncte M sofort:

$$S = T\,Cos\,m\,M\,n = T\,\frac{dy}{ds} = T\,\frac{dy}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha-\frac{p}{Q}x)^2\right)}},$$

wenn man nämlich für ds den Werth aus (γ) in **46.** setzt, oder endlich, wegen $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha - \frac{px}{Q}$ (Gleich. 1 in **45.**) auch:

$$S = T\,\frac{(tang\,\alpha-\frac{px}{Q})}{\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha-\frac{px}{Q})^2\right)}} = Q\,tang\,\alpha - px,$$

wenn man nämlich für T den obigen Werth aus (δ) in **47.** substituirt.

Im Aufhängepunct A ist wegen $x = 0$, diese Verticalspannung $S = Q\,tang\,\alpha$ am gröfsten.

Im tiefsten Puncte C dagegen ist diese Spannung wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ sofort $S = 0$ am kleinsten. *)

Bedingungen für die Empfindlichkeit der Krämerwage.

(§. 85)

49. Um die Bedingungen zu finden, unter welchen die gemeine Krämerwage empfindlich wird, d. h. die Eigenschaft erhält, dafs der

*) Ausführlicheres hierüber findet man in dem *Mémoire sur les Ponts suspendus* von *Navier*. Paris, 1824.